



纳什均衡的计算复杂性（二）

2024-2025 学年春夏学期计算经济学讨论班 均衡的计算

金政羽

Clovers2333@gmail.com

浙江大学计算机科学与技术学院

2025 年 3 月 21 日

Contents

- Introduction
 - The End-of-Line Problem
 - From Lemke-Howson Algorithm...
- Brouwer and PPAD
 - Sperner's Lemma
 - Proof of Brouwer - Simplex Version
 - From Sperner to PPAD
 - The PPAD-Completeness of Sperner
- Reduction to Bimatrix Game
 - Generalized Circuit Problem
 - The Reduction
- Complexity of Computing Two-Player Nash Equilibria
 - Approximation Problems
 - Smoothed Models of Bimatrix Games
 - Discrete Brouwer Fixed Points
 - Main Results Outline

The End-of-Line Problem

首先回忆一下 PPAD 复杂类的生成问题：

定义 (The End-of-Line Problem)

- 给定一个有向图 $G = (V, E)$;
- 每个顶点的入度和出度最多为 1;
- 图中存在一个已知的源顶点（入度为 0），作为路径跟踪的起点；目标是找到另一个源顶点或汇顶点（出度为 0），作为问题的解。

From Lemke-Howson Algorithm...

在上一节课中，我们成功把一般的 Bimatrix Game 归约到了 Symmetric Bimatrix Game，然后在这个基础上，我们使用 Lemke-Howson Algorithm 来求得纳什均衡。

Lemke-Howson Algorithm 最后生成的图本质上就是一个 PPAD 问题，而我们又已经把一般的 Bimatrix Game 归约到了图上游走问题，所以我们可以得出求解 Bimatrix Game 是 PPAD 的。

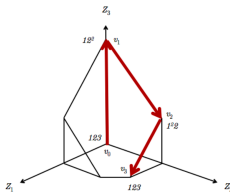


图: Lemke-Howson Algorithm

From Lemke-Howson Algorithm...

延续这个思想，我们接着试图说明 Bimatrix Game 是 PPAD-Complete 的，也就是说我们要把任意的图上游走问题规约到纳什均衡问题——

这意味着，对于一个一般的有向图，我们要让它变成一个多胞体，但是我们已经丢失了原本多胞体的拓扑性质，重新构造一个多胞体出来似乎不太现实。

Another Method

我们考虑另一个和纳什均衡相关的定理：**Brouwer Fixed Point Theorem**.
具体来说，**Brouwer** 不动点通过构造了一个在策略空间上函数 f ， $f(x) - x$ 指向每个人在当前情况下的最优决策偏移。

我们用 **Brouwer** 不动点定理证明了纳什定理，也就是我们把纳什均衡问题归约到了 **Brouwer** 不动点问题，通过不动点的存在性证明了纳什均衡点的存在性。

那么如果我们反过来，试图把 **Brouwer** 不动点问题归约到纳什均衡问题——也就是对于任意一个函数，我们想要构造一个博弈，使得能够把 $f(x) - x$ 的方向映射到构造博弈的最优偏移。

似乎看上去容易实现了一点？这也就是我们接下来的任务：

- 1 证明求解 **Brouwer** 是 PPAD-Complete 的；
- 2 构造一个从 **Brouwer** 到纳什均衡的归约。

Brouwer Fixed Point

Brouwer 不动点是针对连续的函数，但是 EoL 问题却是离散的——因此我们想要构造 Brouwer 不动点的离散形式。

回顾一下 Brouwer 不动点证明的过程——将单纯形染色以后使用 Sperner 引理。

定义 (Sperner's Lemma - 2D version)

对于一个三角形 ABC，三角形的边和内部有若干点，我们将 ABC 分别染上三种不同的颜色，对于三角形边上的点，要求染色必须是相邻两顶点的颜色；对于内部的点，随意染色。

Sperner's Lemma 的结论是：对于任意的一个三角剖分，至少有一个简单三角形三个顶点颜色不同。

Brouwer Fixed Point

搬运一下 wyy 的讲义：

特殊情况的证明

Brouwer 不动点定理与纳什定理

接下来将开始证明这一特殊情况，证明分为三步。首先注意到，对任意的 $y \in X(n)$ ，都有 $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ ，其中 e_i 是 \mathbb{R}^n 的自然基。于是 y 的支撑 $\text{supp}_{X(n)}(y) = \{i : y_i > 0\}$ 。

第一步：对每个 $y \in X(n)$ ，存在 $i \in \text{supp}_{X(n)}(y)$ 满足 $f_i(y) \leq y_i$

根据 $f : X(n) \rightarrow X(n)$ 可知 $\sum_{i=1}^n f_i(y) = \sum_{i=1}^n y_i = 1$ 且 $f_i(y) \geq 0$ ，反证法，假设对每个 $i \in \text{supp}_{X(n)}(y)$ 都有 $f_i(y) > y_i$ ，而我们知道对每个 $i \notin \text{supp}_{X(n)}(y)$ ， $f_i(y) \geq 0 = y_i$ ，因此此时有 $\sum_{i=1}^n f_i(y) > \sum_{i=1}^n y_i = 1$ ，与 f 是 $X(n)$ 到 $X(n)$ 的映射矛盾。

Brouwer Fixed Point

特殊情况的证明

Brouwer 不动点定理与纳什定理

第二步：定义一个着色

因为紧集上的连续函数都是一致连续的，因此对于任意的 $\varepsilon > 0$ ，存在 $\delta > 0$ ，使得对于任意的 $x, y \in X(n)$ ，只要 $\|x - y\|_\infty < \delta$ ，就有 $\|f(x) - f(y)\|_\infty < \varepsilon$ 。从而我们定义 $X(n)$ 的划分 \mathcal{T}_ε ，使得对于任意的 $T_\varepsilon \in \mathcal{T}_\varepsilon$ ， $\rho(T_\varepsilon) < \delta$ 。为了之后讨论的方便，这里的 δ 我们都取小于等于 ε 的值。

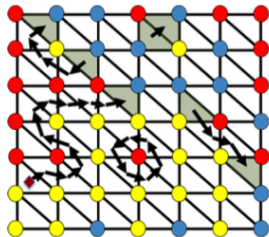
定义一个着色 c ，使得对每个 $x \in Y(\mathcal{T}_\varepsilon)$ ， $c(x) = i$ 当且仅当 $i \in \text{supp}_{X(n)}(x)$ 且 $f_i(x) \leq x_i$ 。根据第一步的讨论，这样的 i 一定存在，并且这个着色是合适的，因为 $c(x)$ 取的是 x 的支撑集中的某个指数。根据 Sperner 引理，我们知道至少有一个完美着色的 $n - 1$ 维单纯形 $T_\varepsilon \in \mathcal{T}_\varepsilon$ 。

Sperner Problem

在刚才的证明中，我们把连续的 Brouwer 不动点问题归约到了离散的 Sperner 引理问题，也可以称为 Discrete Brouwer 问题，因为我们的目标是 Bimatrix Game，所以我们接下来只讨论 2D-Sperner 问题，并说明它是 PPAD-Complete 的。

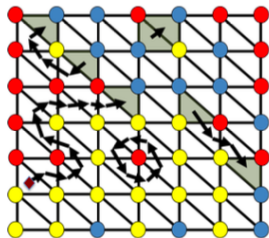
单纯形染色并划分后会有很多简单三角形，我们将每个三角形视为一个顶点，接下来的任务是构造顶点之间的连边。

Sperner Problem



- ① 定义点集：我们只关注同时具有红色和黄色顶点的三角形；
- ② 定义边集：如果两个三角形共享一条红-黄边，那么则称这两个三角形对应的顶点相连（先不定向）；
- ③ 定义起始点：对于单纯形的红-黄顶点，找到唯一的红-黄边。

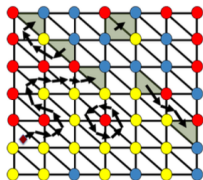
Sperner Problem



那么问题来了——凭什么红黄顶点就一定有唯一的红黄边？

事实上是不一定的，但是我们可以单纯形的红黄边外面再加“一排点”，这一排点的值域是原本的单纯形——再按照之前的染色规则，我们可以保证这一排只有单一的红点 / 黄点。

Sperner Problem



容易发现，经过一定的边的定向，我们可以满足 EoL 问题的定义：有一个起始点，每个点入度和出度最多为 1，我们要找的是另外一个入度为 0 / 出度为 0 的点，在图中也就是三色的三角形，因此，Sperner 问题是 PPAD 问题。

Generalized Circuit Problem

接下来我们的任务是构造一个从 **Sperner** 到纳什均衡的归约，在此之前，我们要定义一个中间问题：**Generalized Circuit Problem**.

定义 (Generalized Circuit)

- 给定一个广义电路 C ，其中每个门有特定的功能（加法、乘法、比较等）；
- 每个门有若干输入和一个输出；
- 电路中的变量 $x_i \in [0, 1]$ ，表示电路中的连线上的值；
- 称一个电路是满足的，若电路中的每一个门，它的输入经过门的运算，能够等于门的输出。

Generalized Circuit Problem

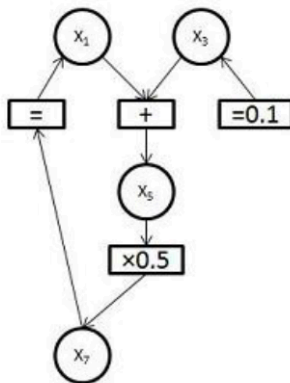


Figure 1: A typical generalized circuit

Generalized Circuit Problem

针对从 Sperner 到纳什均衡的归约，我们定义的具体的广义电路如下：

- 变量：共有 K ($K \in \mathbb{N}^+$) 个实变量 $X_1, X_3, \dots, X_{2K-1}$. 为了便于后续归约，我们使用奇数索引. 对于所有 $1 \leq i \leq K$, $X_{2i-1} \in [0, \frac{1}{K}]$.
- 算术门：电路中有多种二元到一元的算术门. 以图 2 所示的加法门为例：

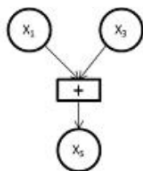


Figure 2: Addition gate

它执行以下操作： $X_5 = \min\{X_1 + X_3, \frac{1}{K}\}$ (注意 $X_5 \in [0, \frac{1}{K}]$). 值得注意的是，广义电路允许将变量与常数相乘的门，但不允许两个变量之间的乘法运算，这超出了广义电路的规范.

Generalized Circuit Problem

- 布尔门：电路中包含 *AND*、*OR* 和 *NOT* 等布尔门，但它们的运算方式与传统布尔电路略有不同。对于任意实变量 X_{2i-1} ：
 - 如果 $X_{2i-1} = 0$ ，等价于布尔值 *FALSE*
 - 如果 $X_{2i-1} = \frac{1}{K}$ ，等价于布尔值 *TRUE*
 - 如果 $X_{2i-1} \in (0, \frac{1}{K})$ ，对布尔门而言值为 *N/A* 或 *UNKNOWN*

布尔门仅适用于两个布尔值。具体来说，如果布尔门的所有输入都是布尔值 *TRUE/FALSE*，则布尔门按照经典布尔门运行；否则，布尔门输出任意值 $x \in [0, \frac{1}{K}]$ 。

需要注意的是，在我们定义的广义电路中，我们需要保证每个 X_{2i-1} 最多只能是一个门都输出，这在我们下一步的推导中非常重要。

Generalized Circuit Problem

定义 (Generalized Circuit Problem)

给定一个广义电路，求一个合法的变量赋值方案，使得电路中的每个门都满足输入输出条件。

现在我们的任务是：

- ① 构造一个从 Sperner 到 Generalized Circuit Problem 的归约；
- ② 构造一个从 Generalized Circuit Problem 到纳什均衡的归约。

Reduction from Sperner to Generalized Circuit

从 Sperner 问题出发, 我们需要给每种颜色赋值上一个具体的值.

基于点 P 的颜色, 我们将 P 与一个函数

$vec(P) : \{red, green, blue\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ 关联起来, 定义如下:

- ① $color(P) = red, vec(P) = (\frac{1}{K}, 0),$
- ② $color(P) = green, vec(P) = (0, \frac{1}{K}),$
- ③ $color(P) = blue, vec(P) = (-\frac{1}{K}, -\frac{1}{K}).$

Reduction from Sperner to Generalized Circuit

对于一个固定点 P ，我们定义一条包含 81 个点的线：

$$\{P_{-40}(x_{-40}, y_{-40}), P_{-39}(x_{-39}, y_{-39}), \dots, P_{-1}(x_{-1}, y_{-1}), \\ P = P_0(x_0, y_0), P_1(x_1, y_1), \dots, P_{39}(x_{39}, y_{39}), P_{40}(x_{40}, y_{40})\}$$

满足 $\forall -40 \leq i \leq 40, P_i(x_i, y_i) = P_0(x_0, y_0) + (\frac{i}{n}, -\frac{i}{n})$.

这里 n 是一个足够大的数（大于 40）或者是 2D-Sperner 问题的输入参数。根据上面的定义，每个点 $P_i(-40 \leq i \leq 40)$ 都有一个对应的颜色 $color(P_i)$ 和一个向量 $vec(P_i) = (x_i^v, y_i^v)$ 。

我们有以下几何引理：

引理

如果 $|\bar{x} = \frac{1}{81} \sum_{i=-40}^{40} x_i^v| < \frac{1}{3K}$ 且 $|\bar{y} = \frac{1}{81} \sum_{i=-40}^{40} y_i^v| < \frac{1}{3K}$ ，则包含 $P = P_0(x_0, y_0)$ 的简单三角形是三色的。

Reduction from Sperner to Generalized Circuit

证明.

证明采用反证法：如果 P 所在三角形不是三色的，那么也就是说，对于之前的函数 f ，必定存在一个维度使得 $f_i(P) > P_i$.

因为取的 n 足够大，所以我们可以把取的 81 个点视为在 P 的邻域中，因此对于这 81 个点，都有 $f_i(P) > P_i$.

所以这 81 个点中，最多只会有 2 种颜色，根据我们之前构造的 vec 函数，必定会有一个维度 $> \frac{1}{3K}$. □

根据这个引理，我们可以构造一个广义电路如下：

Reduction from Sperner to Generalized Circuit

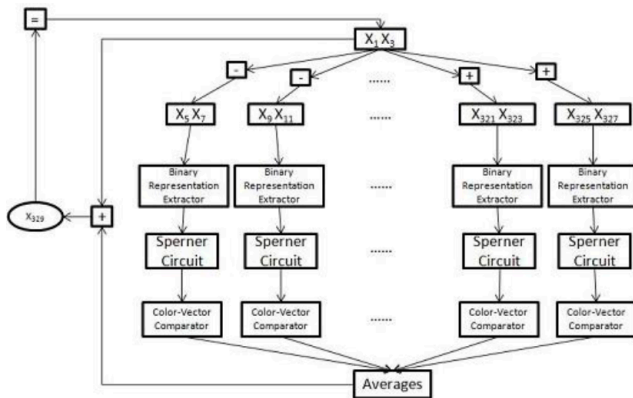


Figure 4: The reduced generalized circuit structure from 2D-Sperner problem

Reduction from Sperner to Generalized Circuit

解释一下电路中的元件：

首先我们用两个变量表示坐标中的每一个点；

- Binary Representation Extractor: 找到 P_{-40} 到 P_{40} 最近的点；
- Sperner Circuit: 将点的信息转化成颜色信息；
- Color-Vector Comparator: 将颜色信息转化成向量信息。

我们将 81 个向量求平均，然后判断是否满足小于 $\frac{1}{3K}$ 的条件。

找这么多点的目的是”降低误差”，避免在真实的 Sperner 问题中， P 相邻点不落在直线上的一定邻域内，而导致 Boolean Gate 输出 N/A 。

Reduction from Sperner to Generalized Circuit

可以发现，前面所构造的广义电路，是很难保证完整精确的，所以我们需要定义一个“近似”的广义电路，而这个定义也将帮助我们完成从广义电路到纳什均衡的归约。

例如对于下面这个 add gate，我们只需要满足：

$$\min\{x_1 + x_3, \frac{1}{K}\} - \varepsilon \leq x_5 \leq \min\{x_1 + x_3, \frac{1}{K}\} + \varepsilon$$

即可。

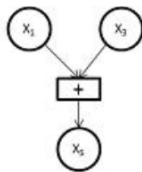


Figure 2: Addition gate

Reduction from Generalized Circuit to Nash

针对我们之前构造的广义电路，我们构造一个特殊的 Bimatrix Game $G = (A, B)$ ，其中： $A, B \in \mathbb{R}^{2^K \times 2^K}$ ；

我们构造的 Bimatrix Game 需要满足，对于任意的 K 变量的广义电路问题，Bimatrix Game 的纳什均衡就是广义电路的 $\frac{1}{2^K}$ -近似解。

我们选择 Matching Pennies Game 作为归约目标。对于任意 $K \in \mathbb{N}^+$ ，我们定义标准 K 匹配硬币游戏为 $G_K^* = (A^*, B^*)$ ，其中 $A^*, B^* \in \mathbb{R}^{2^K \times 2^K}$ 。游戏的收益矩阵定义如下：

- 对于所有 $1 \leq i \leq K$ ，

$$A_{2i-1, 2i-1}^* = A_{2i-1, 2i}^* = A_{2i, 2i-1}^* = A_{2i, 2i}^* = M = 2^{K+1}$$
- A^* 的其余部分填充为 0
- $B^* = -(A^*)^T$ (即 B^* 是 $-A^*$ 的转置)

Reduction from Generalized Circuit to Nash

引理

对于任意 G_K^* 的纳什均衡 (x, y) , 对于任意 $1 \leq i \leq K$ 都满足:
 $x_{2i-1} + x_{2i} = \frac{1}{K}$ 且 $y_{2i-1} + y_{2i} = \frac{1}{K}$.

我们可以扰动一个标准 K 匹配硬币游戏, 得到一个近似 K 匹配硬币游戏.

定义

$G'_K = (A', B')$ 是一个近似 K 匹配硬币游戏, 如果对于所有 $1 \leq i \leq 2K, 1 \leq j \leq 2K$, 都有 $0 \leq A'_{ij} - A^*_{ij}, B'_{ij} - B^*_{ij} \leq 1$.

引理

如果 $G'_K = (A', B')$ 是一个近似 K 匹配硬币游戏, 那么对于 G'_K 的任意纳什均衡 (x, y) , 对于所有 $1 \leq i \leq K$, 都有
 $\frac{1}{K} - \epsilon \leq x_{2i-1} + x_{2i}, y_{2i-1} + y_{2i} \leq \frac{1}{K} + \epsilon$, 其中 $\epsilon = \frac{1}{2K}$.

Reduction from Generalized Circuit to Nash

证明.

我们采用反证法. 不失一般性, 假设存在 $1 \leq i \leq K$, 使得 $x_{2i-1} + x_{2i} < \frac{1}{K} - \epsilon$. (对于 y 的情况可以类似证明)

为了方便起见, 不妨设 $i = 1$, 也就是说, $x_1 + x_2 < \frac{1}{K} - \epsilon$.

根据抽屉原理, 一定存在 $j \neq 1$ (例如 $j = 2$), 使得 $x_3 + x_4 > \frac{1}{K}$.

那么我们就可以得到: $x_3 + x_4 > x_1 + x_2 + \epsilon$. 玩家 2 在列 1 上的效用为:

$$u_{c1} = \sum_{j \in [2K]} B'_{1j} x_j = -M(x_1 + x_2) + \sum_{j \in [2K]} (B'_{1j} - B^*_{1j}) x_j \geq -M(x_1 + x_2)$$

Reduction from Generalized Circuit to Nash

证明 (续) .

玩家 2 在列 3 上的效用为:

$$u_{c3} = \sum_{j \in [2K]} B'_{3j} x_j = -M(x_3 + x_4) + \sum_{j \in [2K]} (B'_{3j} - B^*_{3j}) x_j \leq -M(x_3 + x_4) + 1$$

于是有:

$$u_{c1} - u_{c3} \geq M(x_3 + x_4 - x_1 - x_2) - 1 > M\epsilon - 1 = 1$$

根据纳什均衡的定义, 我们必须有 $y_3 = y_4 = 0$.

进一步, 由于 $y_3 = y_4 = 0$, 考虑玩家 1 的行 3 和行 4, 我们可以得出 $x_3 = x_4 = 0$.

但这与我们的假设 $x_3 + x_4 > x_1 + x_2 + \epsilon > 0$ 矛盾, 所以引理成立.

Reduction from Generalized Circuit to Nash

接下来我们就要开始正式规约了！规约的思路是对于广义电路中的每一个门，我们都将具体的限制引用在对纳什均衡某个向量的维度上，然后通过纳什均衡的“最优反映”的性质来限制这个变量。

下面我们举个例子，还是最简单的加法门：

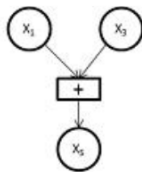


Figure 2: Addition gate

Reduction from Generalized Circuit to Nash

由于输入变量的索引是 1 和 3，输出变量的索引是 5，我们对标准 K 匹配硬币游戏进行如下扰动：

$$A'_{5,5} = A^*_{5,5} + 1 = M + 1,$$

$$A'_{6,6} = A^*_{6,6} + 1 = M + 1,$$

$$B'_{1,5} = B^*_{1,5} + 1 = 1,$$

$$B'_{3,5} = B^*_{3,5} + 1 = 1,$$

$$B'_{5,6} = B^*_{5,6} + 1 = -M + 1.$$

A' 和 B' 的其余部分与 A^* 和 B^* 相同，我们发现我们对于输出 X_5 ，我们只改变了第 5 列和第 6 列的数据，我们之前所保证的“一个变量最多只能被输出一次”则很好保证了收益矩阵不会被两个不同的限制所扰动。

Reduction from Generalized Circuit to Nash

我们称，如果在这样的扰动下， (x, y) 是 G'_K 的纳什均衡，那么变量 $x_1, x_3, \dots, x_{2K-1}$ 是广义电路的近似解。

反证法：假设在纳什均衡 (x, y) 中， $x_5 > \min\{x_1 + x_3, \frac{1}{K}\} + \varepsilon$ 。由于 $x_5 + x_6 \leq \frac{1}{K} + \varepsilon$ ，只能是 $x_5 > x_1 + x_3 + \varepsilon$ 。

考虑玩家 2 的列 5 和列 6 的效用：

$$u_{c5} = x_1 + x_3 - M(x_5 + x_6)$$

$$u_{c6} = (-M + 1)x_5 - Mx_6$$

$u_{c5} - u_{c6} = x_1 + x_3 - x_5 < -\varepsilon$ ，因此 $y_5 = 0$ 。

考虑玩家 1 的行 5 和行 6 的效用： $u_{r5} - u_{r6} = y_5 - y_6 < 0$ ，因此 $x_5 = 0$ 。

但这与我们的假设 $x_5 > x_1 + x_3 + \varepsilon > 0$ 矛盾。因此 $x_5 \leq \min\{x_1 + x_3, \frac{1}{K}\} + \varepsilon$ 。

Summary

以上，除了证明 **Sperner** 是 **PPAD-complete** 的，我们完成了 **Bimatrix Game** 是 **PPAD-complete** 的全部证明。

回想我们最开始”把 **Brouwer** 规约到博弈”的想法，我们试图把 $f(x) - x$ 的偏移规约到”纳什均衡的最优偏移”——事实上我们确实实现了。

在最后的证明中，我们发现门的不满足最终是通过纳什均衡的最佳反应证伪（即如果满足门条件，相对于 x_5, y_5 ，有 x_6, y_6 更好的偏移）——而门的不满足在第一步的规约中又对应着”双色”，双色的所有 vec 相加，就会得到 $f(x) - x$ 的偏移。

从直观的角度上来说，我们通过门将 **Brouwer** 和 **Nash** 的”偏移”联系了起来。

The PPAD-Completeness of 2D-Sperner - An Overview

定义 (RLEAFD)

输入实例是一对 $(K, 0^k)$, 其中 K 是一个满足以下条件的多项式时间图灵机描述:

- ① 对于每个顶点 $\mathbf{u} \in V_{2^k}$, $K(\mathbf{u})$ 是一个有序对 $(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2)$, 其中 $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2 \in V_{2^k} \cup \{no\}$;
- ② $K(0, 0) = (no, (1, 0))$ 且 $K(1, 0)$ 的第一个分量是 $(0, 0)$.

K 生成一个有向图 $G = (V_{2^k}, E) \in C_{2^k}$. 边 \mathbf{uv} 出现在 E 中, 当且仅当 \mathbf{v} 是 $K(\mathbf{u})$ 的第二个分量, \mathbf{u} 是 $K(\mathbf{v})$ 的第一个分量, 且边 $\mathbf{uv} \in E_{2^k}$.

问题的输出是一个有向叶节点 (不是 $(0, 0)$).

The PPAD-Completeness of 2D-Sperner - An Overview

引理

RLEAFD 是 *PPAD-Complete* 的.

我们仔细观察 *RLEAFD* 和 *EoL* 问题的区别, 发现仅仅是 *RLEAFD* 多了一个“网格图”的限制——更一般的, *RLEAFD* 所构成的有向图一定是平面图, 而 *EoL* 问题并没有这个保证.

因此, 我们希望能够构造一个从一般图映射到网格图的算法. 构造的核心思想是对于交叉的部分进行“拆点”, 具体的实现较为复杂, 这里我们主要展示 K^3 映射到平面图的效果.

The PPAD-Completeness of 2D-Sperner - An Overview

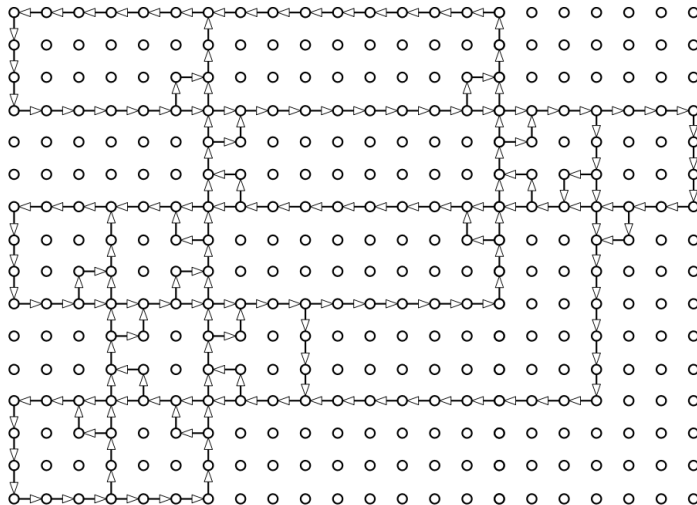


Fig. 3. The planar grid graph G_3 .

The PPAD-Completeness of 2D-Sperner - An Overview

我们下一步的任务，是将 RLEAFD 规约到 2D-Sperner 问题。

回顾 2D-Sperner 的染色方法，我们的基本思路是将 RLEAFD 中的每一个点映射为 Sperner 中的一个三角形，然后经过合理的染色、加点，使得 RLEAFD 中的每一个叶子对应的就是 Sperner 中的全色三角形。

同样的，构造较为复杂，我们主要展示变换的效果。

有关具体的构造，可以看 Xi Chen 和 Xiaotie Deng 的论文
[On the complexity of 2D discrete fixed point problem.](#)

The PPAD-Completeness of 2D-Sperner - An Overview

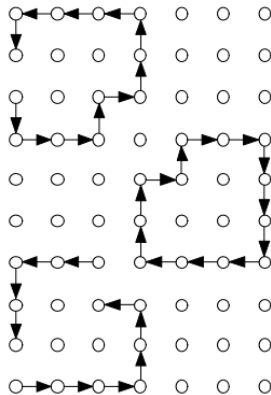


Fig. 6. G_2 and $G \in C_2$.

The PPAD-Completeness of 2D-Sperner - An Overview

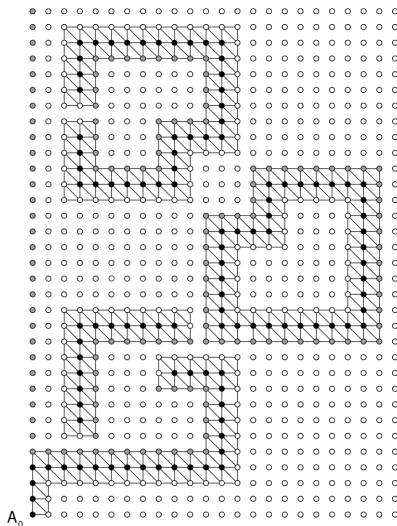


Fig. 7. F: black – 0, gray – 1, white – 2.

Approximate Nash Equilibrium

考虑两类双人纳什均衡的近似问题. 对于一个常数 $c > 0$:

- $\text{Exp}^c\text{-Bimatrix}$ 表示以下搜索问题: 给定一个有理且正规化的对策矩阵博弈 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) , 计算一个 2^{-cn} -近似纳什均衡, 其中 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 是 $n \times n$ 矩阵;
- $\text{Poly}^c\text{-Bimatrix}$ 表示以下搜索问题: 给定一个有理且正规化的对策矩阵博弈 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) , 计算一个 n^{-c} -近似纳什均衡, 其中 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 是 $n \times n$ 矩阵.

另一种均衡点的近似表示

我们指出，除了前面讨论的近似概念，均衡点还有其他自然的近似表示方法。除了有理均衡的有理表示外，还可以使用二进制表示来定义均衡中的每个项。

由于均衡中的每个项 p 都是介于 0 和 1 之间的数，我们可以使用其二进制表示 $(0.c_1c_2\cdots c_P\cdots)$ 来指定它，其中：

- $c_i \in \{0, 1\}$
- $p = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} c_i / 2^i$

某些有理数可能没有有限的二进制表示。通常，我们将数字舍入以存储其有限近似值。前 P 位 c_1, \dots, c_P 给我们提供了 c 的 P 位近似值 \hat{c} 。

P-Bit-Bimatrix 问题

对于一个正整数 P ，我们用 P -Bit-Bimatrix 表示计算有理对策矩阵博弈中纳什均衡各项的前 P 位的搜索问题。下面的命题将 P -Bit-Bimatrix 与 Poly^c -Bimatrix 关联起来。

Proposition

假设 (\mathbf{x}, \mathbf{y}) 是一个正规化的二人博弈 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 的纳什均衡，其中有 n 行和 n 列。对于正整数 P ，令 $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ 是 (\mathbf{x}, \mathbf{y}) 的 P 位近似值。设 $\bar{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} / \|\hat{\mathbf{x}}\|_1$ 和 $\bar{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}} / \|\hat{\mathbf{y}}\|_1$ 。则 $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ 是 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 的 $(3n2^{-P})$ -近似纳什均衡。

P-Bit-Bimatrix 问题的证明

证明.

令 $a = 2^{-P}$. 假设 $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ 不是一个 $(3na)$ -近似纳什均衡. 不失一般性, 假设存在 $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n$ 使得 $(\mathbf{x}')^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{y}} > \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{y}} + 3na$. 我们有:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}')^T \mathbf{A} \mathbf{y} &\leq (\mathbf{x}')^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{y}} + na \leq (\mathbf{x}')^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{y}} + na \\ &\leq \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y} + na \\ &\leq \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} \mathbf{y} + 2na \leq \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{y}} + 3na \leq \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{y}} + 3na, \end{aligned}$$

这与我们的假设矛盾. 要理解第一个不等式, 注意到由于博弈是正规化的, $(\mathbf{x}')^T \mathbf{A}$ 中的每个分量都在 0 和 1 之间. 不等式源于以下事实: 对于所有 $i \in [1:n]$, $\bar{y}_i \geq \hat{y}_i$, 且 $\|\hat{\mathbf{y}}\|_1 \geq 1 - na$. 其他不等式可以类似证明. □

Smoothed Analysis

除了最坏情况复杂性分析，我们还可以考虑在随机扰动下博弈的计算复杂性，这被称为平滑分析（Smoothed Analysis）。

在对策矩阵博弈的平滑分析中，我们考虑每个收益矩阵的每个元素都受到小的独立随机扰动的情况。对于一对 $n \times n$ 正规化矩阵 $\bar{\mathbf{A}} = (\bar{a}_{i,j})$ 和 $\bar{\mathbf{B}} = (\bar{b}_{i,j})$ ，平滑模型中的输入实例由 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 定义，其中 $a_{i,j}$ 和 $b_{i,j}$ 分别是 $\bar{a}_{i,j}$ 和 $\bar{b}_{i,j}$ 的幅度为 σ 的独立扰动。

扰动模型

对于幅度为 σ 的 $a_{i,j}$ 和 $b_{i,j}$ 的扰动, 有几种常见的模型. 两种最常见的扰动模型是均匀扰动和高斯扰动.

在幅度为 σ 的均匀扰动中, $a_{i,j}$ 和 $b_{i,j}$ 分别从区间 $[\bar{a}_{i,j} - \sigma, \bar{a}_{i,j} + \sigma]$ 和 $[\bar{b}_{i,j} - \sigma, \bar{b}_{i,j} + \sigma]$ 中均匀选择.

在方差为 σ^2 的高斯扰动中, $a_{i,j}$ 和 $b_{i,j}$ 分别按照如下密度函数选择:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-|a_{i,j} - \bar{a}_{i,j}|^2 / 2\sigma^2} \quad \text{和} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-|b_{i,j} - \bar{b}_{i,j}|^2 / 2\sigma^2}$$

我们将这些扰动分别称为 σ -均匀扰动和 σ -高斯扰动.

平滑复杂性

算法 J 对 BIMATRIX 的平滑复杂性定义如下：设 $T_J(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 是 J 在对策矩阵博弈 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 中寻找纳什均衡的复杂性。那么，在幅度为 σ 的扰动 $N_\sigma()$ 下， J 的平滑复杂性为：

$$\text{Smoothed}_J[n, \sigma] = \max_{\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}_{[-1, 1]}^{n \times n}} \mathbb{E}_{\mathbf{A} \leftarrow N_\sigma(\bar{\mathbf{A}}), \mathbf{B} \leftarrow N_\sigma(\bar{\mathbf{B}})} [T_J(\mathbf{A}, \mathbf{B})]$$

其中我们用 $\mathbf{A} \leftarrow N_\sigma(\bar{\mathbf{A}})$ 表示 \mathbf{A} 是根据 $N_\sigma(\bar{\mathbf{A}})$ 对 $\bar{\mathbf{A}}$ 的扰动。

如果对所有 $0 < \sigma < 1$ 和所有正整数 n ，存在正常数 c, k_1 和 k_2 使得

$$\text{Smoothed}_J[n, \sigma] \leq c \cdot n^{k_1} \sigma^{-k_2}$$

则算法 J 具有多项式平滑时间复杂性。

如果存在一个具有多项式平滑时间复杂性的算法 J 来计算二人纳什均衡，则 BIMATRIX 在平滑多项式时间内可解。

平滑纳什 vs 近似纳什

以下引理表明，如果 BIMATRIX 在均匀或高斯扰动下具有较低的平滑复杂性，那么可以快速找到近似纳什均衡。

引理 3.2（平滑纳什 vs 近似纳什）

如果 BIMATRIX 在均匀或高斯扰动下具有平滑多项式时间复杂性，那么对于所有 $\epsilon > 0$ ，存在一个随机化算法，可以计算二人博弈中的 ϵ -近似纳什均衡，期望时间分别为 $O(\text{poly}(m, n, 1/\epsilon))$ 或 $O(\text{poly}(m, n, \sqrt{\log \max(m, n)/\epsilon}))$ 。

该引理提供了一个从平滑复杂性结果到近似纳什均衡计算的桥梁，表明在平滑模型下的高效算法可以转化为高效的近似算法。

Discrete Fixed Point 的一般化定义

我们首先从一个简单的事实出发：假设我们用两种不同的颜色（红色和蓝色）为区间 $[0, n]$ 的端点着色，然后将该区间等分为 n 个单位子区间，并为内部的 $n - 1$ 个点任意着色。

有一个显而易见的结论：一定存在一个双色子区间（bichromatic subinterval），即一个单位子区间，其两个端点具有不同的颜色。

这个一维的事实可以推广到高维情况：

- 在 d 维空间中，我们考虑一个超网格（hypergrid） $A_{\mathbf{r}}^d$ ，它是具有指定边长 \mathbf{r} 的点集
- 超网格的边界由那些至少有一个坐标取值为 0 或 $r_i - 1$ 的点组成
- 我们用 $d + 1$ 种颜色 $\{1, 2, \dots, d + 1\}$ 为超网格的顶点着色

Discrete Fixed Point 的一般化定义

一个颜色分配 ϕ 对于超网格 $A_{\mathbf{r}}^d$ 是有效的 (valid), 如果对于边界上的点 $\mathbf{p} \in \partial(A_{\mathbf{r}}^d)$, 满足以下条件:

- 如果存在 $i \in [1 : d]$ 使得 $p_i = 0$, 则 $\phi(\mathbf{p}) = i$
- 否则 $\phi(\mathbf{p}) = d + 1$ (即当 $\forall i, p_i \neq 0$ 且 $\exists i, p_i = r_i - 1$ 时)

定理 (高维离散 Brouwer 不动点)

对于 $d \in \mathbb{Z}_+^1$ 和 $\mathbf{r} \in \mathbb{Z}_+^d$, 给定超网格 $A_{\mathbf{r}}^d$ 的任意有效着色 ϕ , 存在一个单位超立方体, 其所有顶点共有 $d + 1$ 种不同的颜色.

我们称这样的超立方体为全色立方体 (panchromatic cube). 然而, 在 d 维空间中, 一个超立方体有 2^d 个顶点, 随着维度的增加指数增长, 这使得检查超立方体是否全色变得低效.

全色单纯形与离散不动点

为了克服维度灾难，我们引入了全色单纯形的概念：

定义 (全色单纯形)

如果一个集合 $P \subset A_{\mathbf{r}}^d$ 被”容纳”在某点 $\mathbf{p} \in A_{\mathbf{r}}^d$ 的单位超立方体 $K_{\mathbf{p}}$ 中 (即 $P \subset K_{\mathbf{p}}$)，且恰好包含 $d+1$ 个具有 $d+1$ 种不同颜色的点，则称 P 是着色 ϕ 的一个全色单纯形。

其中，点 \mathbf{p} 的单位超立方体 $K_{\mathbf{p}}$ 定义为：

$$K_{\mathbf{p}} = \{\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^d \mid q_i \in \{p_i, p_i + 1\}, \forall i \in [1 : d]\}$$

即以 \mathbf{p} 为最接近原点的角的单位超立方体。

推论 (全色单纯形的存在性)

对于 $d \in \mathbb{Z}_+^1$ 和 $\mathbf{r} \in \mathbb{Z}_+^d$ ，给定超网格 $A_{\mathbf{r}}^d$ 的任意有效着色 ϕ ，存在一个全色单纯形。

Brouwer-Mapping and Color Distribution

为了更精确地定义离散不动点问题，我们引入 Brouwer-Mapping 电路的概念：

定义 (Brouwer-Mapping and Color Distribution)

对于 $d \in \mathbb{Z}_+^1$ 和 $\mathbf{r} \in \mathbb{Z}_+^d$ ，一个布尔电路 C 具有 $\text{Size}[\mathbf{r}]$ 输入位和 $2d$ 输出位 $\Delta_1^+, \Delta_1^-, \dots, \Delta_d^+, \Delta_d^-$ 被称为有效的 Brouwer-Mapping 电路（参数为 d 和 \mathbf{r} ），如果满足以下条件：

- 对于每个 $\mathbf{p} \in A_{\mathbf{r}}^d$ ，电路 C 在点 \mathbf{p} 的 $2d$ 输出位满足以下 $(d+1)$ 种情形之一：
 - 情形 i , $1 \leq i \leq d$: $\Delta_i^+ = 1$ 且其他 $2d-1$ 位均为 0
 - 情形 $(d+1)$: $\forall i, \Delta_i^+ = 0$ 且 $\Delta_i^- = 1$
- 对于每个边界点 $\mathbf{p} \in \partial(A_{\mathbf{r}}^d)$ ，若存在 $i \in [1:d]$ 使得 $p_i = 0$ ，则取 $i_{\max} = \max\{i \mid p_i = 0\}$ ，输出位满足情形 i_{\max} ；否则（即 $\forall i, p_i \neq 0$ 且 $\exists i, p_i = r_i - 1$ ），输出位满足情形 $d+1$ 。

Color Distribution Mapping

电路 C 定义了一个有效的 Color Distribution Mapping

$Color_C : A_r^d \rightarrow \{1, 2, \dots, d+1\}$, 通过设置:

$Color_C[\mathbf{p}] = i$, 如果 C 在点 \mathbf{p} 的输出位满足情形 i

这种映射方式使得我们可以将电路的输出与超网格顶点的着色联系起来, 从而将离散不动点问题转化为寻找特定电路输出模式的问题.

为了定义高维 Brouwer 不动点问题, 我们还需要”良态函数”(well-behaved functions) 的概念, 用于参数化搜索空间的形状. 注意, 这里的函数并非用于不动点问题本身, 而是用来指定搜索空间的参数.

一个整数函数 $f(n)$ 被称为良态的, 如果它是多项式时间可计算的, 且存在整数常数 n_0 使得对于所有 $n \geq n_0$, 均有 $3 \leq f(n) \leq n/2$. 例如, $f_1(n) = 3$ 、 $f_2(n) = \lfloor n/2 \rfloor$ 、 $f_3(n) = \lfloor n/3 \rfloor$ 和 $f_4(n) = \lfloor \log n \rfloor$ 都是良态函数.

参数化的 Brouwer 问题

有了这些准备，我们可以定义参数化的 Brouwer 不动点问题：

定义 (Brouwer^f)

对于每个良态函数 f ，搜索问题 Brouwer^f 定义如下：给定 Brouwer^f 的输入实例 $(C, 0^n)$ ，其中 C 是参数为 $d = \lceil n/f(n) \rceil$ 和 $\mathbf{r} \in \mathbb{Z}_+^d$ （其中 $\forall i \in [1 : d], r_i = 2^{f(n)}$ ）的有效 Brouwer-Mapping 电路，找出 C 的一个全色单纯形。

Brouwer^f 的输入大小是 n 与电路 C 大小的和。特别地：

- Brouwer^{f₂} 是二维搜索问题，搜索空间为 $[0 : 2^{\lfloor n/2 \rfloor} - 1]^2$ 网格
- Brouwer^{f₃} 是三维搜索问题，搜索空间为 $[0 : 2^{\lfloor n/3 \rfloor} - 1]^3$ 网格
- Brouwer^{f₄} 是 $\lfloor n/3 \rfloor$ 维搜索问题，搜索空间为 $[0 : 7]^{\lfloor n/3 \rfloor}$ 网格

以上这些网格都包含大约 2^n 个超立方体。Brouwer^{f₂} 和 Brouwer^{f₃} 已被证明是 PPAD 完全的。

高维离散不动点的 PPAD 完全性

以下定理表明，不管搜索空间的形状或维度如何，寻找全色单纯形的复杂性本质上是相同的：

定理 (高维离散不动点)

对于每个良态函数 f ， Brouwer^f 是 PPAD 完全的。

定理 (广义电路近似解的存在性)

对于任意常数 $c > 0$ ，每个广义电路 $S = (V, T)$ 都有一个 $1/|V|^c$ -近似解。

令常数 $c > 0$ 。我们用 $\text{Poly}^c\text{-GCIRCUIT}$ 和 $\text{Exp}^c\text{-GCIRCUIT}$ 分别表示寻找一个 K^{-c} -近似解和一个 2^{-cK} -近似解的问题，其中 K 是给定广义电路的节点数。

Main Results Outline

以下是关于双人纳什均衡计算复杂性的主要结果：

定理 (Main)

对于任意常数 $c > 0$, $\text{Poly}^c\text{-Bimatrix}$ 是 **PPAD**-完全的.

这个定理立即推出以下关于计算与近似两人纳什均衡的复杂性结论：

定理 (Bimatrix 的复杂性)

Bimatrix 是 **PPAD**-完全的. 此外, 除非 **PPAD** \subseteq **P**, 否则它没有完全多项式时间的近似方案.

Main Results Outline

定义 (RP)

RP 是随机多项式时间类，包含所有可以被多项式时间随机算法解决的问题。

具体地，一个语言 L 属于 **RP**，如果存在一个多项式时间随机算法 A ，对于每个 $x \in L$ ， A 以至少 $1/2$ 的概率接受 x ，而对于每个 $x \notin L$ ， A 以 0 的概率接受 x 。

Main Results Outline

定理 (Bimatrix 的平滑复杂性)

在均匀或高斯扰动模型下, 除非 $\mathbf{PPAD} \subseteq \mathbf{RP}$, 否则 *Bimatrix* 不在平滑多项式时间内.

推论 (Lemke-Howson 算法的平滑复杂性)

如果 \mathbf{PPAD} 不包含在 \mathbf{RP} 中, 则 *Lemke-Howson* 算法的平滑复杂性不是多项式的.

推论 (Bit-Bimatrix)

对于任意常数 $c > 1$, $(c \log n)$ -*Bit-Bimatrix* 问题 (寻找双矩阵博弈中纳什均衡的前 $c \log n$ 位) 与 *Bimatrix* 在多项式时间内等价.

Main Results Outline

引理 (FPC 到 GCIRCUIT)

$Brouwer^{f_1}$ 在多项式时间内可归约到 $Poly^3$ -GCIRCUIT.

$f_1(n) = 3$ 是一个良态函数, 这个引理表明, 我们可以将 $d = 3$ 的离散 Brouwer 不动点问题转化为广义电路的近似解问题.

引理 (GCIRCUIT 到 BIMATRIX)

$Poly^3$ -GCIRCUIT 在多项式时间内可归约到 $Poly^{12}$ -BIMATRIX.

引理 (Padding Bimatrix Games)

若对某个常数 $c > 0$, $Poly^c$ -BIMATRIX 是 **PPAD**-完全的, 则对任意常数 $c' > 0$, $Poly^{c'}$ -BIMATRIX 也是 **PPAD**-完全的.

这个“填充”引理表明, 纳什均衡的近似复杂性在不同近似精度 (多项式级别) 之间是等价的.

References

有关从 Brouwer 到 Nash 的推导过程其实还是有挺多不是很严谨的地方，例如一般 Sperner 向广义电路的规约、Boolean Gate 返回 N/A 以及与之相关的近似问题证明。更严谨的论证可以看以下文献：

有关 2-Player Nash Equilibrium 复杂度论述最完整的是 Xi Chen、Xiaotie Deng 和 Shang-Hua Teng 的论文，有关复杂度各种引理的具体证明也可以参考这篇：

[Settling the Complexity of Computing Two-Player Nash Equilibria.](#)

更详细的论述可以参考 Xi Chen 的讲义：
[PPAD and the Complexity of Equilibrium Computation.](#)

非常好懂的图示 2D-Sperner's Lemma、Brouwer Fixed Point 和 PPAD 关系，来自 Daskalakis、Goldberg、Papadimitriou 的论文：
[The Complexity of Computing a Nash Equilibrium.](#)