2025–2026 学年短学期
课程综合实践 II：数据要素交易基础

Lec 04: 非合作博弈论基础（二）

吴一航 yhwu_is@zju.edu.cn

浙江大学计算机科学与技术学院

CONTENT

目录

混合策略的引入

纳什均衡是求解博弈的强大工具。然而很可惜的是，仍然存在相当一部分博弈无法找到纳什均衡，甚至是非常常见的博弈，例如石头剪刀布博弈:

参与人 2

参与人 1

	石头	剪刀	布
石头	0, 0	1, −1	−1, 1
剪刀	−1, 1	0, 0	1, −1
布	1, −1	−1, 1	0, 0

- 不难验证这个博弈没有纳什均衡——这也符合预期，毕竟石头剪刀布的游戏从来没有一个稳定的策略；
  - 考虑简单的情况，例如一个参与人永远出石头，那么另一个人只要观察到这一点，就可以永远出布，这样的情况显然无法构成均衡；
  - 所以可以猜想，稳定的策略必定带有随机性，各个参与人要让自己的行为不可捉摸，这就引入了**混合策略（mixed strategy）**的概念。

混合策略

定义

令 $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ 为一个策略型博弈。一个**混合策略（mixed strategy）**是 S_i 上的概率分布，参与人 i 的混合策略集记为

$$\Sigma_i = \left\{\sigma_i : S_i \to [0,1] : \sum_{s_i\in S_i} \sigma_i(s_i) = 1\right\}$$

其中 $\sigma_i(s_i)$ 表示参与人 i 在该混合策略下选择策略 s_i 的概率。

- 因此混合策略就是给每个 S_i 中的策略（称之为**纯策略（pure strategy）**）一个概率，然后按照这个概率随机选择策略。
- 例如在石头剪刀布博弈中，$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ 就是一种混合策略，表示每个纯策略（出石头、剪刀和布）被选择的概率都是 $\frac{1}{3}$。
- 纯策略是混合策略特例：只有一个策略概率为 1，其余为 0。

混合策略

- 还有一个记号：对每个参与人 i，令 $\Delta(S_i)$ 为 S_i 上的概率分布集合，即

$$\Delta(S_i) = \left\{ p : S_i \to [0,1] : \sum_{s_i \in S_i} p(s_i) = 1 \right\}$$

  则显然有 $\Sigma_i = \Delta(S_i)$；
- 当 S_i 是连续策略空间时，求和需要替换为积分，当然本课程不讨论连续策略空间下的混合策略；
- 有混合策略后，博弈中参与人的效用函数也需要做相应的调整，需要适应有混合策略的情况。

博弈的混合扩展

定义

令 $G = \left(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\right)$ 为一个策略型博弈。G 的**混合扩展（mixed extension）**是一个博弈

$$\Gamma = \left(N, (\Sigma_i)_{i \in N}, (U_i)_{i \in N}\right)$$

其中 $\Sigma_i = \Delta(S_i)$ 是参与人 i 的混合策略集，他的收益函数 $U_i : \Sigma \to \mathbb{R}$ 将每个混合策略向量 $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_n$ 映射到一个实数

$$U_i(\sigma) = \mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \sum_{s \in S} \prod_{j=1}^{n} \sigma_j(s_j) u_i(s_1, \ldots, s_n)$$

- 这里使用了冯诺伊曼-摩根斯坦恩效用函数：每个纯策略 $(s_1, \ldots, s_n)$ 出现的概率为 $\prod_{j=1}^{n} \sigma_j(s_j)$，因此效用的本质是参与人 i 在混合策略向量 σ 下的期望收益；
- 这里还蕴含一个假定：每个参与人的行动相互独立。

石头剪刀布博弈中，参与人 1 选择混合策略 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$（$\frac{1}{2}$ 概率出石头，$\frac{1}{3}$ 概率出剪刀，$\frac{1}{6}$ 概率出布），参与人 2 选择混合策略 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ 时，对于参与人 1 有:

策略组合	概率	效用	策略组合	概率	效用
（石头，石头）	1/8	0	（剪刀，布）	1/12	1
（石头，剪刀）	1/4	1	（布，石头）	1/24	1
（石头，布）	1/8	−1	（布，剪刀）	1/12	−1
（剪刀，石头）	1/12	−1	（布，布）	1/24	0
（剪刀，剪刀）	1/6	0			

不难求出参与人 1 的效用为 $\frac{1}{12}$，参与人 2 对称地有效用为 $-\frac{1}{12}$。

混合策略纳什均衡

类似于纯策略纳什均衡，可以给出混合策略纳什均衡的定义：

定义

给定一个博弈的混合扩展 $\Gamma = \left(N, (\Sigma_i)_{i \in N}, (U_i)_{i \in N}\right)$，一个混合策略向量 $\sigma^* = (\sigma_1^*, ..., \sigma_n^*)$ 是一个**混合策略纳什均衡**，若对每个参与人 i，有

$$U_i(\sigma^*) \geqslant U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*), \forall \sigma_i \in \Sigma_i$$

例如，两个参与人都选择混合策略 $\sigma_1^* = \sigma_2^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ 时，(σ_1^*, σ_2^*) 构成混合策略纳什均衡；

- 可以尝试根据定义验证这一结果；

混合策略纳什均衡

类似于纯策略纳什均衡，可以给出混合策略纳什均衡的定义：

定义

给定一个博弈的混合扩展 $\Gamma = \left(N, (\Sigma_i)_{i\in N}, (U_i)_{i\in N}\right)$，一个混合策略向量 $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$ 是一个**混合策略纳什均衡**，若对每个参与人 i，有

$$U_i(\sigma^*) \geqslant U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*), \forall \sigma_i \in \Sigma_i$$

例如，两个参与人都选择混合策略 $\sigma_1^* = \sigma_2^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ 时，(σ_1^*, σ_2^*) 构成混合策略纳什均衡；

- 可以尝试根据定义验证这一结果；
- 然而一旦开始验证就会发现上述定义不适合于验证这一结果：因为需要对任意的混合策略 σ_i 都进行验证，展开后的表达式非常复杂。

混合策略纳什均衡

因此引入一个更为方便的等价条件方便判断：

混合策略纳什均衡等价条件

令 $G = \left(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\right)$ 为一个策略型博弈，Γ 为 G 的混合扩展。一个混合策略向量 σ^* 是 Γ 的混合策略纳什均衡，当且仅当对于每个参与人 i 和每一个纯策略 $s_i \in S_i$，有

$$U_i(\sigma^*) \geqslant U_i(s_i, \sigma^*_{-i})$$

混合策略纳什均衡

因此引入一个更为方便的等价条件方便判断:

混合策略纳什均衡等价条件

令 $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ 为一个策略型博弈,Γ 为 G 的混合扩展。一个混合策略向量 σ^* 是 Γ 的混合策略纳什均衡,当且仅当对于每个参与人 i 和每一个纯策略 $s_i \in S_i$,有

$$U_i(\sigma^*) \geqslant U_i(s_i, \sigma^*_{-i})$$

证明: 正向推导只需要注意到纯策略也是特殊的混合策略即可。反过来,对于参与人 i 的每个混合策略 σ_i,

$$U_i(\sigma_i, \sigma^*_{-i}) = \sum_{s_i\in S_i} \sigma_i(s_i) U_i(s_i, \sigma^*_{-i}) \leqslant \sum_{s_i\in S_i} \sigma_i(s_i) U_i(\sigma^*) = U_i(\sigma^*)$$

□

请根据上述等价条件验证两个参与人都选择混合策略 $\sigma_1^* = \sigma_2^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ 时,(σ_1^*, σ_2^*) 构成混合策略纳什均衡。

混合策略纳什均衡计算：最优反应

考虑如下性别大战：一对夫妻要安排他们周末的活动，可选择的活动有看足球赛（F）和听音乐会（C）。丈夫更喜欢看足球赛，而妻子更喜欢听音乐会。如果他们选择的活动不同，那么他们都不会高兴，如果他们选择的活动相同，那么他们都会高兴，只是高兴程度略有不同：

妻子

丈夫		F	C
	F	2, 1	0, 0
	C	0, 0	1, 2

显然 (F, F) 和 (C, C) 是纯策略纳什均衡，但是否存在非纯策略纳什均衡的混合策略纳什均衡呢？

混合策略纳什均衡计算：最优反应

首先展示如何使用最优反应法计算混合策略纳什均衡。记丈夫的混合策略为 $(x, 1-x)$（表示以 x 的概率选择 F，$1-x$ 的概率选择 C），妻子的混合策略为 $(y, 1-y)$。对于丈夫的每个混合策略 $(x, 1-x)$，妻子的最优反应集合为

$$
\begin{aligned}
br_2(x) &= \arg\max_{y\in[0,1]} u_2(x, y) \\
&= \{y \in [0,1] : u_2(x,y) \geqslant u_2(x,z), \forall z \in [0,1]\}
\end{aligned}
$$

混合策略纳什均衡计算：最优反应

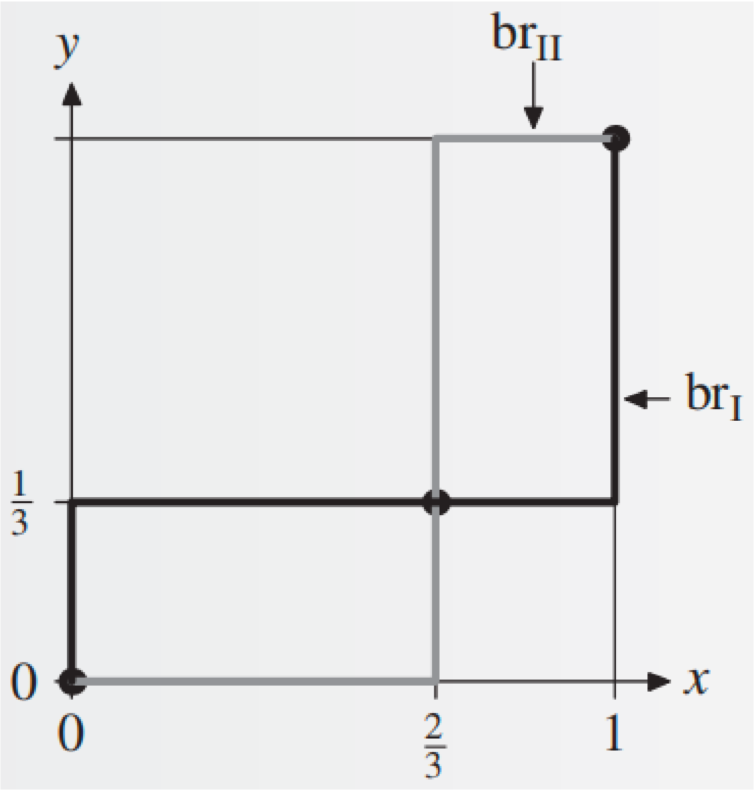
首先展示如何使用最优反应法计算混合策略纳什均衡。记丈夫的混合策略为 $(x, 1-x)$（表示以 x 的概率选择 F，$1-x$ 的概率选择 C），妻子的混合策略为 $(y, 1-y)$。对于丈夫的每个混合策略 $(x, 1-x)$，妻子的最优反应集合为

$$
\begin{aligned}
br_2(x) &= \arg\max_{y\in[0,1]} u_2(x,y) \\
&= \{y \in [0,1] : u_2(x,y) \geqslant u_2(x,z), \forall z \in [0,1]\}
\end{aligned}
$$

而 $u_2(x,y) = xy \cdot 1 + (1-x)(1-y) \cdot 2 = 2 - 2x - 2y + 3xy$，将 x 视为定值，对 y 求导得到 $3x-2$，因此可以得到最优反应集合为（丈夫同理）：

$$
br_2(x) := \begin{cases} \{0\} & x \in \left[0, \frac{2}{3}\right) \\ [0,1] & x \in \left\{\frac{2}{3}\right\} \\ \{1\} & x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases}, \quad br_1(y) := \begin{cases} \{0\} & y \in \left[0, \frac{1}{3}\right) \\ [0,1] & y \in \left\{\frac{1}{3}\right\} \\ \{1\} & y \in \left(\frac{1}{3}, 1\right] \end{cases}
$$

混合策略纳什均衡计算：最优反应



三个交点：$(x^*, y^*) = (0, 0)$，$(x^*, y^*) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$，$(x^*, y^*) = (1, 1)$，第 1 个和第 3 个是纯策略纳什均衡，第 2 个是混合策略纳什均衡。

- 求混合策略纳什均衡下双方的对应的收益，你能从中得到什么启示？
- 从上面的图形能看出混合策略纳什均衡具有什么特点？

无差异原则

从上述例子中可以看出，混合策略纳什均衡下双方选择策略 F 和 C 的效用是相等的，这一结论可以一般化：

无差异原则

令 σ^* 为一个混合策略纳什均衡，s_i 和 ${s_i}'$ 为参与人 i 的两个纯策略，若 $\sigma_i^*(s_i), \sigma_i^*({s_i}') > 0$，则 $U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) = U_i({s_i}', \sigma_{-i}^*)$。

定理成立的原因很简单：如果 $U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) > U_i({s_i}', \sigma_{-i}^*)$，那么参与人 i 应该增加 s_i 的概率，这样可以提高自己的收益。

无差异原则

从上述例子中可以看出，混合策略纳什均衡下双方选择策略 F 和 C 的效用是相等的，这一结论可以一般化：

无差异原则

令 σ^* 为一个混合策略纳什均衡，s_i 和 $s_i{}'$ 为参与人 i 的两个纯策略，若 $\sigma_i^*(s_i), \sigma_i^*(s_i{}') > 0$，则 $U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) = U_i(s_i{}', \sigma_{-i}^*)$。

定理成立的原因很简单：如果 $U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) > U_i(s_i{}', \sigma_{-i}^*)$，那么参与人 i 应该增加 s_i 的概率，这样可以提高自己的收益。

- 被赋予正概率的集合称为混合策略的支撑集合；
- 问题：被严格占优的策略有可能属于混合策略的支撑集合吗；
- 问题：为什么混合策略支撑集的策略无差异，不能只选择其中一个行动或任意选取概率分布？

混合策略纳什均衡计算：无差异原则

接下来使用无差异原则计算性别大战的混合策略纳什均衡。使用无差异原则时首先需要先找到纯策略纳什均衡，否则后续计算可能会忽略。纯策略纳什均衡显然是 (F, F) 和 (C, C)。

混合策略纳什均衡计算：无差异原则

接下来使用无差异原则计算性别大战的混合策略纳什均衡。使用无差异原则时首先需要先找到纯策略纳什均衡，否则后续计算可能会忽略。纯策略纳什均衡显然是 (F, F) 和 (C, C)。

考虑丈夫的混合策略 $\sigma_1 = (x, 1-x)$ 和妻子的混合策略 $\sigma_2 = (y, 1-y)$，且 $0 < x < 1$，$0 < y < 1$（称为**完全混合的均衡**）。根据无差异原则必有丈夫选择 F 和 C 的效用相等：

$$U_1(F, \sigma_2) = 2y = 1 - y = U_1(C, \sigma_2)$$

解得 $y = \frac{1}{3}$，同理可以解得 $x = \frac{2}{3}$。因此用无差异原则可以更简便地得到混合策略纳什均衡。

混合策略纳什均衡计算：无差异原则

接下来使用无差异原则计算性别大战的混合策略纳什均衡。使用无差异原则时首先需要先找到纯策略纳什均衡，否则后续计算可能会忽略。纯策略纳什均衡显然是 (F, F) 和 (C, C)。

考虑丈夫的混合策略 $\sigma_1 = (x, 1-x)$ 和妻子的混合策略 $\sigma_2 = (y, 1-y)$，且 $0 < x < 1$，$0 < y < 1$（称为**完全混合的均衡**）。根据无差异原则必有丈夫选择 F 和 C 的效用相等：

$$U_1(F, \sigma_2) = 2y = 1 - y = U_1(C, \sigma_2)$$

解得 $y = \frac{1}{3}$，同理可以解得 $x = \frac{2}{3}$。因此用无差异原则可以更简便地得到混合策略纳什均衡。

注意，**无差异原则只是取得混合策略纳什均衡的必要条件，并非充分条件**，因此求出结果后需要验证。然而本例无需检验，因为本例只有两个策略，两个策略的效用都一致，不存在其他策略得到更高的效用。

混合策略纳什均衡的存在性与计算复杂性

尽管并非所有博弈都有纳什均衡，但是下面的纳什定理告诉我们，每个有限的策略型博弈都有至少一个混合策略纳什均衡：

纳什定理

每一个策略型博弈 G，如果参与人的个数有限，每个参与人的纯策略数目有限，那么 G 至少有一个混合策略纳什均衡。

证明超出本门课程范围（需要使用布劳威尔不动点定理、角谷不动点定理等），感兴趣的同学可以参考相关书目。

混合策略纳什均衡的存在性与计算复杂性

尽管并非所有博弈都有纳什均衡，但是下面的纳什定理告诉我们，每个有限的策略型博弈都有至少一个混合策略纳什均衡：

纳什定理

每一个策略型博弈 G，如果参与人的个数有限，每个参与人的纯策略数目有限，那么 G 至少有一个混合策略纳什均衡。

证明超出本门课程范围（需要使用布劳威尔不动点定理、角谷不动点定理等），感兴趣的同学可以参考相关书目。

关于混合策略纳什均衡的计算，根据定义可以转化为线性可行性问题，有指数时间的求解方式（实验要求实现），自然的问题是，是否存在多项式时间的通用解法？答案是，不知道是否存在：

定理（陈汐，邓小铁）

双人博弈纳什均衡的计算是 PPAD 完全问题。

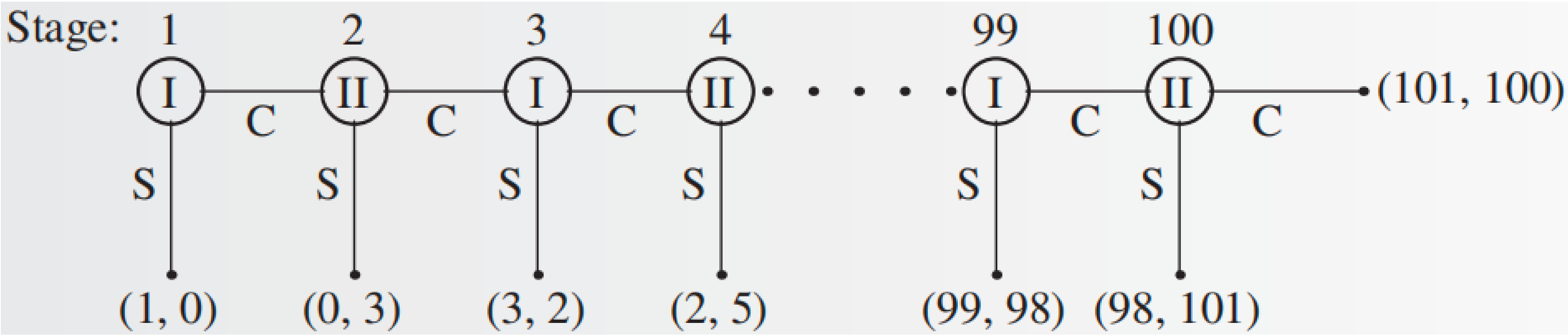
我们不在此解释 PPAD 完全的含义，只需知道目前是没有多项式时间算法可以计算一般的两人博弈的混合策略纳什均衡。

CONTENT

目录

引入：蜈蚣博弈

蜈蚣博弈：两个参与人依次行动：在奇数轮 $t = 1, 3, ..., 99$，参与人 1 选择停止博弈（S）或者继续博弈（C），如果他在第 t 轮选择停止，收益为 $(t, t-1)$，否则继续博弈；在偶数轮 $t = 2, 4, ..., 100$，参与人 2 选择停止博弈（S）或者继续博弈（C），如果他在第 t 轮选择停止，收益为 $(t-2, t+1)$，否则继续。如果最初 99 轮没人停止，那么 100 轮后博弈结束，双方收益为 $(101, 100)$。下图表现了为什么这一博弈被称为蜈蚣博弈：



和你身边的同学两两一组玩这一博弈，看一看你们的选择是什么？（**可以只玩十轮的，然后将你们的选择交在学在浙大上**）

基本概念

不难看出，上述博弈出现了参与人多轮交互，整体博弈被表达为了一棵树，这一类博弈被称为**扩展式博弈（extensive-form game）**，其中

- **根节点表示博弈的开始，每个叶节点都标志博弈的一个结束点**；
- 每个**非叶节点**上都需要标注这一步的**行动者**；
- 每个**叶节点**上需要标注博弈在这一**终点下的参与人效用**。

基本概念

不难看出，上述博弈出现了参与人多轮交互，整体博弈被表达为了一棵树，这一类博弈被称为**扩展式博弈（extensive-form game）**，其中

- **根节点表示博弈的开始，每个叶节点都标志博弈的一个结束点**；
- 每个**非叶节点**上都需要标注这一步的**行动者**；
- 每个**叶节点**上需要标注博弈在这一**终点下的参与人效用**。

扩展式博弈每个参与人的**策略是一个向量，表示其在所有可能行动的节点上的行动**。例如蜈蚣博弈中参与人 1 的策略可能是 $(C, C, S, C, ..., S, C)$；

- 即使选定某一策略后博弈停止，也要将此后所有节点的策略都定义好。

基本概念

不难看出，上述博弈出现了参与人多轮交互，整体博弈被表达为了一棵树，这一类博弈被称为**扩展式博弈（extensive-form game）**，其中

- **根节点表示博弈的开始，每个叶节点都标志博弈的一个结束点**；
- 每个**非叶节点**上都需要标注这一步的**行动者**；
- 每个**叶节点**上需要标注博弈在这一**终点下的参与人效用**。

扩展式博弈每个参与人的**策略是一个向量，表示其在所有可能行动的节点上的行动**。例如蜈蚣博弈中参与人 1 的策略可能是 $(C, C, S, C, ..., S, C)$；

- 即使选定某一策略后博弈停止，也要将此后所有节点的策略都定义好。

一个扩展式博弈的**子博弈（subgame）**由一个节点 x 和所有该节点的后继节点组成；

- 实际上就**是 $\boldsymbol{x}$ 为根的子树**，记为 $\Gamma(x)$。

完美信息博弈

如果每个参与人**在选择行动时，都知道他位于博弈树的哪个节点上**，那么这个博弈就是**完美信息博弈（game with perfect information）**，例如蜈蚣博弈，国际象棋等；

- 但很多博弈不符合这一条件，例如德州扑克或者斗地主等扑克牌游戏，你不知道其他玩家的手牌。

完美信息博弈

如果每个参与人**在选择行动时，都知道他位于博弈树的哪个节点上**，那么这个博弈就是**完美信息博弈（game with perfect information）**，例如蜈蚣博弈，国际象棋等；

- 但很多博弈不符合这一条件，例如德州扑克或者斗地主等扑克牌游戏，你不知道其他玩家的手牌。

德州扑克 AI 战胜人类：NIPS'17 best paper

Safe and Nested Subgame Solving for Imperfect-Information Games*

Noam Brown
Computer Science Department
Carnegie Mellon University
Pittsburgh, PA 15217
noamb@cs.cmu.edu

Tuomas Sandholm
Computer Science Department
Carnegie Mellon University
Pittsburgh, PA 15217
sandholm@cs.cmu.edu

每个年代有自己最关注的热点，但什么文章能具有长久影响力是未知的。

子博弈完美均衡

下面介绍完全信息动态博弈的均衡概念，需要扩展普通的纳什均衡概念。

定义

在扩展式博弈 Γ 中，一个策略向量 σ^* 是**子博弈完美均衡（subgame perfect equilibrium）**，如果对于博弈的任意子博弈 $\Gamma(x)$，局限在那个子博弈的策略向量 σ^* 是 $\Gamma(x)$ 的纳什均衡：对每个参与人 i，每个策略 σ_i 和子博弈 $\Gamma(x)$，

$$u_i(\sigma^* \mid x) \geqslant u_i(\sigma_i, \sigma^*_{-i} \mid x)$$

这一定义是很直观的，因为如果某个子博弈 $\Gamma(x)$ 上参与人存在有利可图的偏离，那么全局来看这也是一个有利可图的偏离。

子博弈完美均衡

下面介绍完全信息动态博弈的均衡概念，需要扩展普通的纳什均衡概念。

定义

在扩展式博弈 Γ 中，一个策略向量 σ^* 是**子博弈完美均衡（subgame perfect equilibrium）**，如果对于博弈的任意子博弈 $\Gamma(x)$，局限在那个子博弈的策略向量 σ^* 是 $\Gamma(x)$ 的纳什均衡：对每个参与人 i，每个策略 σ_i 和子博弈 $\Gamma(x)$，

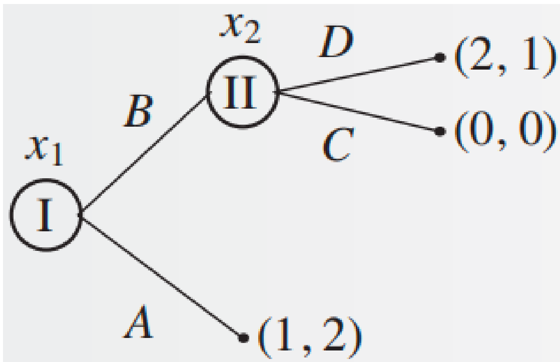
$$u_i(\sigma^* \mid x) \geqslant u_i(\sigma_i, \sigma^*_{-i} \mid x)$$

这一定义是很直观的，因为如果某个子博弈 $\Gamma(x)$ 上参与人存在有利可图的偏离，那么全局来看这也是一个有利可图的偏离。

当一个博弈存在不止一个均衡时，我们希望基于合理的选择标准选择一些均衡，而剔除另一些均衡，这样的一个选择叫做**均衡精炼（equilibrium refinements）**。

- 子博弈完美均衡是否是纳什均衡的精炼？换言之，是否存在不是子博弈完美均衡的纳什均衡？

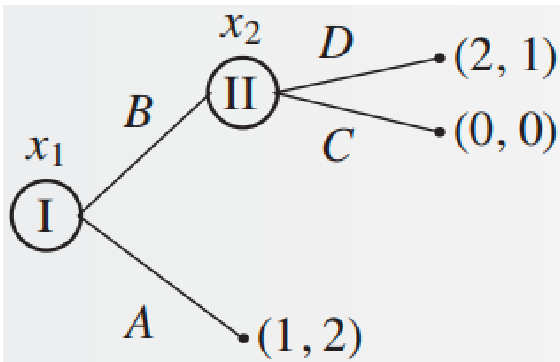
子博弈完美均衡的例子



		Player II	
		C	D
Player I	A	1, 2	1, 2
	B	0, 0	2, 1

1. 这一博弈有两个纯策略纳什均衡：(A, C) 和 (B, D)，参与人 I 更偏好 (B, D)，参与人 II 更偏好 (A, C)；

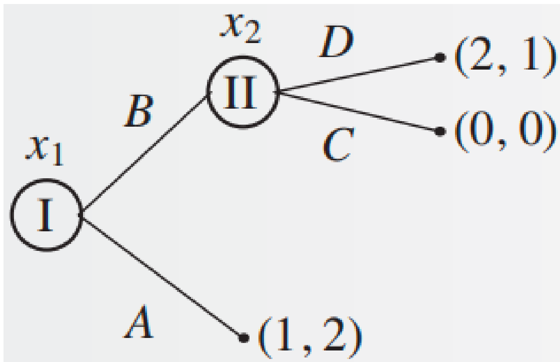
子博弈完美均衡的例子



		Player II	
		C	D
Player I	A	1, 2	1, 2
	B	0, 0	2, 1

1. 这一博弈有两个纯策略纳什均衡：(A, C) 和 (B, D)，参与人 I 更偏好 (B, D)，参与人 II 更偏好 (A, C)；
2. (A, C) 不是子博弈完美均衡，因为在 x_2 处参与人 II 存在有利可图的偏离：选择 D 而不是 C（因此子博弈完美均衡的确是纳什均衡的精炼）；

子博弈完美均衡的例子



		Player II	
		C	D
Player I	A	1, 2	1, 2
	B	0, 0	2, 1

1. 这一博弈有两个纯策略纳什均衡：(A, C) 和 (B, D)，参与人 I 更偏好 (B, D)，参与人 II 更偏好 (A, C)；
2. (A, C) 不是子博弈完美均衡，因为在 x_2 处参与人 II 存在有利可图的偏离：选择 D 而不是 C（因此子博弈完美均衡的确是纳什均衡的精炼）；
3. 在 (A, C) 下，I 不会偏离均衡，是因为 II 威胁 I：如果你选择 B，我就选择 C，然而这个威胁显然是不可置信的，因为如果 I 选择 B，那么 II 还是选择 D 更有利。

子博弈完美均衡的充分条件

例子中 (A,C) 能作为均衡，或者说 C 这一被 D 占优的策略可以成为均衡，是因为 (A,C) 到不了真正要选择 C,D 的 x_2 点。

子博弈完美均衡的充分条件

例子中 (A,C) 能作为均衡，或者说 C 这一被 D 占优的策略可以成为均衡，是因为 (A,C) 到不了真正要选择 C,D 的 x_2 点。

用 $P_\sigma(x)$ 表示当实施策略向量 σ 时，博弈展开将造访节点 x 的概率。有如下定理：

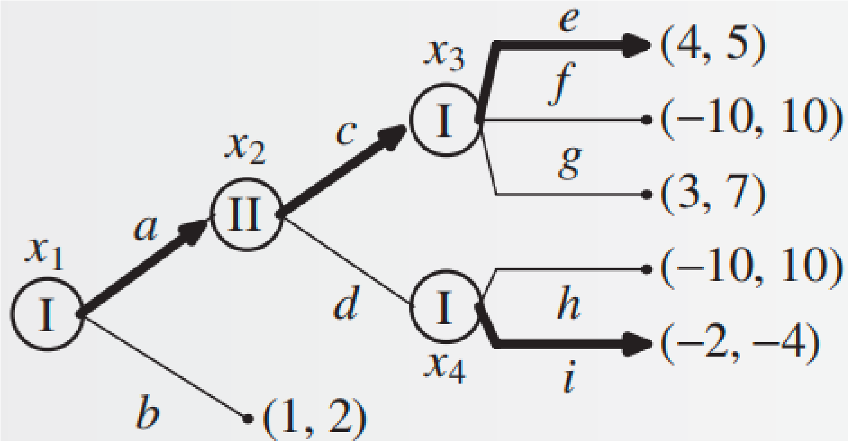
定理

令 σ^* 是扩展式博弈 Γ 的纳什均衡，如果对所有 x 都有 $P_{\sigma^*}(x) > 0$，那么 σ^* 是子博弈完美均衡。

- 定理是显然的，因为如果 σ^* 不是子博弈完美均衡，那么在某个子博弈 $\Gamma(x)$ 上存在有利可图的偏离，并且这个偏离产生的概率不为 0，因此也可以带来全局的有利可图的偏离；
- 推论：完全混合的纳什均衡是子博弈完美均衡。

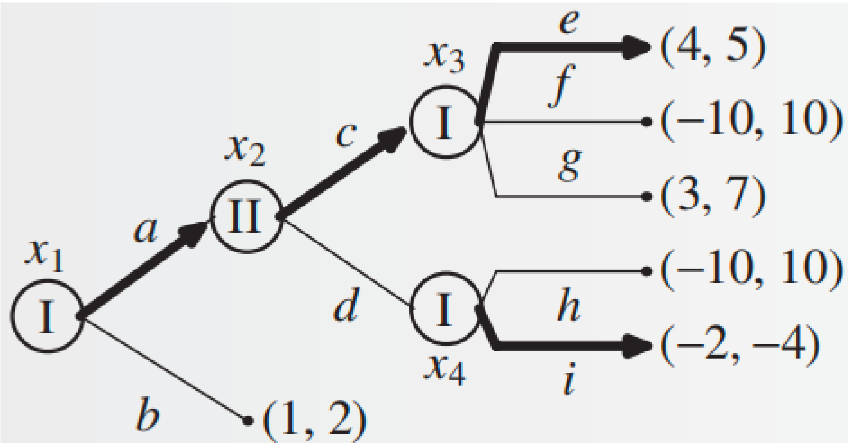
逆向归纳法

如何找到完美信息博弈的子博弈完美均衡？**直观：要求每个子博弈都是均衡，可以从最小的子博弈出发求解：**

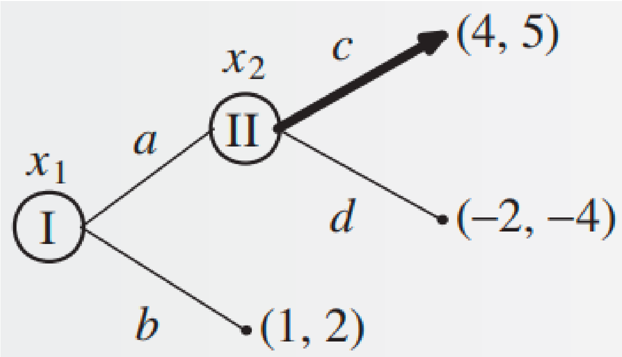


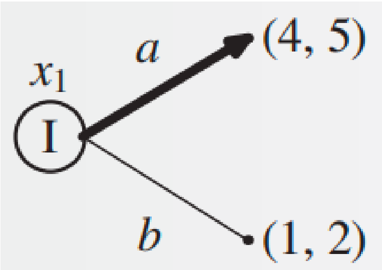
逆向归纳法

如何找到完美信息博弈的子博弈完美均衡？**直观：要求每个子博弈都是均衡，可以从最小的子博弈出发求解：**



从最小的子博弈出发，即 $\Gamma(x_3)$ 和 $\Gamma(x_4)$，选择图中加粗的策略（子博弈的均衡），然后将均衡结果替代子博弈，逐步向上推导到根节点即可（因此子博弈完美均衡是 (ae, c)）





逆向归纳法

这一方法称为**逆向归纳法（backward induction）**，该方法的应用保证了每一个子博弈都使用了均衡策略，并且每一步都能做出选择，由此可得：

定理

每个有限完美信息扩展式博弈都至少有一个子博弈完美纯策略均衡。

逆向归纳法

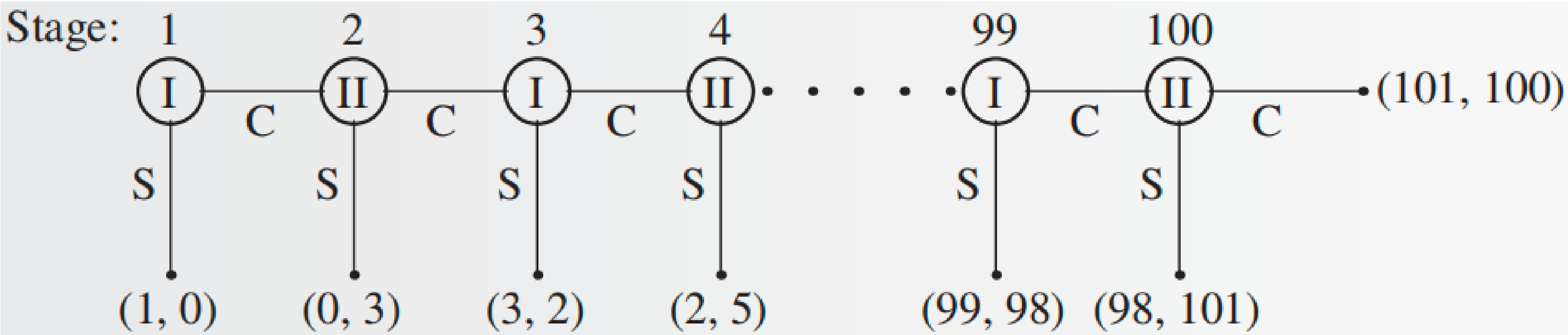
这一方法称为逆向归纳法（**backward induction**），该方法的应用保证了每一个子博弈都使用了均衡策略，并且每一步都能做出选择，由此可得：

定理

每个有限完美信息扩展式博弈都至少有一个子博弈完美纯策略均衡。

然而逆向归纳法存在局限性：不是子博弈完美均衡的均衡可能更好：

- 重复囚徒困境有限轮，逆向归纳法会得到两个罪犯在每一轮都选择承认（因此需要新的博弈建模方式描述人们在长期关系中会合作这一事实）；
- 蜈蚣博弈：



显然，逆向归纳法的结果是参与人在第一轮就要选择停止，但现实中通常双方都会试探前进一段才会结束。

产量领导模型（斯塔克尔伯格模型）

经济学中子博弈完美均衡最基本的应用就是产量领导模型（或称**斯塔克尔伯格（Stackelberg）**模型），常用于**描述有一家厂商处于支配地位或充当自然领导者的行业**。例如 IBM 是具有支配地位的行业，通常观察到的其它小企业的行为模式是等待 IBM 宣布新产量然后调整自己的产量决策，此时 IBM 就是斯塔克尔伯格领导者，其它厂商是跟随者。

产量领导模型（斯塔克尔伯格模型）

经济学中子博弈完美均衡最基本的应用就是产量领导模型（或称**斯塔克尔伯格（Stackelberg）**模型），常用于**描述有一家厂商处于支配地位或充当自然领导者的行业**。例如 IBM 是具有支配地位的行业，通常观察到的其它小企业的行为模式是等待 IBM 宣布新产量然后调整自己的产量决策，此时 IBM 就是斯塔克尔伯格领导者，其它厂商是跟随者。

设市场中有两个厂商：

- 厂商 1 是领导者，选择产量 y_1；
- 厂商 2 是跟随者，选择产量 y_2；
- 用 $p(y_1+y_2)$ 表示总产量为 y_1+y_2 时的市场价格；
- $c_1(y_1)$ 和 $c_2(y_2)$ 表示厂商 1 和 2 在生产 y_1 和 y_2 单位商品时的成本。

画出对应的博弈树，思考如何使用逆向归纳法形式化求解子博弈完美均衡

产量领导模型（斯塔克尔伯格模型）

使用逆向归纳法，第一步应该是求解在厂商 1 的任意策略 y_1 下厂商 2 的最优反应 $y_2 = f_2(y_1)$，然后厂商 1 看哪个 y_1 结合对应的 $f_2(y_1)$ 能实现自己的收益最大化。因此厂商 1 的利润最大化决策可以综合表达为：

$$\begin{aligned} \max_{y_1} \quad & \pi_1(y_1, y_2) = p(y_1 + y_2)y_1 - c_1(y_1) \\ \text{s.t.} \quad & y_2 = \arg\max_{y_2} \pi_2(y_1, y_2) = p(y_1 + y_2)y_2 - c_2(y_2) \end{aligned}$$

- 这是一个**双层优化问题（bi-level optimization problem）**，即优化的约束条件是另一个优化问题：厂商 1 在做决策时，他知道厂商 2 会根据他的决策做出最优反应；
- 求解过程：先求解厂商 2 的最优反应函数 $y_2^* = f_2(y_1)$，然后将其代入厂商 1 的利润函数中，求解厂商 1 的最优产量 y_1^*。

产量领导模型（斯塔克尔伯格模型）

例

设总产量为 $y_1 + y_2$ 时的市场价格为 $2 - y_1 - y_2$，并且厂商 1 和 2 的生产一件产品的单位生产成本分别为 c_1, c_2，求在该假设下二者的子博弈完美均衡产量。

产量领导模型（斯塔克尔伯格模型）

例

设总产量为 $y_1 + y_2$ 时的市场价格为 $2 - y_1 - y_2$，并且厂商 1 和 2 的生产一件产品的单位生产成本分别为 c_1, c_2，求在该假设下二者的子博弈完美均衡产量。

先写出厂商 1 和 2 的利润函数：

$$\pi_1 = (2 - y_1 - y_2)y_1 - c_1 y_1,$$
$$\pi_2 = (2 - y_1 - y_2)y_2 - c_2 y_2,$$

然后先对给定 y_1 的情况下求厂商 2 的最优反应，解得

$$y_2 = \frac{2 - y_1 - c_2}{2},$$

产量领导模型（斯塔克尔伯格模型）

然后将 y_2 代入厂商 1 的利润函数，求解得到最优的

$$y_1^* = \frac{2 + c_2 - 2c_1}{2},$$

最后将 y_1 代入 y_2 的表达式，求解得到最优的

$$y_2^* = \frac{2 + 2c_1 - 3c_2}{4}.$$

产量领导模型（斯塔克尔伯格模型）

然后将 y_2 代入厂商 1 的利润函数，求解得到最优的

$$y_1^* = \frac{2 + c_2 - 2c_1}{2},$$

最后将 y_1 代入 y_2 的表达式，求解得到最优的

$$y_2^* = \frac{2 + 2c_1 - 3c_2}{4}.$$

- 上述结果能如何联系到实际?
- 上述求解过程和古诺竞争的区别?
- 事实上古诺竞争和斯塔克尔伯格竞争都是在纳什均衡的概念提出之前就已经被研究了，因此纳什均衡统一了这些博弈背后的思想。

CONTENT

目录

行业博弈的例子

现实中的博弈不一定是完全信息的，例如德州扑克游戏中我们不知道对手的手牌，厂商竞争互相之间的实力也并非完全已知，因此需要引入**不完全信息博弈（game with incomplete information）**来描述这些场景。

行业博弈的例子

现实中的博弈不一定是完全信息的，例如德州扑克游戏中我们不知道对手的手牌，厂商竞争互相之间的实力也并非完全已知，因此需要引入**不完全信息博弈（game with incomplete information）**来描述这些场景。

考虑一个包括两个企业的行业博弈。假定这个行业有一个在位者（参与人1）和一个潜在的进入者（参与人2）。参与人1决定是否建立一个新工厂，同时参与人2决定是否进入该行业。假定**参与人2不知道参与人1建厂的成本是3还是0，但参与人1自己知道**。

	进入	不进入
建厂	0，−1	2，0
不建厂	2，1	3，0

参与人1的建厂成本高时的收益

	进入	不进入
建厂	3，−1	5，0
不建厂	2，1	3，0

参与人1的建厂成本低时的收益

行业博弈的例子

现实中的博弈不一定是完全信息的，例如德州扑克游戏中我们不知道对手的手牌，厂商竞争互相之间的实力也并非完全已知，因此需要引入**不完全信息博弈（game with incomplete information）**来描述这些场景。

考虑一个包括两个企业的行业博弈。假定这个行业有一个在位者（参与人 1）和一个潜在的进入者（参与人 2）。参与人 1 决定是否建立一个新工厂，同时参与人 2 决定是否进入该行业。假定**参与人 2 不知道参与人 1 建厂的成本是 3 还是 0，但参与人 1 自己知道**。

	进入	不进入
建厂	0，−1	2，0
不建厂	2，1	3，0

参与人 1 的建厂成本高时的收益

	进入	不进入
建厂	3，−1	5，0
不建厂	2，1	3，0

参与人 1 的建厂成本低时的收益

假设**参与人 2 对参与人 1 的类型有先验概率**：认为参与人 1 成本为 3（成本高）的概率为 p，成本为 0（成本低）的概率为 $1-p$。

行业博弈均衡计算

	进入	不进入
建厂	0，−1	2，0
不建厂	2，1	3，0

参与人 1 的建厂成本高时的收益

	进入	不进入
建厂	3，−1	5，0
不建厂	2，1	3，0

参与人 1 的建厂成本低时的收益

- 求解均衡前首先检查是否存在劣策略：参与人 1 有占优策略：成本低，建厂；成本高，不建厂；从而轻松得到参与人 1 的均衡策略；

行业博弈均衡计算

	进入	不进入
建厂	0，−1	2，0
不建厂	2，1	3，0

参与人 1 的建厂成本高时的收益

	进入	不进入
建厂	3，−1	5，0
不建厂	2，1	3，0

参与人 1 的建厂成本低时的收益

- 求解均衡前首先检查是否存在劣策略：参与人 1 有占优策略：成本低，建厂；成本高，不建厂；从而轻松得到参与人 1 的均衡策略；
- 根据参与人 1 的策略，参与人 2 进入的期望效用为

$$p-(1-p)=2p-1,$$

  不进入的期望效用为 0；
- 因此当 $p>1/2$ 时，对于参与人 2，选择进入优于不进入，故选择进入，$p<1/2$ 则选择不进入，$p=1/2$ 二者无差异。

行业博弈均衡计算

上页例子的均衡因为参与人 1 在两种情况下均存在占优策略而十分容易求解。如果将低成本时的建厂成本设定为 1.5，如下表，则参与人 1 只在高成本时有占优策略（不建厂）。

	进入	不进入
建厂	0，−1	2，0
不建厂	2，1	3，0

参与人 1 的建厂成本高时的收益

	进入	不进入
建厂	1.5，−1	3.5，0
不建厂	2，1	3，0

参与人 1 的建厂成本低时的收益

行业博弈均衡计算

上页例子的均衡因为参与人 1 在两种情况下均存在占优策略而十分容易求解。如果将低成本时的建厂成本设定为 1.5，如下表，则参与人 1 只在高成本时有占优策略（不建厂）。

	进入	不进入
建厂	0，−1	2，0
不建厂	2，1	3，0

参与人 1 的建厂成本高时的收益

	进入	不进入
建厂	1.5，−1	3.5，0
不建厂	2，1	3，0

参与人 1 的建厂成本低时的收益

接下来只能使用无差异原则求解均衡。设参与人 1 低成本时建厂概率为 x，参与人 2 进入概率为 y。首先考虑是否存在纯策略均衡：

- $x=1, y=0$（对应纯策略组合（建厂，不进入）），对低成本的参与人 1 而言，$x=1$ 是 $y=0$ 的最优反应；对参与人 2，$x=1$ 时，$y=0$ 的效用为 0，$y=1$ 的效用为 $p-(1-p)=2p-1$，故 $y=0$ 是 $x=1$ 的最优反应当且仅当 $p\leqslant 1/2$；
- 同理可以验证 $x=0, y=1$ 在任意的 p 下都是均衡。

行业博弈均衡计算

	进入	不进入
建厂	0，−1	2，0
不建厂	2，1	3，0

参与人 1 的建厂成本高时的收益

	进入	不进入
建厂	1.5，−1	3.5，0
不建厂	2，1	3，0

参与人 1 的建厂成本低时的收益

接下来考虑混合策略均衡，根据无差异条件：

- 低成本参与人 1 是否建厂无差异：

  $$1.5y + 3.5(1-y) = 2y + 3(1-y),$$

  解得 $y = 1/2$；
- 参与人 2 是否进入无差异：

  $$p + (1-p)(-x + (1-x)) = 0,$$

  解得 $x = 1/(2(1-p))$。

总而言之，这一博弈存在两个纯策略均衡（其中一个有条件）和一个混合策略纳什均衡

- 均衡下高成本参与人 1 永远选择占优策略不建厂；
- 当 $p \leqslant 1/2$ 时，低成本参与人 1 选择建厂，参与人 2 选择不进入；
- 低成本参与人 1 选择不建厂，参与人 2 选择进入；
- 低成本参与人 1 以 $x = 1/(2(1-p))$ 概率选择建厂，参与人 2 以概率 1/2 选择进入。

你能从这一均衡中观察到什么

- 学会从解的直观中判断解是否正确/合理

不完全信息博弈的定义

从行业博弈出发，不完全信息博弈定义在策略式博弈基础上有如下改变：

- 原先的三元组需要扩展为五元组，需要增加每个参与人的类型集合 $(T_i)_{i \in N}$ 和类型的先验分布 p；
  - **先验分布 p 是给每种类型向量 $(t_1, \ldots, t_n)$ 赋予一个概率**；
  - 行业博弈中参与人 2 只有一种默认类型，故先验分布定义在两种类型向量（高成本，默认类型）和（低成本，默认类型）上，此处显然默认类型可以被省略，因此可以只定义参与人 1 两种类型的先验概率；
  - 读者可以想象扑克牌游戏的场景，在发牌之前各个参与人之间对其他人的牌的分布会有一个大致的估计，这一估计就是先验分布。

不完全信息博弈的定义

在一般的情况下，上述 p 给出的是联合概率分布，因此边际概率分布为

$$p(t_i) = \sum_{t_{-i}} p(t_i, t_{-i}).$$

参与人是知道自己的类型为 t_i 的，故对其他人的类型有后验概率分布为

$$p(t_{-i} \mid t_i) = \frac{p(t_i, t_{-i})}{p(t_i)} = \frac{p(t_i, t_{-i})}{\sum_{t_{-i}} p(t_i, t_{-i})}.$$

注意此前的行业博弈无需更新后验分布，事实上只要不同参与人是独立的就无需更新后验分布。

不完全信息博弈的定义

- 此外，先验分布是所有参与人的共同知识；
  - 例如斗地主时大家都会认为一方有很多炸弹的概率是比较小的；
  - 更复杂的模型中可能会有更弱的假设；

不完全信息博弈的定义

- 此外，先验分布是所有参与人的共同知识；
  - 例如斗地主时大家都会认为一方有很多炸弹的概率是比较小的；
  - 更复杂的模型中可能会有更弱的假设；
- 原先的参与人策略需要扩展至对参与人的每种类型都定义一个策略；
  - 例如行业博弈求解了参与人 1 高类型和低类型下的策略；
  - 尽管参与人知道自己的类型，但参与人还是要为每个类型都定义策略的，这是因为其他参与人不知道你的类型，但计算均衡时需要基于所有类型下的策略才能算出效用；
  - 参与人 i 类型为 t_i 下选择纯策略 s_i 的概率记为 $\sigma_i(t_i; s_i)$。

不完全信息博弈的定义

- 此外，**先验分布是所有参与人的共同知识**；
  - 例如斗地主时大家都会认为一方有很多炸弹的概率是比较小的；
  - 更复杂的模型中可能会有更弱的假设；
- 原先的参与人**策略**需要扩展至**对参与人的每种类型都定义一个策略**；
  - 例如行业博弈求解了参与人 1 高类型和低类型下的策略；
  - 尽管参与人知道自己的类型，但参与人还是要为每个类型都定义策略的，这是因为**其他参与人不知道你的类型**，但计算均衡时需要基于所有类型下的策略才能算出效用；
  - 参与人 i 类型为 t_i 下选择纯策略 s_i 的概率记为 $\sigma_i(t_i; s_i)$。
- 最后，参与人 i 的**效用**与类型相关（回忆行业博弈高低成本参与人 1）；
  - 当所有人类型组合为 t，纯策略组合为 s 时的效用记为 $u_i(t; s)$；
  - 注意**效用与所有人的类型相关（可以考虑你和一个能力未知的人匹配打游戏），而策略只与自己的类型相关**。

不完全信息博弈的均衡

注：以下内容比较形式化，只需要理解大致思想即可

均衡的定义需要涉及收益的比较，故此处简单展开计算。当参与人策略组合为 $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$ 时，如果参与人类型组合是 $t = (t_1, ..., t_n)$，那么每个纯策略组合 $(s_1, ..., s_n)$ 被选择的概率是 $\prod_{i \in N} \sigma_i(t_i; s_i)$，因此参与人 i 的期望收益是

$$U_i(t; \sigma) = \sum_{s \in S} \prod_{i=1}^{n} \sigma_i(t_i; s_i) u_i(t; s),$$

不完全信息博弈的均衡

注：以下内容比较形式化，只需要理解大致思想即可

均衡的定义需要涉及收益的比较，故此处简单展开计算。当参与人策略组合为 $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$ 时，如果参与人类型组合是 $t = (t_1, ..., t_n)$，那么每个纯策略组合 $(s_1, ..., s_n)$ 被选择的概率是 $\prod_{i\in N} \sigma_i(t_i; s_i)$，因此参与人 i 的期望收益是

$$U_i(t;\sigma) = \sum_{s\in S}\prod_{i=1}^{n}\sigma_i(t_i;s_i)u_i(t;s),$$

上述表达式中在不完全信息的情况下存在不确定性：参与人不知道其它参与人的类型，因此需要进一步对类型求取期望，得到（将 t 拆成 t_i, t_{-i}）

$$U_i(\sigma) \triangleq \mathbb{E}_{t_{-i}} U_i(t_i, t_{-i};\sigma) = \sum_{t_{-i}} p(t_{-i} \mid t_i) U_i(t_i, t_{-i};\sigma).$$

这就得到了参与人策略组合为 $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$ 时，每个参与人 i 效用的形式化表达。

基于此可以给出不完全信息（静态）博弈的均衡概念的定义：

定义

不完全信息博弈的策略向量 $\sigma^* = (\sigma_1^*, ..., \sigma_n^*)$ 是不完全信息博弈的**贝叶斯均衡（Bayesian equilibrium）**，如果对每个参与人 i，每个类型 t_i 以及每个可能的纯策略 s_i，都有

$$U_i(\sigma^*) \geqslant U_i(s_i, \sigma_{-i}^*).$$

注意定义中的两个细节：

- 对每个类型 t_i 的原因在于此前计算 $U_i(\sigma)$ 时是基于参与人已知自己类型 t_i 的后验概率分布的；
- 只需要考虑向纯策略 s_i 的偏离的原因在此前混合策略纳什均衡的等价定义中已经解释。

不完全信息博弈的三个阶段

可以完整地叙述一个不完全信息博弈的进行顺序:

1. 自然（**nature**）根据概率分布 p 抽取类型向量 $t=(t_1,...,t_n)$ 赋予每个参与人，从而每个参与人 i 知道自己的类型 t_i，但不知道其他参与人的具体类型 t_{-i};
   - 自然是博弈论中通常用于描述随机源的方式;
   - 因此参与人的类型也被称为自然的状态;
2. 参与人 i 知道自己的类型后更新信息：对其他人类型的分布更新为 $p(t_{-i} \mid t_i)$，然后所有参与人同时选择自己的行动;
3. 每个参与人 i 得到收益 $u_i(t;s)$，其中 $s=(s_1,...,s_n)$ 是所有参与人的纯策略组合。

不完全信息博弈的三个阶段

当然读者可能心里会有一个疑惑：这里讨论的是静态博弈，但前面的行动顺序看起来像是动态博弈。

不完全信息博弈的三个阶段

当然读者可能心里会有一个疑惑：这里讨论的是静态博弈，但前面的行动顺序看起来像是动态博弈。

- 仔细观察便会发现，自然的行动并非策略性的，与参与人之间没有交互，最后一步的结果在第二步选择行动后就确定了；
- 尽管这并非真的动态博弈，但上述三个步骤划分了经济学文献中常见的不完全信息博弈的三个阶段：
  - 每个人类型被指派之前的阶段被称为**事前阶段（ex ante）**；
  - 每个人类型被指派之后的阶段被称为**事中阶段（interim）**；
  - 收益确定之后的阶段被称为**事后阶段（ex post）**；
- 不同阶段的关键差异在于参与人拥有的信息不同。

不完全信息博弈的三个阶段

当然读者可能心里会有一个疑惑：这里讨论的是静态博弈，但前面的行动顺序看起来像是动态博弈。

- 仔细观察便会发现，自然的行动并非策略性的，与参与人之间没有交互，最后一步的结果在第二步选择行动后就确定了；
- 尽管这并非真的动态博弈，但上述三个步骤划分了经济学文献中常见的不完全信息博弈的三个阶段：
  - 每个人类型被指派之前的阶段被称为**事前阶段（ex ante）**；
  - 每个人类型被指派之后的阶段被称为**事中阶段（interim）**；
  - 收益确定之后的阶段被称为**事后阶段（ex post）**；
- 不同阶段的关键差异在于参与人拥有的信息不同。

最后值得一提的是，提出这一不完全信息博弈框架的约翰·海萨尼（John C.Harsanyi）与纳什同在 1994 年获得诺贝尔经济学奖。当年获得诺贝尔经济学奖的还有莱茵哈德·泽尔腾（Reinhard Selten），其最著名的贡献是提出了子博弈完美纳什均衡的概念。

不完全信息古诺竞争

在行业博弈的例子中，参与人类型空间离散，行动空间也离散。下面的例子对应类型空间离散，但行动空间连续的情况（二者都连续的情况在拍卖中介绍）。

注：行动空间连续的情况只考虑纯策略均衡，混合策略求解比较复杂

回忆古诺竞争是两个寡头同时决定产量的博弈。假定企业的利润为 $u_i = q_i\left(\theta_i - q_i - q_j\right)$，其中 θ_i 是线性需求函数的截距与企业 i 的单位成本之差，q_i 是企业 i 选择的产量。

企业 1 的类型 $\theta_1 = 1$ 是共同知识，但企业 2 拥有关于其单位成本的私人信息。企业 1 认为 $\theta_2 = 3/4$（高成本）和 $5/4$（低成本）的概率均为 $1/2$，且先验分布是共同知识。

首先将博弈表达为不完全信息的形式（写出五元组）

不完全信息古诺竞争

求解博弈的纯策略均衡。记企业 1 的产量为 q_1，企业 2 在 $\theta_2 = 5/4$ 时的产量为 q_2^L，在 $\theta_2 = 3/4$ 时的产量为 q_2^H。企业 2 的均衡产量必须满足

$$q_2(\theta_2) \in \arg\max_{q_2} q_2(\theta_2 - q_1 - q_2) \Rightarrow q_2(\theta_2) = \frac{\theta_2 - q_1}{2}$$

不完全信息古诺竞争

求解博弈的纯策略均衡。记企业 1 的产量为 q_1，企业 2 在 $\theta_2 = 5/4$ 时的产量为 q_2^L，在 $\theta_2 = 3/4$ 时的产量为 q_2^H。企业 2 的均衡产量必须满足

$$q_2(\theta_2) \in \arg\max_{q_2} q_2(\theta_2 - q_1 - q_2) \Rightarrow q_2(\theta_2) = \frac{\theta_2 - q_1}{2}$$

企业 1 不知道企业 2 属于哪种类型，因此他的收益只能是对企业 2 的类型取期望：

$$q_1 \in \arg\max_{q_1} \frac{1}{2} q_1 \left(1 - q_1 - q_2^L\right) + \frac{1}{2} q_1 \left(1 - q_1 - q_2^H\right)$$
$$\Rightarrow q_1 = \frac{2 - q_2^H - q_2^L}{4}$$

将 θ_2 的两个取值代入 $q_2(\theta_2)$，解得 $q_1 = 1/3, q_2^L = 11/24, q_2^H = 5/24$。事实上这也是博弈唯一的贝叶斯纳什均衡（为什么）。

不完全信息古诺竞争

- 如果两个厂商都知道厂商 2 的类型，可以求出高低两种情况的纳什均衡，可以计算出此时的利润然后取平均；
- 如果两个厂商都不知道厂商 2 的类型，本质上退回完全信息情景
  - 厂商 2 自己都不知道自己的类型，故只能按平均值计算自己的策略，厂商 1 也知道厂商 2 按平均值计算，从而博弈退化到完全信息场景

关于厂商 2 的类型的知识	厂商 1 的利润	厂商 2 的利润
两个厂商都不知道	$1/9$	$1/9$
只有厂商 2 知道	$1/9$	≈ 0.127
两个厂商都知道	$1/8$	$5/36$

上述结果能给予你怎样的启示?