

21188142: 课程综合实践 II (数据要素市场)

2024-2025 学年短学期

HW 4: 动态博弈与合作博弈论基础

教师: 刘金飞, 助教: 吴一航

日期: 2024 年 7 月 11 日

4.1 产量领导模型的计算

设市场上有 1 和 2 两个厂商, 厂商 1 是大厂商, 是产量制定的领导者; 厂商 2 是小厂商, 是产量制定的跟随者. 用 y_1, y_2 表示两个厂商的产量, 因此总产量为 $y_1 + y_2$. 设总产量为 $y_1 + y_2$ 时的市场价格为 $2 - y_1 - y_2$, 并且厂商 1 和 2 的生产一件产品的单位生产成本分别为 c_1, c_2 , 求在该假设下二者的子博弈完美均衡产量.

4.2 贝叶斯纳什均衡

注: 本次作业 4.2 和 4.3 只需要选择其中一题完成即可, 如果两题都完成, 多的分数可以用于补充其余作业题的分数.

考虑如下的不完全信息博弈:

- $I = \{1, 2\}$: 1 和 2 分别是行、列参与人
- $T_1 = \{A, B\}, T_2 = \{C\}$: 参与人 1 有两个类型, 参与人 2 有一个类型
- $p(A, C) = p(B, C) = \frac{1}{2}$: 参与人 1 的两个类型具有相同的概率
- 因此有两种状态博弈, 下图所示矩阵给出了两种状态博弈的收益矩阵 (左图为 $t = (A, C)$ 时的状态博弈, 右图为 $t = (B, C)$ 时的状态博弈):

	L	R
T_1	1, 0	0, 2
B_1	0, 3	1, 0

	L	R
T_2	0, 2	1, 1
B_2	1, 0	0, 2

求解该博弈的贝叶斯纳什均衡 (提示: 求解出的贝叶斯纳什均衡集合的基数可能是连续统的, 你只需要表达出这一集合需要满足的约束即可).

4.3 纸牌游戏

注：本次作业 4.2 和 4.3 只需要选择其中一题完成即可，如果两题都完成，多余的分数可以用于补充其余作业题的分数。

考虑一个非常简单的纸牌游戏：有两个参与人 1 和 2，两张纸牌 A 和 K，A 和 K 都可能成为游戏的底牌，且两者成为底牌的概率相等。首先自然决定了游戏的底牌，接下来博弈按如下顺序进行：

1. 参与人 1 看到了底牌，参与人 2 没有看底牌；
2. 参与人 1 看到底牌后如果选择放弃，此时收益为 $(-1, 1)$ ，即参与人 1 付出 1 的代价，参与人 2 获得 1 的收益；
3. 参与人 1 看到底牌后如果选择加注
 - (a) 此时参与人 2 可以选择放弃，此时收益为 $(1, -1)$ ，即参与人 1 获得 1 的收益，参与人 2 付出 1 的代价；
 - (b) 参与人 2 可以选择跟注，此时如果底牌是 A，收益为 $(2, -2)$ ，否则如果底牌是 K，收益为 $(-2, 2)$ 。

求解参与人 1 的最优策略以及此时 2 的最优应对（类比上课讲到的推荐信问题，这里参与人 1 也是要设计信号机制使得自己效用最大化，1 不能什么时候都加注，这样对手就知道 1 在无理取闹；1 也不能只在看到 A 的时候加注，这样太诚实对手在你加注时都会选择放弃，因此要设计一个折中的方案）。

4.4 Shapley 值的性质

证明：Shapley 值是满足对称性的解概念。

4.5 Shapley-Shubik 权力指数

联合国安理会是国际政治体系中最重要机构，它是在二战之后成立的。当时，安理会是由五个常任理事国和六个非常任理事国组成的。安理会最初的宪章规定，一项决议被采纳，必须获得至少七个成员国的赞成票。此外，每个常任理事国对每一项决议都有否决权。忽略安理会成员弃权的可能性，这意味着，一项决议要能够在安理会获得通过，它必须获得所有五个常任理事国和至少两个非常任理事国的支持。

安理会常任理事国手中的否决权一直是观察家批评的焦点，观察家反对的是常任理事国和非常任理事国之间的“权力不平衡”。批评的声浪使得安理会在 1965 年进行了重组，然后确立了一直维持到今天的安理会结构。新的安理会结构增加了四个非常任理事国，一项决议要获得通过，必须获得九个成员国的

支持, 其中跟以前一样, 必须包括五个常任理事国, 即此后决策的通过, 除了获得五个常任理事国的支持外, 还必须获得至少四个非常任理事国的支持, 跟以前的必须获得至少两个非常任理事国的支持相比, 显著改变了安理会的权力结构. 但是这个看法站得住脚吗?

Shapley-Shubik 权力指数可以使我们用定量的方法来探究这个问题. 为此, 我们计算两个结构下 (1965 年之前和之后), 安理会成员国的沙普利值, 然后验证 1965 年重组之后的安理会, 其成员国的沙普利值发生了哪些改变. 1965 年之前的安理会结构可以描述为一个合作博弈. 如果我们用 P 表示安理会常任理事国的集合, 用 NP 表示非常任理事国的集合, 那么这个博弈的参与人集由 $N = P \cup NP$ 给出, 特征函数 (忽略弃权的可能性) 给出如下:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } |P \cap S| \geq 5 \text{ 且 } |S| \geq 7 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

同理, 1965 年重组之后的安理会的特征函数表达如下:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } |P \cap S| \geq 5 \text{ 且 } |S| \geq 9 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

回答以下问题:

1. 计算 1965 年之前每个常任理事国和非常任理事国的 Shapley 值, 并计算常任理事国的 Shapley 值之和与非常任理事国的 Shapley 值之和的比值;
2. 计算 1965 年之后每个常任理事国和非常任理事国的 Shapley 值, 并计算常任理事国的 Shapley 值之和与非常任理事国的 Shapley 值之和的比值;
3. 根据前面的计算结果, 评价 1965 年重组之后的安理会是否改变了安理会的权力结构.