UNIVERSIDAD NACIONAL SAN CRISTOBAL DE HUAMANGA

FACULTAD DE INGENIERÍA DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL

Escuela Profesional de Ingeniería de Sistemas

PRIMER TRABAJO DE ESTADÍSTICA II

INTEGRANTES:

* CCERHUAYO RAQUI, Yhon Beltrán
* GUTIÉRREZ DÍAZ, Cesar
* AVENDAÑO HUAMÁN, Emir
* QUISPE VILA, Jorge Duchman
* OCHOA VALLADOLID, Kadú
* NAVARRO GAMBOA, Anderson

SEMESTRE 2019-II

CAPÍTULO 1

Resolución de problemas I

Problema 5

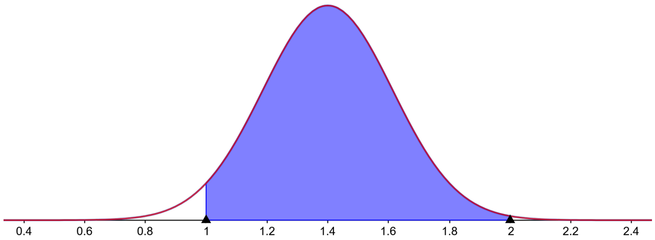
La demanda diaria de un producto puede ser: 0, 1, 2, 3, 4 con probabilidades respectivas: 0.3, 0.3, 0.2, 0.1, 0.1.
a) Describa el modelo de probabilidad de la demanda promedio de 36 días.
b) ¿Que probabilidad hay de que la demanda promedio de 36 días esté entre 1 y 2 inclusive?.

Solución:

X	0	1	2	3	4
$f(X)$	3/10	3/10	2/10	1/10	1/10

a) $\mu_x = \sum x_i f(x_i) = 0(3/10) + 1(1/10) + 2(2/10) + 3(1/10) + 4(1/10) = 1{,}4$
$\sigma^2 = \sum x_i^2 f(x_i) - (\mu_x)^2 = 3{,}6 - 1{,}96 = 1{,}64$
$n = 36$
$\Rrightarrow N(\mu, \sigma/n) \rightarrow N(1{,}4, 1{,}64/36)$

b) $P(1 \leq \bar{X} \leq 2) = P(-0{,}4/0{,}2134 \leq Z \leq 0{,}6/0{,}2134) = P(-1{,}87 \leq Z \leq 2{,}82)$
$= P(Z \leq 2{,}82) - P(Z \leq -1{,}87) = 0{,}99760 - 0{,}03074 = 0{,}9668$



Problema 6

Una empresa comercializadora de café sabe que el consumo mensual (en Kg) de café por casa esta normalmente distribuida con una media desconocida μ y una desviación estándar de 0.30. Si se toma una muestra aleatoria de 36 casas y se registra su consumo de café durante un mes, ¿cual es la probabilidad de que la media de la muestra este entre los valores $\mu - 0{,}1$ y $\mu + 0{,}1$?.

Solución:

$\sigma = 0{,}30, \mu =?$ y $n = 36$

$$\begin{aligned} P(\mu - 0{,}1 \leq \bar{X} \leq \mu + 0{,}1) &= P(-0{,}1/(0{,}30/6) \leq Z \leq 0{,}1/(0{,}30/6)) \\ &= P(-2 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -2) \\ &= 0{,}97725 - 0{,}02275 = 0{,}9545 \end{aligned}$$

Problema 7

La distribución de las notas del examen final de Mat.I resulto ser normal $N(\mu, \sigma^2)$, con cuartiles 1 y 3 iguales a 6.99 y 11.01 respectivamente.
a) Determine la media y la varianza de la distribución de las notas.
b) Halle el intervalo $[a, b]$ centrado en μ tal que $P[a \leq \bar{X} \leq b] = 0{,}9544$ donde $\bar{X}$ es la medida de la muestra X_1, X_2, X_3, X_4 escogida de esta población.

Solución:

a)

$$Q_1 = 6{,}99 = P_{25}$$

$$Q_3 = 11{,}01 = P_{75}$$

$$Q_2 = \frac{Q_1+Q_3}{2} = 9$$

$$\mu_{\overline{x}} = 9$$

$$P(\overline{X} \leq 6{,}99) = 0{,}25$$

$$P(Z \leq \frac{6{,}99-9}{\sigma}) = 0{,}25$$

$$Z = -0{,}68 = \frac{6{,}99-9}{\sigma}$$

$$\sigma = 3$$

b)

$$P(a \leq b) = 0{,}9544$$

$$P(\overline{X} \leq b) - P(\overline{X} \leq a) = 0{,}9544$$

$$P(Z \leq \frac{b-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) - P(Z \leq \frac{a-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = 0{,}9544$$

$$P(Z \leq \frac{b-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) - (1 - P(Z \leq \frac{b-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = 0{,}9544$$

$$2P(Z \leq \frac{b-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) - 1 = 0{,}9544$$

$$P(Z \leq \frac{b-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = \frac{1{,}9544}{2}$$

$$P(Z \leq \frac{b-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = 0{,}9772$$

$$Z = 2 = \frac{b-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{b-9}{\frac{3}{2}}$$

donde, $b = 12$

$$\frac{a-9}{\frac{3}{2}} = -2$$

$$a = 6$$

Problema 8

La vida útil (en miles de horas) de una batería es una variable aleatoria X con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 2-2x & 0 \leq x \leq 1 \\ \\ 0 & enelresto \end{cases}$$

Si $\bar{X}_{36}$ es la media de la muestra aleatoria $X_1, X_2 ... X_{36}$ escogida de X, ¿con que probabilidad $\bar{X}_{36}$ es mayor que 420 horas?.

Solución:

X : vida util(1000hrs)

f(x) = 2-2x; 0 ≤ x ≤ 1

$$\int_0^1 f(x) = 1$$

$$\int_0^1 (2-2x)dx = 1$$

$$2x - x^2|_0^1 = 2 - 1 = 1$$

$E(x) = \mu$
var(x)=σ^2
$P(X_{36 \succ 420hrs})$ $P(X_{36 \succ 0{,}42})$
$\mu = E(x) = \int_0^1 x(2-2x)dx = 1$
$x^2 - \frac{2x^3}{3}|_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} = 0{,}33$
donde, μ= 0.33
$E(x^2) = \int_0^1 x^2(2-2x)dx = 1$
2x$^3{}_3$ - $\frac{x^4}{2}|_0^1$= $\frac{2}{3}$-$\frac{1}{2}$=$\frac{1}{3}$ $= 0{,}56$

σ^2=0.56
$$P\left(\frac{\overline{X}_{36}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \succ \frac{0{,}42-0{,}33}{\frac{\sqrt{\frac{1}{18}}}{\sqrt{36}}}\right)$$
$P(Z \succ a) = 1 - P(Z \leq a)$
$= 1 - P(Z \leq 2{,}21)$
= 1 - 0.98645
$= 0{,}0136$

Problema 9

Sea $\bar{X}_{40}$ la media de la muestra aleatoria $X_1, X_2 ... X_{40}$ de tamaño $n = 40$ escogida de una población X cuya distribución es geométrica con función de probabilidad.

$$f(x) = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{x-1}, x = 1, 2...$$

Halle la probabilidad de que la media muestral difiera de la media poblacional en a lo más el 10 % del valor de la varianza de la poblacion.

Solución:

Viendo que:
$f(x) = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{x-1}$

$E(x) = \sum_{x=1}^{40} xf(x)$
$E(x) = \mu = 4{,}99$

$\sigma^2 = \sum_{x=1}^{40} x^2 f(x) - (E(x))^2$
$\sigma^2 = 44{,}73 - 4{,}99^2$
$\sigma^2 = 19{,}83$
$\sigma = 4{,}45$
Teniendo ya la varianza muestral calcularemos la probabilidad:
$$P\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{0{,}10\sigma^2}{\frac{\sigma}{\sqrt{40}}}\right)$$

$P(Z \leq (0{,}10)(\sqrt{40})\sigma)$

$P(Z \leq (0{,}10)(\sqrt{40})(4{,}45))$

$P(Z \leq 2{,}81)$

$= 0{,}99$

Rpta: La probabilidad de dicha pregunta es: 0.99

Problema 10

El tiempo de vida de una bateria es una variable aleatoria X con distribución exponencial de parámetro: $1/\theta$. Se escoge una muestra de n baterías
a) Halle el error estandar de la media muestral $\overline{X}$
b) Si la muestra aleatoria es de tamaño $n = 64$, ¿con que probabilidad diferirá $\overline{X}$ del verdadero valor θ en menos de un error estándar?
c) ¿Qué tamaño de muestra mínimo sería necesario para que la media muestral $\overline{X}$ tenga un error estándar menor a un 5 % del valor real de θ?
d) Asumiendo muestra grande, ¿qué tamaño de muestra sería necesario para que $\overline{X}$ difiera de θ en menos de 10 % de θ con 95 % de probabilidad?

Solución:

a)

$$f(x) = \frac{1}{\theta}e^{\frac{-x}{\theta}} \ ; \ x \geqslant 0$$

$$\sqrt{Var(\overline{X})} = \frac{\theta}{\sqrt{n}} \quad \text{error estandar}$$

$$Var(\overline{X}) = \frac{\theta^2}{n}$$

$$E(x) = u = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e}e^{\frac{-x}{\theta}}\,dx$$

$$\gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1}e^{-y}\,dy$$

$$(\alpha - 1)! \ \ ; \alpha \in N$$

$$\gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!\gamma(\alpha - 1) \ ; \text{ para } \alpha \neq N$$

$$E(x) = u = \theta \int_0^{+\infty} (\frac{x}{\theta})^{2-1}e^{\frac{-x}{\theta}}\,d(\frac{x}{\theta})$$

$$\gamma(2) = (2-1)! = 1$$

$$E(x) = \theta$$

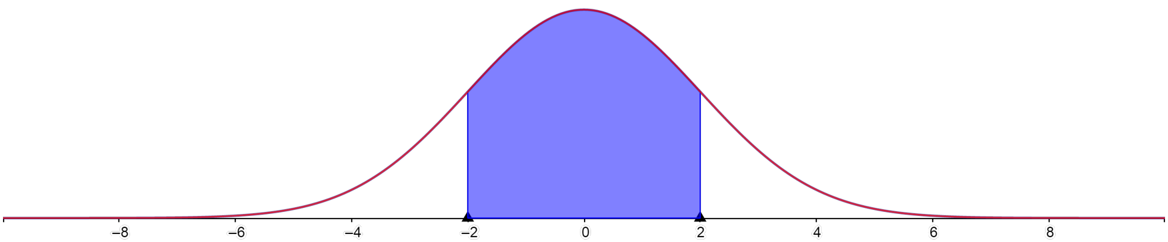
$$E(x^2)\theta^2 \int_0^{+\infty} (\frac{x}{\theta})^{3-1} e^{\frac{-x}{\theta}} \, d(\frac{x}{\theta})$$

$$E(x^2) = 2\theta^2$$

$$\gamma(3) = 2! = 2$$

$$\sigma^2 = Var(x) = 2\theta^2 - \theta^2 = \theta^2$$

b) Teorema Central de Limite



$$P(\mid \overline{X} - \sigma \mid \leq \frac{\theta}{\sqrt{n}} \cong 0{,}68$$

$$P(-\theta \leq x - 4 \leq \theta)$$

$$P(\mid x - u \mid \leq 2\theta) \cong 0{,}9544$$

$$P(\mid x - u \mid \leq 3\theta) \cong 0{,}99$$

$$u\overline{X} = u = \theta$$

$$Var(\overline{X}) = \theta^2 x = \theta^2$$

$$P(\mid \overline{X} - \theta \mid \leq \frac{\theta}{\sqrt{n}})$$

$$P(\overline{X} - \theta \leq \frac{\theta}{8}) = P\left(\frac{\overline{X} - \theta}{\frac{\theta}{8}} \leq \frac{\frac{\theta}{8}}{\frac{\theta}{8}}\right)$$

$$P(\overline{X} - \theta \leq \frac{\theta}{8}) = P(z \leq 1$$

$$P(\overline{X} - \theta \leq \frac{\theta}{8}) = 0,68$$

c)

$$\frac{\theta}{\sqrt{n}} < 0{,}050\theta \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n} < 0,05}$$

$$1\frac{1}{0{,}05} < \sqrt{n} \Rightarrow 20^2 < \sqrt{n}^2$$

$$20 < \sqrt{n} \Rightarrow 400 < n$$

d)

$$P(\mid \overline{X} - u \mid < 0{,}1\theta) = 0{,}95$$

$$P\left(\frac{\overline{X} - u}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{0{,}1\theta}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 0{,}95$$

$$P(\mid Z \mid < 0{,}1\sqrt{n}) = 0{,}95$$

$$P(-0{,}1\sqrt{n} < z < 0{,}1\sqrt{n}) = 0{,}95$$

$$P(z < 0{,}1\sqrt{n}) - (1 - P(z < 0{,}1\sqrt{n}) = 0{,}95$$

$$2P(z < 0{,}1\sqrt{n}) = 1{,}95$$

$$P(z < 0{,}1\sqrt{n}) = 0{,}975$$

$$0{,}1\sqrt{n} = 1{,}96$$

$$\sqrt{n} = 19{,}6$$

$$n = 385$$

Problema 11

La utilidad por la venta de cierto articulo, en miles de soles, es una variable aleatoria con distribución normal. En el 5 % de las ventas de utilidad ha sido menos de 3.42, mientras que el 1 % de las ventas ha sido mayor que 19,32. Si se realizan 16 operaciones de ventas,¿cual es la probabilidad de que el promedio de la utilidad por cada operación?

Solución:

Teniendo en cuenta:
$P(x \leq 3{,}42) = 0{,}05$
$P(x \geq 19{,}32) = 0{,}01 \equiv P(x \leq 19{,}32) = 0{,}99$
Con $n = 16$ y μ,σ desconocidas
$P(x \leq 3{,}42) = 0{,}05 \Rightarrow P(Z \leq \frac{3{,}42-\mu}{\sigma}) = 0{,}05 \Rightarrow \frac{3{,}42-\mu}{\sigma} = -1{,}64 \Rightarrow \sigma = \frac{3{,}42-\mu}{-1{,}64}$

$P(x \geq 19{,}32) = 0{,}01 \Rightarrow P(Z \leq \frac{19{,}32-\mu}{\sigma}) = 0{,}99 \Rightarrow \frac{19{,}32-\mu}{\sigma} = 2{,}33 \Rightarrow \sigma = \frac{19{,}32-\mu}{2{,}33}$

Igualando ambos sigmas obtenemos: $\frac{3{,}42-\mu}{-1{,}64} = \frac{3{,}42-\mu}{2{,}33} \Rightarrow \mu = 10{,}01$ y reemplazandolo se obtiene que: $\sigma = 4$; luego:
$P(10 \leq x \leq 12) \Rightarrow P(x \leq 12) - P(x \leq 10) \Rightarrow P(Z \leq \frac{12-10{,}01}{\frac{3{,}99}{4}}) - P(Z \leq \frac{10-10{,}01}{\frac{3{,}99}{4}})$

$\Rightarrow P(Z \leq 1{,}99) - P(Z \leq 0{,}01) \Rightarrow P(Z \leq 1{,}99) - 1 + P(Z \leq 0{,}01) \Rightarrow 0{,}97 - 1 + 0{,}5 = 0{,}47$

Problema 12

La vida útil de cierta marca de llantas radiales es una variable aleatoria X cuya distribución es normal con $\mu = 38,000Km.$ y $\sigma = 3,000Km.$
a) Si la utilidad Y (en \$) que produce cada llanta está dada por la relación:
$Y = 0{,}2X + 100$, ¿cual es la probabilidad de que la utilidad sea mayor que 8,900\$?
b) Determine el numero de tales llantas que debe adquirir una empresa de transporte para conseguir una utilidad media de al menos 7541\$ con probabilidad 0.996.

Solución:

$Y = 0{,}2X + 100 \Rrightarrow E[Y] = 0{,}2E[X] + 100 = 0{,}2(38000) + 100 = 7700$
$Y = 0{,}2X + 100 \Rrightarrow Var[Y] = 0{,}2Var[X] + 100 = 0{,}0{,}4(9000)^2 + 0 = 360000$
$Y \rightarrow X(7700, 360000)$

a)

$P(Y > 8900) \Rrightarrow 1 - P(Y \leq 8900)$
$\Rrightarrow 1 - P(Z \leq \frac{8900-7700}{\sqrt{360000}/\sqrt{1}}) \Rrightarrow 1 - P(Z \leq \frac{1200}{600}) \Rrightarrow 1 - P(Z \leq 2) \Rrightarrow 1 - 0{,}97725 = 0{,}02275$

b)

$P(Y > 7541) = 0{,}996 \Rrightarrow 1 - P(Y \leq 7541) = 0{,}996$
$\Rrightarrow P(Z \leq \frac{7541-7700}{\sqrt{360000}/\sqrt{n}}) = 1 - 0{,}996 \Rrightarrow P(Z \leq \frac{-154(\sqrt{n})}{600}) = 0{,}004$
$\Rrightarrow \frac{-154(\sqrt{n})}{600} = -2{,}65 \Rrightarrow \sqrt{n} = \frac{(600)(2{,}65)}{159} \Rrightarrow \ sqrtn = 10 \Rrightarrow n = 100$

Problema 13

Un proceso automático llena bolsas de café cuyo peso neto tiene una media de 250 gramos y una desviación estándar de 3 gramos. Para controlar el proceso, cada hora se pesan 36 bolsas escogidas al azar; si el peso neto medio esta entre 249 y 251 gramos se continua con el proceso aceptando que el peso neto medio es 250 gramos y en caso contrario, se detiene el proceso para reajustar la maquina.
a) ¿Cuál es la probabilidad de detener el proceso cuando el peso neto medio realmente es 250 gramos?.
b) ¿Cuál es la probabilidad de aceptar que el peso neto promedio es 250 cuando realmente es de 248 gramos?.

Solución:

a) desarrollamos la probabilidad para peso neto de 250 gramos.

$$N(50,3)P(249 \leq \bar{X} \leq 251)n = 36$$

$$P(249 \leq \bar{X} \leq 251)$$

$$P(\bar{X} \leq 249) + 1 - P(\bar{X} \leq 251)$$

$$P\left(Z \leq \frac{249-250}{\frac{3}{\sqrt{36}}}\right) + 1 - P\left(Z \leq \frac{251-250}{\frac{3}{\sqrt{36}}}\right)$$

$$P(Z \leq -2) + 1 - P(Z \leq 2)$$

$$0{,}02273 + 1 - 0{,}97725$$

$$= 0,0456$$

b)

$$P(249 \leq \bar{X} \leq 251)$$

$$P\left(Z \leq \frac{249-250}{\frac{3}{\sqrt{36}}}\right)$$

$$P(Z \leq -2)$$

$$= 0{,}02275$$