

基于新息的自适应增量Kalman滤波器

孙小君^{*①②} 周 晗^① 闫广明^{①②}

^①(黑龙江大学电子工程学院 哈尔滨 150080)

^②(黑龙江省信息融合估计与检测重点实验室 哈尔滨 150080)

摘 要: 在一定环境条件下, 当系统的量测方程没有进行验证或校准时, 使用该量测方程往往会产生未知的系统误差, 从而导致较大的滤波误差。增量方程的引入可以有效解决欠观测系统的状态估计问题。该文考虑带未知噪声统计的线性离散增量系统, 首先提出一种基于新息的噪声统计估计算法。可以得到系统噪声统计的无偏估计。进而, 提出一种新的增量系统自适应Kalman滤波算法。相比已有的自适应增量滤波算法, 该文所提算法得到的状态估计精度更高。两个仿真实例证明了其有效性和可行性。

关键词: 自适应Kalman滤波; 增量滤波器; 欠观测系统; 增量系统; 滤波精度

中图分类号: TN713; TP18

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2020)09-2223-08

DOI: 10.11999/JEIT190493

Adaptive Incremental Kalman Filter Based on Innovation

SUN Xiaojun^{①②} ZHOU Han^① YAN Guangming^{①②}

^①(Electrical Engineering Institute, Heilongjiang University, Harbin 150080, China)

^②(Key Laboratory of Information Fusion Estimation and Detection,
Heilongjiang Province, Harbin 150080, China)

Abstract: Under certain environmental conditions, the unknown system errors often occur and yield to larger filtering errors when the unverified or uncalibrated measurement equation is used. Incremental equation can be introduced, which can effectively solve the problem of state estimation for the systems under poor observation condition. In this paper, the linear discrete incremental system with unknown noise statistics is considered. Firstly, a noise statistics estimation algorithm is proposed based on innovation. The unbiased estimation of system noise statistics can be obtained. Furthermore, a new incremental system adaptive Kalman filtering algorithm is proposed. Compared with the existing adaptive incremental filtering algorithm, the state estimation accuracy of the proposed algorithm is higher. Two simulation examples prove its effectiveness and feasibility.

Key words: Adaptive Kalman filtering; Incremental filters; Systems under poor observation condition; Incremental systems; Filtering accuracy

1 引言

Kalman滤波是上个世纪60年代提出的一种重

要的状态估计方法^[1-3]。这种最优递推滤波算法很容易在计算机上实时实现, 适合处理多变量系统、时变系统以及非平稳随机过程, 克服了经典Wiener滤波理论的缺点和局限性^[4,5]。目前被广泛地应用于通讯、信号处理、石油地震勘探、跟踪、制导、故障诊断、图像处理等领域^[6,7]。

然而, Kalman滤波算法要求精确已知系统模型参数和噪声统计^[8]。在实际应用过程中, 由于周围环境的影响、测量设备自身造成的误差、模型和参数选取不当等原因, 会产生量测系统误差, 而使用传统Kalman滤波算法难以消除该类系统的误差^[9]。目前针对这个问题, 已有一系列增量滤波算法被提出。文献^[10,11]针对欠观测的非线性系统, 分别提

收稿日期: 2019-07-02; 改回日期: 2020-03-20; 网络出版: 2020-08-06

*通信作者: 孙小君 sxj@hlju.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(61104209), 黑龙江大学杰出青年科学基金(JCL201103), 黑龙江大学电子工程重点实验室基金(DZZD2010-5), 黑龙江大学青年科学基金(QL201212)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61104209), The Outstanding Youth Science Foundation of Heilongjiang University (JCL201103), The Key Laboratory of Electronics Engineering, College of Heilongjiang Province (DZZD2010-5), The Youth Science Foundation of Heilongjiang University (QL201212)

出了扩展增量Kalman滤波算法和增量粒子滤波算法。文献[12–14]针对欠观测的线性系统,分别提出了增量Kalman滤波算法和平滑算法。它们都通过引入增量观测方程成功地消除了系统的未知量测误差,提高了欠观测系统状态估计的精度。

自适应Kalman滤波能够有效解决系统噪声统计特性未知或可能发生改变时滤波精度降低甚至发散的问题。目前,自适应滤波技术主要有模型自适应和基于新息的自适应两种方法[15,16]。但关于欠观测系统自适应估计的研究很少[17–19]。文献[17]提出了一种线性离散增量系统的自适应Kalman滤波算法,文献[18]进行了该算法的应用研究。文献[19]则给出了非线性增量系统的自适应Kalman滤波算法。本文将首先提出一种新的基于新息的增量系统噪声统计估计算法。进而,提出一种新的自适应增量滤波算法。由于文献[17]是傅惠民团队在增量滤波理论之后,提出的又一具有代表性的研究成果,而新近文献[18]也从实际应用角度,切实证明了该理论的研究价值和应用意义,故此本文将着重进行与文献[17]的对比分析。我们将从理论推导和仿真实验两方面论证本文算法在估计精度方面的优越性。

2 问题描述

考虑跟踪系统的目标状态方程为

$$\mathbf{x}_k = \Phi_{k|k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \quad (1)$$

其中, k 为离散时间, 系统在 k 时刻的状态为 $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, $\Phi_{k|k-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为状态转移矩阵, 下标 $k|k-1$ 表示第 $k-1$ 步到第 k 步。

假设1 $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^r$ 为系统系统噪声向量, 且满足式(2)

$$\mathbb{E}[\mathbf{w}_k] = \mathbf{q}_k, \text{cov}[\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_j] = \mathbf{Q}_k \delta_{kj} \quad (2)$$

增量观测方程为

$$\Delta \mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k - \mathbf{H}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{V}_k \quad (3)$$

其中 $\Delta \mathbf{z}_k$ 表示系统在 k 时刻的观测值增量, $\Delta \mathbf{z}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{z}_{k-1}$, $\mathbf{H}_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 为系统在 k 时刻的观测矩阵。

假设2 \mathbf{V}_k 为量测噪声向量, 且满足式(4)

$$\mathbb{E}[\mathbf{V}_k] = \mathbf{r}_k, \text{cov}[\mathbf{V}_k, \mathbf{V}_j] = \mathbf{R}_k \delta_{kj}, \text{cov}[\mathbf{w}_j, \mathbf{V}_k] = 0 \quad (4)$$

由于工程实际中相邻两个量测 \mathbf{z}_k 和 \mathbf{z}_{k-1} 的测量系统误差大小比较接近, 所以 $\Delta \mathbf{z}_k$ 的系统误差为相对小量, 可以忽略不计[12]。此外, 根据独立增量随机过程原理可知, $\Delta \mathbf{z}_k$ 与 $\Delta \mathbf{z}_{k-1}$ 之间比 \mathbf{z}_k 与 \mathbf{z}_{k-1} 更能满足假设1的独立性要求[20]。

问题是考虑系统噪声 \mathbf{w}_k 和 \mathbf{V}_k 的均值和方差均未知的情况下, 本文提出基于噪声统计估计的自适应增量Kalman滤波器。

3 基于新息的自适应增量Kalman滤波器

引理1[12] 在假设1和假设2的条件下, 基于增量模型式(1)和式(3), 可得如下增量Kalman滤波器

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \Phi_{k|k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{q}_{k-1} \quad (5)$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \Phi_{k|k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \Phi_{k|k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (6)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k^f (\Delta \mathbf{z}_k - \Delta \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}) \quad (7)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k^f \Omega_k \mathbf{K}_k^{fT} \quad (8)$$

$$\mathbf{K}_k^f = (\mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T - \Phi_{k|k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{H}_{k-1}^T) \Omega_k^{-1} \quad (9)$$

$$\Delta \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} = \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \mathbf{H}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{r}_k \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Omega_k = & \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k - \mathbf{H}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \Phi_{k|k-1}^T \mathbf{H}_k^T \\ & \cdot \mathbf{H}_k^T - \mathbf{H}_k \Phi_{k|k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{H}_{k-1}^T \\ & + \mathbf{H}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{H}_{k-1}^T \end{aligned} \quad (11)$$

证明 参见文献[12]。

3.1 增量系统噪声统计的次优无偏最大后验(MAP)估值器

当噪声统计是常值时, 即 $\mathbf{q}_k = \mathbf{q}$, $\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}$, $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}$, $\mathbf{R}_k = \mathbf{R}$ 时, 基于 $\{\Delta \mathbf{z}_1, \Delta \mathbf{z}_2, \dots, \Delta \mathbf{z}_{k+1}\}$, 参考Sage等人[1]提出的最大后验(Maximum A Posterior, MAP)估值器有

$$\hat{\mathbf{q}}_{k+1} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k (\hat{\mathbf{x}}_{i+1|k+1} - \Phi_{i+1|i} \hat{\mathbf{x}}_{i|k+1}) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Q}}_{k+1} = & \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k (\hat{\mathbf{x}}_{i+1|k+1} - \Phi_{i+1|i} \hat{\mathbf{x}}_{i|k+1} - \mathbf{q}) \\ & \cdot (\hat{\mathbf{x}}_{i+1|k+1} - \Phi_{i+1|i} \hat{\mathbf{x}}_{i|k+1} - \mathbf{q})^T \end{aligned} \quad (13)$$

$$\hat{\mathbf{r}}_{k+1} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k (\Delta \mathbf{z}_{i+1} - \mathbf{H}_{i+1} \hat{\mathbf{x}}_{i+1|k+1}) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}}_{k+1} = & \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k (\Delta \mathbf{z}_{i+1} - \mathbf{H}_{i+1} \hat{\mathbf{x}}_{i+1|k+1} - \mathbf{r}) \\ & \cdot (\Delta \mathbf{z}_{i+1} - \mathbf{H}_{i+1} \hat{\mathbf{x}}_{i+1|k+1} - \mathbf{r})^T \end{aligned} \quad (15)$$

文献[17]的处理方法类似于Sage[1]的做法, 分别在式(12)和式(13)中以滤波估值 $\hat{\mathbf{x}}_{i+1|i+1}$ 近似代替 $\hat{\mathbf{x}}_{i+1|k+1}$, 以 $\hat{\mathbf{x}}_{i|i}$ 近似代替 $\hat{\mathbf{x}}_{i|k+1}$, 并在式(14)和式(15)中以预报估值 $\hat{\mathbf{x}}_{i+1|i}$ 近似代替 $\hat{\mathbf{x}}_{i+1|k+1}$, 导出了噪声统计的次优无偏MAP估值器。本文为了提高精度, 参考文献[3]的做法, 在式(12)和式(13)中以 $\hat{\mathbf{x}}_{i+1|i+1}$ 近似代替 $\hat{\mathbf{x}}_{i+1|k+1}$, 以平滑估值 $\hat{\mathbf{x}}_{i|i+1}$ 近似代替 $\hat{\mathbf{x}}_{i|k+1}$, 在式(14)和式(15)中以 $\hat{\mathbf{x}}_{i+1|i+1}$ 近似代替 $\hat{\mathbf{x}}_{i+1|k+1}$, 从而有比文献[17]精度更高的次优无偏最大后验MAP估值器。

$$\hat{q}_{k+1} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k \hat{w}_{i|i+1} \quad (16)$$

$$\hat{Q}_{k+1} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k [\hat{w}_{i|i+1} - q][\hat{w}_{i|i+1} - q]^T \quad (17)$$

$$\hat{r}_{k+1} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k \hat{V}_{i+1|i+1} \quad (18)$$

$$\hat{R}_{k+1} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k [\hat{V}_{i+1|i+1} - r][\hat{V}_{i+1|i+1} - r]^T \quad (19)$$

注1: 由于平滑器的估计精度高于滤波器的估计精度, 滤波器的估计精度高于预报器的估计精度, 从而本文所得到的噪声统计的估计精度高于文献[17], 后面的仿真实验也验证了这一点。

应用递推射影公式可以得到

$$\hat{x}_{i|i+1} = \hat{x}_{i|i} + K_{i|i+1} \varepsilon_{i+1} \quad (20)$$

其中

$$K_{i|i+1} = E(x_i \varepsilon_{i+1}^T) [E(\varepsilon_{i+1} \varepsilon_{i+1}^T)]^{-1} \quad (21)$$

对式(3)两边取射影运算有

$$\varepsilon_i = \Delta z_i - \Delta \hat{z}_{i|i-1} = \Delta z_i - (H_i \Phi_{i-1} - H_{i-1}) \hat{x}_{i-1|i-1} \quad (22)$$

由此可得

$$\varepsilon_{i+1} = (H_{i+1} \Phi_i - H_i) \hat{x}_{i|i} + H_{i+1} w_i + V_{i+1} \quad (23)$$

由文献[3]得到

$$\hat{x}_{i|i} = \Phi_{i-1} \hat{x}_{i-1|i-1} + K_i^f \varepsilon_i \quad (24)$$

进而应用式(1)和式(22)进一步可得

$$\tilde{x}_{i|i} = \Psi_i^f \tilde{x}_{i-1|i-1} + w_{i-1} - K_i^f (H_i w_{i-1} + V_i) \quad (25)$$

其中 $\Psi_i^f = \Phi_{i-1} - K_i^f (H_i \Phi_{i-1} - H_{i-1})$ 。由此迭代有关系

$$\tilde{x}_{i|i} = \Psi_i^f \tilde{x}_{i-1|i-1} + \Psi_i^f (I_r - K_i^f H_i) w_{i-1} - \Psi_i^f K_i^f V_i \quad (26)$$

由递推射影公式有

$$\hat{w}_{i|i+1} = \hat{w}_{i|i} + M_{i|i+1}^w \varepsilon_{i+1} \quad (27)$$

其中

$$M_{i|i+1}^w = E[w_i \varepsilon_{i+1}^T] Q_{i+1}^{\varepsilon-1} \quad (28)$$

应用式(26)和式(23)有

$$\varepsilon_{i+1} = (H_{i+1} \Phi_i - H_i) \{ \Psi_i^f \tilde{x}_{i-1|i-1} + \Psi_i^f (I_r - K_i^f H_i) w_{i-1} - \Psi_i^f K_i^f V_i \} + H_{i+1} w_i + V_{i+1} \quad (29)$$

从而有

$$E[w_i \varepsilon_{i+1}^T] = Q H_{i+1}^T \quad (30)$$

将式(30)代入式(28)得

$$M_{i|i+1}^w = Q H_{i+1}^T Q_{i+1}^{\varepsilon-1} \quad (31)$$

又由式(23)有

$$Q_{i+1}^{\varepsilon} = E(\varepsilon_{i+1} \varepsilon_{i+1}^T) = (H_{i+1} \Phi_i - H_i) \cdot P_{i|i} (H_{i+1} \Phi_i - H_i)^T + H_{i+1} Q H_{i+1}^T + R \quad (32)$$

由式(27)、式(31)和式(32)得

$$\hat{w}_{i|i+1} = \hat{w}_{i|i} + Q H_{i+1}^T Q_{i+1}^{\varepsilon-1} \varepsilon_{i+1} \quad (33)$$

从而有

$$\hat{w}_{i|i+1} = q + Q D_{i+1} \varepsilon_{i+1} \quad (34)$$

其中 D_{k+1} 为

$$D_{i+1} = H_{i+1}^T [(H_{i+1} \Phi_i - H_i) P_{i|i} (H_{i+1} \Phi_i - H_i)^T + H_{i+1} Q H_{i+1}^T + R]^{-1} \quad (35)$$

将式(34)代入式(16)和式(17)有次优无偏估值器

$$\hat{q}_{k+1} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k [q + Q D_{i+1} \varepsilon_{i+1}] \quad (36)$$

$$\hat{Q}_{k+1} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k Q D_{i+1} \varepsilon_{i+1} \varepsilon_{i+1}^T D_{i+1}^T Q \quad (37)$$

考察估值器的无偏性, 注意 $E(\varepsilon_i) = 0$, 由式(36)有 $E(\hat{q}_{k+1}) = q$, 因而估值器 \hat{q}_{k+1} 是无偏的。又由式(32)和式(37)有估值器 \hat{Q}_{k+1} 是有偏的, 即

$$E \hat{Q}_{k+1} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k Q H_{i+1}^T [(H_{i+1} \Phi_i - H_i) \cdot P_{i|i} (H_{i+1} \Phi_i - H_i)^T + H_{i+1} Q H_{i+1}^T + R]^{-1} H_{i+1} Q \quad (38)$$

这引出如下次优无偏MAP估值器

$$\hat{Q}_{k+1} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k Q D_{i+1} \{ \varepsilon_{i+1} \varepsilon_{i+1}^T - (H_{i+1} \Phi_i - H_i) P_{i|i} (H_{i+1} \Phi_i - H_i)^T - H_{i+1} Q H_{i+1}^T - R \} D_{i+1}^T Q \quad (39)$$

用 \hat{q}_k 和 \hat{Q}_k 近似代替其中的 q 和 Q , 将式(36)和式(39)改写成递推形式, 即得定理1。

定理1 增量系统式(1)和式(3)的输入噪声均值 q 和方差 Q 的次优MAP估值器为

$$\hat{q}_{k+1} = \hat{q}_k + \frac{1}{k+1} \hat{Q}_k D_{k+1} \varepsilon_{k+1} \quad (40)$$

$$\hat{Q}_{k+1} = \hat{Q}_k + \frac{1}{k+1} \hat{Q}_k D_{k+1} [\varepsilon_{k+1} \varepsilon_{k+1}^T - (H_{k+1} \Phi_k - H_k) P_{k|k} (H_{k+1} \Phi_k - H_k)^T - H_{k+1} \hat{Q}_k H_{k+1}^T - \hat{R}_k] D_{k+1}^T \hat{Q}_k \quad (41)$$

下面提出增量系统式(1)和式(3)的观测噪声均值 r 和方差 R 的次优无偏MAP估值器:

参考文献[3]的做法,有噪声统计 \mathbf{r} 和 \mathbf{R} 的改进的次优无偏最大后验(Maximum A Posterior, MAP)估值器式(18)和式(19),从而由式(1)、式(21)和式(32)得

$$\mathbf{K}_{i|i+1} = \mathbf{P}_{i-1|i-1} \boldsymbol{\Psi}_i^{\text{T}} (\mathbf{H}_{i+1} \boldsymbol{\Phi}_i - \mathbf{H}_i)^{\text{T}} \mathbf{Q}_{i+1}^{-1} \quad (42)$$

由式(3)得

$$\hat{\mathbf{V}}_{i+1|i+1} = \Delta \mathbf{z}_{i+1} - (\mathbf{H}_{i+1} \boldsymbol{\Phi}_i - \mathbf{H}_i) \hat{\mathbf{x}}_{i|i+1} \quad (43)$$

将式(20)代入式(43)得

$$\hat{\mathbf{V}}_{i+1|i+1} = \Delta \mathbf{z}_{i+1} - (\mathbf{H}_{i+1} \boldsymbol{\Phi}_i - \mathbf{H}_i) (\hat{\mathbf{x}}_{i|i} + \mathbf{K}_{i|i+1} \boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}) \quad (44)$$

由式(22)和式(44)可得

$$\hat{\mathbf{V}}_{i+1|i+1} = \mathbf{r} + [\mathbf{I} - (\mathbf{H}_{i+1} \boldsymbol{\Phi}_i - \mathbf{H}_i) \mathbf{K}_{i|i+1}] \boldsymbol{\varepsilon}_{i+1} \quad (45)$$

从而有

$$\hat{\mathbf{V}}_{i+1|i+1} = \mathbf{r} + \mathbf{F}_{i+1} \boldsymbol{\varepsilon}_{i+1} \quad (46)$$

其中 \mathbf{F}_{i+1} 为

$$\mathbf{F}_{i+1} = \mathbf{I} - (\mathbf{H}_{i+1} \boldsymbol{\Phi}_i - \mathbf{H}_i) \mathbf{K}_{i|i+1} \quad (47)$$

由式(18), 式(19), 式(32), 式(46), 式(47), 类似得定理2。

定理2 增量系统式(1)和式(3)的观测噪声均值 \mathbf{r} 和方差 \mathbf{R} 的次优MAP估值器为

$$\hat{\mathbf{r}}_{k+1} = \frac{1}{k+1} (k \hat{\mathbf{r}}_k + \Delta \mathbf{z}_{k+1} - (\mathbf{H}_{k+1} \boldsymbol{\Phi}_k - \mathbf{H}_k) \hat{\mathbf{x}}_{k|k}) \quad (48)$$

$$\hat{\mathbf{R}}_{k+1} = \frac{1}{k+1} [k \hat{\mathbf{R}}_k + \mathbf{F}_{k+1} \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}^{\text{T}} \mathbf{F}_{k+1}^{\text{T}} + \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k} \mathbf{H}_k^{\text{T}}] \quad (49)$$

注2: 在算法的时间复杂度方面, 本文与文献[17]是一样的。因为本文定理1和定理2所给出的是基于新息的增量系统观测噪声统计的估计方法, 而由式(20)可知新息计算的时间复杂度取决于状态滤波器, 而文献[17]给出的噪声统计的估计算法就是基于状态滤波器和1步预报器, 这样看来, 二者的时间复杂度是一样的。而由注1可知本文在不增加时间复杂度的同时又提高了增量系统噪声统计的估计精度。

3.2 增量系统噪声统计的次优无偏递推MAP估值器

当未知噪声统计 \mathbf{q}_k , \mathbf{Q}_k , \mathbf{r}_k 和 \mathbf{R}_k 为慢时变时, 由指数加权法有定理3所述的时变噪声统计估值器。

定理3 增量系统式(1)和式(3)的时变噪声统计的递推估值器为

$$\hat{\mathbf{q}}_{k+1} = \hat{\mathbf{q}}_k + d_k \hat{\mathbf{Q}}_k \mathbf{D}_{k+1} \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Q}}_{k+1} = & \hat{\mathbf{Q}}_k + d_k \hat{\mathbf{Q}}_k \mathbf{D}_{k+1} [\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}^{\text{T}} \\ & - (\mathbf{H}_{k+1} \boldsymbol{\Phi}_k - \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k} (\mathbf{H}_{k+1} \boldsymbol{\Phi}_k - \mathbf{H}_k)^{\text{T}} \\ & - \mathbf{H}_{k+1} \hat{\mathbf{Q}}_k \mathbf{H}_{k+1}^{\text{T}} - \hat{\mathbf{R}}_k] \mathbf{D}_{k+1}^{\text{T}} \hat{\mathbf{Q}}_k \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}}_{k+1} = & (1 - d_k) \hat{\mathbf{r}}_k + d_k [\Delta \mathbf{z}_{k+1} \\ & - (\mathbf{H}_{k+1} \boldsymbol{\Phi}_k - \mathbf{H}_k) \hat{\mathbf{x}}_{k|k}] \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}}_{k+1} = & (1 - d_k) \hat{\mathbf{R}}_k + d_k [\mathbf{F}_{k+1} \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}^{\text{T}} \mathbf{F}_{k+1}^{\text{T}} \\ & + \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k} \mathbf{H}_k^{\text{T}}] \end{aligned} \quad (53)$$

其中 $d_k = (1 - b)/(1 - b^{k+1})$, $0 < b < 1$ 为遗忘因子。当 $b = 1$ 时, 令 $d_k = 1/(k+1)$, 则式(40), 式(41), 式(48), 式(49)化为定理3的结果。

4 实验模型及结果分析

大量模拟仿真实验表明, 当受环境等因素的影响, 测量数据含有未知的系统误差时, 经典Kalman滤波和自适应Kalman滤波都无法消除这种未知的系统误差, 本文提出的增量系统自适应Kalman估值器能有效解决这种带未知噪声统计的欠观测系统的状态估计问题。

4.1 仿真实例1

设线性离散增量系统为

$$x_k = 0.9x_{k-1} + w_{k-1} \quad (54)$$

$$\Delta z_k = x_k - x_{k-1} + V_k \quad (55)$$

其中, $\Delta z_k = x_k - x_{k-1} + V_k$ 和 V_k 是独立的高斯白噪声, 且系统噪声 w_k 的均值 $q = 0.5$ 和方差 $Q = 0.001$, 量测噪声 V_k 的均值 $r = 0$ 和方差 $R (R^* = 1)$ 由式(56)给出

$$R_k = \begin{cases} R^*, & k \in [1, 200] \\ 9R^*, & k \in [200, 400] \\ R^*, & k \in [400, 600] \\ 16R^*, & k \in [600, 800] \\ R^*, & k \in [800, 1000] \end{cases} \quad (56)$$

其中 k 离散时间, 设量测系统误差 $a_k = 3$, a_k 为未知量。

分别应用文献[17]和本文定理3的自适应增量滤波算法进行滤波得到的结果进行比较, 取遗忘因子为 $b = 0.95$, 取初值为: $\hat{q}_0 = 0.01$, $\hat{Q}_0 = 10^{-7}$, $r_0 = 0.01$, $R_0 = 1$ 。仿真结果如图1—图4所示。图1给出了未知噪声统计的真值、应用文献[17]得到的和本文定理3得到的估值器的对比曲线。可见, 应用本文所提出的基于新息的噪声统计算法得到的估计值比文献[17]的估计值更接近噪声统计真实值, 且收敛速度也优于文献[17]。图2给出了应用文献[17]和应用本文定理3的噪声统计估计误差对比曲线。可见, 本文所提出的噪声统计估计算法的估计精度高于文献[17]的噪声统计估计算法。图3给出了状态真

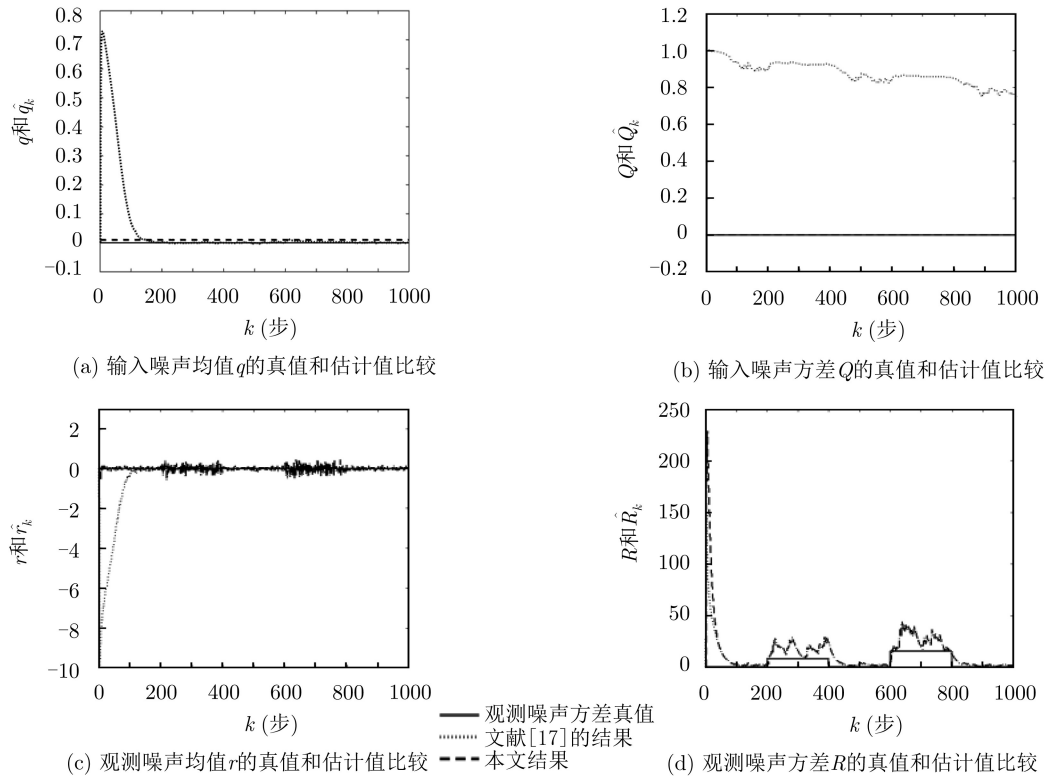


图1 未知噪声统计的真值和估计值比较

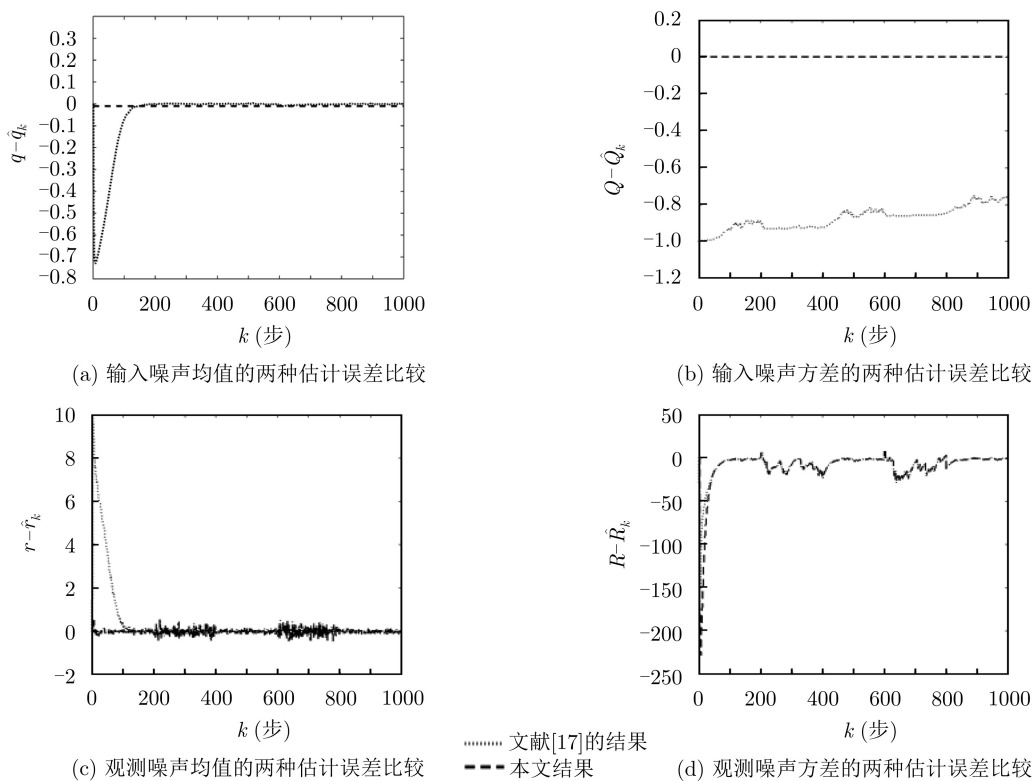


图2 基于两种不同算法的噪声统计估计误差比较

值、应用文献[17]和应用本文定理3得到的自适应增量滤波器的比较曲线。图4给出了分别应用文献[17]和本文定理3得到的自适应增量滤波误差比较曲线。

可见相比文献[17]，本文所提出的自适应增量Kalman滤波器能得到更高精度的噪声统计估计和自适应状态估计，方法有效可行。

4.2 仿真实例2

考虑系统式(54)和式(55)带时变噪声统计的情形：分别取系统噪声 w_k 的均值 $q_k = 0.001k$ 和方差 $Q_k = 0.3[0.2\sin(0.01k) + 1]^2$ ，量测噪声 V_k 的均值 $r = 0$ 和方差 $R = 1$ 。分别应用文献[17]和本文定理3的自适应增量滤波算法进行滤波得到自适应增量估值，取遗忘因子为 $b = 0.95$ ，取初值为： $\hat{q}_0 = 0.1$ ， $\hat{Q}_0 = 10^{-6}$ ， $\hat{r}_0 = 0.1$ ， $\hat{R}_0 = 1$ 。仿真结果如图5—图8所示。图5给出了未知噪声统计的真值、应用文献[17]得到的估值和本文定理3得到的估值的对比曲线。图6给出了应用文献[17]和应用本文定理3的噪声统计估计误差对比曲线。可见，对于时变噪声统计，应用本文所提出的估计算法所得到的噪声统计估值精度也要高于文献[17]的估计精度。图7给出了

状态真值、应用文献[17]和本文定理3得到的自适应增量滤波器的比较曲线。图8给出了分别应用文献[17]和本文定理3得到的自适应增量滤波误差比较曲线。可见相比文献[17]，本文所提出的自适应增量Kalman滤波器估值器能得到更高精度的噪声统计估计和自适应状态估计，方法有效可行。

5 结束语

对于带未知噪声统计的线性离散增量系统，本文首先提出了一种基于新息的噪声统计估计算法，可以得到噪声统计的无偏估计；进而，提出一种自适应增量滤波算法。相比已有文献[17]的噪声统计和自适应状态估计算法，本文所提算法精度更高，仿真说明了所提方法的有效性。

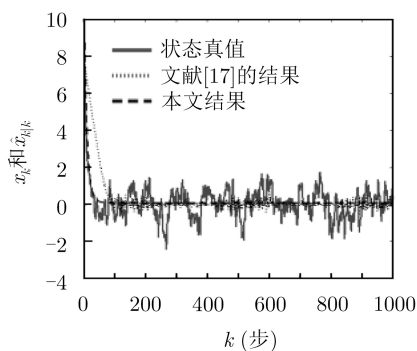


图3 状态真值和两种自适应增量滤波器比较

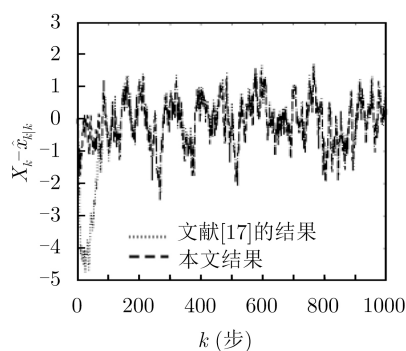
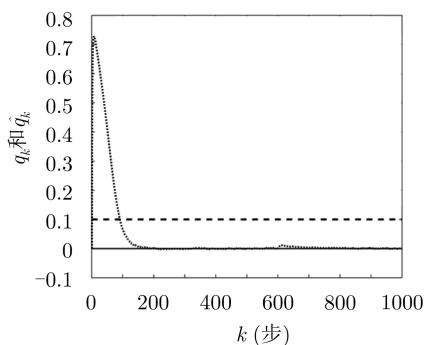
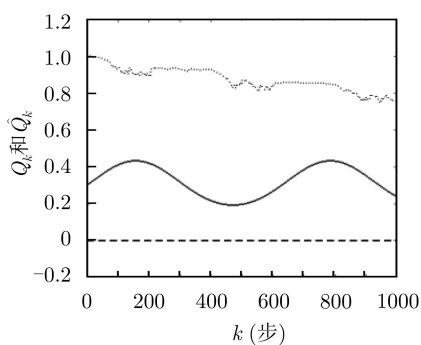


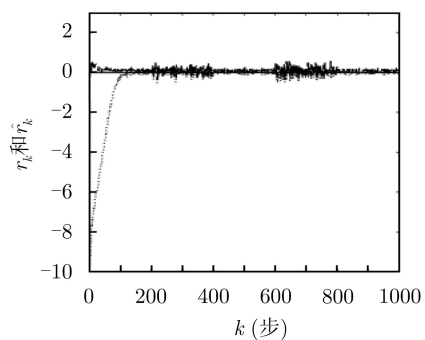
图4 两种自适应增量滤波误差比较



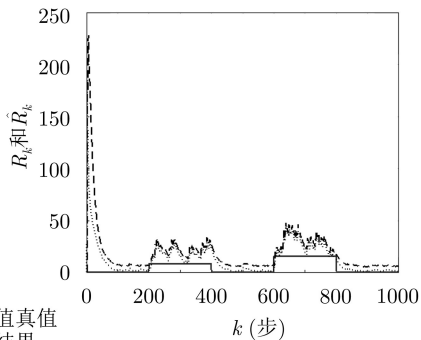
(a) 输入噪声均值 q_k 的真值和估计值比较



(b) 输入噪声方差 Q_k 的真值和估计值比较



(c) 观测噪声均值 r 的真值和估计值比较



(d) 观测噪声方差 R 的真值和估计值比较

图5 未知噪声统计的真值和估计值比较

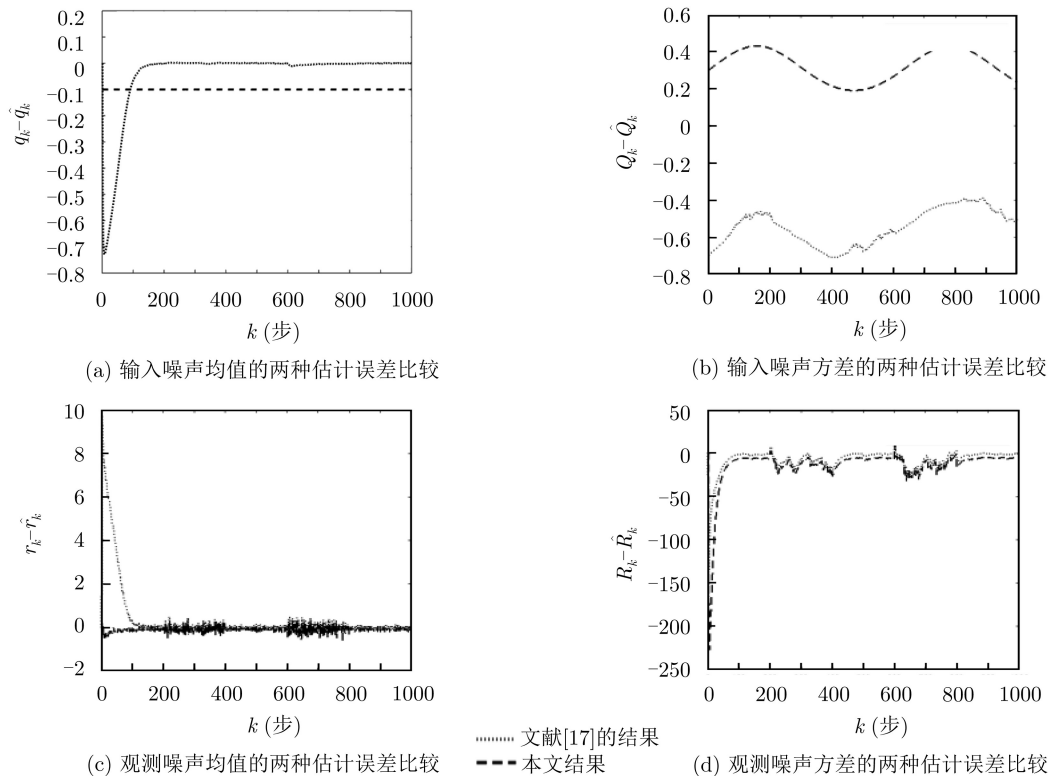


图6 基于两种不同算法的噪声统计估计误差比较

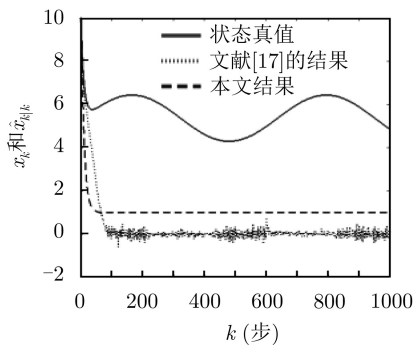


图7 状态真值和两种自适应增量滤波器比较

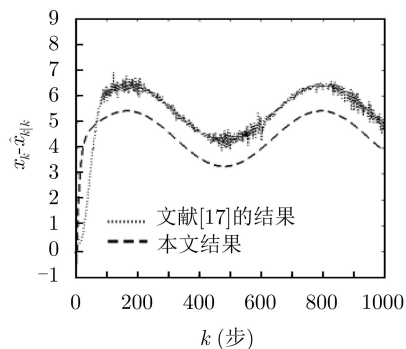


图8 两种自适应增量滤波误差比较

参考文献

- [1] SAGE A P and HUSA G W. Adaptive filtering with unknown prior statistics[C]. Joint Automatic Control Conference, Boulder, American, 1969: 760–769.
- [2] KALMAN R E. A new approach to linear filtering and prediction problems[J]. *Journal of Basic Engineering*, 1960, 82(1): 35–45. doi: 10.1115/1.3662552.
- [3] 邓自立. 自校正滤波理论及其应用——现代时间序列分析方法[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2003: 6.1.
- [4] 何丽, 汤莉. 基于Kalman滤波的云数据中心能耗和性能优化[J]. 计算机工程与科学, 2018, 40(7): 1165–1172. doi: 10.3969/j.issn.1007-130X.2018.07.003.
- HE Li and TANG Li. Energy and performance optimization based on Kalman filtering in the cloud data center[J]. *Computer Engineering & Science*, 2018, 40(7): 1165–1172. doi: 10.3969/j.issn.1007-130X.2018.07.003.
- [5] 张宏伟, 谢维信. 平滑约束无迹卡尔曼滤波器[J]. 信号处理, 2019, 35(3): 466–471. doi: 10.16798/j.issn.1003-0530.2019.03.019.
- ZHANG Hongwei and XIE Weixin. Smoothly constrained unscented Kalman filter[J]. *Journal of Signal Processing*, 2019, 35(3): 466–471. doi: 10.16798/j.issn.1003-0530.2019.03.019.
- [6] 耿友林, 解成博, 尹川, 等. 基于卡尔曼滤波的接收信号强度指示差值定位算法[J]. 电子与信息学报, 2019, 41(2): 455–461. doi: 10.11999/JEIT180268.
- GENG Youlin, XIE Chengbo, YIN Chuan, et al. Received signal strength indication difference location algorithm based on Kalman filter[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2019, 41(2): 455–461. doi: 10.11999/JEIT180268.

- [7] 汪玲, 朱栋强, 马凯莉, 等. 空间目标卡尔曼滤波稀疏成像方法[J]. 电子与信息学报, 2018, 40(4): 846–852. doi: [10.11999/JEIT170319](https://doi.org/10.11999/JEIT170319).
WANG Ling, ZHU Dongqiang, MA Kaili, et al. Sparse imaging of space targets using Kalman filter[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2018, 40(4): 846–852. doi: [10.11999/JEIT170319](https://doi.org/10.11999/JEIT170319).
- [8] SUN Xiaojun, GAO Yuan, DENG Zili, et al. Multi-model information fusion Kalman filtering and white noise deconvolution[J]. *Information Fusion*, 2010, 11: 163–173. doi: [10.1016/j.inffus.2009.06.004](https://doi.org/10.1016/j.inffus.2009.06.004).
- [9] 刘利生, 吴斌, 杨萍. 航天器精确定轨与自校准技术[M]. 北京: 国防工业出版社, 2005: 9.2.
LIU Lisheng, WU Bin, and YANG Ping. Orbit Precision Determination & Self-Calibration Technique of Spacecraft[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2005: 9.2.
- [10] 傅惠民, 娄泰山, 吴云章. 欠观测条件下的扩展增量Kalman滤波方法[J]. 航空动力学报, 2012, 27(4): 777–781. doi: [10.13224/j.cnki.jasp.2012.04.004](https://doi.org/10.13224/j.cnki.jasp.2012.04.004).
FU Huimin, LOU Taishan, and WU Yunzhang. Extended incremental Kalman filter method under poor observation condition[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2012, 27(4): 777–781. doi: [10.13224/j.cnki.jasp.2012.04.004](https://doi.org/10.13224/j.cnki.jasp.2012.04.004).
- [11] 傅惠民, 娄泰山, 吴云章. 增量粒子滤波方法[J]. 航空动力学报, 2013, 28(6): 1201–1207. doi: [10.13224/j.cnki.jasp.2013.06.005](https://doi.org/10.13224/j.cnki.jasp.2013.06.005).
FU Huimin, LOU Taishan, and WU Yunzhang. Incremental particle filter method[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2013, 28(6): 1201–1207. doi: [10.13224/j.cnki.jasp.2013.06.005](https://doi.org/10.13224/j.cnki.jasp.2013.06.005).
- [12] 傅惠民, 吴云章, 娄泰山. 欠观测条件下的增量Kalman滤波方法[J]. 机械强度, 2012, 34(1): 43–47. doi: [10.16579/j.issn.1001.9669.2012.01.014](https://doi.org/10.16579/j.issn.1001.9669.2012.01.014).
FU Huimin, WU Yunzhang, and LOU Taishan. Incremental Kalman filter method under poor observation condition[J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2012, 34(1): 43–47. doi: [10.16579/j.issn.1001.9669.2012.01.014](https://doi.org/10.16579/j.issn.1001.9669.2012.01.014).
- [13] SUN Xiaojun, YAN Guangming, and ZHANG Bo. A Kind of incremental Kalman smoother under poor observation condition[C]. The 36th Chinese Control Conference, Dalian, China, 2017: 2524–2527. doi: [10.23919/ChiCC.2017.8027740](https://doi.org/10.23919/ChiCC.2017.8027740).
- [14] SUN Xiaojun and YAN Guangming. Multi-sensor optimal weighted fusion incremental Kalman smoother[J]. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2018, 29(2): 262–268. doi: [10.21629/JSEE.2018.02.06](https://doi.org/10.21629/JSEE.2018.02.06).
- [15] 徐景硕, 秦永元, 彭蓉. 自适应卡尔曼滤波器渐消因子选取方法研究[J]. 系统工程与电子技术, 2004, 26(11): 1552–1554. doi: [10.3321/j.issn:1001-506X.2004.11.006](https://doi.org/10.3321/j.issn:1001-506X.2004.11.006).
XU Jingshuo, QIN Yongyuan, and PENG Rong. New method for selecting adaptive Kalman filter fading factor[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2004, 26(11): 1552–1554. doi: [10.3321/j.issn:1001-506X.2004.11.006](https://doi.org/10.3321/j.issn:1001-506X.2004.11.006).
- [16] 鲁平, 赵龙, 陈哲. 改进的Sage-Husa自适应滤波及其应用[J]. 系统仿真学报, 2007, 19(15): 3503–3505. doi: [10.3969/j.issn.1004-731X.2007.15.034](https://doi.org/10.3969/j.issn.1004-731X.2007.15.034).
LU Ping, ZHAO Long, and CHEN Zhe. Improved Sage-Husa adaptive filtering and its application[J]. *Journal of System Simulation*, 2007, 19(15): 3503–3505. doi: [10.3969/j.issn.1004-731X.2007.15.034](https://doi.org/10.3969/j.issn.1004-731X.2007.15.034).
- [17] 傅惠民, 吴云章, 娄泰山. 自适应增量Kalman滤波方法[J]. 航空动力学报, 2012, 27(6): 1125–1129.
FU Huimin, WU Yunzhang, and LOU Taishan. Adaptive incremental Kalman filter method[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2012, 27(6): 1125–1129.
- [18] 徐英蛟. 一种改进自适应增量Kalman滤波的传递对准算法[J]. 指挥控制与仿真, 2018, 40(4): 33–37. doi: [10.3969/j.issn.1673-3819.2018.04.008](https://doi.org/10.3969/j.issn.1673-3819.2018.04.008).
XU Yingjiao. A improved adaptive incremental filtering algorithm of transfer alignment[J]. *Command Control & Simulation*, 2018, 40(4): 33–37. doi: [10.3969/j.issn.1673-3819.2018.04.008](https://doi.org/10.3969/j.issn.1673-3819.2018.04.008).
- [19] 傅惠民, 吴云章, 娄泰山. 自适应增量粒子滤波方法[J]. 航空动力学报, 2013, 28(8): 1764–1768.
FU Huimin, WU Yunzhang, and LOU Taishan. Adaptive incremental particle filter method[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2013, 28(8): 1764–1768.
- [20] 傅惠民, 吴琼. 线性独立增量过程分析方法[J]. 航空动力学报, 2010, 25(4): 930–935.
FU Huimin and WU Qiong. Analysis method for linear process with independent increments[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2010, 25(4): 930–935.
- 孙小君: 女, 1980年生, 副教授, 研究方向为多传感器信息融合、状态估计、信号处理。
周 晗: 男, 1996年生, 硕士生, 研究方向为多传感器信息融合、系统辨识。
闫广明: 男, 1979年生, 讲师, 研究方向为多传感器信息融合、状态估计。

责任编辑: 陈 倩