

椭球法

Ellipsoid Method

傅奕诚

fuycc@zju.edu.cn

浙江大学计算机科学与技术学院

2025 年 10 月 22 日

目录

背景

椭圆

基础椭圆法

问题背景：从 LP 到凸可行性

- 典型目标：求解线性规划 (LP)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \{c^\top x \mid Ax \leq b\} \quad (1)$$

或更一般的凸可行性问题：在已知包含球 $B_2(0, R)$ 和未知的凸集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ 中，判定 K 非空并找到 $x \in K$ ，或在精度 ε 下逼近。

- 分离预言机 (Separation Oracle)**：给定 x ，判断 $x \in K$ ；若不在，返回一个分离超平面（或半空间）将 x 与 K 分开。
- 椭球法思想**：用逐步缩小的椭球逼近未知凸集 K ，每次利用分离信息更新椭球中心与形状。
- 历史意义**：Khachiyan (1979) 首次证明 LP 的多项式时间可解性。

LP 问题的规模-1

- 将整数 $z \in \mathbb{Z}$ 编码为其绝对值的二进制串, 则 $\text{size}(z) = \lceil \log(|z| + 1) \rceil$
- 有理数 p/q ($p, q \in \mathbb{Z}, q \geq 1, \gcd(p, q) = 1$): $\text{size}(p/q) = \text{size}(p) + \text{size}(q)$
- 长度 n 的有理向量 v : $\text{size}(v) = \sum_{j=1}^n \text{size}(v_j)$
- $m \times n$ 有理矩阵 A , $\text{size}(A) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \text{size}(a_{i,j})$
- 线性规划问题 $\min\{c^\top x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$: $\text{size}(A, b, c) = \text{size}(A) + \text{size}(b) + \text{size}(c)$

引理

- 对任意有理数 r , 有 $|r| \leq 2^{\text{size}(r)} - 1$
- 对任意有理向量 $x \in \mathbb{Q}^n$, 有 $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq 2^{\text{size}(x)} - 1$
- 对任意有理向量 $A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$, 有 $|\det(A)| \leq 2^{\text{size}(A)} - 1$

LP 问题的规模-2

引理

设多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ 非空, 且 A, b 均为整数矩阵/向量. P 的规模定义为 $L = \text{size}(A) + \text{size}(b)$, 则 P 的任一顶点 x 都满足 $\|x\|_2 \leq \sqrt{n}2^L$.

证明.

由多面体理论可知, 对每个顶点 v , 存在 $Ax \leq b$ 的一个非奇异子系统 $\bar{A}x = \bar{b}$. 根据 Cramer 法则, $x_i = \frac{\det \bar{A}_i}{\det \bar{A}}$, 其中 \bar{A}_i 是将 \bar{A} 的第 i 列替换为向量 \bar{b} 所得的矩阵.

由于 \bar{A} 是非奇异整数矩阵, 于是 $\det \bar{A} \geq 1$, 则

$$|x_i| \leq |\det \bar{A}_i| \leq 2^{\text{size}(\bar{A}_i)} - 1 \leq 2^L - 1$$

即 $\|x\|_\infty \leq 2^L$, 于是 $\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty \leq \sqrt{n}2^L$ □

LP 问题的规模-3

引理

设多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ 非空, 且 A, b 均为整数, 则

$$\text{vol}(P) \geq 2^{-(n+1)\text{size}(A)-n^2}.$$

目录

背景

椭圆

基础椭圆法

椭球的定义与几何性质

定义 (椭圆)

对称正定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 与中心 $a \in \mathbb{R}^n$ 定义:

$$\mathcal{E}(A, a) := \{x \in \mathbb{R}^n : (x - a)^\top A^{-1}(x - a) \leq 1\}.$$

- 主轴方向: A 的特征向量; 半轴长度: $\sqrt{\lambda_i(A)}$.
- 由于 A 是正定矩阵, 存在正定矩阵 Q 使得 $A = QQ$, 那么

$$\mathcal{E}(A, a) = Q\mathcal{E}(I, 0) + a$$

这里, $B(0, 1) = \mathcal{E}(I, 0)$ 表示圆心为原点的单位球.

- 体积: $\text{vol}(\mathcal{E}(A, a)) = \sqrt{\det A} V_n$ (V_n 为单位球的体积).

椭球的定义与几何性质

目标：在椭圆上求解线性函数 $c^\top x$ 的最大值/最小值。

在单位球 $B(a, 1)$ 上， $\max c^\top x$ 在 $x = a + \frac{c}{\|c\|}$ 处取得。

在椭圆 $\mathcal{E}(A, a)$ 上，有：

$$Q^{-1}\mathcal{E}(A, a) = B(0, 1) + Q^{-1}a = B(Q^{-1}a, 1).$$

因为 (令 $y = Q^{-1}x$):

$$\begin{aligned} 1 &\geq (x - a)^\top A^{-1}(x - a) \\ &= (Qy - a)^\top Q^{-1}Q^{-1}(Qy - a) \\ &= (Q(y - Q^{-1}a))^\top Q^{-1}Q^{-1}(Q(y - Q^{-1}a)) \\ &= (y - Q^{-1}a)^\top Q^\top Q^{-1}Q^{-1}Q(y - Q^{-1}a) \\ &= (y - Q^{-1}a)^\top I(y - Q^{-1}a) \end{aligned}$$

目标：在椭圆上求解线性函数 $c^\top x$ 的最大值/最小值.

在椭圆 $\mathcal{E}(A, a)$ 上，有：

$$Q^{-1}\mathcal{E}(A, a) = B(0, 1) + Q^{-1}a = B(Q^{-1}a, 1).$$

于是有：

$$\begin{aligned} \max_{x \in \mathcal{E}(A, a)} c^\top x &= \max_{Q^{-1}x \in Q^{-1}\mathcal{E}(A, a)} c^\top Q Q^{-1}x \\ &= \max_{y \in S(Q^{-1}a, 1)} c^\top Q y \\ &= c^\top Q \frac{1}{\|Qc\|} Qc + c^\top Q Q^{-1}a \\ &= c^\top a + \sqrt{c^\top A c} \end{aligned}$$

同理，最小值为

$$\min_{x \in \mathcal{E}(A, a)} c^\top x = c^\top a - \sqrt{c^\top A c}$$

椭球的定义与几何性质

令 $b = \frac{Ac}{\sqrt{c^\top Ac}}$, $z_{max} = a + b$, $z_{min} = a - b$, 那么

$$c^\top z_{max} = c^\top a + \sqrt{c^\top Ac}, \quad c^\top z_{min} = c^\top a - \sqrt{c^\top Ac}$$

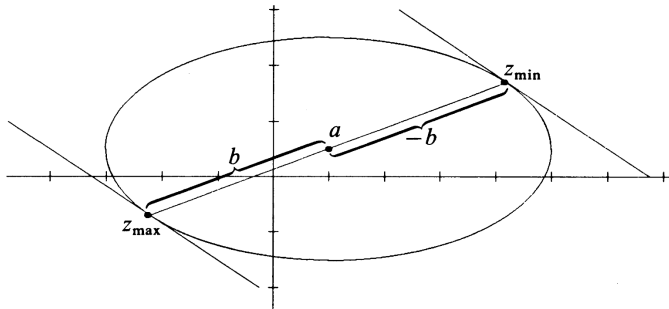


图: 二维椭球示例

Löwner–John 椭圆

定理 (Löwner–John 椭圆)

对于任意凸体 $K \subset \mathbb{R}^n$, 存在唯一的包含 K 最小体积椭圆 \mathcal{E} . 此外, 若 $\mathcal{E}(A, a)$ 为此椭圆, 则将 \mathcal{E} 从中心收缩 n 倍后得到的椭圆包含于 K , 即 $\mathcal{E}(n^{-2}A, a) \subseteq K$.

- 一般而言, K 的 Löwner–John 椭圆计算困难.
- 但在某些条件下, 可以在多项式时间内得到良好的近似.
- 椭圆法及其变体常用到某些“椭圆截面”的 Löwner–John 椭圆; 对这些特殊情形, 存在显式公式.

中心切割与半椭球的 Löwner–John 椭球

设 $\mathcal{E}(A, a)$ 为椭球, $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, 定义:

$$\mathcal{E}'(A, a, c) := \mathcal{E}(A, a) \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^\top x \leq c^\top a\}.$$

即通过超平面 $c^\top x = c^\top a$ 将椭球沿中心切为两半, $\mathcal{E}'(A, a, c)$ 是其一半. $\mathcal{E}'(A, a, c)$ 的 Löwner–John 椭球 $\mathcal{E}(A', a')$ 可由下式给出:

$$a' = a - \frac{1}{n+1}b,$$

$$A' = \frac{n^2}{n^2-1} \left(A - \frac{2}{n+1}bb^\top \right),$$

其中 $b = \frac{Ac}{\sqrt{c^\top Ac}}.$

中心切割与半椭球的 Löwner–John 椭球

中心切割: $\mathcal{E}'(A, a, c) := \mathcal{E}(A, a) \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^\top x \leq c^\top a\}$

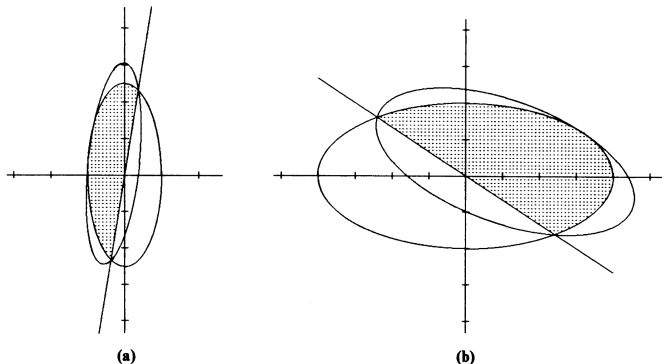


图: 中心切割

目录

背景

椭圆

基础椭圆法

基础椭圆法

目标：判定 $P = \{x \mid Cx \leq d\}$ 是否为空，或找到 $x \in P$.

算法 基础椭圆法

- 1: **Input:** 多面体 $P = \{x \in \mathbb{R} \mid Cx \leq d\}$, 初始化椭圆 $\mathcal{E}_0 \supseteq P$.
 - 2: **Output:** $x \in P$ 或 $P = \emptyset$.
 - 3: **for** $k = 0, 1, \dots, N$ **do**
 - 4: **if** $a_k \in P$ **then**
 - 5: **return** a_k
 - 6: **else**
 - 7: 存在 j 使得 $C_j x > C_j a_k$, $\mathcal{E}_{k+1} \leftarrow$ 包含 $\mathcal{E}_k \cap \{x \mid C_j x \leq C_j a_k\}$ 的
 最小椭圆
 - 8: **end if**
 - 9: **end for**
 - 10: **return** $P = \emptyset$
-

基础椭球法

目标：判定 $P = \{x \mid Cx \leq d\}$ 是否为空，或找到 $x \in P$.

- ① 如何初始化椭球 $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}(R^2 \mathbf{I}, 0)$ ，使 $P \subseteq \mathcal{E}_0$?

$$R = \sqrt{n} 2^L$$

- ② 如何计算 \mathcal{E}_{k+1} ?

$$a_{k+1} = a_k - \frac{1}{n+1} b_k, \quad A_{k+1} = \frac{n^2}{n^2 - 1} \left(A_k - \frac{2}{n+1} b_k b_k^\top \right)$$

$$\text{其中 } b_k = \frac{A_k c}{\sqrt{c^\top A_k c}}.$$

- ③ 如何确定 N ?

停止条件 N -椭球体积收缩率

引理 (椭球体积收缩率)

椭球 \mathcal{E}_{k+1} 与 \mathcal{E}_k 的体积满足 $\text{vol}(\mathcal{E}_{k+1})/\text{vol}(\mathcal{E}_k) < e^{-1/(2n)}$

证明.

为估计体积比, 先考虑特殊情况:

$$F := \mathcal{E}(I, 0) = S(0, 1), \quad c = (-1, 0, \dots, 0)^\top.$$

由更新公式可得:

$$b = (-1, 0, \dots, 0)^\top, \quad a' = a - \frac{1}{n+1}b = \left(\frac{1}{n+1}, 0, \dots, 0\right)^\top,$$

$$A' = \frac{n^2}{n^2-1} \left(I - \frac{2}{n+1}bb^\top \right) = \text{diag}\left(\frac{n^2}{(n+1)^2}, \frac{n^2}{n^2-1}, \dots, \frac{n^2}{n^2-1}\right).$$



停止条件 N -椭圆体积收缩率

证明.

由 $\text{vol}(\mathcal{E}(A, a)) = V_n \sqrt{\det A}$ 得:

$$\frac{\text{vol}(F')}{\text{vol}(F)} = \sqrt{\det A'} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{n}{n-1} \right)^{\frac{n-1}{2}}.$$

取自然对数得:

$$\ln \frac{\text{vol}(F')}{\text{vol}(F)} = \frac{1}{2} \left[(n+1) \ln \frac{n}{n+1} + (n-1) \ln \frac{n}{n-1} \right].$$

利用幂级数展开 $\ln(1 \pm \frac{1}{n}) = \pm \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \pm \frac{1}{3n^3} - \dots$ 得到

$$(n+1) \ln(1 + \frac{1}{n}) + (n-1) \ln(1 - \frac{1}{n}) > -\frac{1}{n},$$

从而 $\text{vol}(F')/\text{vol}(F) < e^{-1/(2n)}$. □

停止条件 N -椭圆体积收缩率

证明.

对一般椭圆 $\mathcal{E} = \mathcal{E}(A, a)$, 有

$$\mathcal{E} = Q\mathcal{E}(I, 0) + a = QF + a.$$

存在正交矩阵 M 将 Qc 旋转为 $(-1, 0, \dots, 0)^\top$ 的倍数. 定义仿射变换

$$T(x) := QM^\top x + a, \quad T^{-1}(x) = MQ^{-1}(x - a).$$

则 $T(F) = E$, $T(F') = E'$, 且仿射变换保持体积比:

$$\frac{\text{vol}(E')}{\text{vol}(E)} = \frac{\text{vol}(F')}{\text{vol}(F)} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} < e^{-1/(2n)}.$$



停止条件 N

引理

设 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Cx \leq d\}$ 为满维整数多面体, 且初始椭球 $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}(A_0, a_0)$ 取 $a_0 = 0$ 、 $A_0 = R^2 I$, 其中 $R = \sqrt{n} 2^L$. 若取

$$N = 2n((2n+1)\text{size}(C) + n\text{size}(d) + 2n^2)$$

步迭代, 则 $\text{vol}(\mathcal{E}_N) \leq 2^{-(n+1)\text{size}(C)-n^2} \leq \text{vol}(P)$

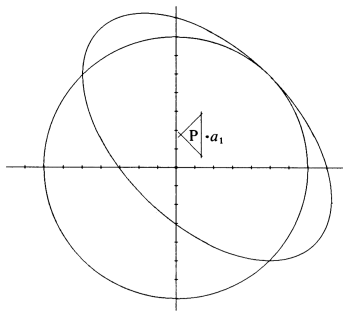
证明.

初始时 $\mathcal{E}_0 \subseteq \{x \mid \|x\|_\infty \leq R\}$, 因此 $\text{vol}(\mathcal{E}_0) \leq (2R)^n \leq 2^{n(L+n)}$. 根据体积收缩引理, 每一步体积至少缩小因子 $e^{-1/(2n)}$, 故

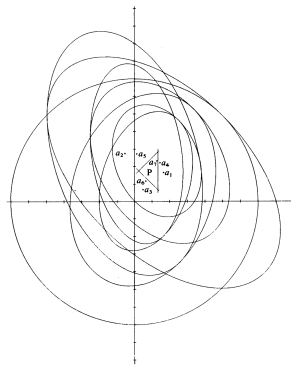
$$\text{vol}(\mathcal{E}_N) < e^{-N/(2n)} \text{vol}(\mathcal{E}_0) \leq e^{-N/(2n)} (2R)^n.$$

结合 P 的体积下界 $\text{vol}(P) \geq 2^{-(n+1)\text{size}(C)-n^2}$, 得 $\text{vol}(\mathcal{E}_N) < \text{vol}(P)$. □

椭圆法示例



(a) 第一次迭代



(b) 第七次迭代

图: Löwner-John 椭圆与其切割后的半椭圆对比

分离 Oracle

分离 Oracle: 给定点 x , Oracle 要么告知 $x \in P$, 要么给出一个超平面分离 p 与 K .

- 对于当前的椭球 $\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_k(A_k, a_k)$, 若 $a_k \notin \{x | Ax \leq b, x \geq 0\}$, 则找出 $A_j a_k \leq b_j$, 并用 $\{x | A_j x \leq A_j a_k\}$ 来切椭球.
- 若 a_k 满足约束, 说明我们找到了一个可行解, 为了找到最小化目标的解, 可以用 $\{x | c^\top x \leq c^\top a_k\}$ 来切椭球.

实践

- 在大多数线性规划上速度不如单纯形或内点法.
- 主要理论价值: 用于证明可多项式求解或构建分离-优化等价.
- 数值稳定性: 重复切割同方向会导致“针状”椭球, 需注意精度控制.

参考文献



M. Grötschel et al., Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization. 1993.



数学规划与运筹学 (11) Khachyan 椭球法.
<https://zhuanlan.zhihu.com/p/708456821>.