Ejercicio 10

El tiempo de vida de una bateria es una variable aleatoria X con distribución exponencial de parámetro: $1/\theta$. Se escoge una muestra de n baterías
a) Halle el error estandar de la media muestral $\overline{X}$
b) Si la muestra aleatoria es de tamaño $n = 64$, ¿con que probabilidad diferirá $\overline{X}$ del verdadero valor θ en menos de un error estándar?
c) ¿Qué tamaño de muestra mínimo sería necesario para que la media muestral $\overline{X}$ tenga un error estándar menor a un 5 % del valor real de θ?
d) Asumiendo muestra grande, ¿qué tamaño de muestra sería necesario para que $\overline{X}$ difiera de θ en menos de 10 % de θ con 95 % de probabilidad?

Solución:

a)

$$f(x) = \frac{1}{\theta}e^{\frac{-x}{\theta}} \ ; \ x \geqslant 0$$

$$\sqrt{Var(\overline{X})} = \frac{\theta}{\sqrt{n}} \ \text{ error estandar}$$

$$Var(\overline{X}) = \frac{\theta^2}{n}$$

$$E(x) = u = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e}e^{\frac{-x}{\theta}}\,dx$$

$$\gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1}e^{-y}\,dy$$

$$(\alpha-1)! \ \ ; \alpha \in N$$

$$\gamma(\alpha) = (\alpha-1)!\gamma(\alpha-1) \ ; \text{ para } \alpha \neq N$$

$$E(x) = u = \theta\int_0^{+\infty} (\frac{x}{\theta})^{2-1}e^{\frac{-x}{\theta}}\,d(\frac{x}{\theta})$$

$$\gamma(2) = (2-1)! = 1$$

$$E(x) = \theta$$

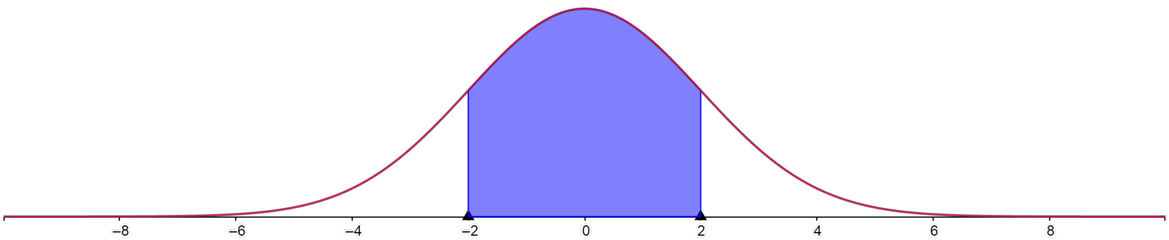
$$E(x^2)\theta^2\int_0^{+\infty} (\frac{x}{\theta})^{3-1}e^{\frac{-x}{\theta}}\,d(\frac{x}{\theta})$$

$$E(x^2) = 2\theta^2$$

$$\gamma(3) = 2! = 2$$

$$\sigma^2 = Var(x) = 2\theta^2 - \theta^2 = \theta^2$$

b) Teorema Central de Limite



$$P(|\,\overline{X} - \sigma\,| \leq \frac{\theta}{\sqrt{n}} \cong 0{,}68$$

$$P(-\theta \leq x - 4 \leq \theta)$$

$$P(|\,x - u\,| \leq 2\theta) \cong 0{,}9544$$

$$P(|\,x - u\,| \leq 3\theta) \cong 0{,}99$$

$$u\overline{X} = u = \theta$$

$$Var(\overline{X}) = \theta^2 x = \theta^2$$

$$P(|\,\overline{X} - \theta\,| \leq \frac{\theta}{\sqrt{n}})$$

$$P(\overline{X} - \theta \leq \frac{\theta}{8}) = P\left(\frac{\overline{X} - \theta}{\frac{\theta}{8}} \leq \frac{\frac{\theta}{8}}{\frac{\theta}{8}}\right)$$

$$P(\overline{X} - \theta \leq \frac{\theta}{8}) = P(z \leq 1$$

$$\boxed{P(\overline{X} - \theta \leq \frac{\theta}{8}) = 0,68}$$

c)

$$\frac{\theta}{\sqrt{n}} < 0{,}050\theta \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n} < 0,05}$$

$$1\frac{1}{0{,}05} < \sqrt{n} \Rightarrow 20^2 < \sqrt{n}^2$$

$$\boxed{20 < \sqrt{n} \Rightarrow 400 < n}$$

d)

$$P(|\,\overline{X} - u\,| < 0{,}1\theta) = 0{,}95$$

$$P\left(\frac{\overline{X} - u}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{0{,}1\theta}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 0{,}95$$

$$P(\mid Z \mid < 0{,}1\sqrt{n}) = 0{,}95$$

$$P(-0{,}1\sqrt{n} < z < 0{,}1\sqrt{n}) = 0{,}95$$

$$P(z < 0{,}1\sqrt{n}) - (1 - P(z < 0{,}1\sqrt{n}) = 0{,}95$$

$$2P(z < 0{,}1\sqrt{n}) = 1{,}95$$

$$P(z < 0{,}1\sqrt{n}) = 0{,}975$$

$$0{,}1\sqrt{n} = 1{,}96$$

$$\sqrt{n} = 19{,}6$$

$$n = 385$$