寻找多竞赛的均衡

2025-2026 学年秋冬学期计算经济学讨论班

郑涵文

zhwen@zju.edu.cn

2025 年 10 月 16 日

Introduction

许多现实问题都能抽象成竞赛的形式：竞赛的设计者想要最大化他的效用（一般是参赛者的投入），而参赛者想要找到一个最好的策略使得自己能在竞赛中净收益（奖励减去投入）最大化，因此这是一个设计者与参赛者之间的对抗博弈，也可以从扩展式博弈（博弈树）的角度去理解：竞赛设计者先给出自己的策略，参赛者们随后根据竞赛的规则给出自己的策略.

刻画竞赛

我们使用两个特质去刻画一个竞赛：竞赛的总奖金、竞赛的奖金分配规则．竞赛设计者实际上是在调整这两个特质，以达到自己的目标：最大化所有参赛者的投入总和．

1. 竞赛奖金：R，一个正实数．
2. 奖金分配规则：用一个（一组）函数 f^k 刻画，其中 k 表示总共有 k 个参赛者．假设参赛者投入的努力为 $e_1, e_2, \cdots, e_k$，那么我们有分配结果 $f^k(e_1, e_2, \cdots, e_k) = (q_1, q_2, \cdots, q_k)$，我们一般认为分配结果是参赛者以 q_i 的概率获得 R 的奖金，或者说参赛者 i 获得了 $q_i \cdot R$ 的奖金．需要注意的是，k 是一个变量，一个竞赛中对于每个参赛者数量 k 都有一个对应的分配函数 f^k．

刻画参赛者

我们使用一个函数 g 去刻画每个参赛者的能力：$g(v) = e$ 表示者参赛者投入了 v 的代价后，它的努力值为 e. 我们一般认为 g 是一个单调递增的函数，且 $g(0) = 0$. 这个刻画很自然，因为每个参赛者能力不同，如果一个能力更差的人想要和更强的人站在同一起跑线上，那么他肯定要投入更多的代价.
现在我们能够计算出能力函数为 g_i 的参赛者 i 在投入成本 v_i 后的净收益：$f_i^k(e_1, e_2, \cdots, e_k) \cdot R - v_i$. 需要注意我们有 $e_i = g_i(v_i)$.

单竞赛

我们首先简要介绍一下单竞赛博弈，此时只有一个竞赛设计者和 k 个参赛者．博弈分为两个阶段：第一个阶段，设计者宣布竞赛机制（奖金 R 与分配规则 f^k）；第二个阶段，参赛者们根据竞赛机制给出自己的投入策略（即一个关于 v 的分布）．
为了简化问题，接下来我们只研究所有参赛者是无差异的情况，并且每个参赛者的能力函数 $g(v) = v$．那么参赛者的净收益现在可以写成 $f_i^k(e_1, e_2, \cdots, e_k) \cdot R - e_i$．
我们对于参赛者们在第二阶段的均衡非常感兴趣．因此我们先定义 C_R 表示所有满足以下条件：总奖金为 R；在有参赛者时奖金一定完全分配出去；对于所有的参赛者数量 $k > 0$ 都存在参赛者对称纳什均衡的竞赛集合．

单竞赛

那么对于任意一个竞赛 $C \in \mathcal{C}_R$，它有参赛者对称的纳什均衡，说明在这个均衡下每个参与者的投入策略 $e_1, \cdots, e_k$ 是独立且服从同一分布 F 的．因此，每个参赛者有同样的期望净收益，此值只与竞赛 C 和参赛者数量 k 有关，记作 $\gamma_C(k)$，具体写出来能得到 $\gamma_C(k) = \mathbb{E}_{e_1,\cdots,e_k \sim F}[f_i^k(e_1, \cdots, e_k) \cdot R - e_i]$．又因为奖金全分配且参赛者无差异，有 $\mathbb{E}_{e_1,\cdots,e_k \sim F}[f_i^k(e_1, \cdots, e_k) \cdot R] = R/k$，因此 $\gamma_C(k) = R/k - \mathbb{E}_{e_i \sim F}[e_i]$．
机制设计者的收益也能表示出来：
$\mathbb{E}_{e_1,\cdots,e_k \sim F}[\sum_{i=1}^k e_i] = k \cdot \mathbb{E}_{e_i \sim F}[e_i] = k \cdot (R/k - \gamma_C(k)) = R - k \cdot \gamma_C(k)$．因此机制设计者的收益只与 $\gamma_C(k)$ 有关，$\gamma_C(k)$ 越小，机制设计者的收益越大．

Tullock 竞赛

一个由参数 $\tau \in [0, +\infty]$ 刻画的 Tullock 竞赛采用如下分配函数：

$$f_\ell^k(e_1, \ldots, e_k) = \begin{cases} \dfrac{e_\ell^\tau}{\sum_{j=1}^k e_j^\tau}, & \text{若存在} j \in \{1, \ldots, k\} \text{ 使} e_j > 0, \\ \dfrac{1}{k}, & \text{否则.} \end{cases}$$

当 $\tau \to +\infty$ 时，该竞赛退化为“全支付拍卖（APA）”：努力最高者确定获胜（若多人并列最高，则他们等概率获胜，以保持匿名性）. Tullock 竞赛是匿名的，并且把奖金全额分配给参赛者.

Tullock 竞赛只需要用 τ 进行刻画，并且随着 τ 的变化它具有了不同的含义：τ 越小表示竞赛越“随机”，竞赛者的努力更难以反映到实际的胜率上，当 $\tau = 0$ 时无论参赛者付出多少努力，每个参赛者的获胜概率都为 $1/k$；τ 越大表示竞赛越“确定”，竞赛者的努力更能反映到实际的胜率上，当 $\tau \to +\infty$ 时，竞赛退化为“全支付拍卖（APA）”：努力最高者确定获胜（若多人并列最高，则他们等概率获胜）.

Tullock 竞赛被证明了它对于所有参数 τ 都存在对称纳什均衡，所以它属于 C_R.

多竞赛

目前对于单竞赛的分析已经比较成熟，而多竞赛还有比较大的研究空间．在多竞赛博弈中，存在多个竞赛设计者，每个竞赛设计者都设计一个竞赛，参赛者们随后选择一个竞赛（或是混合策略，给出参加各个竞赛的概率分布 p）去参加并给出投入策略．

多竞赛定义

形式化地，我们有多竞赛的定义：

定义

定义 2.5 一个完全信息竞赛竞争博弈记作

$$\mathrm{CCG}\big(m, n, (R_i)_{i=1}^m, (\mathcal{S}_i)_{i=1}^m\big),$$

其中 $m \geq 2$：竞赛设计者数量；$n \geq 1$：参赛者数量；$R_i > 0$：竞赛 i 的奖金；$\mathcal{S}_i \subseteq \mathcal{C}_{R_i}$：设计者 i 可选择的竞赛集合．博弈分两阶段：

1. 设计者同时选择竞赛．每位设计者 i 从 $\mathcal{S}_i$ 中选出竞赛 C_i；所有参赛者观察到选定的竞赛向量 $(C_1, \ldots, C_m)$．
2. 参赛者进行正常形式博弈，决定加入哪个竞赛．
    - 每位参赛者的纯策略是选择一个竞赛；
    - 允许混合策略：参赛者 ℓ 以概率 $p_{\ell i}$ 加入竞赛 C_i，满足 $\sum_{i=1}^m p_{\ell i} = 1$. 记参赛者 ℓ 选择的概率分布为 $\mathbf{p}_\ell = (p_{\ell 1}, \ldots, p_{\ell m})$.

效用

在参赛者选定了要参与的竞赛后，各方的收益其实已经可以计算出来了．如果有 $k \geq 1$ 个参赛者选择了竞赛 C_i，那么每个参赛者得到收益为 $\gamma_{C_i}(k)$，竞赛设计者 i 的收益为 $R_i - k \cdot \gamma_{C_i}(k)$．如果没有参赛者选择竞赛 C_i，我们定义每个竞赛有一个保留系数 $\alpha_i \in [0, 1)$，此时我们看作竞赛设计者能够保留一部分奖金，收益为 $\alpha_i R_i$．

效用

在第二阶段，每位参赛者拥有有限个 m 个纯策略，且博弈是对称的，因此根据 Nash (1951) 至少存在一个对称混合策略纳什均衡．我们始终假设参赛者采用对称均衡，从而所有参赛者的概率分布相同：$\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_2 = \cdots = \boldsymbol{p}_n$．
记 $\boldsymbol{p}(C_1, \ldots, C_m) \in \mathbb{R}^m$ 为当设计者在第一阶段选择竞赛 $(C_1, \ldots, C_m)$ 时，参赛者在某一对称均衡下选择的概率分布．若存在多个对称均衡，$\boldsymbol{p}(C_1, \ldots, C_m)$ 可以是其中任意一个．
假设设计者选择的竞赛向量为 $\boldsymbol{C} = (C_1, \ldots, C_m)$，且参赛者采用对称参与概率 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{C}) = (p_1, \ldots, p_m)$．对于参加竞赛 C_i 的一名参赛者而言，其他也加入 C_i 的参赛者人数服从二项分布 $\mathrm{Bin}(n-1, p_i)$．因此，该参赛者在 C_i 中的期望效用记为 $\beta(C_i, p_i)$，有

$$\beta(C_i, p_i) = \mathbb{E}_{k\sim \mathrm{Bin}(n-1,p_i)}\big[\gamma_{C_i}(k+1)\big] = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p_i^k (1-p_i)^{n-1-k} \gamma_{C_i}(k+1).$$

令 $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{C}) = \{i : p_i(\boldsymbol{C}) > 0\}$ 表示参赛者以正概率参与的竞赛指标集合（即 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{C})$ 的支撑集）．
类似地求期望能写出每个竞赛设计者 i 在竞赛向量 $\boldsymbol{C} = (C_1, \ldots, C_m)$ 下，自己的竞赛 C_i 的期望效用 $u_i(C_i, \boldsymbol{C_{-i}})$．

MDU 与 MRD 竞赛

多竞赛相比单竞赛，多了一个竞赛设计者之间的博弈：每个竞赛设计者都要考虑吸引提高福利（降低参赛门槛）以吸引更多的参赛者与降低福利（提高参赛门槛）以激发参赛者的努力投入之间的权衡．我们先前研究了参赛者之间的均衡，因为参赛者是完全对称的，所以对称均衡的研究比较简单．现在，我们想要研究怎样的竞赛向量 $\boldsymbol{C} = (C_1, \ldots, C_m)$ 是一个设计者之间的均衡．

MDU 与 MRD 竞赛

我们首先需要规定竞赛设计者的策略空间 S_i，将其限制在一些有比较好且自然的性质的竞赛中．因为如果设计者的策略空间过大，均衡可能不存在．文章主要研究了三类竞赛：MDU 竞赛、MRD 竞赛、FRD 竞赛．

定义

- 竞赛 $C_i \in \mathcal{C}_{R_i}$ 具有**单调递减效用**（MDU），如果参赛者的对称纳什均衡效用随参赛人数增加而单调不增：$\gamma_{C_i}(1) \geq \gamma_{C_i}(2) \geq \cdots \geq \gamma_{C_i}(n)$.
- 竞赛 $C_i \in \mathcal{S}_i \subseteq \mathcal{C}_{R_i}$ 在集合 $\mathcal{S}_i$ 内具有**最大耗散**（MRD），如果

$$\forall C_i' \in \mathcal{S}_i,\ \forall k \in \{1, \ldots, n\}, \quad \gamma_{C_i}(k) \leq \gamma_{C_i'}(k).$$

  换言之，MRD 竞赛在任何参赛人数下都**最小化参赛者的对称纳什均衡效用**，亦即**最大化设计者的效用**．记 $\mathrm{MRD}(\mathcal{S}_i) \subseteq \mathcal{S}_i$ 为 $\mathcal{S}_i$ 内所有 MRD 竞赛的集合．
- 竞赛 $C_i \in \mathcal{C}_{R_i}$ 具有**完全耗散**（FRD），如果

$$\gamma_{C_i}(1) = R_i, \quad \text{且} \quad \gamma_{C_i}(k) = 0 \text{ 对 } k = 2, \ldots, n.$$

主要结论

我们可以得到，在 CCG 博弈中，每位设计者选择既满足 MRD 又满足 MDU 的竞赛构成一个子博弈完美均衡；更进一步，若所有可选竞赛都满足 MDU，则 MRD 竞赛还是占优策略.

Theorem

1. 对任意给定的竞赛竞争博弈

$$\mathrm{CCG}\big(m, n, (R_i)_{i=1}^m, (\mathcal{S}_i)_{i=1}^m\big),$$

若每个 $\mathcal{S}_i \subseteq \mathcal{C}_{R_i}$ 都包含一个同时具备“最大耗散”与“单调递减效用”性质的竞赛，记为 $T_i \in \mathrm{MRD}(\mathcal{S}_i)$，则策略组合 $(T_1, \ldots, T_m)$ 是一个参赛者对称的子博弈完美均衡（SPE）.

2. 此外，若每个 $\mathcal{S}_i$ 中的竞赛全部满足 MDU，则对任意 i，T_i 都是设计者 i 的占优竞赛.

3. 由第 1 条直接推出的推论：对任意上述形式的 CCG，若每个 $\mathcal{S}_i$ 都包含一个完全租耗散竞赛（例如 APA），记为 F_i，则 $(F_1, \ldots, F_m)$ 也是一个参赛者对称的 SPE.

此外能够证明该定理给出的均衡是竞赛设计者帕累托最优的.

主要结论

反过来，如果说我们已经有一个均衡了，那么构成均衡的这些竞赛肯定也和 MRD 有关：

Theorem

固定任意竞赛竞争博弈

$$\mathrm{CCG}\big(m, n, (R_i)_{i=1}^m, (\mathcal{S}_i)_{i=1}^m\big),$$

其中每个 $\mathcal{S}_i \subseteq \mathcal{C}_{R_i}$ 仅包含 MDU 竞赛，且对每个 i 有 $\mathrm{MRD}(\mathcal{S}_i) \neq \varnothing$. 取 $T_i \in \mathrm{MRD}(\mathcal{S}_i)$，并令 $\tilde{p}_i = p_i(T_1, \dots, T_m)$ 为参赛者在均衡中进入竞赛 T_i 的概率，记 $P = \mathrm{Supp}(\boldsymbol{T}) = \{i : \tilde{p}_i > 0\}$ 为当竞赛为 $(T_1, \dots, T_m)$ 时参赛者以正概率进入的竞赛指标集. 则

1. 对任意参赛者对称的子博弈完美均衡 $(C_1, \dots, C_m)$，有 $p_i(C_1, \dots, C_m) = \tilde{p}_i$.
2. 若 $|P| \geq 2$，则 $(C_1, \dots, C_m) \in \mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_m$ 是参赛者对称的子博弈完美均衡当且仅当对所有 $i \in P$ 有 $C_i \in \mathrm{MRD}(\mathcal{S}_i)$.
3. 若 $|P| = 1$，令 $P = \{i_0\}$，则 $(C_1, \dots, C_m) \in \mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_m$ 是参赛者对称的子博弈完美均衡当且仅当

$$\gamma_{C_{i_0}}(n) = \gamma_{T_{i_0}}(n).$$

应用于 Tullock 竞赛

上述结论为研究 Tullock 竞赛提供了一个很好的视角．Tullock 竞赛已经被证明有以下的性质：

- 每一个 Tullock 竞赛都满足 MDU．
- 任何一个参数 $\tau \geq 2$ 的 Tullock 竞赛都具有完全耗散．
- 若 $\mathcal{S}$ 是某个参数范围内所有 Tullock 竞赛的集合，且该范围的最大值 $\tau_{\max}$ 存在且不超过 2，则参数为 $\tau_{\max}$ 的 Tullock 竞赛是 $\mathrm{MRD}(\mathcal{S})$ 中唯一的竞赛．

因此能够得到推论：

Corollary

1. 令 $\mathcal{T}_{R_i}$ 为奖金等于 R_i 的所有 Tullock 竞赛的集合．则在竞赛竞争博弈 $\mathrm{CCG}\left(m, n, (R_i)_{i=1}^m, (\mathcal{T}_{R_i})_{i=1}^m\right)$ 中，APA（即 $\tau \to \infty$）以及任何 $\tau \geq 2$ 的 Tullock 竞赛对每位设计者都是占优竞赛．
2. 若 $\mathcal{S}_i$ 是某个参数范围内所有 Tullock 竞赛的集合，且该范围的最大值 $\tau_i^{\max}$ 存在且不超过 2，则参数为 $\tau_i^{\max}$ 的 Tullock 竞赛是每位设计者在博弈 $\mathrm{CCG}\left(m, n, (R_i)_{i=1}^m, (\mathcal{S}_i)_{i=1}^m\right)$ 中唯一的占优竞赛．