电磁学期末复习讲义

曳涂

2024 年 6 月 30 日

目录

1 数学预备

以下公式均不做证明

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$

在直角坐标中：

$$\begin{aligned}\nabla f&=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}\\ \nabla\cdot\mathbf{a}&=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\\ \nabla\times\mathbf{a}&=(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z})\hat{x}+(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x})\hat{y}+(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y})\hat{z}\\ \nabla^2 f&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{aligned}$$

柱坐标：

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial r}\hat{r}+\frac{\partial f}{r\,\partial\theta}\hat{\theta}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

球坐标：

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial r}\hat{r}+\frac{\partial f}{r\,\partial\theta}\hat{\theta}+\frac{\partial f}{r\sin\theta\,\partial\phi}\hat{\phi}$$

2 公式集锦及知识点梳理

2.1 静电场及电介质

2.1.1 静电场基本物理量

库伦定律

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

由库伦定律可导出高斯定理

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum \frac{q}{\varepsilon_0}$$

微分形式为

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

静电场的环路定理

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

微分形式为

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

由环路定理，我们可以将 $\vec{E}$ 写为某个势函数的梯度，定义电势函数 φ 使得

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

φ 的零点原则上是任取的，但是为了方便通常取在无限远处（某些无穷远处有电荷分布的情况较为特殊）。无穷远处为势能零点时，某一点电势定义为

$$\varphi_A = U_{A\infty} = \int_A^\infty \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

2.1.2 电偶极子

电偶极子由两个等量异种电荷组成，是一个点模型，其特征由电偶极矩刻画

$$\vec{p} = q\vec{l}$$

$\vec{l}$是由负电荷中心指向正电荷中心的矢量。电偶极子在空间某点产生的电势及场强为

$$V(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$$
$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^5}[3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}-r^2\vec{p}]$$

电偶极子在外电场中电势能，所受合力及力矩为

$$W=-\vec{p}\cdot\vec{E}$$
$$\vec{F}=\nabla(\vec{p}\cdot\vec{E})$$
$$\vec{L}=\vec{p}\times\vec{E}$$

2.1.3 导体

在外电场中导体内部电荷会受到电场力作用从而重新进行分配，使得导体内部电场为 0，整个导体成为等势体，电荷分布在导体表面。电荷面密度为

$$\sigma=\varepsilon_0 E$$

2.1.4 相互作用能

$$W=\frac{1}{2}\iiint\rho U\,\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\iiint\vec{E}\cdot\vec{D}\,\mathrm{d}V$$

2.1.5 电容

$$C\equiv\frac{q}{U}$$

电容器所带能量为

$$\frac{QU}{2}=\frac{CU^2}{2}=\frac{Q^2}{2C}$$

2.1.6 唯一性定理

设空间 Ω 的边界为 $S_1,S_2,S_3\cdots S_n$ 给定这些面上某些面的电荷条件，其余面的电势条件，空间中的电场分布便被唯一的确定了下来。由此，我们便可以有电像法。

2.1.7 电介质

引入电极化矢量 $\vec{P}$，将其定义为，单位体积内电偶极矩的矢量和。我们就可以有

$$\oint \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint \rho_{\text{极化}}\,\mathrm{d}V$$

引入电位移矢量 $\vec{D}$，定义为

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

于是我们有

$$\oint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint \rho_0\,\mathrm{d}V$$

2.2 静磁场及磁介质

2.2.1 静磁场基本定理

毕奥萨伐尔定律

$$\vec{B} = \oint \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1\,\mathrm{d}\vec{l_1}\times\hat{r}}{r^3}$$

安培环路定理

$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum \mu_0 I$$

微分形式为

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j}$$

磁场的高斯定理

$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

微分形式为

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

引入矢量势 $\vec{A}$ 定义为

$$\nabla\times\vec{A} = \vec{B}$$

2.2.2 磁场对电流元及带电粒子的作用

电流元受磁场作用力为

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

闭合回路所受磁场作用力为

$$\vec{F} = \oint I\,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

我们定义 $\vec{m} = I\vec{S}$ 为电流回路的磁矩，那么该电流回路在磁场中所受的安培力矩为

$$\vec{L} = \vec{m} \times \vec{B}$$

运动的带电粒子在磁场中受力为

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

2.2.3 磁介质

宏观物质磁性有两种等效的说法：磁荷说，分子电流说。在这里我们仅考虑分子电流说。

分子电流说认为宏观物质磁性是由于在外加磁场作用下，组成宏观物质的带有磁矩的分子的磁矩方向重新排布，从而导致物质带有磁性。

仿照处理电介质的方法，我们引入极化强度矢量 M，将其定义为单位体积内分子电流磁矩的矢量和。我们在磁介质中任取一曲面 S, 可知穿过曲面 S 的电流只由 S 边界的电流圈贡献，那么有

$$\oint \vec{M} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum i'$$

又由安培环路定理得

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum I = \sum (i' + i_f)$$

于是我们引入辅助矢量磁场强度，定义为

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

则有

$$\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum i_f$$

对于均匀磁化的磁介质有

$$\vec{B} = \mu \vec{H} (\mu = \mu_r \mu_0)$$

磁场能为

$$W = \iiint \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} \,\mathrm{d}V$$

2.3 电磁感应

$$\mathscr{E}_i = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathscr{E} = \sum_i \mathscr{E}_i = -\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}$$

2.3.1 动生电动势

$$\mathscr{E} = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

2.3.2 感生电动势

$$\vec{E}_{\text{旋}} = -\frac{\partial A}{\partial t}$$

若磁场均匀分布且随时间匀速变化，即 $\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} = \vec{k}$ 为常矢量，则某点的感生电场强度为

$$E_k(P) = \iint \frac{\vec{r} \times \vec{k}}{2\pi r^2} \,\mathrm{d}S$$

2.3.3 自感与互感

$$\mathscr{E}_L=-\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}=-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

$L=\frac{N\phi}{I}$ 称为线圈的自感系数。

线圈 1 通入电流后会导致附近的线圈 2 中有磁通，此时若 1 中的电流变化就会导致 2 中的磁通变化，2 中就会产生感应电动势，这就是互感现象。定义互感系数

$$M=\frac{N_1\phi_{21}}{I_2}=\frac{N_2\phi_{12}}{I_1}$$

若引入不漏磁条件，即 $\phi_{12}=\phi_{21}$ 那么就有

$$M^2=L_1L_2$$

对于两线圈顺接且无漏磁的情况那么新线圈的自感系数为

$$L=L_1+L_2+2\sqrt{L_1L_2}$$

反接则为

$$L=L_1+L_2-2\sqrt{L_1L_2}$$

自感磁能

$$L=\frac{LI^2}{2}$$

2.4 电路

$$I=\iint\vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$
$$\vec{j}=\sigma\vec{E}$$
$$\sigma=\frac{1}{\rho}$$
$$R=\frac{\rho L}{S}$$

基尔霍夫定律：1、沿闭合回路压降为 0，2、流入节点电流等于流出节点电流。

2.4.1 瞬态过程

电荷守恒定律

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\oint\vec{j}\cdot\mathrm{d}S=0$$

又因为在导体内部有 $\vec{j}=\sigma\vec{E}$，故

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\sigma\oint\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0\\ \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\frac{\sigma}{\varepsilon_0}Q=&0\end{aligned}$$

我们令 $S\to 0$ 则 Q 退化为 ρ.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\rho=0\\ \rho=\rho(0)e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t}\end{aligned}$$

因为导体内部 σ 的量级很大，故这是一个很快的过程，称为瞬态过程。

2.4.2 暂态过程

R-L-C 电路暂态过程

$$\begin{aligned}L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri+\frac{q}{C}=0\\ L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{q}{C}=0\end{aligned}$$

此方程类似于力学中的阻尼振荡，定义

$$\lambda=\sqrt{\frac{C}{L}}$$

当 $\lambda<1$ 时，电路中进行阻尼振荡。
$\lambda=1$ 时，不振荡并迅速回到平衡。
$\lambda>1$ 时不振荡。

2.5 麦克斯韦方程组

引入位移电流，将方程组改写为

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{D}=\rho_0 \\ \oint\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

假定介质各向同性且线性，那么介质方程为

$$\begin{cases} \vec{D}=\varepsilon_r\varepsilon_0\vec{E} \\ \vec{B}=\mu_r\mu_0\vec{H} \\ \vec{j}_f=\sigma\vec{E} \end{cases}$$

2.5.1 边界条件

在分界面处：
$\vec{E}$ 的切向分量连续，$\vec{D}$ 的法向分量连续。
$\vec{H}$ 的切向分量连续，$\vec{B}$ 的法向分量连续。

2.5.2 电磁波

对于单色线偏振光而言

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0\exp(i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t)$$

其中 $\vec{k}=\frac{\omega}{c}\vec{e}_k$，称为波矢量，其方向代表波的传播方向。

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E_0=\sqrt{\mu\mu_0}H_0$$

电磁波中的能量守恒方程为

$$\nabla\cdot\vec{S}+\frac{\partial w}{\partial t}+\vec{j}_0\cdot\vec{E}=0$$

$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$ 是能流密度，称为坡印廷矢量。

$$\overline{S}=\frac{1}{2}E_0H_0=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}E_0^2$$