一、一个平行板电容器极板面积为 S, 间距为 d，接上电动势为 U 的电源

(1) 将一块厚度为 d、相对介电常数为 ε_r 的均匀电介质插人极板间空隙。计算电路中通过的电荷量。

(2) 然后拉开极板，使得极板之间的间隔变为 $2d$, 求此过程中电源作了多少功。

(3) 然后断开电源，将极板之间的电介质抽出，求外力作了多少功。

解 (1)

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

$$C' = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{d}$$

$$\Delta Q = U(C' - C) = \frac{(\varepsilon_r - 1U\varepsilon_0 S)}{d}$$

(2)

$$D_1 = D_2$$

$$\varepsilon_r \varepsilon_0 E_1 = \varepsilon_0 E_2$$

$$E_1 d + E_2 d = U$$

解得

$$D = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 U}{d(\varepsilon_r + 1)}$$

又因为 $D = \sigma$, 故

(3)

$$C'' = \frac{Q}{U}$$

$$= \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{d(\varepsilon_r + 1)}$$

$$C''' = \frac{\varepsilon_0 S}{2d}$$

$$A = \frac{Q^2}{2C'''} - \frac{Q^2}{2C''}$$

$$= \frac{(C'' - C''')Q^2}{2C''C'''}$$

$$= \frac{(\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{d(\varepsilon_r+1)} - \frac{\varepsilon_0 S}{2d})(\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 U S}{d(\varepsilon_r+1)})^2}{2\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{d(\varepsilon_r+1)}\frac{\varepsilon_0 S}{2d}}$$

九、真空中一单色电磁波电场振幅为 $1.0V/m$，波长为 $400nm$, 求平均光子流密度 (垂直于波矢的面上单位面积单位时间通过的光子数)。提示:$E = cB$，一个光子能量为 hc/λ。

解:

$$\bar{S}=\frac{\int_0^T EH\,\mathrm{d}t}{T}(2\text{ 分})=E_m\frac{B_m}{\mu_0 T}\int_0^T \cos^2(\omega t)\mathrm{d}t(2\text{ 分})=\frac{E_m B_m}{2\mu_0}=\frac{E_m^2}{2\mu_0 c}\ (2\text{ 分})$$

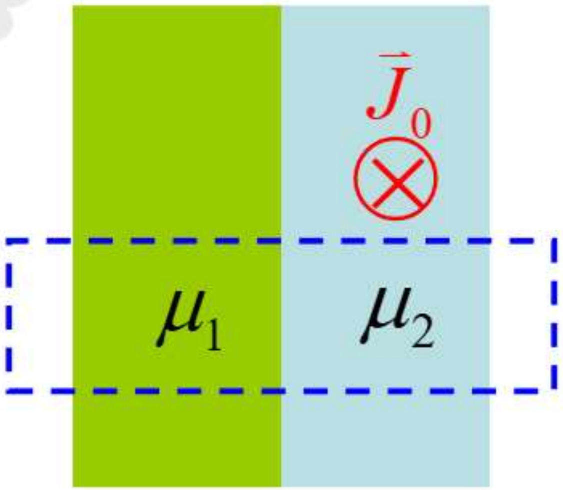
$$nh\frac{c}{\lambda}=\frac{E_m^2}{2\mu_0 c}(2\text{ 分})$$

$$n=\frac{\lambda E_m^2}{2h\mu_0 c^2}(2\text{ 分})=\frac{400\times10^{-9}\ \mathrm{m}\times(1.0\ \mathrm{V/m})^2}{2\times6.626\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}\times4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{N/A^2}\times(3.0\times10^8\ \mathrm{m/s})^2}(1\text{ 分})=2.7\times10^{16}\ \mathrm{s^{-1}\ m^{-2}}$$

(2 分)

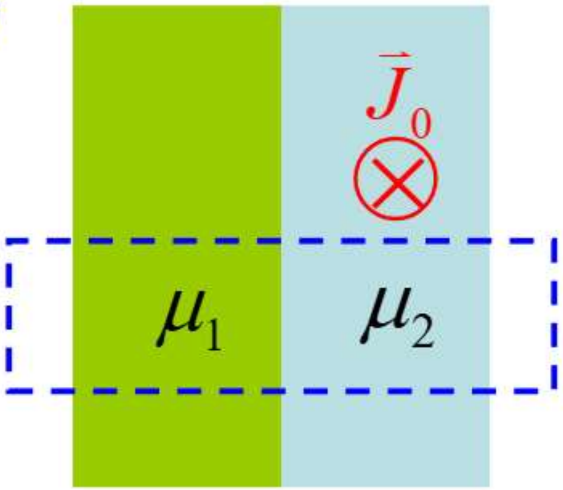
有效数字错扣 2 分, 单位错扣 2 分。

例　两块无限大平板，厚度分别为b_1, b_2，右边平板中有面密度为$\vec{J}_0$的均匀分布传导电流，方向垂直黑板向内，平板的磁导率分别为μ_1, μ_2. 求两块板中的磁感应强度。



例 两块无限大平板，厚度分别为b_1, b_2，右边平板中有面密度为$\vec{J}_0$的均匀分布传导电流，方向垂直黑板向内，平板的磁导率分别为μ_1, μ_2. 求两块板中的磁感应强度。

解 由磁感应强度的轴矢量对称性，可知其方向平行于平板。



两边真空中磁感应强度大小相等

$$B_L = -B_R \equiv B$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int \vec{J}_0 \cdot d\vec{S}$$

$$H_L l - H_R l = J_0 b_2 l \Longrightarrow H_L - H_R = J_0 b_2$$

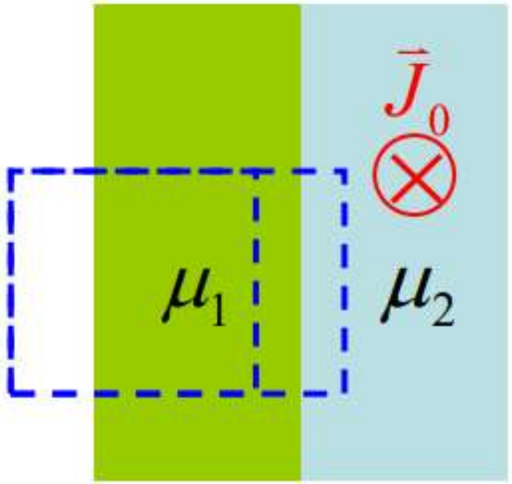
$$\frac{B}{\mu_0} + \frac{B}{\mu_0} = J_0 b_2$$

$$B = \frac{\mu_0 J_0 b_2}{2}$$

$$H_L = \frac{B}{\mu_0} = \frac{J_0 b_2}{2}$$

$$H_R = \frac{-B}{\mu_0} = -\frac{J_0 b_2}{2}$$

$$H_L = \frac{B}{\mu_0} = \frac{J_0 b_2}{2}$$



$$\oint \vec{\boldsymbol{H}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = \int \vec{\boldsymbol{J}}_0 \cdot d\vec{\boldsymbol{S}}$$

$$H_L l - H_2 l = J_0 x l$$

$$H_2 = H_L - J_0 x = \frac{J_0 b_2}{2} - J_0 x$$

$$B_2 = \mu_2 H_2 = \frac{\mu_2 J_0 b_2}{2} - \mu_2 J_0 x$$

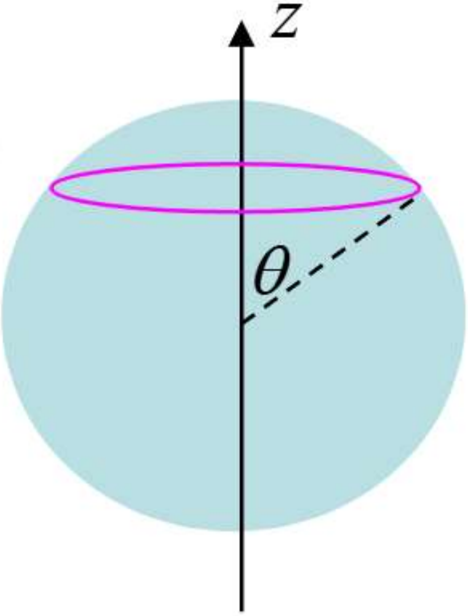
$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$H_L l - H_1 l = 0$$

$$H_1 = H_L$$

$$B_1 = \mu_1 H_1 = \frac{\mu_1 J_0 b_2}{2}$$

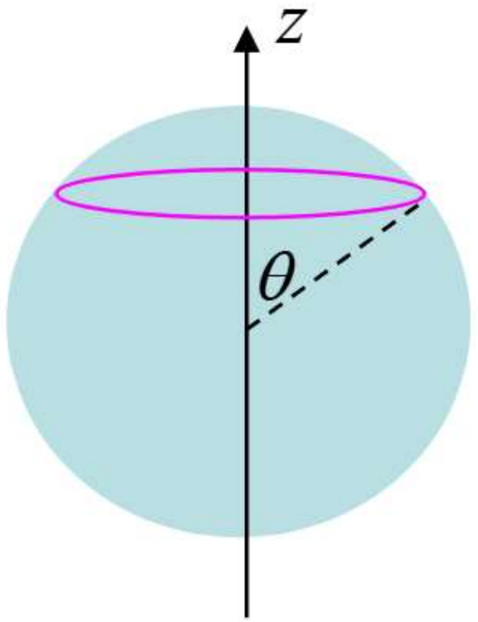
例 半径为R的均匀磁化介质球的磁化强度$\vec{M}$与z轴平行，用球坐标写出球面上磁化电流面密度的分布，并求出磁化电流的总磁矩。



例 半径为R的均匀磁化介质球的磁化强度$\vec{M}$与z轴平行，用球坐标写出球面上磁化电流面密度的分布，并求出磁化电流的总磁矩。

$$\vec{\alpha} = \vec{M} \times \hat{n} = M \sin\theta \, \hat{\varphi}$$

磁化电流线密度



$$d\vec{m} = \alpha(R d\theta)\pi(R\sin\theta)^2 \hat{z}$$
$$= \pi \vec{M} R^3 \sin^3\theta \, d\theta$$

$$\vec{m} = \pi \vec{M} R^3 \int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta = \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{M} = V\vec{M}$$

与磁化强度的定义$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}$一致

$d\vec{m}$为体积元dV内的磁矩

三、如图2所示，有两个长度均为 l, 半径分别为 r_1 和 r_2 $(r_1 < r_2)$, 匝数分别为 N_1 和 N_2 的同轴长直密绕螺线管, 求它们的互感 M。解:

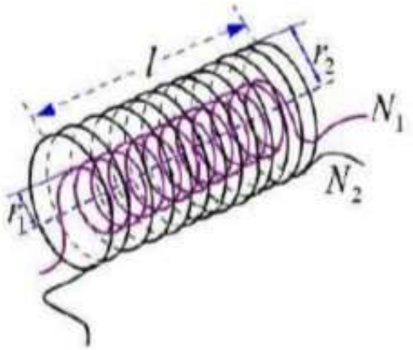


图 2　第三题

三、如图2所示，有两个长度均为 l, 半径分别为 r_1 和 r_2 $(r_1 < r_2)$, 匝数分别为 N_1 和 N_2 的同轴长直密绕螺线管, 求它们的互感 M。解:

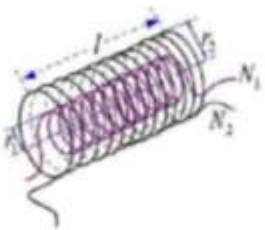


图 2　第三题

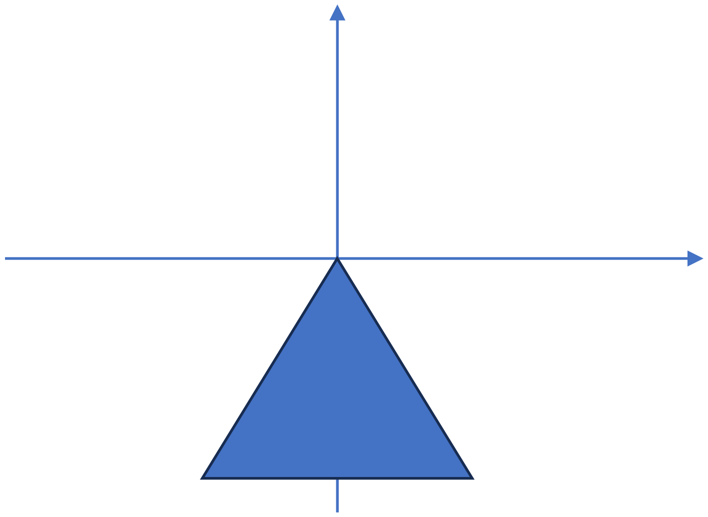
$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l} I_1 = \mu_0 n_1 I_1$$

$$\psi = N_2 \Phi_{21} = N_2 B_1 \left(\pi r_1^2\right)$$

$$= n_2 l B_1 \left(\pi r_1^2\right)$$

$$\psi = N_2 \Phi_{21} = \mu_0 n_1 n_2 l \left(\pi r_1^2\right) I_1$$

$$M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I} = \mu_0 n_1 n_2 l \left(\pi r_1^2\right)$$



如图所示等边三角形区域内存在垂直纸面向内的磁场，磁感应强度满足$B = kt$,三角形边长为a，请求出原点处的感生电场。

可能用到的积分公式：$\int \ln \frac{x^2+a^2}{x^2} dx = 2a \tan^{-1} \frac{x}{a} + x \ln \frac{x^2+a^2}{x^2}$

解

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= \iint \frac{\vec{r}\times\vec{k}}{2\pi r^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= -\vec{k}\times\iint \frac{x\vec{i}+y\vec{j}}{2\pi(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{\vec{i}\times\vec{k}}{2\pi}\iint \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{\vec{j}\times\vec{k}}{2\pi}\iint \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{\vec{i}\times\vec{k}}{2\pi}I_1 + \frac{\vec{j}\times\vec{k}}{2\pi}I_2
\end{aligned}
$$

$$
I_1 = \int_{-\frac{\sqrt{3}a}{2}}^{0}\mathrm{d}y\int_{\frac{\sqrt{3}y}{3}}^{-\frac{\sqrt{3}y}{3}}\frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x
$$

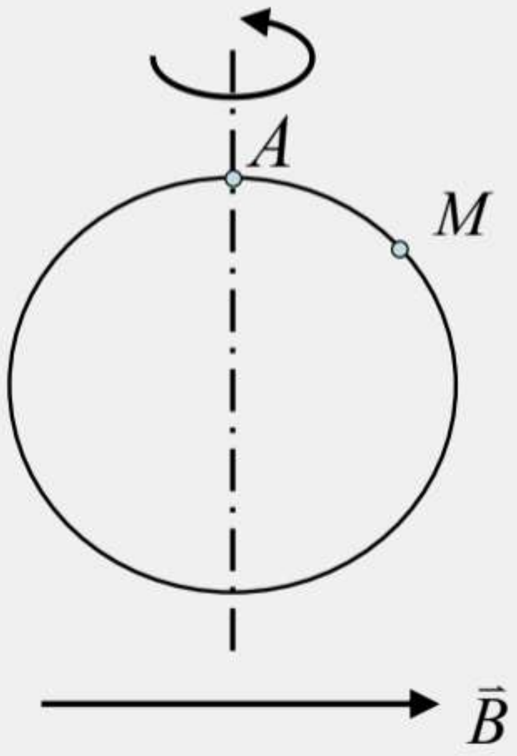
因为 $\dfrac{x}{x^2+y^2}$ 是关于 x 的奇函数,故 $I_1=0$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{-\frac{a}{2}}^{0} \mathrm{d}x \int_{-\frac{\sqrt{3}a}{2}}^{\sqrt{3}x} \frac{y}{x^2+y^2} \,\mathrm{d}y + \int_{0}^{\frac{a}{2}} \mathrm{d}x \int_{-\frac{\sqrt{3}a}{2}}^{-\sqrt{3}x} \frac{y}{x^2+y^2} \,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \ln(\frac{4x^2}{x^2+\frac{3}{4}a^2}) \,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{0}^{\frac{a}{2}} [\ln(\frac{x^2+\frac{3}{4}a^2}{x^2}) - \ln 4] \,\mathrm{d}x \\
&= a\ln 2 - (\sqrt{3}a \arctan\frac{2x}{\sqrt{3}a} + x\ln\frac{x^2+\frac{3}{4}a^2}{x^2})|_0^{\frac{a}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{3}\pi a}{6}
\end{aligned}
$$

故

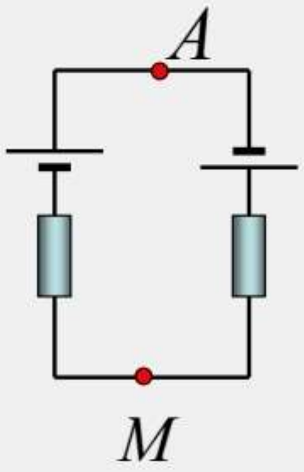
$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{\vec{j}\times\vec{k}}{2\pi}\frac{\sqrt{3}\pi a}{6} \\
&= \frac{\sqrt{3}\vec{j}\times\vec{k}}{12}
\end{aligned}
$$

*半径为 R，单位长度电阻为 r 的圆形均匀刚性线圈在均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中以角速率 ω 转动，转轴垂直于 $\boldsymbol{B}$。当线圈平面转至与 $\boldsymbol{B}$ 平行时，A、M中哪点电势高？弧AM占**1/8**周长。

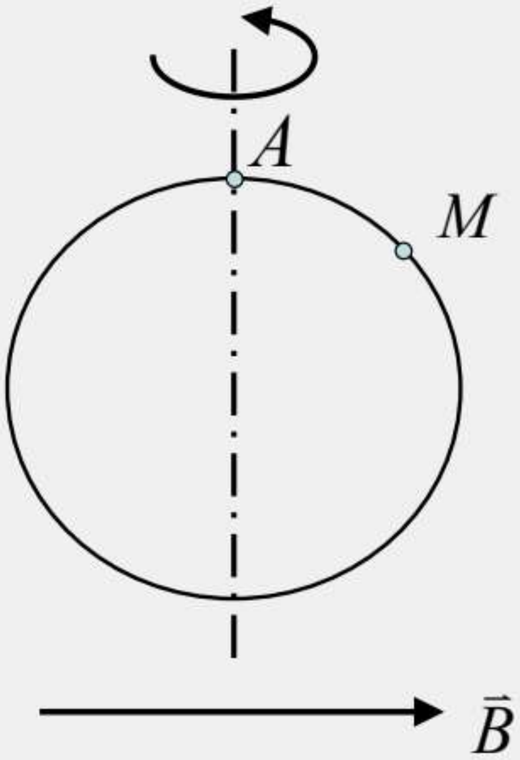


半径为 R，单位长度电阻为 r 的圆形均匀刚性线圈在均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中以角速率 ω 转动，转轴垂直于$\boldsymbol{B}$。当线圈平面转至与 $\boldsymbol{B}$ 平行时，A、M中哪点电势高？弧AM占**1/8**周长。

$$\mathcal{E}_{APM}=\left(\frac{7\pi}{8}+\frac{1}{4}\right)\omega BR^2$$



$$\mathcal{E}_{MA}=\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)\omega BR^2$$



$$I=\frac{\mathcal{E}_{MA}+\mathcal{E}_{APM}}{2\pi Rr}=\frac{B\pi R^2\omega}{2\pi Rr}=\frac{BR\omega}{2r}$$

$$U_{MA}=\mathcal{E}_{MA}-IR_{MA}=\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)\omega BR^2-\frac{BR\omega}{2r}\frac{\pi}{4}Rr=-\frac{1}{4}\omega BR^2<0$$

习题 5.16 如图 5.43 所示，一个大平行板电容器，上极板有均匀电荷 σ，下极板有均匀电荷 $-\sigma$，两极板以恒定速度 v 运动。

(a) 求出两极板间及两极板外区域的磁场。

(b) 求出作用在上极板单位面积上的磁力及其方向。

(c) 为了使磁力和电场力平衡，速度 v 应为多大？[⊖]

解 (a) 相当于两块无限大载流平板，其电流线密度为

$$\iota = \frac{av\sigma\,\mathrm{d}t}{a\,\mathrm{d}t} = \sigma v$$

在两板中间两板产生的磁感应强度同向，一块极板产生的磁感应强度由安培环路定理可知为 $\frac{\sigma\mu_0 v}{2}$，故两板中间，磁感应强度为 $\sigma\mu_0 v$，两板外磁感应强度为 0。

(b) 取面元 $\mathrm{d}S$，带电为 $\sigma\,\mathrm{d}S$，另外一极板在此处产生的磁感应强度为 $\frac{\sigma\mu_0 v}{2}$，故

$$F = qvB = \frac{\sigma^2\mu_0 v^2\,\mathrm{d}S}{2}$$

故单位面积所受力为 $\dfrac{\sigma^2\mu_0 v^2}{2}$ 方向为与另一极板相互排斥。

(c) 电场力为 $F = EQ = \dfrac{\mathrm{d}S\sigma^2}{2\varepsilon_0}$

$$\frac{\sigma^2\mu_0 v^2\,\mathrm{d}S}{2} = \frac{\mathrm{d}S\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$