

Astérisque

AST

Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell [Pages préliminaires]

Astérisque, tome 127 (1985), p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985_127_1_0>

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

127

ASTÉRISQUE

1985

SÉMINAIRE
SUR
LES PINCEAUX ARITHMÉTIQUES :
LA CONJECTURE DE MORDELL

Lucien SZPIRO

Avec la participation de :

Mireille DESCHAMPS, Pierre DELIGNE, Renée ELKIK,
Marguerite FLEXOR, Luc ILLUSIE, Laurent MORET-BAILLY,
Michel RAYNAUD, Lucien SZPIRO

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**Les auteurs des différents articles de ce volume
dédient respectueusement ce travail à André Néron.**

response: Von Faltings

Greifswald, November 3

Dear Deligne,

after our meeting at Moscow I have realized that it's possible to change Faltings' proof in order to obtain some estimate for the number of rational points. Let X be a proper and smooth curve over number field K , $g \geq 1$, $P \in X(K)$. Consider an abelian variety $A_P = \text{Jac}(X_P)$, where X_P is a ramified (in P) covering of our curve X . Then $\#\{A_P; P \in X(K) \text{ mod isogenies}\}$ can be bounded, if You use an effective version of Chebotarev's density theorem (see Serre's paper in Public. Math. IHES). If $T = \bigcup A_P$, $P \in X(K)$ and all A_P are isogenous, then by Faltings there exists a set M of primes (which depends only on X and effectively computable) s. th. $h(A_P) = h(A_Q)$ if there exists an isogeny $f: A_P \rightarrow A_Q$ with $(\deg f, M) = 1$. From the definition of $h(A)$ we get for all isogenies $f: A_P \rightarrow A_Q$: $h(A_Q) \leq \prod_{e \in M} c_e^{h(e)} h(A_P)$ (for exponential height) if $\deg f = \prod e^{n(e)}$. These constants $c_e = c_e(X)$ are also can be written explicitly. (to prove this You must decompose f as product of an isogeny of degree prime with M and of isogenies with elemen-

tary kernels of ℓ (element. ℓ -groups). The next step is that the function $h(P) = h(A_P)$ is equivalent to some Weil-height on the curve X . Now apply Mumford's estimate for the growth of heights on the curves of $g \geq 1$ (Amer. J. Math., 1965)

$$h(P) \geq c_1^{C_2^h}$$

if You order all $P \in X(K)$ as P_n with $h(P_{n+1}) \geq h(P_n)$

In this estimate the constants $c_{1,2}$ are computable if You know one rational point P_0 on X . More of that it is possible to do all estimates not only in principle computable but to give them in an explicity way (Arakelov's intersection theory is very useful here). \langle rapis:

Zarhin have found also some interesting additions to Faltings paper. One of them relates with the proof of Tate's conjecture about homomorphisms. He mentioned that the kernel of isogenies in the proof are isomorphic to the group of all points (of some order) on some abelian variety this gives the invariance of height at this situation without any use of ℓ -divisible groups (at least when the ground field is not too large).

We hope to write some detailed survey article

(for Uspekhi) of Faltings proof and all related results.
So it would be useful to give there Your proof
of the finiteness for the monodromy (many people
are interesting in it very much). Do You permit
us to do this?

Also I could not understand one place in Faltings
preprint, where he gives an estimate for non-archi-
medic part of height (p. 10) (a construction of a
scheme \tilde{Z}). If You know some details we would
be very thankful to get them.

Sincerely Yours

Shafarevich

(A. Pervushin)

Gerd Faltings
Universität
Gesamthochschule
Wuppertal

Fachbereich 7
Mathematik

Universität-Gesamthochschule Wuppertal, Postfach 100127, 5600 Wuppertal 1

Geschäftszeichen

Gesprächspartner(-in)

Telex 8 592 262 ghw

Gaußstraße 20

5600 Wuppertal 1

 (0202) 439-

Gebäude

26.5.83

Dear Seijo!

I think I should tell you that in the last days I have proven the Mordell-conjecture. The method is an extension of my Oberwolfach talk and proceeds roughly as follows (the details will be in the paper I shall send to you soon):

We prove, that there are only finitely many isom. classes of principally polarized abelian varieties with bad reduction only at a finite set of places. We already know that this is true up to isogeny. So we fix one A , and consider only B 's isogenous to A . For any prime ℓ the ℓ -lattice

$T_\ell(B) \subseteq T_\ell(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \cong T_\ell(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell$ falls in only finitely many isom. classes, and it is seen that the ℓ -adic valuation of $\exp(2[\mathbb{K}:\mathbb{Q}] (h(B)-h(A)) (\in \mathbb{Q}^*)$ is bounded.

Haauptbuslinie:
Gaußstraße, Führerstraße,
Max-Horkheimer-Straße.
Ab Bahnhof Wuppertal-Elbterfeld
(Döppersberg) von Haltestelle 6 mit
Buslinie 647 bis Umtzentrum
oder Buslinien 605, 625, 630, 635
bis Schreinersweg

Fachbereiche 5, 10 und 11:
Hespeker Straße
Pauluskirchstraße.
Ab Bahnhof Wuppertal-Elbterfeld
(Döppersberg) von Haltestelle 6 mit
Straßenbahnen 601, 606, 611 bis
Platzowstraße oder Schwebelbahn
bis Landgericht

$$\{ h(B) = \text{height} \}$$

We are done if we show that for big primes $\ell \gg 0$
an isogeny

$$\varphi: B_1 \rightarrow B_2$$

of degree ℓ^h

does not change $h(B)$.

For this we may assume that $\ell \cdot \text{Ker}(\varphi) = 0$.

If $d = \#\tilde{\mathcal{R}}_{\text{Ker}(\varphi)}^1$, then

$$h(B_1) - h(B_2) = \log(\ell) \left(\frac{h}{2} - \frac{d}{m} \right), \quad m = [K : \mathbb{Q}],$$

and by Raynaud (Bull. Soc. math. Fr. 102)

$\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ acts on

$$\Lambda^{mh}(\text{Ind}_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{Z}}(\text{Ker}(\varphi)(\overline{\mathbb{Q}}))) \text{ as}$$

$$\chi_0^{-d},$$

$$\chi_0: \mathbb{Z} \rightarrow (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^*$$

the cyclotomic character.

Fix p , and let $P_{mh}(T) = \det(T - F_p) / \Lambda^{mh}(\text{Ind}_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{Z}}(T_{\ell}(\mathbb{A})))$

Then $P_{mh}(p^{-j}) \neq 0$ for $0 \leq j \leq mg$, $j \neq \frac{mh}{2}$, and

$\chi_0^{-d}(F_p) = p^{-d}$ as a zero of P_{mh} mod ℓ .

If ℓ is big enough. ($\ell \times \prod_{j \neq \frac{mh}{2}} P_{mh}(p^{-j})$),

then $d = \frac{mh}{2}$.

Best wishes,

Gerhard Faltings

INTRODUCTION

Ce Séminaire, qui s'est tenu à l'E.N.S, rue d'Ulm, en 1983-1984, est centré sur la démonstration par G. Faltings de la conjecture de Mordell : une courbe lisse, projective, géométriquement connexe, de genre au moins deux sur un corps de nombres n'a qu'un nombre fini de points rationnels sur ce corps.

Le lecteur qui veut se faire une idée rapide de cette démonstration lira d'abord l'article original de G. Faltings (Inventiones Vol.73, Fasc. 3 (1983)) ou les deux exposés au Séminaire Bourbaki de novembre 1983 sur ce sujet (n°619 par L. Szpiro et n°616 par P. Deligne). La conjecture de Mordell est démontrée une première fois dans ce volume dans l'exposé X §1, (Corollaire du Théorème 1). La seconde démonstration, plus "effective", se trouve dans l'exposé XI §2. Cette dernière démonstration est une relecture astucieuse par Parshin de la première due à G. Faltings.

Les raisons d'être de ce séminaire sont :

- a) de donner une version plus complète que les seize pages imprimées de G. Faltings ou les quarante pages frappées du Séminaire Bourbaki (notons que G. Faltings, G. Wüstholz et alt. ont publié leur séminaire de Bonn sur ce sujet : "Rational points", Vieweg 1984, 268p.)
- b) d'apporter des éléments nouveaux, surtout d'effectivité, que nous signalons plus bas dans l'analyse détaillée de chaque exposé (exposés V, VII, XI).

La preuve par G. Faltings de la conjecture de Mordell est organisée autour de quatre "gadgets" : la hauteur modulaire, les isogénies et la conjecture de Tate, la conjecture de Shafarevich, la construction de Kodaira-Parshin. Le "grain de sel" de Parshin utilise en plus la théorie des intersections d'Arakelov. Nous analysons ci-dessous les exposés autour de ces cinq thèmes.

Thème 1 : La hauteur modulaire : (exposés I, IV, V).

Dans l'exposé I, nous introduisons l'idée d'Arakelov : mettre des métriques hermitiennes à l'infini sur les fibrés inversibles permet de définir la hauteur d'un point rationnel d'un point de vue géométrique (Corollaire de la Prop. 1.1 et introduction du §3). Nous montrons d'abord comment ce point de vue permet de penser géométriquement les éléments de la théorie géométrique des nombres de Hermite et Minkowski. En particulier, le théorème 1.4 (Hermite) : "l'ensemble des corps de nombre de degré et de ramification donnés est fini" est d'un usage constant dans ces pages. (On peut le voir comme "la conjecture de Shafarevich pour les morphismes finis"). Nous introduisons ensuite la hauteur modulaire d'une variété abélienne sur un corps de nombres (§3.3 Déf.2). Puis nous montrons que

pour une famille semi-stable de variétés abéliennes, sur une base normale et de caractéristique zéro, la hauteur modulaire est à "singularités logarithmiques" (Th.3.2).

Le Théorème 3.1' (Northcott avec singularités logarithmiques) exprime qu'un faisceau ample muni de métriques à singularités logarithmiques permet de définir une hauteur qui satisfasse aux énoncés de finitude habituels.

Pour montrer que l'ensemble des variétés abéliennes polarisées de dimension donnée, de hauteur modulaire bornée, sur un corps de nombres de degré donné, est fini - ce qui est le but de ce thème - il faut réussir à voir la hauteur modulaire comme une hauteur sur une compactification du schéma des variétés abéliennes polarisées, associée à un faisceau ample. C'est ce qui est fait succinctement aux exposés IV et V.

Dans l'exposé IV de P. Deligne, est montré le "lemme de Gabber" : quitte à accepter des espaces algébriques à la place des schémas, on a une famille de variétés semi-abéliennes (i.e une extension de variété abélienne par un tore) sur un éclaté d'une compactification du module des variétés abéliennes. La hauteur modulaire peut donc être vue comme associée à une métrique - à singularités logarithmiques - sur la puissance extérieure maximale de l'image directe des différentielles relatives.

Dans l'exposé V de L. Moret-Bailly, est montrée l'amplitude du faisceau inversible cité plus haut, sur une compactification à la Mumford via les groupes théta. On en déduit bien sûr le Théorème de finitude pour la hauteur modulaire indiqué plus haut (Théorème 1.3). Il est à noter que L. Moret-Bailly a obtenu de cette façon la première démonstration complète du Théorème ci-dessus.

Thème 2 : Isogénies et conjecture de Tate (exposés VI, VII, VIII)

Dans l'exposé VIII, M. Flexor explique les arguments de Zarhin et Tate qui réduisent la conjecture de Tate à montrer que dans une classe d'isogénies sur un corps de nombres il n'y a qu'un nombre fini de variétés abéliennes. La conjecture de Tate dit que les G -endomorphismes du premier groupe d'homologie ℓ -adique d'une variété abélienne sont ceux de la variété abélienne sur K quitte à tensoriser par \mathbb{Z}_ℓ (G est le groupe de Galois de la clôture algébrique \bar{K} de K , sur K). On montre aussi par la même occasion que la représentation de G dans ce groupe d'homologie est semi-simple sur \mathbb{Q}_ℓ . Pour montrer la finitude d'une classe de K -isogénies (Th.2), on veut bien entendu utiliser le Théorème de finitude pour la hauteur modulaire cité plus haut. C'est ce qui est fait dans l'exposé VI.

Dans l'exposé VII M. Raynaud montre que la variation de la hauteur modulaire dans une classe d'isogénies est effectivement bornée (Théorème 4.4.9). Ce résultat est plus fin que celui de G. Faltings. Il utilise les résultats de M. Raynaud sur les groupes de type (p, \dots, p) appliqués aux groupes de Barsotti-Tate tronqués plutôt qu'aux groupes p -divisibles.

Dans l'exposé VI de L. Illusie (d'après A. Grothendieck), on montre le théorème d'existence de prolongements infinitésimaux des groupes de Barsotti-Tate tronqués qui est utilisé dans l'exposé VII de M. Raynaud.

Thème 3 : La conjecture de Shafarevich (exposés IX et X)

Dans l'exposé IX de P. Deligne, on trouvera, sous sa forme la plus effective, le merveilleux argument de G. Faltings prouvant qu'il n'y a qu'un nombre fini de classes de K -isogénies de variétés abéliennes de dimension et mauvaise réduction fixées (Corollaire de Théorème 1).

Comme on l'a vu plus haut chaque classe d'isogénies ne contient qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes. On obtient ainsi la preuve de la conjecture de Shafarevich (Théorème 0 dans l'exposé X) : "Soit K un corps de nombres, S un ensemble fini de places de K , g un entier, l'ensemble des classes de K -isomorphismes de variétés abéliennes sur K de dimension g et ayant bonne réduction en dehors de S , est fini".

On en déduit, bien sûr, par le théorème de Torelli, la conjecture originale de Shafarevich : "Soient K , S , $g \geq 1$ comme plus haut, alors l'ensemble des classes de K -isomorphismes de courbes projectives, lisses sur K , géométriquement connexes et de genre g , est fini".

Thème 4 : La construction de Kodaira-Parshin (exposé X)

Dans l'exposé X, M. Martin-Deschamps explique la construction de Kodaira-Parshin qui permet de déduire la conjecture de Mordell de celle de Shafarevich pour les courbes. Essentiellement, à chaque point rationnel sur K d'une courbe C on a attaché une courbe X_p et un morphisme $X_p \rightarrow C$ qui n'est ramifié qu'en P . Le degré de ce morphisme étant fixé en fonction du genre de C (supposé supérieur à deux), la mauvaise réduction de X_p étant fixée par celle de C , on voit facilement que "Shafarevich" implique "Mordell" (c'est un argument de Parshin). En fait, la construction de Kodaira-Parshin peut être faite pour une famille à un paramètre (ce que nous appelons un pinceau). Ce fait sert à contrôler la mauvaise réduction de X_p et dans l'exposé XI à "contrôler" le nombre de points rationnels de C sur K .

Thème 5 : La théorie des intersections d'Arakelov (exposés I, II, III, XI)

L'exposé I §2 donne un résumé de la théorie des intersections d'Arakelov sur les surfaces arithmétiques qui est développé dans les exposés II et III.

Dans l'exposé II de L. Moret-Bailly, on montre le théorème de Riemann-Roch de Faltings pour les surfaces arithmétiques et le théorème de comparaison entre la hauteur de Néron-Tate et les intersections d'Arakelov (Faltings-Hriljac). La présentation ici adoptée est nouvelle et part des métriques permises sur les variétés abéliennes pour revenir ensuite au cas des courbes.

Dans l'exposé III de R. Elkik, on établit de façon assez complète l'existence des fonctions de Green d'Arakelov. On montre ensuite le théorème d'existence de Faltings (Théorème 3) qui dit qu'un faisceau arakelovien suffisamment positif possède des sections "holomorphes" au sens d'Arakelov. Ce théorème culmine dans l'application qui en est faite à la positivité de la self intersection du dualisant (Faltings).

Dans l'exposé XI, nous reprenons d'abord, selon Parshin, la démonstration de la conjecture de Mordell par Faltings pour en tirer une borne "presque effective" du nombre de points rationnels (§2 Théorème). La nouveauté introduite par Parshin est notamment de calculer la "constante de Mumford" en termes de l'intersection d'Arakelov (§1). Nous continuons sur cette veine au §3 en montrant que la constante de Mumford est souvent négative et qu'en conséquence on peut, dans les fibres de la fibration de Kodaira, trouver une infinité de courbes sur $\bar{\mathbb{Q}}$ dont la différence de deux points distincts sur $\bar{\mathbb{Q}}$ n'est jamais de torsion. Comme beaucoup de ces essais d'effectivité tournent autour de la question d'une borne pour la self intersection du dualisant relatif, nous explicitons notre conjecture des petits points qui remplit ce programme parfaitement, surtout pour les corps de fonctions où je l'ai montrée. Il est à noter que cet exposé XI contient surtout des énoncés non encore publiés.

On voit ainsi qu'à part le théorème de Riemann-Roch pour les surfaces arithmétiques (exposé II), l'ensemble des développements de ce volume servent dans l'une ou l'autre preuve de la conjecture de Mordell. Nous avons en outre étudié (notamment dans l'appendice de M. Martin-Deschamps à l'exposé IX) le cas des corps de fonctions qui sont de type fini sur \mathbb{Q} . Le lecteur intéressé par les courbes ou les variétés abéliennes sur les corps de fonctions consultera avec profit notre précédent séminaire paru dans la même collection (n°86) et le "Pinceaux de variétés abéliennes" de L. Moret-Bailly à paraître simultanément, toujours dans la collection Astérisque.

INTRODUCTION

Je tiens à remercier les participants au Séminaire et surtout les auteurs des différents exposés, qui n'ont ménagé ni leur peine, ni leurs critiques, afin que nous menions à bien, ensemble ce travail, et tout spécialement Mireille Martin-Deschamps et Laurent Moret-Bailly qui ont assuré la réalisation définitive de la publication. J'espère que le présent volume rendra service à ceux qui s'intéressent à l'arithmétique d'un point de vue géométrique. Le délicat travail de frappe de ce texte a été assuré avec dextérité par Mesdames Postadjian et Saman. Je tiens à les en remercier vivement.

Lucien SZPIRO

LES DEUX CHEMINS POUR DÉMONTRER LA CONJECTURE DE MORDELL

Théorème de finitude pour la hauteur modulaire

(I, IV, V)

Variation de la hauteur
modulaire par isogénie (VII)

Conjecture de Tate (VIII)

Finitude du nombre de
classes d'isogénies (IX)

Constante de Mumford
(I, II, III, XI)

Kodaira-Parshin(X)

Conjecture de Shafarevich (IX)

Conjecture de Mordell
(XI ou X)

T A B L E D E S M A T I È R E S

I.- Lucien SZPIRO	
DEGRÉS, INTERSECTIONS, HAUTEURS	11
Introduction	12
1.- Faisceaux inversibles	13
2.- Intersections sur les surfaces arithmétiques	18
3.- Hauteurs (variétés compactes, variétés ouvertes)	21
Bibliographie	28
II. Laurent MORET-BAILLY	
MÉTRIQUES PERMISES	29
Introduction	30
1.- Déterminants	31
2.- Autodualité de la jacobienne	34
3.- Faisceaux inversibles hermitiens sur les variétés abéliennes	50
4.- Faisceaux inversibles hermitiens sur les courbes	54
5.- L'accouplement de Néron-Tate	70
6.- Applications aux surfaces arithmétiques	73
Bibliographie	87
III.- Renée ELKIK	
FONCTIONS DE GREEN, VOLUMES DE FALTINGS, APPLICATION AUX SURFACES ARITHMÉTIQUES	89
1.- Fonctions de Green	90
2.- Volumes de Faltings : le théorème de comparaison	102
3.- Applications aux surfaces arithmétiques : positivité du faisceau dualisant relatif	109
Bibliographie	112
IV.- Laurent MORET-BAILLY	
COMPACTIFICATIONS, HAUTEURS ET FINITUDE	113
Introduction	114
1.- Compactifications et théorème de finitude	114
2.- La propriété de prolongement	118
3.- Construction de la compactification	121
4.- Remarques et compléments	128
Bibliographie	129

SÉMINAIRE SUR LES PINCEAUX ARITHMÉTIQUES : LA CONJECTURE DE MORDELL

V.-	Pierre DELIGNE	
	LE LEMME DE GABBER	131
1.-	Enoncés	131
2.-	Démonstration	135
3.-	Exorciser les champs	137
4.-	Obtenir des schémas	141
	Bibliographie	149
VI.-	Luc ILLUSIE	
	DÉFORMATION DES GROUPES DE BARSOTTI-TATE	151
	Introduction	151
1.-	Généralités sur les groupes de Barsotti-Tate	152
2.-	Propriétés différentielles et cohomologiques des groupes de Barsotti-Tate tronqués	157
3.-	Obstructions aux déformations de schémas en groupes	166
4.-	Déformations de BTT	169
	Appendice I	188
	Appendice II	190
	Bibliographie	196
VII.-	Michel RAYNAUD	
	HAUTEURS ET ISOGÉNIES	199
	Introduction	199
1.-	Isogénies et différente	200
2.-	Degré d'Arakelov d'une variété abélienne et de sa duale	206
3.-	Affaissement des groupes de Barsotti-Tate tronqués	212
4.-	Hauteurs et isogénies : Théorèmes de finitude	219
	Bibliographie	233
VIII.-	Marguerite FLEXOR	
	ENDOMORPHISMES DES VARIÉTÉS ABÉLIENNES	235
1.-	Finitude des classes d'isomorphies dans une classe d'isogénies	236
2.-	Enoncés des conjectures	239
3.-	Démonstration de $I \Rightarrow II$ et III	242
4.-	Conséquences de $C_1(K)$ et $C_2(K)$	243
5.-	Endomorphismes des points de ℓ -torsion	245
	Bibliographie	248

TABLE DES MATIÈRES

IX.- Pierre DELIGNE	
REPRÉSENTATIONS ℓ -ADIQUES	249
1.- Théorème	249
2.- Variantes	250
3.- Rendre quantitatif	251
4.- Proposition	252
5.- Variantes	252
Bibliographie	255
Mireille MARTIN-DESCAMPS	
Appendice : CONJECTURE DE SHAFAREVICH POUR LES CORPS DE FONCTIONS SUR \mathbb{Q}	256
X.- Mireille MARTIN-DESCAMPS	
LA CONSTRUCTION DE KODAIRA-PARSHIN	261
Introduction	261
1.- Construction de Kodaira	262
2.- Construction de Parshin [11].....	268
Bibliographie	272
XI.- Lucien SZPIRO	
UN PEU D'EFFECTIVITÉ	275
1.- La constante de Mumford	276
2.- Compter le nombre de points (d'après Parshin)	281
3.- Petits points et points de torsion	283
Bibliographie	287

Astérisque

LUCIEN SZPIRO
Degrés, intersections, hauteurs

Astérisque, tome 127 (1985), p. 11-28

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__127__11_0>

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » ([http://smf4.emath.fr/
Publications/Asterisque/](http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/)) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

Exposé I

D E G R É S , I N T E R S E C T I O N S , H A U T E U R S

Lucien SZPIRO

- 0.- Introduction
- 1.- Faisceaux inversibles avec métriques à l'infini
- 2.- Intersections sur les surfaces arithmétiques
- 3.- Hauteurs (variétés compactes, variétés ouvertes)
- 4.- Bibliographie.

0.- INTRODUCTION

Nous présentons ici le point de vue d'Arakelov : "Une structure entière à l'infini est la donnée de métriques hermitiennes". Cette façon de voir permet, entre autres, d'avoir une approche plus géométrique de la notion de hauteur, d'introduire les métriques ad-hoc pour un problème donné, et de simplifier la présentation.

Le premier paragraphe reprend la théorie élémentaire des corps de nombres du point de vue d'Arakelov. Il couvre essentiellement le sujet du livre de P. Samuel sur ce sujet avec en plus, la formule du produit et en moins, le "second calcul de volume" de Minkowski.

Le second paragraphe traite succinctement de la théorie des intersections d'Arakelov sur une surface arithmétique. Les démonstrations se trouvent dans les exposés 2 et 3. Cette théorie des intersections est essentielle dans l'exposé 11.

Le dernier paragraphe reprend la notion de hauteur via Arakelov. On y montre que la métrique différentielle-modulaire pour une famille de variétés abéliennes a des singularités logarithmiques.

§1 : vocabulaire, notations : Dans cet exposé K sera un corps de nombres, \mathcal{O}_K son anneau d'entiers, $[K:\mathbb{Q}] = n$ son degré sur \mathbb{Q} , D_K la valeur absolue de son discriminant, μ_K l'ensemble des racines de l'unité dans K . Nous nous permettrons d'écrire θ , D , μ , quand aucune confusion ne nous semble en résulter. Pour un corps K nous noterons par \emptyset_K (parfois par \emptyset seulement) un ensemble de places à l'infini de K contenant toutes les places réelles et "la moitié" des places complexes de telle façon que pour une place complexe σ on ait : σ ou bien $\bar{\sigma}$ est dans \emptyset_K . Le nombre de places réelles (resp. complexes) dans \emptyset sera noté r_1 (resp. r_2). Si $\sigma \in \emptyset$ $\varepsilon_\sigma = 1$ (resp. 2) si σ est réelle (resp. si σ est complexe). Nous noterons par \times l'ensemble des éléments inversibles d'un anneau ".."

(*) Je remercie L. Moret-Bailly pour une lecture critique du manuscrit.

§2 : Par surface arithmétique de genre g sur un corps de nombres K nous entendons un schéma régulier X projectif sur $\text{Spec } \mathcal{O}_K$, de fibre générique X_K géométriquement connexe et de genre g sur K .

§3 : Un schéma en groupes commutatif, lisse et séparé $G \rightarrow S$ (S normal) est appelé semi-abélien si, ses fibres sont extension de variétés abéliennes par des tores. Si tel est le cas et si la fibre générique est abélienne, on dit qu'elle a réduction semi-stable (Si S est un trait, il revient au même de dire que la monodromie est unipotente).

1.- FAISCEAUX INVERSIBLES AVEC MÉTRIQUES A L'INFINI

1.1.- Diviseurs compactifiés

Un diviseur compactifié de \mathcal{O}_K^\times est une somme formelle :

$$(i) \quad \sum_{v \in \text{Spec } \max \mathcal{O}} n_v [v] + \sum_{\sigma \in \emptyset} \lambda_\sigma [\sigma] = D \quad \text{où } n_v \in \mathbb{Z} \quad n_v = 0 \text{ pour presque tout } v \text{ et } \lambda_\sigma \in \mathbb{R}.$$

Le degré de D est égal, par définition, à :

$$\sum n_v \log N(v) + \sum \lambda_\sigma$$

Si $f \in K^\times$, le diviseur principal associé à f est :

$$(f) = \sum \text{ord}_v(f) [v] - \sum_{\sigma \in \emptyset} \varepsilon_\sigma \log |f|_\sigma [\sigma].$$

Notant $\text{Div}_C(\mathcal{O}_K^\times)$ (resp. $\text{Pr}_C(\mathcal{O}_K^\times)$) le groupe des diviseurs compactifiés (resp. des diviseurs compactifiés principaux) la formule du produit permet de définir le degré sur le quotient :

$$\text{degré} : \text{Div}_C(\mathcal{O}_K^\times)/\text{Pr}_C(\mathcal{O}_K^\times) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

1.2.- Le groupe de Picard compactifié

Un faisceau inversible compactifié sur \mathcal{O}_K^\times est un module projectif de rang un sur $\mathcal{O}_K^\times : L$, muni pour chaque σ dans \emptyset d'une forme hermitienne définie positive sur :

$$L_\sigma = L \otimes_{\mathcal{O}} K_\sigma$$

où K_σ est égal à \mathbb{R} ou \mathbb{C} selon que σ est réelle ou complexe.

Notons $\text{Pic}_C(\mathcal{O}_K^\times)$ le groupe des classes d'isométries de faisceaux inversibles hermitiens sur \mathcal{O}_K^\times . Deux ensembles de formes hermitiennes $\langle , \rangle_{1,\sigma}$ et $\langle , \rangle_{2,\sigma}$ sur L sont isomètres si et seulement si on peut trouver une unité u dans \mathcal{O}_K^\times telle que pour tout $s \in L$ on ait

$$|s|_{1,\sigma} = |u|_\sigma |s|_{2,\sigma} \quad .$$

On a ainsi la suite exacte :

$$(ii) \quad 0 \longrightarrow \mathbb{R}^{r_1+r_2}/\log \mathcal{O}_K^\times \longrightarrow \text{Pic}_C(\mathcal{O}_K) \longrightarrow \text{cl}(\mathcal{O}_K) \longrightarrow 0$$

Soit $\varphi : \text{Div}_C(\mathcal{O}_K) \longrightarrow \text{Pic}_C(\mathcal{O}_K)$ l'application définie par :

$\varphi(\sum n_v[v] + \sum \lambda_\sigma[\sigma])$ = le module projectif de rang un $\mathbb{R}\mathfrak{M}_V^{-n_V}$ muni des formes hermitiennes suivantes : $\mathbb{R}\mathfrak{M}_V^{-n_V}$ est un idéal fractionnaire donc canoniquement contenu dans K , on donnera à $\|1\|_\sigma$ la valeur $\exp(-\lambda_\sigma/\varepsilon_\sigma)$.

PROPOSITION 1.1.- L'application $\varphi : \text{Div}_C(\mathcal{O}_K) \longrightarrow \text{Pic}_C(\mathcal{O}_K)$ définie ci-dessus induit un isomorphisme

$$\text{Div}_C(\mathcal{O}_K)/\text{Pr}_C(\mathcal{O})_K \xrightarrow{\sim} \text{Pic}_C(\mathcal{O}_K) \quad .$$

Idée de la démonstration : Soit $L \in \text{Pic}_C(\mathcal{O}_K)$ et $0 \neq s \in L$. L'élément s définit une application $\mathcal{O}_K \longrightarrow L$, et donc identifie L^{-1} à un idéal \mathcal{O}_s de \mathcal{O}_K . Définissons $\Psi(L,s) = \sum \text{ord}_v(\mathcal{O}_s)[v] - \sum \varepsilon_\sigma \log |s|_\sigma$. Le lecteur vérifiera que $\varphi \circ \Psi(L,s) = L$, $\Psi(L,s)$ a une image, dans $\text{Div}_C(\mathcal{O}_K)/\text{Pr}_C(\mathcal{O})_K$, indépendante de s , et enfin l'énoncé.

COROLLAIRE.- On a un homomorphisme :

$$\deg : \text{Pic}_C(\mathcal{O}_K) \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui, avec les notations ci-dessus, est défini par : (iii) $\deg(L) = \log \frac{N(\mathcal{O}_s)}{\prod |s|_\sigma^{\varepsilon_\sigma}}$

1.3.- Le Marabout-Flash de théorie des nombres algébriques

Les objets ci-dessus introduits suivent de près la théorie des diviseurs sur une courbe algébrique projective. Nous continuons dans cette même veine.

Soit $L \in \text{Pic}_C(\mathcal{O}_K)$, définissons l'ensemble des sections de L :

$$(iv) \quad H^0(L) = \{s \in L \mid |s|_\sigma \leq 1 \text{ pour tout } \sigma \in \emptyset\} \quad .$$

On a aussi une "caractéristique d'Euler-Poincaré"

$$(v) \quad \chi(L) = -\log \text{vol}(\oplus L_\sigma/L) \quad .$$

Cette dernière définition se justifie car :

a) L est un réseau dans $\oplus L_\sigma (\simeq \mathbb{R}^{[K:\mathbb{Q}]})$

b) les formes hermitiennes aux places à l'infini induisent un élément de volume sur $\oplus_{\sigma \in \emptyset} L_\sigma$ (l'élément de volume sur \mathbb{C} est $dx \wedge dy$ avec

$z = x + iy$.

Par exemple, si \mathcal{O}_K est muni de sa métrique canonique $|1|_\sigma = 1 \forall \sigma (\mathcal{O}_K \text{ est alors appelé le faisceau trivial})$ on a :

$$\begin{aligned} H^0(\mathcal{O}_K) &= \{0\} \cup \mu_K \\ \chi(\mathcal{O}_K) &= \log(2^{r_2} D^{-1/2}) . \end{aligned}$$

On a l'interprétation "géométrique" suivante de H^0 et χ :

PROPOSITION 1.2 : (cf. Lang [L]).- Si $L \in \text{Pic}_C(\mathcal{O}_K)$ et $t \in \mathbb{R}$, notant L_t l'élément de $\text{Pic}_C(\mathcal{O}_K)$ où on a multiplié les métriques à l'infini par t , on a :

$$\chi(L) = -\log(2^{r_1} \pi^{r_2}) + \log \left[\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\# H^0(L_t)}{t^{[K:\mathbb{Q}]}} \right]$$

Nous introduisons une caractéristique modifiée

$$(vi) \quad \chi'(L) = -\log \frac{2^n \text{vol}(\oplus L_G/L)}{2^{r_1} \pi^{r_2}}, \quad \chi'(\mathcal{O}_K) = -\log \left[\left(\frac{2}{\pi} \right)^{r_2} D^{1/2} \right]$$

Son intérêt se révèlera au lemme 3 ci-dessous.

LEMME 1.0 (Riemann-Roch !).-

$$\chi(L) = \deg L + \chi(\mathcal{O}_K), \quad \chi'(L) = \deg L + \chi'(\mathcal{O}_K) .$$

LEMME 1.1.- Si $\deg L < 0$ alors $H^0(L) = 0$.

LEMME 1.2.- Si $\deg L = 0$ et $H^0(L) \neq 0$ alors L est isomorphe au faisceau trivial \mathcal{O}_K .

LEMME 1.3 (Minkowski).- Si $\deg(L) \geq -\chi'(\mathcal{O}_K)$ alors $H^0(L) \neq 0$.

Les lemmes 0 à 2 sont de démonstration immédiate, le lemme 3 est une reformulation du célèbre énoncé de Minkowski sur les points d'un réseau dans un convexe compact symétrique.

Remarques

- a) les quatre lemmes ci-dessus sont pratiquement les mêmes pour les faisceaux inversibles sur une courbe algébrique projective et lisse sur un corps.
- b) On a aussi "une suite exacte de Hurwitz" où les faisceaux des différentielles sont remplacés quand c'est nécessaire par les faisceaux dualisants (classe de la différente inverse). En effet soit

$$\omega_\sigma = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{O}, \mathbb{Z}) .$$

La trace fournit une "section" canonique de ω_{σ} , notons la Tr , pour donner des formes hermitiennes à l'infini il suffit de spécifier la valeur de $|\text{Tr}|_{\sigma}$. Posons

$$|\text{Tr}|_{\sigma} = \varepsilon_{\sigma}$$

LEMME 1.4.- On a la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_K^{1 \xrightarrow{\text{Tr}} \omega_{\mathcal{O}_K}} \longrightarrow \Omega^1_{\mathcal{O}_K/\mathbb{Z}} \longrightarrow 0$$

De plus $\deg(\omega_{\mathcal{O}_K}) = -2\chi(\mathcal{O}_K)$.

Les lemmes 1.1 à 1.3 sont le secret de la démonstration des quatre théorèmes de base de la théorie des nombres algébriques. Nous indiquons brièvement les démonstrations de ces théorèmes par la méthode ainsi introduite. Le quatrième théorème est d'un usage constant dans ce séminaire.

THÉORÈME 1.1 (Hermite-Minkowski).- Si $[K:\mathbb{Q}] > 1$ alors $D_K > 1$ (i.e. $\pi_1(\mathbb{Z}) = 0$).

Démonstration : le lemme 3 contre le lemme 1 indique $\chi'(\mathcal{O}_K) \leq 0$. Donc si $r_2 \neq 0$ on conclut de suite par les formules (v)' (remarquer l'économie). Si $r_2 = 0$ et $r_1 > 1$ choisissons $\underline{\alpha} = (\alpha_{\sigma}) \in \mathbb{R}^{r_1}$ qui ne soit pas dans l'image (discrete) de $\log \mathcal{O}_K^{\times}$ et telle que $\sum \alpha_{\sigma} = 0$. Notons $\mathcal{O}_{\underline{\alpha}}$ l'élément de $\text{Pic}_C(\mathcal{O}_K)$ qui "à distance finie" est égal à \mathcal{O}_K et qui est muni de métriques telles que $|1|_{\sigma} = \exp(\alpha_{\sigma})$. Nous avons tout fait pour que $\mathcal{O}_{\underline{\alpha}}$ soit différent de \mathcal{O}_K dans $\text{Pic}_C(\mathcal{O}_K)$, donc, par le lemme 2 ($\deg \mathcal{O}_{\underline{\alpha}} = 0$) $H^0(\mathcal{O}_{\underline{\alpha}}) = 0$. Donc par le lemme 3 $-\chi'(\mathcal{O}_K) > 0$, ce qui conclut.

THÉORÈME 1.2 (Dirichlet).- Le groupe des classes d'idéaux de \mathcal{O}_K est fini.

En effet tout $L \in \text{cl}(\mathcal{O}_K)$ peut être muni de métriques hermitiennes à l'infini tel que $\deg(L) = -\chi'(\mathcal{O}_K)$. La classe de L^{-1} est donc représentée par un idéal α de norme au plus $(\exp - \chi'(\mathcal{O}_K))$ (lemme 3, formule (iii)). Il reste à appliquer le lemme évident suivant :

LEMME 5.- L'ensemble des idéaux de \mathcal{O}_K de norme inférieure à un nombre donné, est fini.

THÉORÈME 1.3 (dit des unités : Dirichlet).- Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{r_1+r_2}$ formé des éléments (α_{σ}) tels que $\sum \alpha_{\sigma} = 0$ (noyau du degré), alors l'image de \mathcal{O}_K^{\times} par l'application $\oplus \log | |_{\sigma}^{\varepsilon_{\sigma}}$ est un réseau dans W .

Idée de la démonstration : Soit α_n une suite d'éléments de $\mathbb{R}^{r_1+r_2}$ de degré $-\chi'(\mathcal{O}_K)$ (i.e. $\sum_{\sigma \in \emptyset} \alpha_{\sigma, n} \epsilon_{\sigma} = -\chi'(\mathcal{O}_K)$) et soit $\mathcal{O}_{\alpha_n} \in \text{Pic}_C(\mathcal{O}_K)$ construit comme dans la preuve du théorème 1. Il nous suffit de montrer (car l'image de \mathcal{O}_K^\times est discrète) qu'une sous suite des \mathcal{O}_{α_n} est convergente dans $\text{Pic}_C(\mathcal{O}_K)$. Chaque $H^0(\mathcal{O}_{\alpha_n})$ est différent de zéro par le lemme 3, donc il existe des idéaux \mathcal{A}_n , principaux, de norme inférieure $\exp(-\chi'(\mathcal{O}_K))$.

Soit α_{n_i} une sous suite de α_n tels que les idéaux \mathcal{A}_{n_i} soient tous égaux. On a $\alpha_{n_i} = x_i \mathcal{O}_K = \alpha_{n_j} = x_j \mathcal{O}_K$. Il existe donc des unités $u_j \in \mathcal{O}_K^\times$ telles que $x_j = u_j x_0$. On a par hypothèse $|x_j|_\sigma \leq 1$ et donc $|\alpha_{\sigma, n_j}|_\sigma |u_j|_\sigma \leq \frac{1}{|x_0|_\sigma}$. Posons $\alpha'_{\sigma, j} = \alpha_{\sigma, n_j} |u_j|_\sigma$, on a $\mathcal{O}_{\alpha_{n_j}} = \mathcal{O}_{\alpha'_j}$ dans $\text{Pic}_C(\mathcal{O}_K)$. Les $\alpha'_{\sigma, j}$ sont bornés, donc on peut en extraire une suite convergente dans $\mathbb{R}^{r_1+r_2}$. C.Q.F.D.

THÉORÈME 1.4 (Hermite).- L'ensemble des corps de nombres algébriques de degré donné n , et qui ne sont ramifiés qu'en un ensemble fini de places donné S , est fini.

Ce n'est pas l'énoncé classique du théorème de Hermite (si D_K est fixé, il n'y a qu'un nombre fini de K) mais cela en est une variante qui servira surtout sous la forme suivante :

COROLLAIRE.- Soient g un entier, S un ensemble fini de places de K , alors il existe une extension finie K' de K , effectivement calculable, telle que : si A_K est une variété abélienne sur K de dimension g , dont le modèle de Néron a bonne réduction en dehors de S , alors $A_{K'}$ est à réduction semi-stable.

En effet, on sait qu'en rendant rationnels sur K' les points de division par 12 (par exemple) de A_K , $A_{K'}$ est semi-stable. L'effectivité vient de ce qu'on verra plus bas que la démonstration du théorème 4 est effective.

Démonstration du théorème 1.4 : elle se fait en deux parties :

- quand n et S sont fixés D_K est borné
- quand n et D_K sont fixés il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour K .
- C'est un problème local; soit $K \rightarrow L$ une extension galoisienne de corps locaux de degré n et de groupe G . Soit G_i le sous-groupe de G qui agit trivialement sur $\mathcal{O}_L/\mathfrak{m}_L^{i+1}$. On vérifie assez facilement les faits suivants :

- valuation (D) = $\sum_0^{\infty} (\# G_i - 1)$
- G_i/G_{i+1} est un sous-groupe de $\mathcal{O}_L^{i+1}/\mathcal{O}_L^i$
- $G_i = \{1\}$ pour $i > e/(p-1)$ où e est l'indice de ramification absolue ($e = v_K(p)$, $p = \text{car}(\mathcal{O}_K/\mathcal{O}_K)$ ([S] IV §2 ex.3 a) b) c)).

On a donc une borne effective pour les exposants des idéaux premiers qui rentrent dans la décomposition de D (n et S fixés).

b) Montrons que si n et D sont fixés il y a un élément primitif dont les différentes valeurs absolues sont bornées. Soit $L \simeq \mathcal{O}_K^\times$ avec pour métriques à l'infini :

$$|1|_{\sigma_1} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{r_2/2} D^{-1/4} 2^{1-r_2}$$

$$|1|_{\sigma_i} = 2 \quad i > 1$$

alors $\deg L = -X'(\mathcal{O}_K)$.

Il existe donc (lemme 1.3) $x \in \mathcal{O}_K^\times$ tel que $|\sigma_1(x)| \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{-r_2/2} D^{1/4} 2^{r_2-1}$; $|\sigma_i(x)| \leq \frac{1}{2}, i > 1$.

Un tel élément est primitif car $|\sigma_1(x)| > 1$ ($\prod |\sigma_i(x)|^{\varepsilon_{\sigma_i}} \geq 1$) et $|\sigma_i(x)| < 1, i \neq 1$. Il est borné par hypothèse, on a donc gagné.

2.- INTERSECTIONS SUR LES SURFACES ARITHMÉTIQUES

Arakelov a construit une théorie des intersections, pour les diviseurs "compactifiés" sur une surface arithmétique, qui s'approche le plus possible de celle des diviseurs sur une surface algébrique. Nous en donnons ici la définition et les propriétés. Les démonstrations quand elles ne sont pas indiquées se trouvent dans les exposés 2 et 3 de ce séminaire. Faltings, et partiellement Hriljac, ont donné des compléments sur la théorie d'Arakelov qui la rapprochent encore plus de la théorie géométrique. Ces développements se trouvent dans les exposés 2 et 3.

2.1.- Diviseurs et groupe de Picard compactifiés

Soit $X \xrightarrow{f} \text{Spec } \mathcal{O}_K$ une surface arithmétique régulière. Pour chaque σ place à l'infini de K choisissons une $(1-1)$ -forme ℓ^∞ $d\mu_\sigma$ telle que $\int_{X_\sigma(\mathbb{C})} d\mu_\sigma = 1$.

DEFINITION 2.1. - Le groupe de Picard compactifié $\text{Pic}(X, d\mu_\sigma)$ d'une surface arithmétique X , munie d'éléments de volume $d\mu_\sigma$, comme plus haut, est le groupe de classes d'isométries de faisceaux inversibles L sur X munis pour chaque σ d'une métrique hermitienne positive $\ell^\infty <, >_\sigma$ sur L_σ telle que :

$$-\frac{1}{2i\pi} \partial\bar{\partial} \log |s|_\sigma = (\deg L) d\mu_\sigma$$

Bien sûr, $\deg L$ est le degré de L_K sur X_K .

THÉORÈME 2.1 (Arakelov).- Pour chaque choix de métriques $(d\mu_\sigma)$ sur les X_σ satisfaisant à $\int_{X_\sigma(\mathbb{C})} d\mu_\sigma = 1$ on a la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^{r_1+r_2}/\log \mathcal{O}^\times \xrightarrow{\alpha} \text{Pic}(X, d\mu_\sigma) \xrightarrow{\beta} \text{Pic}(X) \longrightarrow 0$$

où β est la flèche "oubli" des structures hermitiennes à l'infini, et $\alpha(a_1, \dots, a_{r_1+r_2})$ est la structure hermitienne sur le faisceau inversible \mathcal{O}_X telle que :

pour chaque σ , $|1|_\sigma(P) = \exp(a_\sigma)$ pour tout point P de $X_\sigma(\mathbb{C})$.

La seule difficulté de ce théorème est la surjectivité de β (existence de métriques permises) : elle est résolue dans l'exposé 2 (R. Elkik). Notons que l'exactitude de la partie gauche de la suite signifie exactement que deux métriques permises sur le même fibré, diffèrent par la multiplication par un nombre réel positif.

DÉFINITION 2.2.- Un diviseur compactifié sur X est une somme formelle finie $\sum_v n_v [v] + \sum_{\sigma \in \emptyset} \lambda_\sigma [\sigma]$ où v parcourt les cycles irréductibles de codimension un dans X , n_v est un entier et λ_σ un réel. Le groupe des diviseurs compactifiés sera noté $\text{Div}_c(X)$.

DÉFINITION 2.3.- Soient $(d\mu_\sigma)$ des éléments de volume sur les X_σ satisfaisant $\int_{X_\sigma(\mathbb{C})} d\mu_\sigma = 1$, et soit f une fonction rationnelle sur X . Le sous-groupe des diviseurs compactifiés principaux $P(X, d\mu_\sigma)$ est le sous-groupe de $\text{Div}_c(X)$ des éléments de la forme $\sum_v v(f) [v] - \sum_\sigma \epsilon_\sigma \int_{X_\sigma(\mathbb{C})} \log |f|_\sigma d\mu_\sigma$

PROPOSITION 2.1.- L'application φ qui a un diviseur compactifié :

$\sum n_v [v] + \sum \lambda_\sigma [\sigma]$, associe le faisceau inversible métrisé :

$(\prod m_v^{-n_v}, |1|_\sigma = \exp(-\lambda_\sigma/\epsilon_\sigma))$ induit un isomorphisme :

$$\text{Div}_c(X)/P(X, d\mu_\sigma) \simeq \text{Pic}(X, d\mu_\sigma).$$

La démonstration est évidente. Mettons néanmoins en évidence l'application inverse : soit L un élément de $\text{Pic}_c(X, d\mu_\sigma)$, s une section méromorphe de L , D_s le diviseur à distance finie associé à s , on fait correspondre à (L, s) le diviseur $\sum v(D_s) [v] - \sum \epsilon_\sigma (\int_{X_\sigma(\mathbb{C})} \log |s|_\sigma d\mu_\sigma) [\sigma]$. On vérifie que la classe de ce diviseur modulo $P(X, d\mu_\sigma)$ ne change pas quand on change la section s de L .

Si D est dans $\text{Div}_C(X)$ on note $\mathcal{O}_X(D) = \varphi(D)$.

2.2.- Intersections

THÉORÈME 2.2 (Arakelov).- Soit X une surface arithmétique munie de métriques $d\mu_\sigma$ à l'infini telles que $\int_{X_\sigma(\mathbb{C})} d\mu_\sigma = 1$. Alors il existe un et un seul accouplement bilinéaire $(,) : \text{Pic}(X, d\mu_\sigma) \times \text{Pic}(X, d\mu_\sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ ayant les propriétés suivantes :

(I) Si D est un diviseur irréductible et réduit horizontal (i.e fini sur $\text{Spec } \mathcal{O}_K$) $(L, \mathcal{O}_X(L)) = \deg_{\tilde{D}} \varepsilon_D^* L$ (au sens du corollaire de la proposition , où \tilde{D} est le normalisé de la partie finie de D et $\varepsilon_D : \tilde{D} \rightarrow X$ l'application canonique).

(II) Si D est un diviseur dans la fibre de $v \in \text{Spec}(\mathcal{O}_K)$

$$(L, \mathcal{O}_X(L)) = (\text{degré géométrique de } L/D) \cdot \log N(v).$$

(III) $(., .)$ est symétrique.

On prend bien entendu (I) et (II) comme définition ; le seul problème est de montrer (III). Ce dernier point se vérifie facilement à l'aide de la formule de Green-Riemann.

Il est bon d'expliciter le cas de sections : supposons que le genre des fibres est au moins un :

Soit E une section de $X \xrightarrow{f} \text{Spec } \mathcal{O}_K$, $g = \text{genre}(X_K) \geq 1$, $\mathcal{O}_X(E)$ a une section canonique s_E . Nous noterons toujours $\mathcal{O}_X(E)$ l'élément de $\text{Pic}(X, d\mu_\sigma)$ tel que $\varphi(E) = \mathcal{O}_X(E)$ i.e $\int_{X_\sigma(\mathbb{C})} \log |s_E(P)|_\sigma d\mu_\sigma = 0$. Si E_1 et E_2 sont deux sections distinctes on a

$$(E_1 \cdot E_2) = N(E_1 \cap E_2) - \sum_\sigma \varepsilon_\sigma \log |s_{P_1}(P_2)|_\sigma$$

où $E_1 \cap E_2$ est l'intersection schématique des E_i , et, P_i le point de X_K correspondant à E_i .

La fonction $X_\sigma(\mathbb{C}) \times X_\sigma(\mathbb{C}) \xrightarrow{G_\sigma} \mathbb{R}^+$ définie par $G_\sigma(P_1, P_2) = |s_{P_1}(P_2)|_\sigma = |s_{P_2}(P_1)|_\sigma$ est dite fonction de Green associée à $d\mu_\sigma$.

Remarques : a) l'intersection d'Arakelov commute bien au changement de base fini : $K \rightarrow K'$: elle devient multipliée par $[K':K]$.

b) A l'aide de a) on peut ramener tout calcul d'intersection au cas de sections et de diviseurs verticaux.

c) On voit facilement que les termes locaux à l'infini de l'intersection d'Arakelov ne sont pas tous positifs dans $(E_1 \cdot E_2)$. C'est une différence majeure avec la

situation géométrique.

2.3.- La formule d'adjonction

Pour chaque système de métriques $d\mu_\sigma$ telles que $\int_{X_\sigma(\mathbb{C})} d\mu_\sigma = 1$ on a une théorie des intersections d'Arakelov. Il en est un plus naturel que nous appellerons canonique :

$d\mu_\sigma = \frac{1}{g} \sum_{i=1}^g \omega_i \wedge \bar{\omega}_i$ où (ω_i) est une base orthonormale de $H^0(X, \Omega^1_{X_\sigma})$ pour $\langle \alpha, \beta \rangle = \int_{X_\sigma(\mathbb{C})} \alpha \wedge \bar{\beta}$.
On montrera essentiellement dans l'exposé 2 (L. Moret-Bailly) que ces métriques ont l'avantage suivant :

THÉORÈME 2.3 (Arakelov).- Soit X une surface arithmétique sur K de genre $g \geq 1$. Soit Δ la diagonale de $X \times_K X$ et s_Δ la section canonique de $\mathcal{O}_{X \times_K X}(\Delta)$. Définissons une métrique hermitienne sur $(\mathcal{O}_{X \times_K X}(\Delta))_\sigma$ par $|s_\Delta(P, Q)|_\sigma = G_\sigma(P, Q)$. Alors $(\omega_{X/\mathcal{O}_K})_\sigma = \Omega_{X_\sigma}^1$ qui est le faisceau normal à Δ_σ est muni d'une métrique dite canonique, qui est permise pour les $d\mu_\sigma$ canoniques. Autrement dit si E est une section de $X \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_K$ on a $(\omega_{X/\mathcal{O}_K} \cdot \mathcal{O}_X(E))_\sigma = -E^2$.

Remarque : la formule d'adjonction pour les diviseurs horizontaux possède des termes non triviaux à l'infini : par exemple si $D = E_1 + E_2$ est somme de deux sections distinctes et $\delta_{D/\mathcal{O}}$ est la différente de D sur \mathcal{O} on a :

$$(\omega_{X/\mathcal{O}} \cdot \mathcal{O}_X(D)) + (D \cdot D) = \log N(\delta_{D/\mathcal{O}}) - 2 \sum_\sigma \epsilon_\sigma \log |s_{P_1}(P_2)|_\sigma$$

3.- HAUTEURS

3.1.- Intersection d'un cycle de codimension un et d'un cycle de dimension un dans une variété arithmétique compacte

Soit X_K une variété propre sur K . Pour construire des "hauteurs" il nous faut une structure entière sur \mathcal{O}_K (à distance finie) et des métriques hermitiennes aux places à l'infini ("structure entière à l'infini"). Soit donc X un modèle propre de X_K sur $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ (i.e la fibre générique de X est X_K). Soit L_K un fibré inversible sur X_K , L un prolongement de L à X , nous supposerons de plus que L_σ sur X_σ est muni d'une métrique hermitienne ℓ^σ , $|\cdot|_\sigma$, pour chaque σ . Soit $P \in X_K(K)$ il lui correspond biunivoquement une section ϵ_P de $X \xrightarrow{f} \text{Spec } \mathcal{O}_K$. Le faisceau inversible $\epsilon_P^*(L)$ sur \mathcal{O}_K est muni de métriques à l'infini et donc possède un degré au sens du §1. On pose

$$\boxed{h_{L, |\cdot|_\sigma}(P) = \frac{1}{[K(P):\mathbb{Q}]} \deg \epsilon_P^* L}$$

C'est la hauteur de P associée à L et $|\cdot|_\sigma$. Par abus de notation, nous la noterons h_L quand les métriques seront clairement fixées. Par exemple on a :

$$h_{L \otimes m}(P) = m h_L(P) .$$

LEMME 1. - La hauteur est invariante par changement de corps de base.

C'est clair.

LEMME 2. - (Changement de structure entière sur le faisceau inversible).

Si L' est une autre extension de L_K à X il existe une constante C telle que : $|h_{L'}(P) - h_L(P)| < C$ pour tout $P \in X_K(\bar{K})$.

En effet, il existe un entier m tel que $\frac{1}{m} L \hookrightarrow L' \hookrightarrow m L$.

LEMME 3. - (Changement de métriques). Soient $|\cdot|_\sigma$ d'autres métriques hermitiennes sur les L_σ , alors il existe une constante C tel que

$$\left| h_{L, |\cdot|_\sigma}(P) - h_{L, |\cdot|'_\sigma}(P) \right| < C \text{ pour tout } P \in X_K(\bar{K}) .$$

Les X_σ étant compactes la fonction φ_σ définie par : $|\cdot|_\sigma = \varphi_\sigma |\cdot|'_\sigma$ est bornée. D'autre part, si K' contient K et ρ est une place à l'infini divisant σ , $\sup \varphi_\rho = \sup \varphi_\sigma$.

LEMME 4. - (changement de modèle entier). Si (X, L) et (X', L') sont deux modèles entiers de (X_K, L_K) alors il existe une constante C telle que

$$|h_{L'}(P) - h_L(P)| < C \text{ pour tout } P \in X_K(\bar{K}) .$$

Par le lemme 2, et par produit fibré on se ramène au cas où on a un morphisme birationnel

$$\pi: X' \longrightarrow X$$

$$\text{et } L' = \pi^* L .$$

Dans ce cas, on a : $h_{L'}(P) = h_L(P)$ pour tout $P \in X_K(\bar{K})$.

Exemple : a) hauteur naïve : Soit \underline{x} un point de \mathbb{P}_K^{r+1} , choisissons une base de K^{r+1} et soient (x_0, \dots, x_r) les coordonnées de \underline{x} associées à cette base (à K^\times près !). Munissons K_σ^{r+1} de la métrique hermitienne telle que la base choisie soit orthonormale. Munissons $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r(1)}$ de la métrique de Fubini-Study associée,

i.e. pour tout point P , $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_{\sigma}}(1)/_P$ est muni de la métrique quotient par :

$K_{\sigma}^{r+1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_{\sigma}}(1)/_P \longrightarrow 0$. Si $s \in H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1))$, $s = \sum \lambda_i s_i$ (s_i base orthonormale) et $P \in \mathbb{P}^r$ de coordonnées $x_0 \dots x_r$ on a :

$$|s(P)|^2 = \frac{|\sum \lambda_i x_i|^2}{\sum |x_i|^2}$$

Nous avons donc une hauteur de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^r : h_{FS}(P)$.

On vérifie facilement que

$$h_{FS}((x_0 \dots x_r)) = \frac{1}{K:\mathbb{Q}} \log \frac{\prod_{\sigma} (\sum x_i^2)^{(\varepsilon_{\sigma}/2)}}{N(\sum \mathcal{O}_K x_i)}$$

On notera l'inversion numérateur-dénominateur par rapport à la formule (iii) du §1. Cette inversion est due à la dualité sections-coordonnées.

b) La hauteur naïve est positive. On en déduit (lemme 3) que pour tout $(L, |\cdot|_{\sigma})$ où L est ample il existe une constante C telle que : $h_{L, |\cdot|_{\sigma}}(P) \geq C$ pour tout $P \in X_K(\bar{K})$.

c) Si $\varphi_0 \dots \varphi_l$ sont des polynômes homogènes de degré m en les variables x_0, \dots, x_r et si X est un point de \mathbb{P}^r où les φ_i ne sont pas tous nuls on a la comparaison suivante entre les hauteurs naïves sur \mathbb{P}^r et sur \mathbb{P}^l :

$$h(\varphi(x)) \leq m h(x) + h(\varphi)$$

où $h(\varphi) = \log N + \sum_{\sigma} \log \sup |\text{coefficients des } \varphi_i|$

avec $N = \text{nombre maximum de monomes dans les } \varphi_i$.

THÉORÈME 3.1 (Northcott). - Soit $f : X \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_K$ une variété projective sur \mathcal{O}_K et L un fibré inversible sur X tel que : L_K soit ample et L_{σ} muni d'une métrique hermitienne non nulle, pour chaque σ . Alors :

(i) Il existe une constante C telle que $h_L(P) \geq C$ pour tout P dans $X_K(\bar{K})$

(ii) Pour tout nombre réel A et tout entier d , l'ensemble des points de $X_K(\bar{K})$, définis sur un corps de degré au plus d sur \mathbb{Q} , et de hauteur inférieure à A est fini.

Par les lemmes précédents on se ramène à la hauteur naïve sur \mathbb{P}^r . Alors (i) est évident. Pour (ii) considérons l'ensemble $E_{r,d}$ des points de \mathbb{P}^r rationnels sur un corps de nombres K tel que $[K:\mathbb{Q}] = d$. Soit $\sigma : E_{r,d} \rightarrow (\mathbb{P}^r(\mathbb{Q}))^d$ qui à $P \in \mathbb{P}^r(K)$, $[K(P):\mathbb{Q}] = d$ associe le point

$(\sigma_i(P))_{i=1..d}$ où les $\sigma_i(P)$ sont ses différents conjugués. Soit $X_{r,d}$ le quotient de $\mathbb{P}^r \times \dots \times \mathbb{P}^r$ par l'action du groupe symétrique S_d . On a tout fait pour que : si $P \in \mathbb{P}^r(K)$, $[K:\mathbb{Q}] \leq d$ alors $q \circ \sigma(P) \in X_{r,d}(\mathbb{Q})$ où $q : \mathbb{P}^r \times \dots \times \mathbb{P}^r \rightarrow X_{r,d}$. Notons que la partie (ii) est évidente pour la hauteur naïve h quand $d=1$. Il nous suffit donc de vérifier qu'on a une hauteur h' sur $X_{r,d}$ associée à un faisceau ample telle que

$$h'(q \circ \sigma(P)) \leq m h(P) + C \quad m \in \mathbb{N}, \quad C \text{ constante}, \quad P \in E_{r,d}.$$

On plonge pour ceci $X_{n,d}$ dans un projectif par des polynomes homogènes en chaque système de variables et invariants par S_d . L'exemple c) permet alors de conclure.

3.2.- Hauteurs à singularités logarithmiques

L'avantage d'avoir introduit des métriques à l'infini, et les hauteurs associées, sur les méthodes pré-arakeloviennes (hauteur naïve et ses variantes) réside dans le choix ad-hoc de métriques pour chaque situation. Un des gadgets essentiels de la démonstration de la conjecture de Tate par Faltings est la hauteur modulaire introduite plus bas. On verra dans l'exposé 7 de M. Raynaud qu'elle a été choisie pour se comporter de façon naturelle à l'infini. Par contre le schéma de modules des variétés abéliennes polarisées n'est pas projectif et les considérations de 3.1 sont insuffisantes. On est donc amené à considérer des hauteurs sur des variétés ouvertes qui ont un comportement raisonnable "à l'infini".

DÉFINITION 1.- Soient X une variété algébrique sur \mathbb{C} , L un faisceau inversible sur X , \bar{X} une compactification de X et \bar{L} un prolongement de L à \bar{X} . Soit $|\cdot|$ une métrique hermitienne sur L . On dit qu'elle est à singularités logarithmiques s'il existe une métrique $|\cdot|$ sur \bar{L} et un entier positif r , tels que localement sur \bar{X} :

$$\sup_{P \in \bar{X}} \left(\frac{|s(P)|}{|s(P)|_0}, \frac{|s(P)|_0}{|s(P)|} \right) \leq C(-\log \sum |f_i(P)|)^r$$

où C est une constante et f_i sont des équations locales de $\bar{X} - X = D$.

Soit X_K une variété algébrique sur K et \bar{X}_K une compactification de X_K . Avec une métrique sur L_σ sur X_σ pour chaque σ et un modèle entier de (\bar{X}, \bar{L}) de (\bar{X}_K, \bar{L}_K) (où \bar{L}_K est un prolongement de L_K à X_K) on définit une hauteur pour les points de $X_K(\bar{K})$ avec la même formule qu'en 3.1.

THÉORÈME 3.1'. - Avec les notations ci-dessus supposons que \bar{L}_K soit ample et que les métriques sur les L_σ soient à singularités logarithmiques alors :

- (i) Il existe une constante C telle que $h_{\bar{L}}(P) \geq C$ pour tout $P \in X_K(\bar{K})$.
- (ii) Pour nombre réel A et tout entier d , l'ensemble des points de $X_K(\bar{K})$ définis sur un corps de degré au plus d sur \mathbb{Q} , et de hauteur plus petite que A , est fini.

Pour montrer ces deux énoncés, par le théorème de Northcott (Th.1), il suffit de trouver un faisceau inversible ample L' sur \bar{X}_K , muni de tout le nécessaire, un entier m , et une constante C_1 tels que

$$(*) \quad h_{L'}(P) \geq \frac{1}{m} h_{\bar{L}}(P) + C_1 \quad \text{pour tout } P \in X_K(\bar{K}).$$

On se ramène sans peine au cas où $\bar{X}_K - X_K = D$ est un diviseur. Choisissons un entier m plus grand que l'exposant r de la définition 1 et tel que

$L' = \bar{L}^{\otimes m}(-D)$ soit ample. Munissons L' des métriques $\frac{|f|_0^m}{|f|_\sigma}$ où f est une équation locale de D . On vérifie facilement l'inégalité (*).

3.3.- La hauteur modulaire (ou différentielle)

Soit A_K une variété abélienne de dimension g sur K et $A \xrightarrow{f} \text{Spec } \mathcal{O}_K^\times$ son modèle de Néron. Le faisceau $\Omega_{A/\mathcal{O}}^g$ des différentielles de degré maximum sur A provient de \mathcal{O} . Notons ω_A le faisceau inversible sur \mathcal{O}_K tel que $f^* \omega_A = \Omega_{A/\mathcal{O}}^g$.

On peut se mettre sur $\omega_{A,\sigma}$ une métrique naturelle, dite métrique modulaire, pour tout σ de la façon suivante :

$$\alpha \in \omega_{A,\sigma} = H^0(A_\sigma, \Omega_{A_\sigma/\mathbb{C}}^g) \quad |\alpha|^2 = |\int_{A_\sigma(\mathbb{C})} \alpha \wedge \bar{\alpha}|$$

ω_A est donc canoniquement un élément de $\text{Pic}_C(\mathcal{O}_K^\times)$ et a un degré (certains auteurs disent : le degré d'Arakelov de ω_A , d'autres le degré différentiel de A). La hauteur modulaire (ou différentielle) de A est $\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \deg(\omega_A)$

DÉFINITION 2. - Soit A_K une variété abélienne sur K , et K' une extension de K où $A_{K'}$ a réduction semi-stable (par exemple on peut prendre pour K' un corps de rationalité des points de division par 12 de A_K). On définit la hauteur modulaire stable de A_K par la formule

$$h(A_K) = \frac{1}{[K':\mathbb{Q}]} \deg \omega_{A'/\mathcal{O}_{K'}}$$

La composante neutre du modèle de Néron d'une variété abélienne semi-stable étant stable par changement de base, la définition ci-dessus ne dépend pas du

corps K' choisi. (Certains auteurs nomment $h(A_K)$ la hauteur stable). On a bien sûr tout de suite noté, que, $\deg(\omega_A)$ ne dépend que de la composante neutre du modèle de Néron. Par la propriété universelle du modèle de Néron il est clair que la hauteur modulaire d'une variété abélienne est plus grande que sa hauteur modulaire stable.

Remarque heuristique

Si la vie mathématique était belle, on aurait sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$ un schéma de module fini \bar{M} des variétés semi-abéliennes principalement polarisées, de dimension g (une variété semi-abélienne est une extension d'un tore par une variété abélienne). Dans ce cas, si A est l'objet universel sur \bar{M} , ω_A serait muni d'une métrique sur M l'ouvert correspondant aux variétés abéliennes. Si on montrait de plus que $\omega_{A,\mathbb{Q}}$ est ample et que la hauteur modulaire est associée à des métriques à singularités logarithmiques, le théorème 1' nous fournirait l'énoncé de finitude qui est un des buts de cet harassant travail : l'ensemble des variétés abéliennes de $\dim g$ sur K de hauteur modulaire bornée est fini. La situation n'est pas si simple. On montrera cependant ce dernier énoncé dans l'exposé 5. L'exposé 4 (le Lemme de Gabber par P. Deligne) fournit une sorte d'objet universel, l'exposé 5 (L. Moret-Bailly) essentiellement l'amplitude de $\omega_{A/\mathbb{Q}}$. Nous montrons ci-dessous la propriété de singularités logarithmiques.

THÉORÈME 3.2.- Soit S un schéma normal connexe de type fini sur \mathbb{C} et soit $f: A \rightarrow S$ un schéma semi-abélien sur S qui soit abélien sur la fibre générale. Soit Z le fermé de S où A n'est pas abélien, alors la métrique modulaire sur $\omega_{A/S|S-Z}$ est à singularités logarithmiques.

Examinons d'abord le cas d'une jacobienne.

Soit C une courbe connexe, lisse, projective, de genre $g \geq 1$, sur \mathbb{C} et soit J la jacobienne de C . Par dualité on a une identification canonique

$$H^0(C, \Omega_C^1) \xrightarrow{\sim} H^1(C, \mathcal{O}_C)^* \xrightarrow{\sim} H^0(J, \Omega_J^1) .$$

Si ω^J est une forme différentielle sur J nous noterons ω^C la forme différentielle sur C obtenue par cette identification.

LEMME 3.2.1.- Avec les notations ci-dessus si $\omega_1^J, \dots, \omega_g^J$ sont des 1-formes différentielles sur J on a :

$$|\det(\int_C \omega_i^C \wedge \bar{\omega}_j^C)| = |\int_J \omega_1^J \wedge \dots \wedge \omega_g^J \wedge \bar{\omega}_1^J \wedge \dots \wedge \bar{\omega}_g^J|$$

Choisissons g points P_1, \dots, P_g de C , on a ainsi un morphisme fini de

degré $g!$:

$$\pi : C^g \longrightarrow J .$$

On a $\pi^* \omega_i^J = \pi_1^* \omega_1^J + \pi_2^* \omega_2^J + \dots + \pi_g^* \omega_g^J$

où $\pi_j : C \longrightarrow J$ est l'application d'Abel associée au point P_j . Il est clair que $\int_C \pi_j^* \omega_1^J \wedge \pi_j^* \bar{\omega}_k^J = \int_C \omega_1^C \wedge \bar{\omega}_k^C$

$$\begin{aligned} \left| \int_J \omega_1^J \wedge \dots \wedge \omega_g^J \wedge \bar{\omega}_1^J \wedge \dots \wedge \bar{\omega}_g^J \right| &= \frac{1}{g!} \left| \sum_{\sigma \in S_g} \epsilon(\sigma) \epsilon(\tau) \prod_i \int_C \omega_{\sigma(i)}^C \wedge \bar{\omega}_{\tau(i)}^C \right| \\ &= \frac{g!}{g!} \left| \sum_{\sigma \in S_g} \epsilon(\sigma) \prod_i \int_C \omega_i^C \wedge \bar{\omega}_{\sigma(i)}^C \right| \\ &= |\det \int_C \omega_i^C \wedge \bar{\omega}_j^C| \end{aligned}$$

Supposons donc que $f : A \longrightarrow S$ soit la jacobienne d'une courbe semi-stable $X \longrightarrow S$. Par le théorème 1.6 de [D-M] on se ramène à un nombre fini de cas de la forme $X \longrightarrow D$ où D est le disque unité dans \mathbb{C} , lisse sur le disque épointé et semi-stable à l'origine.

- Soit U_j $j = 1 \dots r, r+1 \dots s$, un recouvrement ouvert de X tel que
- si $j > r : U_j \simeq D \times D = \{x, y \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ est un voisinage d'un point singulier dans X_0 d'équations locales $x, y = t$ (semi-stabilité)
- si $j \leq r$ $U_j \longrightarrow D$ est lisse et $U_j \cap X_0$ n'est pas vide.

Posons $\|\omega\|_0(t) = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r \int_{U_j \cap f^{-1}(t)} \omega \wedge \bar{\omega} .$

C'est une bonne métrique plus petite que $\|\omega\|(t) = \int_{X_t} \omega \wedge \bar{\omega} \quad t \neq 0 .$

Il nous reste donc à estimer

$$\int_{U_j \cap f^{-1}(t)} \omega \wedge \bar{\omega} \quad \text{pour } r+1 \leq j \leq s$$

où ω est de la forme : (fonction holomorphe) $\frac{dx}{x}$.

Il faut donc évaluer :

$$i \int_{1 \geq |x| \geq |t|} \frac{1}{t} \frac{dx \wedge d\bar{x}}{(x)^2} = -2 \log|t| \quad \text{C.Q.F.D.}$$

(Cette démonstration est due à G. Faltings).

Pour en déduire le cas des variétés abéliennes quelconques, remarquons d'abord qu'en prenant une compactification désingularisée à la Hironaka et en intégrant sur le complémentaire de boules entourant les singularités des fibres, la métri-

que modulaire est plus grande qu'une métrique définie pour tout $t \in S$.

On a donc facilement une des deux inégalités. Pour avoir l'autre ($|\alpha| = O((\log)^r)$) on prend une courbe lisse X_η dans la fibre générique A_η , X un modèle de X_η et J la jacobienne relative de X sur D , alors on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow J \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

Quitte à prendre un revêtement de S , J a réduction semi-stable : la métrique modulaire sur J ayant des singularités logarithmiques et celles sur A et B étant minorées comme plus haut, on en déduit que la métrique modulaire sur A (et même sur B) a des singularités logarithmiques.

B I B L I O G R A P H I E

- [Ar] S. Ju. ARAKELOV.- *Intersection theory of Divisors on an Arithmetic Surface*, Math. USSR Izvestija vol.8 (1974) n°6, 1167-1180.
- [D-M] P. DELIGNE, D. MUMFORD.- *Irreducibility of the space of curves of given genus*, Publ. Math. I.H.E.S vol.36 (1969), 75-109.
- [F] G. FALTINGS.- *Arakelov's Theorem for Abelian Varieties*, Invent. Math. 73, fasc.3 (1983), 337-348.
- [L] S. LANG.- *Fundamentals of Diophantine Geometry*, Springer Verlag (1983).
- [Se] J-P.SERRE.- *Corps locaux*, Hermann, Paris. (1962).
- [Sz] L. SZPIRO.- *Développements de la théorie d'Arakelov*, Notes d'un Séminaire à l'Université de Columbia New York (avril 1983).

Lucien SZPIRO

Ecole Normale Supérieure
Centre de Mathématiques
45, rue d'Ulm
75230 PARIS CEDEX 05

Astérisque

LAURENT MORET-BAILLY
Métriques permises

Astérisque, tome 127 (1985), p. 29-87

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__127__29_0>

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » ([http://smf4.emath.fr/
Publications/Asterisque/](http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/)) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

Exposé II

MÉTRIQUES PERMISSES

Laurent MORET-BAILLY

- 0.- Introduction.
- 1.- Déterminants.
- 2.- Autodualité de la jacobienne.
- 3.- Faisceaux inversibles hermitiens sur les variétés abéliennes.
- 4.- Faisceaux inversibles hermitiens sur les courbes.
- 5.- L'accouplement de Néron-Tate.
- 6.- Applications aux surfaces arithmétiques.

Bibliographie.

0.- INTRODUCTION

L'objet de cet exposé est (du moins à l'origine) la démonstration des résultats d'Arakelov [A] et Faltings [F] présentés dans l'exposé I , à l'exception notable du théorème de "comparaison des volumes" (loc. cit., th.2) et de ses corolaires, ce théorème faisant l'objet de l'exposé III.

La présentation adoptée ici diffère de [A] et [F] par l'usage systématique de la théorie des déterminants d'images directes dérivées, résumée sans démonstrations au §1. L'importance de ces déterminants apparaît déjà clairement dans [F] via l'existence des "normes de Faltings" (théorème 4.13 ci-dessous) ; ils jouent ici un rôle multiple, "expliquant" à la fois l'autodualité de la jacobienne (§2) et la théorie des intersections elle-même (définition 6.6), au moyen d'un accouplement introduit par Deligne (SGA 4, exposé XVIII). Cette unification culmine avec la formule de Faltings-Hriljac (6.15), rendue à peu près triviale par la présentation adoptée ici (§5) des hauteurs de Néron-Tate.

D'une manière générale le §6, consacré à la théorie des intersections proprement dite, consiste essentiellement à "recoller les morceaux" des § précédents plus généraux, et, nous l'espérons, susceptibles (en particulier le §2) d'intéresser une classe plus large de géomètres.

La définition des "métriques permises", donnée au §3 pour les variétés abéliennes et au §4 pour les courbes, constitue encore une différence notable avec [A] et [F] puisque la courbure n'y est mentionnée que pour faire le lien avec la définition habituelle.

Enfin le lecteur prendra garde que la théorie des intersections adoptée ici repose sur le choix arbitraire de certaines "métriques bipermises" (définition 6.0); cependant le théorème de comparaison des volumes, déjà mentionné, est valable pour un choix particulier de ces métriques (obtenu en imposant la condition 4) de 4.11.4).

Notations et conventions

Les expressions "faisceau inversible" et "fibré en droites" sont considérées comme synonymes, un fibré en droites étant identifié à son faisceau de sections.

Soient S un schéma et $x : T \rightarrow S$ un S -schéma. Pour tout S -schéma X (resp. tout \mathcal{O}_S -module M) on note X_T (resp. M_T ou M_X) le T -schéma $X \times_T T$ (resp. S le \mathcal{O}_T -module x^*M).

Si G est un S -schéma en groupes on désigne $e_G : S \rightarrow G$ sa section unité. Si G et H sont deux S -schémas en groupes commutatifs on appellera, pour abréger, biextension sur $G \times H$ un faisceau inversible sur $G \times H$ dont le \mathbb{G}_m -torseur sous-jacent est muni d'une structure de biextension de (G, H) par $\mathbb{G}_{m,S}$ au sens de SGA 7, VII.

1.- DÉTERMINANTS

Nous rassemblons ici les résultats de [K-M] dont nous aurons besoin.
Pour plus de sûreté, tous les schémas considérés sont supposés noethériens.

1.1.- Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme propre de schémas. A tout faisceau cohérent \mathcal{F} sur X , *plat* sur S , on associe dans [K-M] un \mathcal{O}_S -module inversible noté

$$\det Rf_* \mathcal{F}$$

(ou encore $\det R\Gamma(\mathcal{F})$ si S est affine) avec les propriétés suivantes :

1.1.1.- $\det Rf_* \mathcal{F}$ est fonctoriel pour les *isomorphismes* $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}'$ de \mathcal{O}_X -modules cohérents.

1.1.2.- $\det Rf_* \mathcal{F}$ "commute à tout changement de base", i.e à tout diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{u'} & X \\ \downarrow f' & & \downarrow f \\ S' & \xrightarrow{u} & S \end{array}$$

on associe un *isomorphisme canonique*

$$u^*(\det Rf_* \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \det Rf'_*(u'^*\mathcal{F})$$

avec une relation de compatibilité évidente pour les changements de base composés $S'' \rightarrow S' \rightarrow S$.

1.1.3.- A toute suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

de \mathcal{O}_X -modules cohérents plats sur S est associé un *isomorphisme* de \mathcal{O}_S -modules
 $\det Rf_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \det Rf'_* \mathcal{F}' \otimes \det Rf''_* \mathcal{F}''$

compatible au changement de base et aux *isomorphismes* de suites exactes ; on a plus généralement une relation de compatibilité pour les "suites exactes de suites exactes", que nous n'expliquerons pas (cf. remarque 1.2.2 ci-dessous).

1.1.4.- Soit $E^\bullet = (0 \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow E^n \longrightarrow 0)$ un complexe fini de \mathcal{O}_S -modules *localement libres de rang fini*, muni d'un quasi-isomorphisme $E^\bullet \rightarrow Rf_* \mathcal{F}$ (en d'autres termes, E^\bullet calcule "universellement" les \mathcal{O}_S -modules $R^i f_* \mathcal{F}$, au sens de [AV], §5 ; par ailleurs, d'après loc. cit., un tel complexe

existe toujours localement sur S). On a alors un isomorphisme canonique, commutant au changement de base :

$$\det Rf_*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{i=0}^n (\det E^i)^{\otimes (-1)^i}.$$

(Ici et dans toute la suite, si E est un \mathcal{O}_S -module localement libre de rang fini, on note $\det E$ sa puissance extérieure maximale).

1.1.5.- Dans le cas particulier où les \mathcal{O}_S -modules $R^i f_*\mathcal{F}$ ($i \geq 0$) sont localement libres (ce qui implique qu'ils commutent au changement de base) on déduit de

1.1.4 un isomorphisme canonique

$$\det Rf_*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{i=0}^n (\det R^i f_*\mathcal{F})^{\otimes (-1)^i}$$

(où $n \geq \dim X$), en "convenant" bien entendu que le déterminant du faisceau nul s'identifie canoniquement à \mathcal{O}_S .

1.1.6.- Notons $\chi_{X/S}(\mathcal{F})$ la fonction localement constante $x \mapsto \chi(\mathcal{F}_x)$ sur S . Si $\varphi \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S^\times)$ alors la multiplication par φ dans \mathcal{F} induit d'après 1.1.1 un automorphisme de $\det Rf_*\mathcal{F}$; celui-ci n'est autre que la multiplication par $\varphi^{\chi_{X/S}(\mathcal{F})}$.

1.1.7.- De même si M est un \mathcal{O}_S -module inversible on a un isomorphisme canonique

$$\det Rf_*(\mathcal{F} \otimes f^*M) \xrightarrow{\sim} (\det Rf_*\mathcal{F}) \otimes M^{\otimes \chi_{X/S}(\mathcal{F})}$$

Remarques 1.2.-

1.2.1.- Le foncteur $\det Rf_*$ s'étend à la catégorie dérivée des complexes "parfaits relativement à f " de \mathcal{O}_X -modules (SGA 6, III); en particulier on peut définir $\det Rf_*\mathcal{F}$ dès que \mathcal{F} est un \mathcal{O}_X -module cohérent, de tor-dimension finie sur S .

1.2.2.- Une présentation rigoureuse de la théorie et en particulier de la compatibilité mentionnée à la fin de (1.1.3), exigerait que l'on définisse $\det Rf_*\mathcal{F}$ comme un "faisceau inversible gradué, placé en degré $\chi_{X/S}(\mathcal{F})$ ", ceci en raison de signes intervenant dans la compatibilité en question. Cela a pour effet, par exemple, que l'ordre des facteurs dans le second membre de l'isomorphisme 1.1.4 (ou 1.1.5) a son importance si l'on veut décrire ces isomorphismes sans ambiguïté de signe. Toutefois, nous tairons dans la suite ces subtilités, les applications que nous avons en vue étant insensibles aux questions de signes.

Exemple 1.3. - Supposons (comme ce sera généralement le cas dans les applications) que X soit une courbe sur S , c'est-à-dire un S -schéma projectif et plat sur S à fibres purement de dimension 1. Soit $D \subset X$ un diviseur relatif effectif (c'est-à-dire un sous-schéma fermé de X , fini et plat sur S et qui est un diviseur de Cartier sur X). Si L est un \mathcal{O}_X -module inversible, on a une suite exacte naturelle (avec $L(D) = L \otimes \mathcal{O}_X(D)$)

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow L(D) \longrightarrow L(D)|_D \longrightarrow 0$$

d'où par 1.1.3 un isomorphisme canonique

$$(1.3.1) \quad \det Rf_*(L(D)) \xrightarrow{\sim} \det Rf_*L \otimes \det f_*(L(D)|_D)$$

puisque, en vertu de 1.1.5 (et D étant fini sur S)

$$\det Rf_*(L(D)|_D) = \det f_*(L(D)|_D) .$$

Remarquons d'ailleurs que si M est un faisceau inversible sur D , la norme $N_{D/S}(M)$ peut se calculer par la formule

$$N_{D/S}(M) = \det f_*M \otimes (\det f_*\mathcal{O}_D)^{-1}$$

de sorte que (1.3.1) peut se reformuler comme suit :

$$(1.3.2) \quad \det Rf_*(L(D)) = \det Rf_*L \otimes N_{D/S}(L(D)) \otimes \det f_*\mathcal{O}_D$$

où $N_{D/S}(L(D))$ désigne abusivement le faisceau $N_{D/S}(L(D)|_D)$.

Enfin, dans le cas particulier où D est l'image d'une section $Q : S \longrightarrow X$ contenue dans l'ouvert de lissité de X/S , la formule (1.3.1) devient simplement (en identifiant Q au diviseur $D = Q(S)$)

$$(1.3.3) \quad \det Rf_*(L(Q)) = \det Rf_*L \otimes Q^*L(Q) .$$

De telles formules permettent de "calculer" $\det Rf_*L$ pour L quelconque puisque si D est suffisamment ample, alors $R^1f_*(L(D)) = 0$ et $f_*(L(D))$ est localement libre de sorte que l'on peut appliquer 1.1.5.

2.- AUTODUALITÉ DE LA JACOBIENNE

2.0.- Dans tout ce § on désigne par S un schéma localement noethérien, et par $f : X \rightarrow S$ une courbe sur S , c'est-à-dire par définition un morphisme projectif et plat à fibres géométriques connexes, non vides et de dimension 1. Nous supposerons de plus, sauf mention expresse du contraire, que f est lisse à fibres de genre $g \geq 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ nous désignerons par J_n la composante du schéma de Picard $\underline{\text{Pic}}_{X/S}$ paramétrant les faisceaux inversibles sur X de degré n dans les fibres, de sorte que J_n est un torseur sous J_0 et que cette dernière (souvent notée J) est un S -schéma abélien de dimension relative g . Si l'on désigne, pour tout S -schéma T , par $\text{Pic}^{(n)}(X_T/T)$ le quotient

$$\frac{\{\text{faisceaux inversibles sur } X_T := X \times T, \text{ de degré } n \text{ dans les fibres}\}}{\text{isomorphismes + action naturelle de } \text{Pic } T}$$

alors on a un morphisme naturel injectif et fonctoriel en T

$$\text{Pic}^{(n)}(X_T/T) \longrightarrow J_n(T) = \text{Hom}_S(T, J_n)$$

$$L \longmapsto \text{cl}(L) : T \longrightarrow J_n$$

qui est surjectif pour tout T si et seulement si il existe sur $X \times J_n$ un faisceau universel, c'est-à-dire un faisceau inversible \mathcal{U}_n tel que

$$\text{cl}(\mathcal{U}_n) = \text{id}_{J_n} \in \text{Hom}(J_n, J_n).$$

Lorsque S est le spectre d'un corps k algébriquement clos, cette condition ésotérique signifie que pour tout point $\xi \in J_n(k)$, le faisceau inversible induit par \mathcal{U}_n sur $\{\xi\} \times X \simeq X$ est dans la classe ξ .

Un tel faisceau universel, s'il existe, est unique à tensorisation près par un faisceau provenant de J_n .

2.0.1.- Supposons de plus que $f : X \rightarrow S$ ait une section $a \in X(S)$. Alors il existe pour tout n un faisceau universel sur $X \times J_n$, noté $\mathcal{U}_n^{(a)}$ et caractérisé de manière unique par la condition supplémentaire d'être trivial sur $a(S) \times J_n \subset X \times J_n$ (pour f quelconque, les faisceaux universels existent donc localement pour la topologie étale sur S).

Le mode d'emploi de $\mathcal{U}_n^{(a)}$ est le suivant : si T est un S -schéma, et L un faisceau inversible sur $X \times T$, de degré n dans les fibres, considérons le diagramme (ici comme dans la suite, tous les produits, sauf mention expresse du contraire, sont fibrés sur S)

$$\begin{array}{ccc}
 X \times T & \xrightarrow{\text{id}_X \times \xi} & X \times J_n \\
 a_T \downarrow f_T & & \downarrow p_2 \\
 T & \xrightarrow{\xi} & J_n
 \end{array}$$

où f_T et p_2 sont les secondes projections, a_T la section déduite de a , et $\xi = \text{cl}(L) \in J_n(T)$. Alors on a un isomorphisme

$$(2.0.1.1) \quad (\text{id}_X \times \xi)^* \mathcal{U}_n^{(a)} \simeq L \otimes f_T^* a_T^* L^{-1}$$

et même un isomorphisme canonique si l'on a choisi une trivialisation de $\mathcal{U}_n^{(a)}$ sur $a(S) \times J_n$, ce que nous supposerons toujours.

2.1.- Désignons par

$$(2.1.1) \quad w_{g-1} : X^{g-1} \longrightarrow J_{g-1}$$

le morphisme suivant : si (x_1, \dots, x_{g-1}) est un point de X^{g-1} à valeurs dans un S -schéma T , ce point définit un diviseur (relatif à T) $x_1 + \dots + x_{g-1} \subset X_T$, de degré $g-1$ dans les fibres ; on pose alors

$$(2.1.2) \quad w_{g-1}(x_1, \dots, x_{g-1}) = \text{cl}(\mathcal{O}_{X_T}(x_1 + \dots + x_{g-1})) \in J_{g-1}(T).$$

Conformément à l'usage, nous noterons

$$(2.1.3) \quad \mathbb{H} \subset J_{g-1}$$

l'image de w_{g-1} (qui pour l'instant est seulement un fermé de l'espace sous-jacent à J_{g-1}) .

2.2.- Soit $\xi : \text{Spec } k \longrightarrow J_{g-1}$ un point géométrique de J_{g-1} (i.e à valeurs dans un corps k algébriquement clos) et soit L^ξ un faisceau inversible sur X_k tel que $\text{cl}(L^\xi) = \xi$. Pour que ξ (ou plutôt son image dans J_{g-1}) appartienne à \mathbb{H} , il faut et il suffit qu'il existe un diviseur effectif D (de degré $g-1$) sur X_k tel que $L^\xi \simeq \mathcal{O}_{X_k}(D)$. En d'autres termes, ceci équivaut à $H^0(X_k, L^\xi) \neq 0$, ou encore puisque $\chi(L^\xi) = 0$, à $H^1(X_k, L^\xi) \neq 0$.

2.3.- Soit alors \mathcal{U}_{g-1} un faisceau universel sur $X \times J_{g-1}$ et désignons par $p_2 : X \times J_{g-1} \longrightarrow J_{g-1}$ la seconde projection. Comme X est une courbe, on a $R^i p_{2*} \mathcal{U}_{g-1} = 0$ pour $i \geq 2$, et la formation de $R^1 p_{2*} \mathcal{U}_{g-1}$ commute à tout changement de base. De plus :

LEMME 2.3.1.-

(i) $p_{2*}\mathcal{U}_{g-1} = 0$

(ii) $\text{Supp}(R^1 p_{2*}\mathcal{U}_{g-1}) = \mathbb{H}$.

Démonstration : La seconde assertion résulte de la caractérisation de \mathbb{H} donnée en 2.2 : avec les notations de loc. cit. on peut prendre pour L^ξ le faisceau $(\mathcal{U}_{g-1})|_{X \times \{\xi\}}$ et l'on a alors $(R^1 p_{2*}\mathcal{U}_{g-1})_\xi = H^1(X_k, L^\xi)$.

Pour la première assertion on remarque que le faisceau $p_{2*}\mathcal{U}_{g-1}$ sur J_{g-1} est sans torsion, et que si ξ est un point géométrique de $J_{g-1} - \mathbb{H}$ on a (avec L^ξ comme ci-dessus) $H^0(X_k, L^\xi) = 0$ et a fortiori $(p_{2*}\mathcal{U}_{g-1})_\xi = 0$. Or l'ouvert $J_{g-1} - \mathbb{H}$ est dense dans J_{g-1} puisque les fibres de \mathbb{H} sur S sont de dimension $\leq g-1$. Le faisceau $p_{2*}\mathcal{U}_{g-1}$ est donc nul puisqu'il est sans torsion et nul sur un ouvert dense. ■

2.4.- Notons U l'ouvert $J_{g-1} - \mathbb{H}$ de J_{g-1} : alors les faisceaux $R^i p_{2*}\mathcal{U}_{g-1}$ ($i \geq 0$) sont nuls sur U . Il résulte donc de 1.1.5 que l'on a un isomorphisme canonique

(2.4.1) $\tau_U : (\det R p_{2*}\mathcal{U}_{g-1})_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_U$.

PROPOSITION 2.4.2.- L'isomorphisme τ_U de (2.4.1) se prolonge en un unique homomorphisme injectif de $\mathcal{O}_{J_{g-1}}$ -modules

$$\tau : \det R p_{2*}\mathcal{U}_{g-1} \longrightarrow \mathcal{O}_{J_{g-1}}$$

dont le conoyau est plat sur S et de support égal à \mathbb{H} .

2.4.3.- Il résulte de 2.4.2 que \mathbb{H} se trouve muni d'une structure naturelle de sous-schéma fermé de J_{g-1} , qui est même un diviseur relatif au-dessus de S . C'est ce diviseur que nous désignerons désormais par \mathbb{H} , et la proposition 2.4.2 se réécrit sous la forme d'un isomorphisme canonique

(2.4.3.1) $\det R p_{2*}\mathcal{U}_{g-1} \simeq \mathcal{O}_{J_{g-1}}(-\mathbb{H})$.

Cet énoncé semble dû à Mumford. Notons que la formation de τ (et donc du diviseur \mathbb{H}) commute à tout changement de base $S' \longrightarrow S$ puisqu'il en est ainsi de τ_U .

Pour faire le lien avec la théorie classique il reste à voir que lorsque S est le spectre d'un corps algébriquement clos, le diviseur \mathbb{H} ainsi défini est

réduit ; ceci résultera d'un calcul ultérieur (2.7.10) mais pourrait aussi se voir directement. En tout cas il est déjà clair que les fibres géométriques de \mathbb{H} sont irréductibles puisque \mathbb{H} est ensemblistement l'image de $w_{g-1} : X^{g-1} \longrightarrow J_{g-1}$.

Enfin, il n'est pas surprenant que 2.4.2 ne dépende pas du faisceau universel \mathcal{U}_{g-1} choisi : si M est un faisceau inversible sur J_{g-1} , on a un isomorphisme canonique

$$\det R p_{2*}(\mathcal{U}_{g-1} \otimes p_2^* M) \simeq \det R p_{2*} \mathcal{U}_{g-1}$$

résultant de 1.1.7 et du fait que $\chi_{X \times J_{g-1}/J_{g-1}}(\mathcal{U}_{g-1}) = 0$.

2.4.4.- Démonstration de 2.4.2 : L'unicité de τ résulte du fait que U est schématiquement dense dans J_{g-1} . Pour voir que τ (supposé exister) est injectif à conoyau plat sur S on se ramène, en vertu de EGA 0_I, 6.6.18, au cas où S est le spectre d'un corps, où l'assertion résulte du fait que τ_U est un isomorphisme.

Il suffit de prouver l'existence de τ après un changement de base fidèlement plat $S' \longrightarrow S$, et nous pouvons donc supposer qu'il existe un sous-schéma fermé

$$D \subset X$$

qui est un diviseur relatif de degré g . Nous noterons alors $\mathcal{U}_{g-1}(D)$ le faisceau $\mathcal{U}_{g-1} \otimes p_1^* \mathcal{O}_X(D)$ sur $X \times J_{g-1}$. La restriction de $\mathcal{U}_{g-1}(D)$ aux fibres de $p_2 : X \times J_{g-1} \longrightarrow J_{g-1}$ est de degré $2g-1$ donc on a

$$(2.4.4.1) \quad R^1 p_{2*} \mathcal{U}_{g-1}(D) = 0$$

et $p_{2*} \mathcal{U}_{g-1}(D)$ est localement libre de rang g sur J_{g-1} . On a d'autre part sur $X \times J_{g-1}$ une suite exacte naturelle

$$0 \longrightarrow \mathcal{U}_{g-1} \longrightarrow \mathcal{U}_{g-1}(D) \longrightarrow \mathcal{U}_{g-1}(D)|_{D \times J_{g-1}} \longrightarrow 0$$

d'où compte tenu de (2.4.4.1) et de 2.3.1 (i), une suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & p_{2*} \mathcal{U}_{g-1}(D) & \xrightarrow{u} & p_{2*} \left(\mathcal{U}_{g-1}(D)|_{D \times J_{g-1}} \right) & \longrightarrow & R^1 p_{2*} \mathcal{U}_{g-1} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ & & L^0 & & L^1 & & \end{array}$$

et le complexe $0 \longrightarrow L^0 \xrightarrow{u} L^1 \longrightarrow 0$ est une "résolution de $R p_{2*} \mathcal{U}_{g-1}$ " au sens de 1.1.4, d'où d'après loc. cit. un isomorphisme canonique

$$(2.4.4.2) \quad \det R_{p_{2*}} \mathcal{U}_{g-1} \xrightarrow{\sim} (\det L^0) \otimes (\det L^1)^{-1} .$$

De plus la trivialisation τ_U de (2.4.1) correspond via (2.4.4.2) à un isomorphisme

$$\det L^0|_U \xrightarrow{\sim} \det L^1|_U$$

qui n'est autre que $\det u|_U$ (qui est bien un isomorphisme puisque $R^1 p_{2*} \mathcal{U}_{g-1}$ est nul sur U). Celui-ci se prolonge par construction en le morphisme $\det u : L^0 \longrightarrow L^1$, d'où le morphisme

$$\tau : \det R_{p_{2*}} \mathcal{U}_{g-1} \xrightarrow{(2.4.4.2)} (\det L^0) \otimes (\det L^1)^{-1} \xrightarrow{(\det u) \otimes \text{id} \circ (\det L^1)^{-1}} \mathcal{O}_J|_{g-1}$$

annoncé en 2.4.2. Enfin on a

$$\text{Supp Coker } \tau = \text{Supp Coker}(\det u) = \text{Supp Coker } u = \text{Supp } R^1 p_{2*} \mathcal{U}_{g-1} = \text{divisor of } \mathbb{H}$$

d'après 2.3.1 (ii), ce qui achève la démonstration. ■

COROLLAIRE 2.5. - Soient n un entier, $a \in X(S)$ une section (identifiée à son image dans X), $\mathcal{U}_n^{(a)}$ le faisceau universel sur $X \times J_n$ trivial sur $a \times J_n$ (cf. 2.0), D le diviseur $(g-n-1)a$ sur X , $T_D : J_n \xrightarrow{\sim} J_{g-1}$ le morphisme "translation par $c_1 \mathcal{O}_X(D)$ ". Désignant par $q_2 : X \times J_n \longrightarrow J_n$ la seconde projection, on a un isomorphisme

$$\det R q_{2*} \mathcal{U}_n^{(a)} \xrightarrow{\sim} T_D^* \mathcal{O}_{J_{g-1}}(-\mathbb{H}) \otimes M$$

où \mathbb{H} est le diviseur sur J_{g-1} défini en 2.4.3 et où M est un faisceau inversible provenant de S , le faisceau sur S correspondant étant

$$(a^* \omega_{X/S})^{\otimes(g-n)(g-n-1)/2} \text{ où } \omega_{X/S}^1 = \Omega_{X/S}^1 \text{ désigne le faisceau dualisant de } X/S .$$

Démonstration : Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id}_X \times T_D & & \\ & \swarrow q_1 & \downarrow a_n & \uparrow a_{g-1} & \searrow p_1 \\ X \times J_n & \xrightarrow{\sim} & X \times J_{g-1} & \xleftarrow{\sim} & X \\ \downarrow q_2 & & \downarrow p_2 & & \\ J_n & \xrightarrow{\sim} & J_{g-1} & & \end{array}$$

où a_n et a_{g-1} sont les sections déduites de a . Le morphisme $T_D \in J_{g-1}(J_n)$ est par définition la classe du faisceau inversible $\mathcal{U}_n^{(a)} \otimes q_1^* \mathcal{O}_X(D)$ sur $X \times J_n$. Comme ce dernier est trivial sur $a_n(J_n)$, on déduit de (2.0.1.1) un isomorphisme

$$(2.5.1) \quad (\text{id}_X \times T_D)^* \mathcal{U}_{g-1}^{(a)} \simeq \mathcal{U}_n^{(a)} \otimes a_1^* \mathcal{O}_X(D) .$$

Pour tout $m \in \mathbb{Z}$ posons pour abréger $\mathcal{U}_n^{(a)}(ma) = \mathcal{U}_n^{(a)} \otimes q_1^* \mathcal{O}_X^{(m)a}$, et considérons la suite exacte naturelle

$$0 \longrightarrow \mathcal{U}_n^{(a)}((m-1)a) \longrightarrow \mathcal{U}_n^{(a)}(ma) \longrightarrow \mathcal{U}_n^{(a)}(ma)|_{a_n(J_n)} \longrightarrow 0$$

Comme $\mathcal{U}_n^{(a)}|_{a_n(J_n)}$ est trivial on en déduit un isomorphisme canonique

$$\det Rq_{2*}(\mathcal{U}_n^{(a)}(ma)) = \det Rq_{2*}(\mathcal{U}_n^{(a)}((m-1)a)) \otimes (a^* \omega_{X/S}^{\otimes -m})_{J_n}$$

grâce à l'isomorphisme d'adjonction $a^* \mathcal{O}_X(a) \simeq a^*(\omega_{X/S}^{-1})$, d'où par récurrence

$$(2.5.2) \quad \det Rq_{2*}(\mathcal{U}_n^{(a)}(ma)) = \det Rq_{2*} \mathcal{U}_n^{(a)} \otimes (a^* \omega_{X/S}^{\otimes -m(m+1)/2})_{J_n}.$$

Appliquant cette formule avec $m = g - n - 1$, il vient

$$\begin{aligned} \det Rq_{2*} \mathcal{U}_n^{(a)} &= \det Rq_{2*}(\mathcal{U}_n^{(a)}(D)) \otimes (a^* \omega_{X/S}^{\otimes(g-n)(g-n-1)/2})_{J_n} \\ &= \det Rq_{2*} \left((\text{id}_X \times T_D)^* \mathcal{U}_{g-1}^{(a)} \right) \otimes M \\ &= T_D^* Rq_{2*} \mathcal{U}_{g-1}^{(a)} \otimes M \quad (\text{changement de base}) \\ &= T_D^* \mathcal{O}_{J_{g-1}}(-\Theta) \otimes M \quad (2.4.3.1). \blacksquare \end{aligned}$$

2.6.- Lorsque $n = 0$, la théorie classique polarise $J = J_0$ à l'aide du diviseur $T_D^* \Theta$; ceci justifie, compte tenu du corollaire ci-dessus, les constructions qui suivent.

Pour tout $a \in X(S)$ nous poserons

$$(2.6.1) \quad \theta^{(a)} = \left(\det Rq_{2*} \mathcal{U}_0^{(a)} \right)^{-1}$$

(cf. 2.5) : c'est un faisceau inversible sur J . Si L est un faisceau inversible sur X , de degré 0 dans les fibres, alors la "valeur" de $\theta^{(a)}$ au point $c_1 L \in J(S)$ est donnée par la formule

$$(2.6.1.1) \quad \theta_{c_1 L}^{(a)} = (\det Rf_* L)^{-1} \otimes (a^* L)^{\otimes 1-g};$$

Ceci résulte de (2.0.1.1) et 1.1.7.

Pour tout S -schéma abélien A , notons $A^t = \underline{\text{Pic}}_{A/S}^0 = \underline{\text{Ext}}^1(A, \mathcal{G}_{m,S})$ le dual de A (qui est un schéma, au moins si A est localement projectif sur S). Le faisceau inversible $\theta^{(a)}$ sur J définit un morphisme ([AV], §6)

$$(2.6.2.) \quad \phi_{\theta^{(a)}} : = \varphi_{\theta^{(a)}} : J \longrightarrow J^t$$

qui à $x \in J$ associe la classe de $T_x^* \theta^{(a)} \otimes (\theta^{(a)})^{-1}$, où T_x désigne la translation par x .

LEMME 2.6.3. - Il existe un unique morphisme de schémas abéliens

$$\Phi : J \longrightarrow J^t$$

qui, pour tout S -schéma T et tout point $a \in X(T)$, induit par changement de base le morphisme $\Phi^{(a)} : J_T \longrightarrow J_T^t$ de (2.6.2).

Démonstration : Appliquons la construction de $\Phi^{(a)}$ au point $a = \text{id}_X : X \longrightarrow X$ à valeurs dans le S -schéma X . Nous obtenons un morphisme

$$\Phi^{(\text{id}_X)} : J_X \longrightarrow J_X^t$$

et il est immédiat que pour tout S -schéma T et tout $a \in X(T)$, le morphisme $\Phi^{(a)} : J \longrightarrow J^t$ est induit par $\Phi^{(\text{id}_X)}$ via le changement de base $a : T \longrightarrow X$. Il suffit donc de voir que $\Phi^{(\text{id}_X)}$ provient d'un S -morphisme (évidemment unique) de J vers J^t , ou encore, par descente, que

$$\text{pr}_1^* \Phi^{(\text{id}_X)} = \text{pr}_2^* \Phi^{(\text{id}_X)} : J_{X \times X} \longrightarrow J_{X \times X}^t,$$

or ces deux morphismes coïncident sur la diagonale de $X \times X$ et notre assertion résulte donc du lemme de rigidité [GIT], Proposition 6.1, et du fait que les fibres de X sont géométriquement connexes. ■

DÉFINITION 2.6.4. - Le morphisme $\Phi : J \longrightarrow J^t$ de 2.6.3 est par définition la *polarisation canonique* de J .

Remarque 2.6.4.1. - Nous n'avons pas encore montré que Φ est une polarisation, au sens de [GIT], 6.3 : il reste pour cela à voir que le faisceau $\theta^{(a)}$ de 2.6.1 est ample relativement à S . Notons toutefois que 2.5 implique que $\theta^{(a)}$ a des sections puisque \mathbb{H} est un diviseur effectif : par suite, en vertu de [AV], p.60, il suffit de voir que Φ est une *isogénie*. Bien entendu, nous constaterons plus loin que Φ est un isomorphisme, c'est-à-dire une polarisation *principale* : ceci montrera au passage que le diviseur \mathbb{H} n'est pas multiple non trivial d'un diviseur sur J_{g-1} et que ses fibres sont donc réduites (puisque irréductibles).

2.7.- Comme $J^t = \underline{\text{Pic}}^0_{J/S}$ par définition, et que J a une section (la section unité $e_J : S \longrightarrow J$), le produit $J \times J^t$ est muni d'un faisceau universel, le *faisceau de Poincaré* que nous noterons \mathcal{P} , soumis à la condition d'être trivial sur $e_J(S) \times J^t$. La polarisation canonique Φ détermine, et est déterminée par, le faisceau inversible

$$(2.7.1) \quad \mathcal{B} := (\text{id}_J \times \phi)^*(\mathcal{P})$$

sur $J \times J$; si $\xi : T \rightarrow J$ est un point à valeurs dans un S -schéma T , alors $\phi(\xi)$ se déduit de \mathcal{B} par la formule

$$(2.7.2) \quad \phi(\xi) = \text{classe dans } J^t(T) \text{ du faisceau inversible}$$

$$(\text{id}_J \times \xi)^*(\mathcal{B}) \text{ sur } J_T = J \times_T S.$$

On se propose maintenant de "calculer" \mathcal{B} (en termes de la définition de J comme jacobienne de X). D'abord, tout comme \mathcal{P} , \mathcal{B} est muni d'une structure naturelle de biextension (SGA 7 VII), c'est-à-dire que si x_1, x_2, y_1, y_2 sont des points de J , on a des isomorphismes canoniques

$$(2.7.3) \quad \mathcal{B}_{(x_1+x_2, y_1)} = \mathcal{B}_{(x_1, y_1)} \otimes \mathcal{B}_{(x_2, y_1)}$$

$$\mathcal{B}_{(x_1, y_1+y_2)} = \mathcal{B}_{(x_1, y_1)} \otimes \mathcal{B}_{(x_1, y_2)}$$

assortis de propriétés d'associativité, de commutativité et de compatibilité que le lecteur devinera ou trouvera dans loc. cit.

Lorsque X admet une section $a \in X(S)$ on a par définition $\phi = \varphi_{\theta}(a)$ (2.6.2) et l'on déduit de la propriété universelle de \mathcal{P} un isomorphisme canonique

$$(2.7.4) \quad \mathcal{B} = m^* \theta^{(a)} \otimes \text{pr}_1^* \theta^{(a)}{}^{-1} \otimes \text{pr}_2^* \theta^{(a)}{}^{-1} \otimes (e_{J \times J}^* \theta^{(a)})_{J \times J}$$

où m est l'addition de J et $e_{J \times J}$ la section unité de $J \times J$, de sorte que $(e_{J \times J}^* \theta^{(a)})_{J \times J}$ est l'image réciproque sur $J \times J$ du \mathcal{O}_S -module $(\det Rf_* \mathcal{O}_X)^{-1}$, comme il résulte de la définition (2.6.1) de $\theta^{(a)}$.

Soient L et M deux faisceaux inversibles sur X (ou plus généralement sur $X \times T$, où T est un S -schéma), de degré 0 dans les fibres, et calculons le \mathcal{O}_S -module inversible $\mathcal{B}_{(\text{cl } L, \text{cl } M)}$, "fibre" de \mathcal{B} au-dessus du point de $(J \times J)(S)$ défini par L et M :

LEMME 2.7.5.- *On a un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{B}_{(\text{cl } L, \text{cl } M)} = (\det Rf_*(L \otimes M))^{-1} \otimes \det Rf_* L \otimes \det Rf_* M \otimes (\det Rf_* \mathcal{O}_X)^{-1}.$$

Démonstration : a) Supposons d'abord donnée une section $a \in X(S)$: on a donc en vertu de (2.7.4) :

$$(2.7.5.1) \quad \mathcal{B}_{(\text{cl } L, \text{cl } M)} = \theta^{(a)}_{\text{cl } (L \otimes M)} \otimes \theta^{(a)}_{\text{cl } L}{}^{-1} \otimes \theta^{(a)}_{\text{cl } M}{}^{-1} \otimes (\det Rf_* \mathcal{O}_X)^{-1}$$

Mais, par définition de $\theta_{\text{cl } L}^{(a)}$ et compte tenu de (2.0.1.1), on a

$$\begin{aligned}\theta_{\text{cl } L}^{(a)} &= (\det Rf_*(L \otimes f^* a^* L^{-1}))^{-1} \\ &= (\det Rf_* L)^{-1} \otimes a^* L^{\otimes 1-g} \quad (1.1.7).\end{aligned}$$

Reportant dans (2.7.5.1) et simplifiant, on obtient la formule annoncée.

b) Ne supposant plus l'existence d'un point a , désignons par λ et μ les deux membres de l'égalité 2.7.5. Le calcul ci-dessus appliqué, après le changement de base $f : X \rightarrow S$, à la section $a = \Delta_X : X \times X \rightarrow X$, fournit un isomorphisme canonique de \mathcal{O}_X -modules

$$f^*\lambda = f^*\mu$$

d'où un isomorphisme canonique

$$f_* f^* \lambda = f_* f^* \mu$$

d'où le lemme puisque $f_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_S$ donc $f_* f^* \xi = \xi$ pour tout \mathcal{O}_S -module localement libre ξ . ■

COROLLAIRE 2.7.6. - Soient x et $y \in X(S)$ (considérés à la fois comme sections et comme diviseurs sur X) et soit L un faisceau inversible sur X , de degré 0 dans les fibres. Alors on a un isomorphisme canonique de \mathcal{O}_S -modules inversibles

$$\mathcal{B}_{(\text{cl } L, \text{cl } \mathcal{O}_X(x-y))} = y^* L \otimes x^* L^{-1}.$$

Démonstration : On applique 2.7.5 à $M = \mathcal{O}(x-y)$, en utilisant les formules (N désignant un faisceau inversible quelconque sur X)

$$\det Rf_* N(x) = \det Rf_* N \otimes x^* N(x) \quad (1.3.3)$$

$$\det Rf_* N(-y) = \det Rf_* N \otimes y^* N^{-1}$$

Le détail du calcul est laissé au lecteur. ■

2.7.7.- Notons que la formule 2.7.5 met en évidence la *symétrie* de la biextension \mathcal{B} ; cette propriété est d'ailleurs satisfaite par toute biextension sur $J \times J$ qui est localement de la forme $(\text{id}_J \times \varphi_M)^*(\mathcal{P})$, où M est un faisceau inversible sur J .

D'autre part le second membre de 2.7.6 est "linéaire" par rapport à L : ceci reflète l'une des deux lois de composition (2.7.3).

2.7.8.- Soit $a \in X(S)$ et soit L comme dans 2.7.6. Considérons, au-dessus du

S-schéma $T := X \xrightarrow{f} S$, le faisceau inversible L_T sur X_T déduit de L , et les points

$$x = \text{id}_X : T = X \longrightarrow X$$

$$y = \text{le point "constant"} : X \xrightarrow{f} S \xrightarrow{a} X .$$

Alors le morphisme $\text{cl} \mathcal{O}_{X_T}(x - y) : T \longrightarrow J$ n'est autre que le plongement traditionnel

$$(2.7.8.1) \quad j_a : X \hookrightarrow J$$

$$z \longmapsto \text{cl} \mathcal{O}_X(z - a) .$$

Si nous appliquons 2.7.6 à cette situation (après le changement de base $T \longrightarrow S$) les deux membres de loc. cit. sont des faisceaux inversibles sur $T = X$. Le second membre a même classe dans $J = \underline{\text{Pic}}_{X/S}^0$ que L^{-1} ; le premier s'obtient en restreignant \mathcal{B} à $\{\text{cl } L\} \times J$ (d'où un faisceau inversible sur J), puis en prenant l'image réciproque de celui-ci par $j_a : X \hookrightarrow J$. Or par symétrie, $\mathcal{B}|_{\{\text{cl } L\} \times J} \simeq \mathcal{B}|_{J \times \{\text{cl } L\}}$ et il résulte de (2.7.2) que la classe de ce faisceau dans $J^t = \underline{\text{Pic}}_{J/S}^0$ n'est autre que $\phi(\text{cl } L)$. En d'autres termes, la classe dans J du premier membre de 2.7.6 est l'image de $\text{cl } L$ par le morphisme composé

$$(2.7.8.2) \quad J \xrightarrow{\phi} J^t = \underline{\text{Pic}}_{J/S}^0 \xrightarrow{j_a^*} \underline{\text{Pic}}_{X/S}^0 = J$$

Le corollaire 2.7.6 affirme donc dans ce cas que $j_a^* \phi(\text{cl } L) = \text{cl } L^{-1}$. Bien entendu ce calcul est valable également si L est un faisceau inversible sur $X_{T'}$, où T' est un S-schéma quelconque. En résumé

PROPOSITION 2.7.9. - Soit $a \in X(S)$. Alors le composé $j_a^* \circ \phi$ de (2.7.8.2) n'est autre que $-\text{id}_J$. ■

COROLLAIRE 2.7.10. - (i) Le morphisme $\phi : J \longrightarrow J^t$ de 2.6.3 est une polarisation principale.

(ii) Le diviseur $\Theta \subset J_{g-1}$ de 2.4.3 est à fibres géométriquement intègres.

Démonstration : (i) On se ramène par changement de base fidèlement plat (par exemple $f : X \longrightarrow S$) au cas où $X(S) \neq \emptyset$, et l'on applique 2.7.9 (qui montre que ϕ est un isomorphisme) et la remarque 2.6.4.1. L'assertion (ii) résulte également de 2.6.4.1. ■

2.7.11.- Nous allons maintenant généraliser 2.7.6 à des diviseurs de la forme

$\sum_{i=1}^r (x_i - y_i)$ où $x_i, y_i \in X(S)$. Pour cela remarquons que, grâce à la structure de biextension de \mathcal{B} , on a des isomorphismes canoniques

$$\mathcal{B}_{(cl L, cl(M_1 \otimes M_2))} = \mathcal{B}_{(cl L, cl M_1)} \otimes \mathcal{B}_{(cl L, cl M_2)}.$$

Si T est un S -schéma et x_i, y_i ($1 \leq i \leq r$) des points de X à valeurs dans T , considérons le diviseur $D = \sum_{i=1}^r (x_i - y_i)$ sur X_T : alors on déduit de 2.7.6, par linéarité, un isomorphisme (pour tout faisceau inversible L sur X_T , de degré 0 dans les fibres)

$$(2.7.11.1) \quad \mathcal{B}_{(cl L, cl \mathcal{O}_{X_T}(D))} \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{i=1}^r (y_i^* L \otimes x_i^* L^{-1}).$$

LEMME 2.7.11.2. - L'isomorphisme (2.7.11.1) ne dépend pas de l'ordre des x_i et des y_i .

Démonstration : Prouvons par exemple l'invariance par permutation des x_i . Les y_i étant considérés comme fixés, notons $\alpha(x_1, \dots, x_r)$ l'isomorphisme (2.7.11.1). L'assertion du lemme signifie que pour toute permutation σ de $\{1, \dots, r\}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & r \\ & \alpha(x_1, \dots, x_r) \nearrow & \bigotimes_{i=1}^r (y_i^* L \otimes x_i^* L^{-1}) \\ \mathcal{B}_{(cl L, cl \mathcal{O}_{X_T}(D))} & \swarrow & \downarrow \\ & \alpha(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(r)}) \nearrow & \bigotimes_{i=1}^r (y_i^* L \otimes x_{\sigma(i)}^* L^{-1}) \end{array}$$

est commutatif, la flèche verticale résultant de la commutativité du produit tensoriel. Nous pouvons nous placer dans la situation "universelle" où T est le S -schéma X^r et où $x_i : X^r \rightarrow X$ est la i -ième projection. Le diagramme ci-dessus est alors un diagramme d'isomorphismes de faisceaux inversibles sur X^r . Comme $(f^r)_*(\mathcal{O}_{X^r}) = \mathcal{O}_S$ (où $f^r : X^r \rightarrow S$ est le morphisme structural), il suffit de voir que ce diagramme commute au-dessus de la "diagonale" $X \hookrightarrow X^r$ définie par $x_1 = \dots = x_r$. Nous pouvons, en d'autres termes, supposer que les x_i sont égaux, auquel cas l'assertion est triviale. ■

2.8.- Extension à certaines courbes singulières

2.8.0.- Nous supposerons maintenant que le schéma de base S est localement noethérien, régulier, de dimension 1 et (pour simplifier) connexe. On conserve les hypothèses de 2.0 sur la courbe $f: X \rightarrow S$ sauf la lissité : on suppose seulement que la fibre générique de f est lisse, que ses fibres géométriques sont réduites et que leurs seules singularités sont des points doubles ordinaires. On sait alors (Raynaud) que la "composante neutre" du foncteur de Picard de X/S est représentable par un S -schéma en groupes lisse, séparé et de type fini $J \rightarrow S$. Si l'on désigne par $U \subset S$ le plus grand ouvert de S au-dessus duquel X est lisse, alors la restriction J_U de J à U est évidemment la jacobienne de X_U/U , et en fait J s'identifie à la composante neutre du modèle de Néron de J_U sur S .

Le schéma en groupes J paramètre, en un sens analogue à 2.0, les faisceaux inversibles sur X qui sont de degré 0 sur chaque composante de chaque fibre. En particulier si T est un S -schéma et L_T un tel faisceau sur X_T on a un S -morphisme $\text{cl } L: T \rightarrow J$, qui détermine L à tensorisation près par un faisceau provenant de T .

Si f a une section $a \in X(S)$, alors il existe sur $X \times J$ un faisceau universel $\mathcal{U}^{(a)}$, trivial sur $a(S) \times J$ dont le mode d'emploi est le même qu'en 2.0 (formule (2.0.1.1)).

2.8.1.- Comme X_U est lisse sur U , la jacobienne J_U est munie d'une polarisation canonique $\Phi_U: J_U \xrightarrow{\sim} J_U^t$ (2.6.3) ; de façon équivalente on a sur $J_U \times J_U$ un faisceau inversible \mathcal{B}_U (2.7.1) muni d'une structure naturelle de biextension.

Si T est un schéma et G et H deux T -schémas en groupes commutatifs, notons $\text{BIEXT}(G, H)$ la catégorie des biextensions sur $G \times H$ (cette catégorie est notée, à équivalence près, $\text{BIEXT}(G, H; G_{m,T})$ dans SGA 7). On a le résultat élémentaire suivant, qui est un cas particulier de SGA 7, VIII. 7.1.b) :

PROPOSITION 2.8.2.- Soient G et H deux S -schémas en groupes lisses commutatifs à fibres connexes. Alors le foncteur de restriction à U

$$R_U: \text{BIEXT}(G, H) \longrightarrow \text{BIEXT}(G_U, H_U)$$

est une équivalence de catégories.

Démonstration : Pour tout schéma Y et tout sous-schéma Z de Y , désignons par $\text{PICRIG}(Y, Z)$ la catégorie des \mathcal{O}_Y -modules inversibles munis d'une trivialisa-

tion au-dessus de Z , les morphismes étant les *isomorphismes* respectant les trivialisations.

LEMME 2.8.2.1. - Soient $p: Y \rightarrow S$ un S -schéma lisse à fibres connexes, $e: S \rightarrow Y$ une section de p . Alors le foncteur naturel de restriction

$$\text{PICRIG}(Y, e(S)) \longrightarrow \text{PICRIG}(Y_U, e(U))$$

est une équivalence de catégories.

La preuve du lemme est laissée en exercice ; on utilisera les faits suivants (où "diviseur" signifie diviseur de Cartier) :

- a) Comme Y est un schéma régulier, tout faisceau inversible (resp. tout diviseur) sur Y_U se prolonge à Y .
- b) Comme p est à fibres connexes, tout faisceau inversible (resp. tout diviseur) sur Y trivial (resp. nul) sur Y_U provient de S ; un tel objet est trivial (resp. nul) si et seulement si sa restriction à $e(S)$ est itou. ■

2.8.2.2. - Revenons à la proposition. Notons d'abord qu'une biextension est trivialisée le long de la section unité $e: S \rightarrow G \times H$, d'où un foncteur "oubli des lois de composition"

$$\text{BIEXT}(G, H) \longrightarrow \text{PICRIG}(G \times H, e(S)).$$

- a) Le foncteur R_U est *pleinement fidèle*. Soient E et F deux objets de $\text{BIEXT}(G, H)$. L'application naturelle

$$\text{Hom}(E, F) \longrightarrow \text{Hom}(E_U, F_U)$$

est évidemment injective puisque $G_U \times H_U$ est dense dans $G \times H$. Un morphisme de E_U dans F_U se prolonge, d'après 2.8.2.1, en un morphisme des faisceaux rigidifiés sous-jacents à E et F , qui est automatiquement compatible (toujours par densité) aux lois de composition de E et F , C.Q.F.D.

- b) R_U est *essentiellement surjectif*. En effet soit E_U une biextension sur $G_U \times H_U$. Le faisceau rigidifié sous-jacent se prolonge, d'après 2.8.2.1, en un faisceau rigidifié E sur $G \times H$. Les deux lois de composition partielles de E_U s'interprètent comme des isomorphismes de faisceaux rigidifiés convenables sur $G_U \times G_U \times H_U$ et $G_U \times H_U \times H_U$, par exemple

$$m^* E_U \xrightarrow{\sim} \text{pr}_{13}^* E_U \otimes \text{pr}_{23}^* E_U \text{ sur } G_U \times G_U \times H_U$$

où m est l'addition de G_U . Appliquant de nouveau 2.8.2.1, on en déduit deux lois de composition sur E , pour lesquelles les axiomes de biextension sont automatiquement vérifiés par densité. ■

Remarque 2.8.2.3. - Dans l'énoncé de la proposition 2.8.2, il suffirait en fait que l'un des deux groupes G et H soit à fibres connexes ; cela résulte du fait qu'une biextension est trivialisée non seulement sur la section unité $e_{G \times H}$, mais même sur $e_G \times H$ et $G \times e_H$.

2.8.3.- Revenant à la situation de 2.8.1, nous déduisons de 2.8.2 l'existence d'une unique biextension \mathcal{B} sur $J \times J$, prolongeant \mathcal{B}_U , et qui est aussi l'unique prolongement rigidifié de \mathcal{B}_U , au sens du lemme 2.8.2.1.

Supposons que f ait une section $a \in X(S)$. A partir du faisceau universel $\mathcal{U}^{(a)}$ sur $X \times J$, on peut définir, comme en (2.6.1), le faisceau

$$(2.8.3.1) \quad \theta^{(a)} = (\det Rq_{2*} \mathcal{U}^{(a)})^{-1}$$

sur J , où $q_2 : X \times J \rightarrow J$ est la seconde projection.

LEMME 2.8.4. - Avec les hypothèses et notations ci-dessus, on a un isomorphisme canonique (où $m : J \times J \rightarrow J$ est l'addition de J)

$$\mathcal{B} = m^* \theta^{(a)} \otimes \text{pr}_1^* \theta^{(a)-1} \otimes \text{pr}_2^* \theta^{(a)-1} \otimes (e_{J \times J}^* \theta^{(a)})_{J \times J}$$

prolongeant l'isomorphisme (2.7.4) défini au-dessus de U .

Démonstration : Il suffit de remarquer que le membre de droite est un faisceau inversible rigidifié sur $J \times J$, qui prolonge \mathcal{B}_U grâce à (2.7.4). ■

COROLLAIRE 2.8.5. - Soient L et M deux faisceaux inversibles sur X , de degré 0 dans chaque composante de chaque fibre. Alors on a un isomorphisme canonique de \mathcal{O}_S -modules inversibles

$$\mathcal{B}_{(\text{cl } L, \text{cl } M)} \simeq (\det Rf_* (L \otimes M))^{-1} \otimes \det Rf_* L \otimes \det Rf_* M \otimes (\det Rf_* \mathcal{O}_X)^{-1},$$

prolongeant l'isomorphisme 2.7.5 défini sur U .

Démonstration : La question étant locale sur S pour la topologie étale (puisque il s'agit de prolonger un isomorphisme déjà défini sur U) nous pouvons supposer que f a une section $a \in X(S)$. On peut alors utiliser le lemme 2.8.4, et il suffit de répéter la partie a) de la démonstration de 2.7.5. ■

COROLLAIRE 2.8.6. - Soit r un entier > 1 et soient x_i, y_i ($1 \leq i \leq r$) des sections de $f : X \rightarrow S$ contenues dans l'ouvert de lissité de f , et telles que

$D = \sum_{i=1}^r (x_i - y_i)$ soit de degré 0 dans chaque composante de chaque fibre. Alors,

pour tout L comme dans 2.8.5, on a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{B}_{(cl L, cl \mathcal{O}_X(D))} = \bigotimes_{i=1}^r (y_i^* L \otimes x_i^* L^{-1})$$

prolongeant l'isomorphisme (2.7.11.1) sur U (et par suite, comme ce dernier, indépendant de l'ordre des x_i et des y_i (2.7.11.2)).

Démonstration : Ici encore la question est locale sur S , et nous pouvons donc supposer que S est local de point fermé s . Nous pouvons de plus supposer, en vertu de (2.7.11.2), que les x_i sont ordonnés de telle sorte que pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, x_i et y_i rencontrent la même composante de la fibre X_s , de sorte que nous pouvons parler du point $cl \mathcal{O}_X(x_i - y_i) \in J(S)$.

Rappelons que l'isomorphisme (2.7.11.1) était défini par linéarité, à partir du cas $r=1$ et de la structure de biextension de \mathcal{B}_U . Comme \mathcal{B} est la bi-extension prolongeant \mathcal{B}_U , nous sommes ramenés au cas où $r=1$. Le calcul est alors le même que dans 2.7.6, compte tenu de 2.8.5 ci-dessus. ■

2.9.- Perspectives

Soit $X \xrightarrow{f} S$ comme en 2.0, où f est supposé lisse. Alors Deligne (SGA 4 XVIII.1) associe à deux \mathcal{O}_X -modules inversibles L et M quelconques un \mathcal{O}_S -module inversible noté $\langle L, M \rangle$, dont la formation commute à tout changement de base et qui est "bilinear" en ce sens que l'on a des isomorphismes fonctionnels

$$(2.9.1) \quad \begin{aligned} \langle L, M_1 \otimes M_2 \rangle &\simeq \langle L, M_1 \rangle \otimes \langle L, M_2 \rangle \\ \langle L_1 \otimes L_2, M \rangle &\simeq \langle L_1, M \rangle \otimes \langle L_2, M \rangle . \end{aligned}$$

De plus si $D \subset X$ est un diviseur relatif effectif, on peut lui associer pour tout M un isomorphisme canonique

$$(2.9.2) \quad \langle \mathcal{O}_X(D), M \rangle \simeq N_{D/S}(M|_D)$$

où $N_{D/S}$ désigne la norme.

La méthode de loc. cit. consiste essentiellement à partir de la formule (2.9.2) pour D "suffisamment ample", et à prolonger l'accouplement "par linéarité". On constate en fait que l'on a, pour L et M quelconques

$$(2.9.3.) \quad \langle L, M \rangle \simeq \det Rf_*(L \otimes M) \otimes (\det Rf_* L)^{-1} \otimes (\det Rf_* M)^{-1} \otimes \det Rf_* \mathcal{O}_X$$

ce qui fournit une définition a priori de $\langle L, M \rangle$; toutefois la bilinéarité n'est pas immédiate sur cette définition et il faut, pour l'établir, faire le lien avec (2.9.2).

Dans le §2, nous avons essentiellement défini l'accouplement $\langle L, M \rangle$ lorsque L et M sont de degré 0 dans les fibres, par la formule

$$(2.9.4) \quad \langle L, M \rangle = \beta_{(cl\ L, cl\ M)}^{-1}$$

(cf. 2.7.5). La bilinéarité résulte dans ce cas de la structure de biextension de β , c'est-à-dire, essentiellement, du "théorème du carré" sur J : cet argument ne s'applique plus lorsque L et M sont de degré quelconque.

Bien entendu la formule (2.9.2) permet d'étendre la définition de $\langle L, M \rangle$ au cas où $f: X \longrightarrow S$ est seulement supposé propre et plat. Il y aurait donc lieu d'établir la bilinéarité de $\langle L, M \rangle$, ainsi défini, sous des hypothèses "minimales" : il semble que ce soit possible en tout cas lorsque les fibres de f sont des courbes localement de Cohen-Macaulay, la démonstration suivant de près celle de SGA 4 moyennant quelques précautions dans le maniement des diviseurs relatifs et des "systèmes linéaires". L'auteur remercie vivement L. Breen d'avoir attiré son attention sur SGA 4, loc. cit ; nous espérons revenir sur ces questions.

3.- FAISCEAUX INVERSIBLES HERMITIENS SUR LES VARIÉTÉS ABÉLIENNES

Dans ce numéro on se place sur le corps \mathbb{C} des nombres complexes.

THÉORÈME 3.1. - On peut, d'une manière, et d'une seule, associer à tout couple (A, L) où A est une variété abélienne sur \mathbb{C} et L un fibré en droites sur A , un ensemble non vide $\pi(A, L)$ de métriques hermitiennes C^∞ positives sur L , de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées :

- (i) si $u: L \xrightarrow{\sim} M$ est un isomorphisme de fibrés sur A , alors $\pi(A, M) = u(\pi(A, L))$.
- (ii) $\pi(A, A \times \mathbb{C})$ est l'ensemble des métriques constantes sur le fibré trivial $A \times \mathbb{C}$.
- (iii) $\pi(A, L_1) \otimes \pi(A, L_2) \subset \pi(A, L_1 \otimes L_2)$.
- (iv) si $f: B \rightarrow A$ est un morphisme de variétés abéliennes et si L est un fibré en droites sur A , alors $f^*\pi(A, L) \subset \pi(B, f^*L)$.

3.2.- Notons tout de suite que (i), (ii) et (iii) impliquent (en faisant $L_2 = L_1^{-1}$ dans (iii)) la propriété suivante :

- (v) si $\rho_0 \in \pi(A, L)$, alors $\pi(A, L)$ est l'ensemble des métriques $\lambda \rho_0$, où λ parcourt $\mathbb{R}_{>0}$.

En conséquence, les inclusions dans (iii) et (iv) sont des égalités.

Soient A une variété abélienne et L un fibré en droites sur A . Notons $\mathcal{D}_3(L)$ le fibré sur A^3 défini par

$$\mathcal{D}_3(L) := p_{123}^* L \otimes p_{12}^* L^{-1} \otimes p_{13}^* L^{-1} \otimes p_{23}^* L^{-1} \otimes p_1^* L \otimes p_2^* L \otimes p_3^* L$$

où $p_I: A^3 \rightarrow A$ est défini pour $I \subset \{1, 2, 3\}$ par $p_I(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i \in I} x_i$.

Le théorème du cube ([AV], §6) implique alors que $\mathcal{D}_3(L)$ est trivial. On peut donc parler de métriques hermitiennes constantes sur $\mathcal{D}_3(L)$ (rappelons qu'une trivialisation de $\mathcal{D}_3(L)$ est unique à multiplication près par une constante) ; d'autre part à toute métrique ρ sur L est associée de façon naturelle une métrique $\mathcal{D}_3(\rho)$ sur $\mathcal{D}_3(L)$, et les conditions (i) à (iv) de 3.1. montrent que si $\rho \in \pi(A, L)$ alors $\mathcal{D}_3(\rho)$ est dans $\pi(A^3, \mathcal{D}_3(L))$ donc est constante.

D'autre part, si $\mathcal{D}_3(\rho)$ est constante et si $\rho' = \lambda \rho$ est telle que $\mathcal{D}_3(\rho')$ soit constante, $\lambda: A \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ étant une fonction C^∞ (ou simplement continue) alors λ vérifie

$$\frac{\lambda(x+y+z)\lambda(x)\lambda(y)\lambda(z)}{\lambda(x+y)\lambda(x+z)\lambda(y+z)} = \lambda(0)$$

donc l'application $(x,y) \mapsto \frac{\lambda(x+y)\lambda(0)}{\lambda(x)\lambda(y)}$ de A^2 dans $\mathbb{R}_{>0}$ est \mathbb{Z} -bilinéaire

donc égale à 1 et par suite $\lambda/\lambda(0)$ est \mathbb{Z} -linéaire, donc égale à 1. Nous sommes donc acculés à la définition suivante :

DÉFINITION 3.3.- $\pi(A,L)$ est l'ensemble des métriques ρ sur L telles que la métrique $\mathcal{D}_3(\rho)$ sur $\mathcal{D}_3(L)$ soit constante.

Ceci établit l'assertion d'unicité de 3.1. Il est d'autre part immédiat que $\pi(A,L)$ ainsi défini vérifie les conditions (i) à (iv), et il reste à voir que $\pi(A,L)$ est non vide. On en trouvera une démonstration directe dans [MB], II, §2; ici l'on va plutôt faire le lien avec un autre point de vue :

3.5.- A une variété analytique complexe X , un fibré en droites L sur X et une métrique hermitienne $C^\infty \rho$ sur L , on associe ([G-H]) la *forme de courbure* K de la métrique ρ : c'est une forme C^∞ fermée de type $(1,1)$ sur X , et l'on a les propriétés suivantes :

3.5.1.- (i) Si (L_1, ρ_1) et (L_2, ρ_2) sont isométriques alors $K_{\rho_1} = K_{\rho_2}$.

(ii) Sur le fibré trivial $X \times \mathbb{C}$, les métriques constantes sont à courbure nulle; la réciproque est vraie si X est compacte connexe.

(iii) $K_{\rho_1 \otimes \rho_2} = K_{\rho_1} + K_{\rho_2}$.

(iv) Si $f: Y \rightarrow X$ est holomorphe alors $K_{f^*\rho} = f^*K_\rho$.

La courbure K_ρ se calcule localement de la façon suivante : soit U un ouvert de X et soit s une section holomorphe partout non nulle de L sur U . Désignons par $\|s\|_\rho$ la norme de s (de sorte que $\|\lambda s\|_\rho = |\lambda| \|s\|_\rho$): alors $\|s\|_\rho$ est une fonction C^∞ sur U , et l'on a, sur U ([G-H], p.142) :

$$(3.5.2) \quad K_\rho = \bar{\partial} \partial \log \|s\|_\rho^2$$

Enfin la classe de cohomologie $[K_\rho] \in H_{DR}^2(X)$ ne dépend que de L et non de ρ ; plus précisément ([G-H] p.141) :

$$(3.5.3) \quad c_1(L) = \left[\frac{i}{2\pi} K_\rho \right] \in H_{DR}^2(X).$$

Dans le cas particulier où $X = A$ est une variété abélienne, il en résulte

qu'une métrique ρ sur le fibré trivial $A \times \mathbb{C}$ est constante si et seulement si la forme K_ρ est invariante par translations (exercice : une forme exacte invariante par translations est nulle). Ceci suggère :

PROPOSITION 3.6. - $\pi(A, L)$ est l'ensemble des métriques ρ sur L telles que la $(1,1)$ -forme K_ρ soit invariante par translations ; de plus $\pi(A, L)$ est non vide.

Désignons par $\pi'(A, L)$ l'ensemble des métriques à courbure invariante sur L . Il est immédiat que les propriétés (i) à (iv) de 1.1 sont vérifiées pour $\pi'(A, L)$. Il en résulte que $\pi'(A, L) \subset \pi(A, L)$; d'autre part, $\pi'(A, L)$ est non vide en vertu de théorèmes généraux ([G-H], p. 148). ■

(Le lecteur sachant montrer directement que $\pi(A, L)$ est non vide fera l'économie de loc. cit. en montrant de façon élémentaire que $\pi(A, L) \subset \pi'(A, L)$: il suffit pour cela de calculer $K_{\tilde{\mathcal{D}}_3(\rho)}$ en fonction de K_ρ et d'exprimer que $K_{\tilde{\mathcal{D}}_3(\rho)} = 0$).

DÉFINITION 3.7. - On appelle *métriques permises* sur L les éléments de $\pi(A, L)$.

Remarque 3.8 : Si L est un fibré en droites sur A , le fibré

$$(3.8.1) \quad \tilde{\mathcal{D}}_2(L) := p_1^* L \otimes p_1^* L^{-1} \otimes p_2^* L^{-1} \otimes e_{A \times A}^* L$$

sur $A \times A$ admet une structure naturelle de *biextension*. On vérifie alors qu'une métrique ρ sur L est permise si et seulement si la métrique $\tilde{\mathcal{D}}_2(\rho)$ sur $\tilde{\mathcal{D}}_2(L)$ déduite de ρ est compatible à cette structure, c'est-à-dire si les deux lois de composition

$$\tilde{\mathcal{D}}_2(L)_{(x,y)} \otimes \tilde{\mathcal{D}}_2(L)_{(x,z)} \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{D}}_2(L)_{(x,y+z)}$$

$$\tilde{\mathcal{D}}_2(L)_{(x,z)} \otimes \tilde{\mathcal{D}}_2(L)_{(y,z)} \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{D}}_2(L)_{(x+y,z)}$$

sont compatibles à la métrique $\tilde{\mathcal{D}}_2(\rho)$.

Remarque 3.9. - De même soit L un fibré en droites sur A , algébriquement équivalent à 0, et posons $\tilde{L} = L \otimes L_{\mathbb{C}^\times}^{-1}$. Alors \tilde{L} (ou plus exactement le fibré épontié $\tilde{L}^* = \tilde{L} -$ (section nulle)) admet une structure naturelle d'*extension* de A par \mathbb{C}^\times . Une métrique ρ sur L est alors permise si et seulement si la métrique $\tilde{\rho}$ sur \tilde{L} déduite de ρ est compatible à la structure d'*extension*, ou en d'autres termes si le fibré en cercles unités de \tilde{L}^* associé à $\tilde{\rho}$ est un sous-groupe de \tilde{L}^* .

Remarque 3.10. - Le théorème 3.1 reste vrai si l'on remplace les variétés abéliennes par les torseurs (espaces homogènes principaux) sous les variétés abéliennes, i.e si dans la condition (iv) de 3.1, on n'impose plus à f d'être un morphisme de groupes. Cela revient en effet à vérifier que si $T_x : A \longrightarrow A$ désigne la translation par $x \in A$, alors

$$T_x^* \pi(A, L) = \pi(A, T_x^* L).$$

C'est immédiat en termes de courbure. On peut aussi raisonner de la façon suivante : si $\rho \in \pi(A, L)$, considérons la métrique $\tilde{\mathcal{D}}_2(\rho)$ de 3.8. On peut la restreindre à $\{x\} \times A \subset A \times A$: on obtient ainsi la métrique déduite naturellement de ρ sur le fibré $T_x^* L \otimes L^{-1} \otimes_{\mathbb{C}} L_x^{-1} \otimes_{\mathbb{C}} L_{e_A}$. Ce dernier s'identifie à $\tilde{M} = M \otimes_{\mathbb{C}} M_{e_A}^{-1}$ où $M = T_x^* L \otimes L^{-1}$. D'après 3.8, $\tilde{\mathcal{D}}_2(\rho)$ est compatible à la structure de biextension de $\tilde{\mathcal{D}}_2(L)$; par suite la métrique sur \tilde{M} déduite de ρ est compatible à la structure d'extension de \tilde{M} . En d'autres termes (d'après 3.9) la métrique $T_x^* \rho \otimes \rho^{-1}$ sur M est permise, donc $T_x^* \rho$ est permise puisque ρ l'est.

4.- FAISCEAUX INVERSIBLES HERMITIENS SUR LES COURBES

4.0.- Soit X une courbe propre, lisse et connexe de genre $g \geq 1$ sur \mathbb{C} , et soit $J = \underline{\text{Pic}}_{X/\mathbb{C}}^0$ sa jacobienne. Alors (§2) J est munie canoniquement d'une *polarisation principale* que l'on peut voir, au choix, comme :

(a) une classe ample $\xi_X \in \text{NS}(J) = \underline{\text{Pic}}(J)/\underline{\text{Pic}}^0(J)$ (groupe de Néron-Severi de J) : si $a \in X(\mathbb{C})$, c'est la classe du faisceau $\theta^{(a)}$ de 2.6.1.

(b) un isomorphisme $\Phi_X : J \xrightarrow{\sim} J^t$ (noté ϕ en 2.6.3) : si M est un faisceau inversible sur J appartenant à la classe ξ_X (par exemple $M = \theta^{(a)}$), alors $\Phi_X = \varphi_M$ (2.6.2).

(c) une forme positive η_X de type $(1,1)$ sur J , invariante par translations, liée à ξ_X par

$$\eta_X := c_1(\xi_X) \in H^{1,1}(J) = \{(1,1)\text{-formes invariantes sur } J\} .$$

Pour tout point a de X (cette expression désigne dans ce n°, sauf mention expresse du contraire, un point de $X(\mathbb{C})$), on a un plongement (déjà rencontré en (2.7.8.1))

$$(4.0.1) \quad \begin{aligned} j_a : X &\hookrightarrow J \\ x &\mapsto c_1 \mathcal{O}_X(x - a) . \end{aligned}$$

Comme ξ_X est ample sur J , on a

$$(4.0.2) \quad \deg_X j_a^*(\xi_X) > 0$$

(en fait, ce degré est égal à g) et en conséquence on peut considérer la 2-forme sur X

$$(4.0.3) \quad \mu_X := \frac{1}{\deg j_a^*(\xi_X)} j_a^* \eta_X$$

qui est une $(1,1)$ -forme positive, indépendante du choix de a puisque η_X est invariante par translations ; on l'appelle *forme canonique* sur X et elle définit une métrique hermitienne sur X , dite *métrique canonique* (nous n'utiliserons pas cette dernière, ce qui nous dispense de préciser les conventions).

Par construction, μ_X vérifie

$$(4.0.4) \quad \int_X \mu_X = 1 ;$$

elle est définie "classiquement" par la formule suivante : si (w_1, \dots, w_g) est une base de $H^0(X, \Omega_X^1)$, orthonormale pour le produit hermitien

$$(4.0.5) \quad (\alpha, \beta) \longmapsto \frac{i}{2} \int_X \alpha \wedge \bar{\beta}$$

alors on a

$$(4.0.6) \quad \mu_X = \frac{i}{2g} \sum_{j=1}^g w_j \wedge \bar{w}_j$$

(nous n'aurons pas à utiliser cette formule).

4.1.- Si M est un faisceau inversible sur J , nous dirons que M est *polarisant* si sa classe dans $NS(J)$ est multiple (rationnel ou entier, cela revient au même puisque ξ_X est principale) de la classe ξ_X . De façon équivalente : $c_1(M) = \lambda \eta_X$ ($\lambda \in \mathbb{R}$; en fait $\lambda \in \mathbb{Z}$), ou encore : si ρ est une métrique permise (3.7) sur M , alors sa courbure K_ρ est multiple de $-2\pi \eta_X$ (à cause de (3.5.3)).

THÉORÈME 4.2.- Avec les notations de 4.0 et 4.1, on peut, d'une manière et d'une seule, associer à tout fibré en droites L sur X un ensemble non vide $\pi(X, L)$ de métriques hermitiennes C^∞ positives sur L , de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées :

- (i) Si $u : L \xrightarrow{\sim} M$ est un isomorphisme alors $u(\pi(X, L)) = \pi(X, M)$.
- (ii) $\pi(X, X \times \mathbb{C})$ est l'ensemble des métriques constantes sur $X \times \mathbb{C}$.
- (iii) $\pi(X, L_1) \otimes \pi(X, L_2) \subset \pi(X, L_1 \otimes L_2)$.
- (iv) Si $a \in X$ et si M est un fibré polarisant (4.1) sur J , alors

$$j_a^* \pi(J, M) \subset \pi(X, j_a^* M)$$

où $j_a : X \hookrightarrow J$ est le plongement (4.0.1) et où $\pi(J, M)$ est défini en 3.1.

Ici comme au §3 on remarque que (i), (ii) et (iii) impliquent :

- (v) si $\rho_0 \in \pi(X, L)$ alors $\pi(X, L)$ est l'ensemble des $\lambda \rho_0$ où $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ et par suite les inclusions (iii) et (iv) sont des égalités.

Démonstration de 4.2 : Fixons d'abord $a \in X$. Si L est un fibré en droites sur X , il existe un entier n (par exemple $n = g$, cf. (4.0.2)) et un fibré polarisant M_n sur J , tel que $\deg j_a^* M_n = \deg(L^{\otimes n})$. Remarquant alors que

$$j_a^* : \text{Pic}^0 J \longrightarrow \text{Pic}^0 X$$

est un isomorphisme (2.7.9) on voit que l'on peut même imposer $j_a^* M_n \simeq L^{\otimes n}$, et M_n ainsi défini est unique (pour n donné). Il suffit alors de poser

$$(4.2.1) \quad \pi(X, L) = (j_a^* \pi(J, M_n))^{\otimes 1/n}.$$

Il est immédiat que $\pi(X, L)$ ainsi défini ne dépend pas de n (car on a $M_{kn} = M_n^{\otimes k}$) ni de a (en vertu de la remarque 3.10 et du fait que $j_b = T_{\text{cl}} \circ_{X'}^{(a-b)} j_a$). La vérification des propriétés (i)-(iv) est dès lors triviale. ■

Remarque 4.2.2.- Lorsque $g=1$, on obtient deux ensembles $\pi(X, L)$ de métriques sur L , en considérant X soit comme courbe (4.2), soit comme torseur sous une variété abélienne (3.10). En fait ces deux ensembles coïncident (ce qui justifie la notation) puisque dans ce cas le plongement j_a de (4.0.1) est un isomorphisme.

4.3.- Lien avec la courbure.- Gardons les notations de la démonstration ci-dessus. Si ρ est une métrique permise sur M_n , alors la courbure K_ρ est multiple de $-2i\pi\eta_X$ (4.1), et par suite il résulte de (4.2.1) que si $\sigma \in \pi(X, L)$, la courbure K_σ est multiple de la (1,1)-forme μ_X de (4.0.3). Comme d'autre part on a

$$\frac{-1}{2i\pi} \int_X K_\sigma = \deg L \quad (3.5.3)$$

$$= \int_X (\deg L) \mu_X \quad (4.0.4)$$

on en déduit plus précisément que

$$(4.3.1) \quad K_\sigma = -2i\pi(\deg L)\mu_X .$$

Inversement si σ' est une métrique sur L dont la courbure est de la forme $\alpha\mu_X$ ($\alpha \in \mathbb{C}$), alors $\alpha = -2i\pi \deg L$ par le calcul ci-dessus, et $\sigma' \otimes \sigma'^{-1}$ est une métrique à courbure nulle sur le fibré trivial, donc est constante, et par suite $\sigma' \in \pi(X, L)$. En résumé

PROPOSITION 4.4.- Soit ρ une métrique sur le fibré L sur X . Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\rho \in \pi(X, L)$.

(ii) La courbure K_ρ est proportionnelle à la (1,1)-forme μ_X de (4.0.3).

(iii) $K_\rho = -2i\pi(\deg L)\mu_X$. ■

DÉFINITION 4.5.- On appelle *métriques permises* sur le fibré L sur X les éléments de $\pi(X, L)$.

Remarque 4.6 : Arakelov [A] (suivant une idée de Parshin) part d'une \$(1,1)\$-forme \$v\$ quelconque sur \$X\$ vérifiant \$\int_X v = 1\$, et considère ensuite comme permises les métriques \$\rho\$ sur \$L\$ vérifiant \$K_\rho = -2i\pi(\deg L)v\$. On obtient ainsi, pour tout fibré \$L\$, un ensemble de métriques \$\pi_v(X, L)\$ vérifiant trivialement les propriétés (i), (ii) et (iii) de 4.2 et Arakelov montre encore que \$\pi_v(X, L)\$ est non vide. Bien entendu la propriété (iv) de 4.2 n'est vérifiée que si \$v = \mu_X\$.

DÉFINITION 4.7.- Soit \$L\$ un fibré en droites sur \$X^r\$ (\$r \geq 0\$). Une métrique sur \$L\$ est dite *r-permise* si pour tout plongement \$j : X \longrightarrow X^r\$ tel que l'un des composés \$pr_i \circ j\$ (\$1 \leq i \leq r\$) soit l'identité de \$X\$ et que les autres soient constants, la métrique \$j^*\rho\$ sur \$j^*L\$ est permise.

Remarques 4.8.- Il est immédiat que si \$\rho'\$ et \$\rho''\$ sont deux métriques \$r\$-permises sur \$L\$, le rapport \$\rho'/\rho''\$ est constant.

Si \$\rho_1\$ (resp. \$\rho_2\$) est \$r\$-permise sur \$L_1\$ (resp. \$L_2\$) alors \$\rho_1 \otimes \rho_2\$ est \$r\$-permise sur \$L_1 \otimes L_2\$.

Si \$L\$ est un fibré en droites sur \$X\$ et \$\rho \in \pi(X, L)\$, alors pour \$i \in \{1, \dots, r\}\$ la métrique \$pr_i^*\rho\$ sur \$pr_i^*L\$ est \$r\$-permise.

Nous dirons *bipermise* pour "2-permise".

4.9.- Considérons sur \$X \times X\$ la diagonale \$\Delta : X \longrightarrow X \times X\$, considérée à la fois comme plongement de \$X\$ et comme diviseur sur \$X \times X\$. Le faisceau inversible \$\mathcal{O}_{X \times X}(\Delta)\$ est muni d'un isomorphisme de symétrie

$$(4.9.1) \quad \sigma : \mathcal{O}_{X \times X}(\Delta) \xrightarrow{\sim} s^* \mathcal{O}_{X \times X}(\Delta)$$

induisant l'identité le long de \$\Delta\$, où \$s : X \times X \longrightarrow X \times X\$ désigne l'échange des facteurs.

THÉORÈME 4.10.-

- (i) Le faisceau \$\mathcal{O}_{X \times X}(\Delta)\$ admet une métrique bipermise.
- (ii) Toute métrique bipermise sur \$\mathcal{O}_{X \times X}(\Delta)\$ est compatible à l'isomorphisme de symétrie (4.9.1).
- (iii) Pour toute métrique bipermise \$\rho\$ sur \$\mathcal{O}_{X \times X}(\Delta)\$, la métrique \$\Delta^*\rho\$ sur \$\Delta^* \mathcal{O}_{X \times X}(\Delta) = \omega_X^{-1}\$ est permise.

Démonstration : L'assertion (ii) résulte de l'unicité à constante près des métriques bipermises. Pour la même raison il suffit d'établir (iii) pour une métrique

bipermise particulière.

4.10.1.- Fixons un point $a \in X$ et considérons sur $X \times J$ le faisceau universel $\mathcal{U}^{(a)} = \mathcal{U}_0^{(a)}$ (2.0.1) trivial sur $\{a\} \times J$. Par définition de la polarisation canonique, le \mathcal{O}_J -module inversible

$$\theta^{(a)} = (\det Rq_{2*} \mathcal{U}^{(a)})^{-1}$$

où $q_2 : X \times J \rightarrow J$ est la seconde projection, est polarisant (2.6) : munissons-le d'une métrique permise ρ .

Considérons alors le morphisme

$$(4.10.1.1) \quad \begin{aligned} \psi : X \times X &\longrightarrow J \\ (x, y) &\longmapsto \text{cl} \mathcal{O}_X(x - y) \end{aligned}$$

Je dis qu'alors la métrique $\psi^* \rho$ sur $\psi^* \theta^{(a)}$ est bipermise. Pour y fixé, en effet, la restriction de ψ à $X \times \{y\} = X$ n'est autre que le morphisme $j_y : X \hookrightarrow J$ de (4.0.1), et l'on applique la caractérisation 4.2 (iv) des métriques permises. Pour x fixé, la restriction de ψ à $\{x\} \times X$ est le morphisme $-j_x$, et l'on a

$$(-j_x)^* \theta^{(a)} = j_x^* [-1]_J^* \theta^{(a)},$$

or le fibré $J^* \theta^{(a)}$ est algébriquement équivalent à $\theta^{(a)}$ donc polarisant, et la métrique $J^* \rho$ sur ce fibré est évidemment permise, d'où notre assertion.

LEMME 4.10.2.- Avec les notations ci-dessus, on a

$$\psi^* \theta^{(a)} \simeq \mathcal{O}_{X \times X}(\Delta) \otimes \text{pr}_1^* \mathcal{O}_X(a)^{\otimes(1-g)} \otimes \text{pr}_2^* \mathcal{O}_X(a)^{\otimes(g-1)} \otimes \text{pr}_1^* \omega_X.$$

Démonstration : Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X^3 & = & X \times X \times X & \xrightarrow{\text{id}_X \times \psi} & X \times J \\ \sigma_a \swarrow \Delta_1 \swarrow \Delta_2 & & \downarrow \text{pr}_2 \circ \Delta_3 & & \downarrow q_2 \\ X \times X & \xrightarrow{\psi} & J & & \end{array}$$

où, par définition,

$$\Delta_1(x, y) = (x, x, y)$$

$$\Delta_2(x, y) = (y, x, y)$$

$$\sigma_a(x, y) = (a, x, y).$$

On a :

$$\begin{aligned}\psi^* \mathcal{U}^{(a)} &= \psi^*(\det R q_{2*})^{-1} \text{ (définition de } \theta^{(a)}) \\ &= (\det R \operatorname{pr}_{23*} (\operatorname{id}_X \times \psi)^* \mathcal{U}^{(a)})^{-1} \text{ (changement de base).}\end{aligned}$$

Or, le morphisme ψ est caractérisé (2.0.1.1) par la propriété que

$$\begin{aligned}(\operatorname{id}_X \times \psi)^* \mathcal{U}^{(a)} &\simeq \mathcal{O}_{X^3}(\Delta_1 - \Delta_2) \otimes \operatorname{pr}_{23}^* \sigma_a^* \mathcal{O}_{X^3}(\Delta_2 - \Delta_1) \\ &= \mathcal{O}_{X^3}(\Delta_1 - \Delta_2) \otimes \operatorname{pr}_{23}^* (\operatorname{pr}_2^* \mathcal{O}_X(a) \otimes \operatorname{pr}_1^* \mathcal{O}_X(a)^{-1}) .\end{aligned}$$

Il suffit dès lors de calculer $\det R \operatorname{pr}_{23*} (\operatorname{id}_X \times \psi)^* \mathcal{U}^{(a)}$ en appliquant les règles du §1, en remarquant que $\Delta_2^* \mathcal{O}(\Delta_1) = \mathcal{O}_{X \times X}(\Delta)$ et que $\Delta_1^* \mathcal{O}(\Delta_1) = \operatorname{pr}_1^* \omega_X^{-1}$. ■

4.10.3.- Il résulte en particulier de 4.10.2 que :

$$\mathcal{O}_{X \times X}(\Delta) \simeq \psi^* \theta^{(a)} \otimes \operatorname{pr}_1^* L_1 \otimes \operatorname{pr}_2^* L_2$$

où L_1 et L_2 sont deux fibrés sur X . Si l'on munit ces deux derniers de métriques permises, et $\psi^* \theta^{(a)}$ de la métrique bipermise $\psi^* \rho$, on obtient bien une métrique bipermise sur $\mathcal{O}_{X \times X}(\Delta)$ grâce à l'isomorphisme ci-dessus. De plus les métriques bipermises obtenues sur les trois faisceaux du second membre ont toutes la propriété que leur restriction à la diagonale est permise : c'est clair pour les deux derniers, et pour $\psi^* \theta^{(a)}$ cela résulte de la remarque que la restriction de ψ à Δ est le morphisme nul : la métrique $\psi^* \rho$ induit donc une métrique constante (et par suite permise) sur le fibré trivial $\Delta^* \psi^* \theta^{(a)}$.

Nous avons donc fabriqué, sur $\mathcal{O}_{X \times X}(\Delta)$, une métrique bipermise dont la restriction à la diagonale est permise, ce qui prouve (i) et (iii). ■

4.11.- Supposons désormais fixée une métrique bipermise ρ_Δ sur $\mathcal{O}_{X \times X}(\Delta)$ (en ce qui concerne le choix de cette métrique, voir 4.11.4 ci-dessous). Si a est un point de X , alors la restriction de $\mathcal{O}_{X \times X}(\Delta)$ à $\{a\} \times X$ s'identifie canoniquement au fibré $\mathcal{O}_X(a)$ sur X , de sorte que ce dernier se trouve gratifié canoniquement d'une métrique permise, que nous noterons $\rho_{(a)}$. Par additivité, on en déduit sans peine la proposition suivante :

PROPOSITION 4.11.1.- Une fois fixée une métrique bipermise ρ_Δ sur $\mathcal{O}_{X \times X}(\Delta)$, on peut, d'une manière et d'une seule, associer à tout diviseur D sur X une métrique permise ρ_D sur $\mathcal{O}_X(D)$, de sorte que les conditions suivantes soient réalisées :

(i) la métrique ρ_0 associée au diviseur nul est la métrique évidente sur le fibré trivial.

- (ii) Si D_1 et D_2 sont deux diviseurs sur X , les métriques ρ_{D_1} et ρ_{D_2} se correspondent par l'isomorphisme naturel $\mathcal{O}_X(D_1) \otimes \mathcal{O}_X(D_2) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(D_1 + D_2)$.
- (iii) Si D est réduit à un point $a \in X$, alors ρ_D est la métrique $\rho_{(a)}$ définie ci-dessus.

Remarque 4.11.2 : Si l'on multiplie ρ_Δ par une constante $\lambda > 0$, alors ρ_D est multipliée par $\lambda^{\deg D}$: en particulier, si $\deg D = 0$, alors ρ_D est indépendante du choix de ρ_Δ .

4.11.3.- La métrique choisie ρ_Δ sur $\mathcal{O}_{X \times X}(\Delta)$ permet de définir une métrique privilégiée ρ_ω sur le fibré cotangent ω_X de X , grâce à l'isomorphisme naturel $\omega_X^{-1} \xrightarrow{\sim} \Delta^* \mathcal{O}_{X \times X}(\Delta)$. Cette métrique est permise en vertu de 4.10 (iii). De plus, pour tout point $a \in X$, on a un isomorphisme naturel de \mathbb{C} -espaces vectoriels

$$(4.11.3.1) \quad (\omega_X)_a \simeq (\mathcal{O}_X(-a))_a$$

hérité du précédent, et il résulte des définitions que cet isomorphisme est une *isométrie* lorsque l'on munit ω_X (resp. $\mathcal{O}_X(-a)$) de la métrique ρ_ω ci-dessus (resp. de la métrique $\rho_{-(a)}$ associée au diviseur $-(a)$ sur X). En d'autres termes le morphisme "résidu" :

$$(4.11.3.2) \quad \text{Res}_a : \omega_X(a)_a \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$$

est une isométrie. Ceci aura pour conséquence immédiate la *formule d'adjonction* sur les surfaces arithmétiques (6.11 ci-dessous).

4.11.4.- Le fibré $\mathcal{O}_{X \times X}(\Delta)$ est muni d'une *section canonique*, que nous noterons s_Δ , et dont le diviseur est Δ . La *norme* de cette section (pour la métrique fixée ρ_Δ) est donc une application continue

$$(4.11.4.1) \quad G : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

définie par $G = \rho_\Delta(s_\Delta)$, et possédant les propriétés suivantes :

- (4.11.4.2) 1) G est C^∞ et > 0 en dehors de Δ , et est nulle à l'ordre 1 le long de Δ , au sens suivant : si z est une équation locale de Δ au voisinage de $x_0 \in \Delta$, alors $G = |z|u$ où u est C^∞ et > 0 au voisinage de x_0 ;
- 2) $G(x,y) = G(y,x)$ pour $(x,y) \in X \times X$;
- 3) la $(1,1)$ -forme $(\bar{\partial}\partial)_X \log G(x,y)$ coïncide avec $-i\pi \text{pr}_1^* \mu_X$ où μ_X est la $(1,1)$ -forme sur X définie en (4.0.3).

L'assertion 1) est immédiate ; 2) résulte de 4.10 (ii), et 3) de la caractérisation des métriques permises en termes de courbure donnée en (4.3.1), et de la formule (3.5.2) pour la courbure.

Réciproquement, une fonction $G : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ possédant ces propriétés définit une métrique bipermise ρ_{Δ} sur $\mathcal{O}(\Delta)$, par la condition $G = \rho_{\Delta}(s_{\Delta})$. Bien entendu, changer ρ_{Δ} en $\lambda \rho_{\Delta}$ ($\lambda > 0$) conduit à remplacer G par λG .

Toujours est-il que le choix de la métrique ρ_{Δ} équivaut au choix d'une fonction G vérifiant les conditions 1) à 3) ci-dessus. Or Arakelov [A] montre (ou plutôt affirme) que l'on peut imposer à G la condition supplémentaire

$$4) \text{ Pour tout } x \in X, \text{ on a } \int_X \log G(x,y) (\mu_X)_y = 0$$

qui, bien entendu, la détermine cette fois de façon unique. La fonction G ainsi obtenue est appelée *fonction de Green* sur $X \times X$ (voir plus loin, exposé III). Notons que l'assertion d'Arakelov entraîne que quel que soit le choix de G vérifiant 1)-3), l'intégrale $\int_X \log G(x,y) (\mu_X)_y$ est indépendante de $x \in X$.

On pourrait encore imposer, au lieu de 4), la condition

$$4') \sup_{(x,y) \in X \times X} G(x,y) = 1 .$$

Cette convention aurait pour effet (anticipant sur la suite) que si D_1 et D_2 sont deux diviseurs effectifs sans composante commune sur une surface arithmétique, les termes locaux de l'intersection d'Arakelov $D_1 \cdot D_2$ sont tous ≥ 0 .

Enfin, si a et b sont deux points de X (et ρ_{Δ} étant fixée), munissons $\mathcal{O}_X(a)$ de la métrique $\rho(a)$ définie en 4.11, et désignons par s_a la section canonique de $\mathcal{O}_X(a)$ (dont le diviseur est a). Alors il résulte des définitions que

$$(4.11.4.3) \quad G(a,b) = \rho(a)(s_a(b)) .$$

4.12.- Normes de Faltings sur $\det R\Gamma(L)$.

On suppose fixée une fois pour toutes une métrique bipermise ρ_{Δ} sur $\mathcal{O}_{X \times X}(\Delta)$, et l'on choisit de plus une norme hermitienne sur

$$\begin{aligned} \det R\Gamma(\mathcal{O}_X) &= (\Lambda^g H^1(X, \mathcal{O}_X))^\vee \\ &= \Lambda^g H^0(X, \omega_X) \end{aligned}$$

(un choix naturel est la norme déduite du produit hermitien (4.0.5) sur $H^0(X, \omega_X)$).

On se propose, à partir de ces données, d'associer canoniquement à tout faisceau inversible L sur X muni d'une métrique permise ρ , une norme hermitienne sur $\det R\Gamma(L)$. Plus précisément

THÉORÈME 4.13.- (Faltings) Sous les hypothèses de 4.12 , on peut, d'une manière et d'une seule, associer à tout couple (L, ρ) où L est un fibré en droites sur X et ρ une métrique permise sur L , une norme hermitienne $\lambda(L, \rho)$ sur $\det R\Gamma(L)$ (la norme de Faltings), de manière que :

- (i) si (L, ρ) est le fibré trivial muni de sa métrique naturelle, alors $\lambda(L, \rho)$ est la norme choisie sur $\det R\Gamma(\mathcal{O}_X)$.
- (ii) Si $u : (L_1, \rho_1) \xrightarrow{\sim} (L_2, \rho_2)$ est une isométrie, alors $\det R\Gamma(u) : (\det R\Gamma(L_1), \lambda(L_1, \rho_1)) \longrightarrow (\det R\Gamma(L_2), \lambda(L_2, \rho_2))$ est une isométrie.
- (iii) Si a est un point de X , l'isomorphisme naturel (1.3.3)

$$\det R\Gamma(L(a)) \xrightarrow{\sim} \det R\Gamma(L) \otimes_{\mathbb{C}} L(a)_a$$

est une isométrie lorsque l'on munit $\det R\Gamma(L)$ (resp. $\det R\Gamma(L(a))$) de la norme $\lambda(L, \rho)$ (resp. $\lambda(L(a), \rho \otimes \rho_{(a)})$) et la droite $L(a)_a$ de la norme induite par $\rho \otimes \rho_{(a)}$; ici $\rho_{(a)}$ désigne la métrique sur $\mathcal{O}_X(a)$ définie en 4.11 à l'aide de ρ_Δ .

Remarques 4.13.1 :

- a) Si $u : (L_1, \rho_1) \longrightarrow (L_2, \rho_2)$ multiplie les normes par $\alpha > 0$, alors $\lambda R\Gamma(u)$ multiplie les normes par $\alpha^{X(L_1)}$: ceci résulte de (i) et du fait que $\frac{1}{\alpha} u$ est une isométrie. De même on a, pour $\alpha > 0$:

$$\lambda(L, \alpha\rho) = \alpha^{X(L)} \lambda(L, \rho) .$$

- b) Si l'on multiplie par $\alpha > 0$ la norme choisie sur $\det R\Gamma(\mathcal{O}_X)$, alors toutes les normes $\lambda(L, \rho)$ sont multipliées par α ; on pourrait donc se dispenser du choix d'une norme sur $\det R\Gamma(\mathcal{O}_X)$, en affirmant seulement l'existence d'une norme canonique sur $\det R\Gamma(L) \otimes (\det R\Gamma(\mathcal{O}_X))^{-1}$.

- c) Si l'on multiplie par $\alpha > 0$ la métrique ρ_Δ sur $\mathcal{O}_{X \times X}(\Delta)$, alors $\lambda(L, \rho)$ est multipliée par α^{-m} où m est l'étrange entier

$$m = \frac{\chi(L)(\chi(L) - 1) - g(g - 1)}{2}$$

$$= \frac{\deg L (\deg L + 1 - 2g)}{2} .$$

On laisse la vérification au lecteur, qui prendra garde que, dans (iii), le choix de ρ_Δ intervient (par l'intermédiaire de $\rho_{(a)}$) des deux côtés de l'isomorphisme utilisé.

Démonstration de 4.13 :

4.13.2.- Si E est un ensemble et r un entier ≥ 0 , appelons *mot de longueur r* sur E un élément de $(E \times \{+1, -1\})^r$. Un tel mot sera noté $Q_1^{\varepsilon_1} \dots Q_r^{\varepsilon_r}$ ($Q_i \in E$, $\varepsilon_i \in \{+1, -1\}$). On définit la composition des mots par juxtaposition.

Soit T un \mathbb{C} -schéma réduit de type fini. Si $w = Q_1^{\varepsilon_1} \dots Q_r^{\varepsilon_r}$ est un mot sur $X(T)$, on note D_w le diviseur $\sum \varepsilon_i Q_i$ sur X_T . On définit alors par récurrence sur r une métrique $\lambda(w)$ sur le fibré $\det R_{p_*} \mathcal{O}_{X_T}(D_w)$ de la manière suivante ($p : X_T \rightarrow T$ étant la projection naturelle) :

- si $r=0$, alors w est le mot vide, $\mathcal{O}_{X_T}(D_w) = \mathcal{O}_{X_T}$ et $\lambda(w)$ est déduite de la métrique fixée sur $\det R\Gamma(\mathcal{O}_X)$.

- si $r > 0$ et $\varepsilon_r = +1$, alors $w = w' Q_r$ où w' est de longueur $r-1$. On a un isomorphisme naturel

$$(4.13.2.1) \quad \det R_{p_*} \mathcal{O}_{X_T}(D_w) \xrightarrow{\sim} \det R_{p_*} \mathcal{O}_{X_T}(D_{w'}) \otimes Q_r^* \mathcal{O}_{X_T}(D_w)$$

et l'on impose à celui-ci d'être une isométrie pour les métriques respectives $\lambda(w)$ et $\lambda(w') \otimes Q_r^* \rho_{D_w}$: ceci définit $\lambda(w)$ sans ambiguïté.

- si $r > 0$ et $\varepsilon_r = -1$, alors $w = w' Q_r^{-1}$ d'où $D_{w'} = D_w + Q_r$, et l'on a

$$(4.13.2.2) \quad \det R_{p_*} \mathcal{O}_{X_T}(D_{w'}) = \det R_{p_*} \mathcal{O}_{X_T}(D_w) \otimes Q_r^* \mathcal{O}_{X_T}(D_{w'}) ;$$

on impose alors à cet isomorphisme de respecter les métriques $\lambda(w')$ et $\lambda(w) \otimes Q_r^* \rho_{D_{w'}}$.

4.13.3.- Il est immédiat que lorsque $T = \text{Spec } \mathbb{C}$, alors notre norme $\lambda(w)$ doit coïncider avec la norme $\lambda(\mathcal{O}_{X_T}(D_w), \rho_{D_w})$ si celle-ci existe. Ceci établit l'assertion d'unicité de 4.13, car tout fibré hermitien (L, ρ) , où ρ est permise, est isomorphe (avec sa métrique) à un certain $(\mathcal{O}_X(D), \rho_D)$. L'existence résultera des deux lemmes suivants :

LEMME 4.13.4.- La métrique $\lambda(w)$ sur $\det R_{p_*} \mathcal{O}_X(D_w)$ ne dépend que du diviseur D_w .

On obtient donc, pour tout diviseur D sur X_T qui est combinaison linéaire de sections, une métrique sur $\det R_{p_*} \mathcal{O}_X(D)$, que nous noterons $\lambda(D)$.

LEMME 4.13.5.- Soient D_1 et D_2 deux diviseurs sur X .

Si $u : (\mathcal{O}_X(D_1), \rho_{D_1}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_X(D_2), \rho_{D_2})$ est une isométrie, alors $\det R\Gamma(u)$ est une isométrie pour les normes $\lambda(D_1)$ et $\lambda(D_2)$ ci-dessus.

Bien entendu, on définit ensuite $\lambda(L, \rho)$ du théorème par la condition que $\lambda(\mathcal{O}_X(D), \rho_D) = \lambda(D)$ pour tout diviseur D .

4.13.6.- Démonstration de 4.13.4 : invariance par contraction : Soit $r \geq 2$ et soit $w = Q_1^{\varepsilon_1} \dots Q_r^{\varepsilon_r}$ tel qu'il existe $i \leq r-1$ avec $Q_i = Q_{i+1}$ et $\varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1}$.

Désignons par \bar{w} le mot de longueur $r-2$ obtenu en supprimant Q_i et Q_{i+1} dans w , de sorte que $D_{\bar{w}} = D_w$. Alors il résulte immédiatement de la définition de $\lambda(w)$ que les métriques $\lambda(w)$ et $\lambda(\bar{w})$ sur $\det R\Gamma_{\mathcal{O}_X}(D_w)$ coïncident.

4.13.7.- Démonstration de 4.13.4 : invariance par permutation : Le groupe symétrique S_r opère sur les mots de longueur r en envoyant $w = Q_1^{\varepsilon_1} \dots Q_r^{\varepsilon_r}$ sur $\sigma w = Q_{\sigma(1)}^{\varepsilon_{\sigma(1)}} \dots Q_{\sigma(r)}^{\varepsilon_{\sigma(r)}}$ pour tout $\sigma \in S_r$. On a évidemment $D_{\sigma w} = D_w$ et, pour achever de prouver 4.13.4, il suffit de voir que $\lambda(\sigma w) = \lambda(w)$.

Bien entendu on peut se limiter à la situation "universelle" suivante : le schéma de base T est X^r , et Q_i est la i -ième projection $\text{pr}_i : X^r \rightarrow X$.

Il résulte alors du lemme 4.13.8 ci-dessous que dans ce cas les métriques $\lambda(\sigma w)$ et $\lambda(w)$ sont r -permises (4.7). Elles coïncident donc à une constante multiplicative près, et par suite il suffit de voir qu'elles coïncident en un point de X^r . Ceci nous ramène au cas où les Q_i sont égaux, qui résulte à son tour de l'invariance par contraction. ■

LEMME 4.13.8. - Posons $T = X^n$ ($n \geq 0$) et soit $w = Q_1^{\varepsilon_1} \dots Q_r^{\varepsilon_r}$, où $\varepsilon_i = \pm 1$ et où chacun des $Q_i : X^n \rightarrow X$ est soit constant, soit l'une des projections naturelles. Alors la métrique $\lambda(w)$ sur $\det R\Gamma_{\mathcal{O}_X}(D_w)$ est n -permise au sens de 4.7.

Démonstration : (par récurrence sur r). L'assertion est triviale si $r=0$.

Si $r > 0$, traitons le cas $\varepsilon_r = +1$ (l'autre étant entièrement analogue). On a, par définition de $\lambda(w)$, un isomorphisme de fibrés hermitiens

$$\det R\Gamma_{\mathcal{O}_X}(D_w) = \det R\Gamma_{\mathcal{O}_X}(D_{w'}) \otimes Q_r^* \mathcal{O}_X(D_w)$$

où $w' = Q_1^{\varepsilon_1} \dots Q_{r-1}^{\varepsilon_{r-1}}$. Il suffit donc de montrer que la métrique $Q_r^* \rho_{D_w}$ est n -permise.

Le diviseur D_w est combinaison linéaire de sections constantes $\{a\} \times X^n \subset X \times X^n$ ($a \in X(\mathbb{C})$) et de sections $\Delta_i : X^n \rightarrow X \times X^n$ ($i = 1, \dots, n$) définies

par $\Delta_i(x_1, \dots, x_n) = (x_i, x_1, \dots, x_n)$. Par suite la métrique ρ_{D_W} est $(n+1)$ -permise, ceci parce que ρ_Δ est bipermise. Lorsque $Q_r : X^n \rightarrow X$ est constant, il en résulte bien que $Q_r^* \rho_{D_W}$ est n -permise. Lorsque Q_r est la projection $pr_i : X^n \rightarrow X$, correspondant à la section $\Delta_i : X^n \rightarrow X \times X^n$, nous sommes ramenés à l'étude des fibrés hermitiens suivants :

$$\Delta_i^* \mathcal{O}_{X \times X^n}(a \times X^n) = pr_i^* \mathcal{O}_X(a) \quad + \text{métrique } \rho(a)$$

$$j \neq i : \Delta_i^* \mathcal{O}_{X \times X^n}(\Delta_j) = pr_{ij}^* \mathcal{O}_{X \times X}(\Delta) \quad + \text{métrique } \rho_\Delta$$

$$\Delta_i^* \mathcal{O}_{X \times X^n}(\Delta_i) = pr_i^* \Delta^* \mathcal{O}_{X \times X}(\Delta) \quad + \text{métrique } \Delta^* \rho_\Delta$$

et chacune de ces métriques est n -permise (4.10). ■

4.13.9.- Démonstration de 4.13.5 : Nous pouvons, dans l'énoncé de 4.13.5, ajouter un même diviseur à D_1 et D_2 (ceci se vérifie encore sur la définition de $\lambda(w)$), et ainsi nous ramener au cas où $\deg D_1 = \deg D_2 = g - 1$. Notons que dans ce cas on a $\det R\Gamma(\alpha u) = \det R\Gamma(u)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^*$ puisque $\chi(\mathcal{O}_X(D_1)) = 0$; nous allons donc montrer en fait que *tout isomorphisme* (non nécessairement hermitien) $u : \mathcal{O}(D_1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(D_2)$ induit une isométrie sur les $\det R\Gamma$.

Fixons un diviseur E de degré assez grand, de telle sorte que D_1 et D_2 soient tous deux de la forme $E - (Q_1 + \dots + Q_n)$ ($Q_i \in X$). Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X \times X^n & \xrightarrow{id_X \times \psi} & X \times J_{g-1} \\ \Delta_i \downarrow p \quad \swarrow & & \downarrow q_2 = \text{seconde projection} \\ X^n & \xrightarrow{\psi} & J_{g-1} \end{array}$$

où :

$$p(Q, Q_1, \dots, Q_n) = (Q_1, \dots, Q_n)$$

$$\psi(Q_1, \dots, Q_n) = cl \mathcal{O}_X(E - Q_1 - \dots - Q_n)$$

$$\Delta_i(Q_1, \dots, Q_n) = (Q_i, Q_1, \dots, Q_n) .$$

Soit D le diviseur $E \times X^n - \Delta_1 - \dots - \Delta_n$ sur $X \times X^n$ et soit \mathcal{U}_{g-1} un faisceau universel quelconque sur $X \times J_{g-1}$. Par définition du morphisme ψ , on a

$$\mathcal{O}_{X \times X^n}^{(D)} \simeq (\text{id}_X \times \psi)^* \mathcal{U}_{g-1} \otimes p^* M$$

où M est un faisceau inversible sur X^n . On en déduit un isomorphisme (rapelons que " χ est nul dans les fibres")

$$\det R_{p_*} \mathcal{O}_{X \times X^n}^{(D)} \simeq \psi^* \det R_{q_2_*} \mathcal{U}_{g-1} \simeq \psi^* \mathcal{O}_{J_{g-1}}^{(-\Theta)} \quad (2.4.3.1)$$

et il suffit de voir que la métrique $\lambda(D)$ sur le membre de gauche provient par ψ^* d'une métrique sur $\mathcal{O}_{J_{g-1}}^{(-\Theta)}$.

Lorsque l'on identifie J_{g-1} à J_0 par une translation convenable, le faisceau $\mathcal{O}_{J_{g-1}}^{(-\Theta)}$ est polarisant (c'est la définition classique de la polarisation canonique ; cf. aussi 2.5). D'autre part, le composé de ψ avec tout plongement $X \hookrightarrow X^n$ du type utilisé en 4.7 est de la forme $-j_a$ (4.0.1) pour a convenable. En conséquence, si l'on munira $\mathcal{O}_{J_{g-1}}^{(-\Theta)}$ d'une métrique permise ρ (au sens des variétés abéliennes), alors la métrique $\psi^*\rho$ est n -permise (cf. 4.10.1 à propos de $-j_a$) .

D'autre part il résulte de 4.13.8 que $\lambda(D)$ est également n -permise. Quitte à modifier ρ par une constante on peut donc supposer que $\lambda(D) = \psi^*\rho$, ce qui achève la démonstration. ■

La démonstration qui précède a un sous-produit utile :

PROPOSITION 4.14.- Soient n un entier, a un point de X . Considérons sur $X \times J_n$ le faisceau universel $\mathcal{U}_n^{(a)}$ trivialisé sur $\{a\} \times J_n$, et munissons-le de l'unique métrique hermitienne ρ compatible à la trivialisation et permise sur $X \times \{\xi\}$ pour tout $\xi \in J_n$. Soit $q_2 : X \times J_n \rightarrow J_n$ la seconde projection. Alors la métrique $\lambda(\rho)$ sur $\det R_{q_2_*} \mathcal{U}_n^{(a)}$ est permise.

Démonstration : Lorsque $n = g-1$ cela a été vu à la fin de 4.13.9. Pour n quelconque, posons $D = (g-n-1)a$ sur X : alors on a construit en 2.5 un isomorphisme canonique

$$\det R_{q_2_*} \mathcal{U}_n^{(a)} = T_D^* \mathcal{O}_{J_{g-1}}^{(-\Theta)} \otimes (\omega_X)_a^{\otimes k}$$

pour k convenable ; le lecteur est alors invité à suivre la démonstration de loc. cit. pour se convaincre que l'isomorphisme ci-dessus est compatible aux métriques, la métrique sur $\mathcal{O}_{J_{g-1}}^{(-\Theta)}$ étant celle déduite du cas $n = g-1$, et par suite permise. ■

COROLLAIRE 4.14.1.- Soit \mathcal{B} la biextension sur $J \times J$ définie en (2.7.1). Munissons-la de son unique métrique permise compatible à sa trivialisation à l'origine

de $J \times J$ (ou ce qui revient au même, compatible à sa structure de biextension). Alors si L et M sont deux faisceaux inversibles de degré 0 sur X munis de métriques permises, l'isomorphisme

$$\mathcal{B}_{(cl L, cl M)} = \det R\Gamma(L \otimes M)^{-1} \otimes \det R\Gamma(L) \otimes \det R\Gamma(M) \otimes \det R\Gamma(\mathcal{O}_X^{\vee})^{-1}$$

du lemme 2.7.5 est une isométrie.

Démonstration. Soit a un point de X , et soit $\mathcal{U}^{(a)}$ le faisceau universel sur $X \times J$ trivial sur $\{a\} \times J$. Munissons-le de la métrique "normalisée" définie en 4.14 : on obtient une métrique sur

$$\theta^{(a)} = (\det Rq_{2*} \mathcal{U}^{(a)})^{-1} \quad (2.6.1)$$

qui en vertu de 4.14 est permise. D'autre part, on a un isomorphisme canonique (d'où l'on tire celui de 2.7.5) sur $J \times J$:

$$\mathcal{B} = m^* \theta^{(a)} \otimes \text{pr}_1^* \theta^{(a)-1} \otimes \text{pr}_2^* \theta^{(a)-1} \otimes (\det R\Gamma(\mathcal{O}_X^{\vee}))_{J \times J}^{-1} \quad (2.7.4)$$

et il s'agit donc simplement de comparer la métrique de \mathcal{B} à la métrique sur le second membre déduite de celle de $\theta^{(a)}$. Or ces deux métriques sont permises et il suffit donc de les comparer à l'origine de $J \times J$. Le second membre de l'isomorphisme ci-dessus est canoniquement trivialisé à l'origine et l'isomorphisme est compatible aux trivialisations : il suffit donc de voir qu'il en est de même des métriques, ce qui est clair pour le membre de droite et est vrai aussi pour \mathcal{B} par hypothèse. ■

4.15.- Normes de Faltings et dualité

Soit L un fibré en droites sur X muni d'une métrique permise ρ : on a par dualité de Serre un isomorphisme canonique

$$(4.15.1) \quad \delta_L : \det R\Gamma(L) \xrightarrow{\sim} \det R\Gamma(L^{-1} \otimes \omega_X)$$

Une fois faits les choix de 4.12, les deux membres sont munis canoniquement (grâce à 4.13) de leurs normes de Faltings. On a alors la compatibilité attendue :

PROPOSITION 4.15.2.- *L'isomorphisme δ_L de (4.15.1) est une isométrie.*

Démonstration

4.15.3 : Cas où $\deg L = g - 1$. Soit \mathcal{U}_{g-1} un faisceau universel sur $X \times J_{g-1}$ et soit $q_2 : X \times J_{g-1} \longrightarrow J_{g-1}$ la seconde projection. Considérons l'involution

$$\sigma : J_{g-1} \longrightarrow J_{g-1}$$

$$\sigma(\xi) = \text{cl}(\omega_X) - \xi$$

et posons $\Lambda = \det Rq_{2,*} \mathcal{U}_{g-1} = \mathcal{O}_{J_{g-1}}(-\Theta)$. On a par dualité de Serre un isomorphisme

$$\delta_{\mathcal{U}_{g-1}} : \Lambda \xrightarrow{\sim} \sigma^* \Lambda$$

de faisceaux inversibles sur J_{g-1} . De plus Λ est muni canoniquement d'une métrique de Faltings (on rappelle que si $\deg L = g-1$, alors $\lambda(L, \rho)$ ne dépend pas de ρ) dont nous avons vu (4.14) qu'elle est permise. Par suite $\delta_{\mathcal{U}_{g-1}}$ respecte les métriques à une constante multiplicative près, mais comme pour tout L le composé

$$\det R\Gamma(L) \xrightarrow{\delta_L} \det R\Gamma(L^{-1} \otimes \omega) \xrightarrow{\delta_{L^{-1} \otimes \omega}} \det R\Gamma(L)$$

est l'identité, cette constante vaut 1, C.Q.F.D.

4.15.4.- Pour déduire le cas général du cas de degré $g-1$ il suffit de voir que si Q est un point de X , alors 4.15.2 est vraie pour L si et seulement si elle est vraie pour $L(Q)$. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \det R\Gamma(L(Q)) & \xrightarrow{\delta_{L(Q)}} & \det R\Gamma(L^{-1}(-Q) \otimes \omega_X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \det R\Gamma(L) \otimes L(Q)_Q & \xrightarrow{\delta_L \otimes r} & \det R\Gamma(L^{-1} \otimes \omega_X) \otimes (L \otimes \omega_X^{-1})_Q \end{array}$$

où les flèches verticales sont déduites de 1.3.3 et où r résulte de l'isomorphisme canonique $\mathcal{O}_X(Q)_Q \xrightarrow{\sim} (\omega_X^{-1})_Q$. Ce dernier est une isométrie par définition de la métrique sur ω_X ; il en est de même des flèches verticales par 4.13 (iii). Il suffit donc de prouver que le diagramme ci-dessus est commutatif, ou même simplement *commutatif au signe près*.

4.15.5.- Le lecteur infatigable ne manquera pas d'établir directement cette dernière assertion et d'identifier le signe. On peut aussi procéder comme suit : le diagramme de 4.15.4 se généralise de façon évidente au cas où :

- $X \xrightarrow{f} S$ est une courbe semi-stable de genre g sur un schéma S quelconque ;
- $Q : S \longrightarrow X$ est une section contenue dans l'ouvert de lissité de f ;
- L est un faisceau inversible sur X , de degré total (dans les fibres) d fixé.

Nous pouvons même, en tensorisant L par un faisceau provenant de X , supposer que $Q^* L$ est trivialisé sur S . Les objets $(X \rightarrow S, Q, L)$ (resp. $(X \rightarrow S, Q)$, resp. $X \rightarrow S$) comme ci-dessus forment un champ M'

(resp. M' , resp. M) au-dessus de la catégorie des schémas, et le défaut de commutativité du diagramme de 4.15.4 définit une section globale de $\mathcal{O}_{M''}^\times$. Il suffit donc de montrer que $H^0(M'', \mathcal{O}_{M''}) = \mathbb{Z}$. Or on a une suite de morphismes naturels

$$M'' \xrightarrow{p''} M' \xrightarrow{p'} M \xrightarrow{p} \text{Spec } \mathbb{Z}$$

qui sont *lisses et surjectifs* : pour p cela résulte de ([D-M], 5.2) ; c'est clair pour p' puisque M' n'est autre que l'ouvert de lissité de la "courbe universelle" sur M ; enfin pour p'' cela résulte de la lissité du foncteur de Picard d'une courbe. De plus chacun de ces morphismes est "génériquement" (i.e au-dessus d'un ouvert schématiquement dense) propre à fibres géométriquement connexes : c'est vrai partout pour p [D-M] , et pour p' et p'' c'est vrai au-dessus de l'ouvert de M paramétrant les courbes lisses. Tout ceci entraîne

$$p''_* \mathcal{O}_{M''} = \mathcal{O}_{M'} ; p'_* \mathcal{O}_{M'} = \mathcal{O}_M ; p_* \mathcal{O}_M = \mathcal{O}_{\text{Spec } \mathbb{Z}}$$

d'où finalement $H^0(M'', \mathcal{O}_{M''}) = \mathbb{Z}$, C.Q.F.D .■

5.- L'ACCOUPLEMENT DE NÉRON-TATE

5.0.- Dans tous les §5 et 6, K désigne un corps de nombres, \mathcal{O} son anneau d'entiers. On note $S_f = \text{Spec } \mathcal{O}$ et l'on désigne par S_∞ l'ensemble des places archimédianes de K . On pose "formellement" $S = S_f \amalg S_\infty$, et l'on désigne par $\text{PIC}_C(S)$ la catégorie des "faisceaux inversibles compactifiés" (I, 1,2) sur \mathcal{O} , les morphismes étant les isomorphismes de \mathcal{O} -modules respectant les normes aux places à l'infini. On note $\text{Pic}_C(S)$ l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets de $\text{PIC}_C(S)$.

Pour appliquer les résultats des §3 et 4, on fixe de plus, pour chaque $\sigma \in S_\infty$, un plongement continu $\sim_\sigma: K_\sigma \hookrightarrow \mathbb{C}$. Le choix des \sim_σ n'a d'ailleurs pas d'incidence sur la suite, car on aurait pu, dans les §3 et 4, se placer sur "un corps local isomorphe à \mathbb{C} ". Pour tout schéma X au-dessus de $\text{Spec } \mathcal{O}$, on pose $X_\sigma = X_{K_\sigma} \otimes_{\mathbb{Z}_\sigma} \mathbb{C}$.

5.1.- Soit A_K une variété abélienne sur K et soit $A \xrightarrow{f} S_f$ le modèle de Néron de A_K sur S_f , qui est un S_f -schéma en groupes lisse, séparé et de type fini sur S_f . De même soit $A^t \xrightarrow{ft} S_f$ le modèle de Néron de la variété duale A_K^t de A_K et désignons par A^0 et $A^{t,0}$ les composantes neutres respectives de A et A^t (de sorte que A^0 , par exemple, a pour fibres les composantes neutres des fibres de A sur S_f , et est un sous-schéma en groupes ouvert de A).

Notons $U \subset S_f$ le plus grand ouvert de S_f au-dessus duquel A et A^t ont "bonne réduction" (i.e sont des schémas abéliens). Alors A_U^t est le schéma abélien dual de A_U , et l'on dispose du faisceau de Poincaré \mathcal{P}_U sur $A_U^t \times A_U^t$ et de sa structure naturelle de biextension. Il résulte alors de 2.8.2 que \mathcal{P}_U se prolonge en une unique biextension sur $A^0 \times A^{t,0}$, que nous noterons \mathcal{P}^0 .

Enfin on fixe un entier $N \geq 1$ tel que la multiplication par N dans A (resp. A^t) se factorise par A^0 (resp. $A^{t,0}$). Un tel entier existe car pour tout point fermé $s \in S_f$, le groupe des composantes connexes de A_s (resp. A_s^t) est fini, et il est trivial pour presque tout s .

Pour tout $\sigma \in S_\infty$, le faisceau \mathcal{P}_σ sur $A_\sigma \times A_\sigma^t$ déduit de \mathcal{P}_U (ou de \mathcal{P}^0) est muni d'une métrique permise canonique (§3) : on rappelle en effet que \mathcal{P}_σ est canoniquement trivialisé à l'origine de $A_\sigma \times A_\sigma^t$, et il existe donc une unique métrique permise sur \mathcal{P}_σ compatible à cette trivialisation ; c'est aussi, comme il résulte des propriétés générales des métriques permises, l'unique métrique (permise ou non) compatible à la structure de biextension de \mathcal{P}_σ .

5.2.- Avec les notations de 5.0 et 5.1, soient d'abord $x \in A^0(S_f)$ et $y \in A^{t,0}(S_f)$.

Considérons le \mathcal{O} -module inversible $(x,y)^*(\mathcal{P}^0)$: grâce aux métriques permises canoniques sur les \mathcal{P}_σ ($\sigma \in S_\infty$) , il est canoniquement muni de normes hermitiennes aux places à l'infini. Il définit donc un objet de $\text{PIC}_C(S)$, que nous appellerons *hauteur géométrique* de (x,y) , et qui sera noté

$$(5.2.1) \quad HG(x,y) = (x,y)^*(\mathcal{P}^0) + \text{normes canoniques} .$$

Nous noterons de plus

$$(5.2.2) \quad hg(x,y) = \text{classe dans } \text{Pic}_C(S) \text{ de } HG(x,y).$$

La structure de biextension de \mathcal{P}^0 , et sa compatibilité aux métriques à l'infini fournit pour $x,y \in A^0(S_f)$ et $z,t \in A^{t,0}(S_f)$ des isomorphismes canoniques dans $\text{PIC}_C(S)$

$$(5.2.3) \quad HG(x,z+t) = HG(x,z) \otimes HG(x,t)$$

$$HG(x,+y,z) = HG(x,z) \otimes HG(y,z) .$$

5.3.- Soient maintenant $x \in A_K(K) = A(S_f)$, $y \in A_K^t(K) = A^t(S_f)$

Comme \mathcal{P}_U ne se prolonge pas en général à $A \times A^t$, on ne peut définir $HG(x,y)$ comme objet de $\text{PIC}_C(S)$ (on peut toutefois le faire lorsque $x \in A^0(S_f)$ ou $y \in A^{t,0}(S_f)$, cf. remarque 2.8.2.3).

Cependant, l'entier N étant choisi comme en 5.1, on a $Nx \in A^0(S_f)$ et $Ny \in A^{t,0}(S_f)$ de sorte que l'on peut définir $HG(Nx,Ny)$ (objet de $\text{PIC}_C(S)$) et $hg(Nx,Ny)$ (élément de $\text{Pic}_C(S)$). On pose alors (un peu abusivement)

$$(5.3.1) \quad hg(x,y) = \frac{1}{N^2} hg(Nx,Ny) \in \text{Pic}_C(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} .$$

La bilinéarité de HG entraîne que l'application

$$(5.3.2) \quad \begin{aligned} A(K) \times A^t(K) &\longrightarrow \text{Pic}_C(S) \otimes \mathbb{Q} \\ (x,y) &\longmapsto hg(x,y) \end{aligned}$$

est \mathbb{Z} -bilinéaire et ne dépend pas de l'entier N choisi en 5.1.

Remarque 5.3.3 : L'entier N étant fixé (par exemple minimum), notons $\Sigma = S_f - U$ l'ensemble des places de mauvaise réduction de A . Alors on peut définir $HG(x,y)$ comme objet de la catégorie $\text{PIC}_C(S,\Sigma,N^2)$ qui suit : un objet de $\text{PIC}_C(S,\Sigma,N^2)$ est la donnée

- (i) d'un objet L de $\text{PIC}_C(U)$ (faisceau inversible sur $U + \text{normes aux places à l'infini}$);
- (ii) d'un objet M de $\text{PIC}_C(S)$;

(iii) d'un isomorphisme $M_U \xrightarrow{\sim} L^{\otimes N^2}$ d'objets de $\text{PIC}_c(U)$.

L'objet $HG(x,y)$ annoncé s'obtient en prenant $L = (x_U, y_U)^*(\mathcal{P}_U)$, $M = (Nx, Ny)^*(\mathcal{P}^\circ)$, l'isomorphisme (iii) résultant de la structure de biextension de \mathcal{P}_U . L'intérêt de ce genre de constructions est qu'il permet de raisonner localement sur la base.

THÉORÈME 5.4.-L'application

$$A_K(K) \times A_K^{t}(K) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longmapsto \deg_S \text{hg}(x,y)$$

est l'accouplement de Néron-Tate de A .

(Bien entendu, \deg_S désigne le prolongement naturel à $\text{Pic}_c(S) \otimes \mathbb{Q}$ du degré défini en I, Cor. Prop. 1.1).

La démonstration est donnée dans [MB], chapitre III ; on y trouvera plus généralement une construction géométrique de la hauteur de Néron-Tate associée à un faisceau inversible L_K sur une K -variété abélienne B_K , le cas particulier envisagé ici étant celui où $B_K = A_K \times A_K^t$ et $L_K = \mathcal{P}_K$.

6.- APPLICATIONS AUX SURFACES ARITHMÉTIQUES

On garde les notations de 5.0.

DÉFINITION 6.0.- Une surface arithmétique sur S est la donnée

- (i) d'un S_f -schéma $X \xrightarrow{f} S_f$, projectif et plat sur S_f , dont les fibres sont des courbes semi-stables de genre $g \geq 1$ et dont la fibre générique est lisse ;
- (ii) pour chaque $\sigma \in S_\infty$, d'une métrique bipermise $\rho_{\Delta, \sigma}$ (4.7) sur $\mathcal{O}_{X_\sigma \times X_\sigma}(\Delta_\sigma)$ où $\Delta \subset X \times_{S_f} X$ est la diagonale.

Remarques 6.0.1 : a) on ne suppose pas ici que X est un schéma régulier; nos hypothèses impliquent toutefois qu'il est normal .

b) Arakelov et Faltings fixent les $\rho_{\Delta, \sigma}$ en imposant la condition 4) de 4.11.4. Le choix particulier des $\rho_{\Delta, \sigma}$ n'a pas d'importance dans ce § ; il en aura, par contre, dans l'exposé III.

Dans tout ce qui suit, on fixe une surface arithmétique $(X, (\rho_{\Delta, \sigma}))$ sur S . On désigne par $\text{PIC}_C(X)$ la catégorie des \mathcal{O}_X -modules inversibles compactifiés $(I, 1, 2)$, c'est-à-dire des \mathcal{O}_X -modules inversibles L sur X munis, pour chaque $\sigma \in S_\infty$, d'une métrique permise (4.5) sur le faisceau inversible L_σ sur X_σ . Notons que cette catégorie ne dépend pas du choix des $\rho_{\Delta, \sigma}$. On note $\text{Pic}_C(X)$ le groupe des classes d'isomorphie de ses objets.

Pour tout $L \in \text{ob } \text{PIC}_C(X)$ nous noterons L_f le \mathcal{O}_X -module inversible sous-jacent ("partie finie" de L) ; enfin le degré de L , noté $\deg L$, est par définition le degré de L_f sur la fibre générique X_K .

6.1.- Un diviseur compactifié sur X (I, 1.1) est par définition de la forme $D = D_f + D_\infty$ où D_f est un diviseur de Cartier sur le schéma X , et D_∞ une combinaison linéaire formelle $\sum_{\sigma \in S_\infty} \lambda_\sigma [X_\sigma]$, où $\lambda_\sigma \in \mathbb{R}$. On note $\text{Div}_C(X)$ le groupe de ces diviseurs. Pour $D \in \text{Div}_C(X)$ comme ci-dessus, on définit un objet $\mathcal{O}_X^C(D)$ de $\text{PIC}_C(X)$ de la façon suivante : on a par définition

$$\mathcal{O}_X^C(D) = \mathcal{O}_X^C(D_f) \otimes \mathcal{O}_X^C(D_\infty), \text{ et :}$$

. $\mathcal{O}_X^C(D_f)$ est le faisceau inversible $\mathcal{O}_X(D_f)$ sur X muni, pour chaque $\sigma \in S_\infty$, de la métrique $\rho_{D_f, \sigma}$ sur $\mathcal{O}_X(D_f, \sigma)$: ici D_f, σ est le diviseur induit sur X_σ par D_f , et $\rho_{D_f, \sigma}$ est déduite de $\rho_{\Delta, \sigma}$ selon le procédé de 4.11.1 ;

. Par définition $\mathcal{O}_X^C(D_\infty) = f^* \mathcal{O}_S^C(\sum \lambda_\sigma [\sigma])$: ici $\mathcal{O}_S^C(\sum \lambda_\sigma [\sigma])$ est l'objet de $\text{PIC}_C(S)$ associé au diviseur compactifié $\sum \lambda_\sigma [\sigma]$ sur S . Explicitement,

$\mathcal{O}_X^C(D_\infty)$ est le fibré trivial sur X , muni, à la place σ , de la métrique naturelle multipliée par $e^{-\lambda_\sigma}$.

On voit donc que le faisceau inversible sur X sous-jacent à $\mathcal{O}_X^C(D)$ n'est autre que $\mathcal{O}_X^C(D_f)$. De plus, il est immédiat que $\mathcal{O}_X^C(D_1 + D_2)$ s'identifie canoniquement à $\mathcal{O}_X^C(D_1) \otimes \mathcal{O}_X^C(D_2)$ (cf. 4.11.1(ii)).

6.2.- Inversement soit $L = (L_f, (\rho_\sigma)_{\sigma \in S_\infty})$ un objet de $PIC_C(X)$, et soit s une section rationnelle non identiquement nulle de L_f sur X . On définit alors le diviseur compactifié de s comme

$$\text{div}^C(s) = \text{div}_f^C(s) + \text{div}_\infty^C(s)$$

de la façon suivante : la "partie finie" $\text{div}_f^C(s)$ est le diviseur $\text{div}(s)$ de s sur X au sens habituel, de sorte que s induit un isomorphisme

$$\mathcal{O}_X(\text{div}(s)) \xrightarrow{\sim} L_f.$$

On choisit alors la partie à l'infini $\text{div}_\infty^C(s)$ de manière que l'isomorphisme ci-dessus donne une *isométrie*

$$\mathcal{O}_X^C(\text{div}_f^C(s) + \text{div}_\infty^C(s)) \xrightarrow{\sim} L.$$

On rappelle que le faisceau inversible sous-jacent au premier membre s'identifie canoniquement à $\mathcal{O}_X^C(\text{div}(s))$; le fait qu'il existe un unique $\text{div}_\infty^C(s)$ ayant la propriété cherchée résulte du fait que le rapport de deux métriques permises est constant, et que tensoriser par $\mathcal{O}_X^C(\lambda[X_\sigma])$ équivaut à multiplier par $e^{-\lambda}$ la métrique à la place σ .

Remarque 6.3.- La correspondance que nous venons d'établir entre objets de $PIC_C(X)$ et diviseurs compactifiés dépend des métriques bipermises $\rho_{\Delta, \sigma}$ choisies. Toutefois il résulte de 4.11.2 que si le diviseur compactifié D est de degré 0 alors $\mathcal{O}_X^C(D)$ ne dépend pas des $\rho_{\Delta, \sigma}$. Pour D quelconque, la variation est la suivante : posons $\rho'_{\Delta, \sigma} = \alpha_\sigma \rho_{\Delta, \sigma}$ pour tout $\sigma \in S_\infty$, avec $\alpha_\sigma > 0$. Notons $\mathcal{O}_X^C(D)'$ le faisceau associé à D au moyen des $\rho'_{\Delta, \sigma}$, et posons

$$D_0 = \sum_{\sigma \in S_\infty} (\log \alpha_\sigma) [X_\sigma].$$

Alors on vérifie (en utilisant 4.11.2) que

$$\mathcal{O}_X^C(D)' = \mathcal{O}_X^C(D - (\deg D) D_0).$$

6.4.- Si aucune confusion n'en résulte, nous noterons désormais $\mathcal{O}_X^C(D)$ au lieu de $\mathcal{O}_X^C(D)$, pour $D \in \text{Div}_C(X)$.

De même, le faisceau dualisant relatif ω_{X/S_f} est muni de façon naturelle,

pour chaque $\sigma \in S_\infty$, d'une métrique permise $\rho_{\omega,\sigma}$ (4.11.3). Nous noterons encore $\omega_{X/S}$ (plutôt que $\omega_{X/S}^C$) l'objet de $\text{PIC}_C(X)$ ainsi obtenu, et nous poserons

$$(6.4.1) \quad \omega_X = \omega_{X/S} \otimes f^*\omega_S$$

où $\omega_S \in \text{ob } \text{PIC}_C(S)$ désigne le \mathcal{O} -module dualisant $\omega_{\mathcal{O}}$ muni des normes définies en I,

6.5.- Pour chaque $\sigma \in S_\infty$, choisissons une norme hermitienne sur $\det Rf^*(\mathcal{O}_{X_\sigma}) = \Lambda^g H^1(X_\sigma, \mathcal{O}_{X_\sigma})$. Pour tout $L = (L_f, (\rho_\sigma)) \in \text{ob } \text{PIC}_C(X)$, le \mathcal{O} -module inversible $\det Rf_* L_f$ peut être muni, pour chaque $\sigma \in S_\infty$, de sa "norme de Faltings" (4.13). L'objet de $\text{PIC}_C(X)$ ainsi obtenu sera noté $\det Rf_* L$. Pour L et $M \in \text{ob } \text{PIC}_C(X)$, nous poserons dans ces conditions

$$(6.5.1) \quad \langle L, M \rangle = \det Rf_*(L \otimes M) \otimes (\det Rf_* L)^{-1} \otimes (\det Rf_* M)^{-1} \otimes \det Rf_* \mathcal{O}_X.$$

(cf. (2.9.3))- On obtient ainsi un objet de $\text{PIC}_C(S)$, et la remarque 4.13.1.b) implique qu'il ne dépend pas du choix des normes sur les $\det Rf^*(\mathcal{O}_{X_\sigma})$. Bien entendu, lorsque nous aurons à développer $\langle L, M \rangle$ suivant la formule (6.5.1) nous supposerons implicitement que de telles normes ont été choisies.

DÉFINITION 6.6.- Pour L et $M \in \text{ob } \text{PIC}_C(X)$, on appelle *intersection d'Arakelov* de L et M le réel

$$(L.M) = \deg_S \langle L, M \rangle \quad (\text{cf. (6.5.1)})$$

le degré étant celui de I,

6.7.- Il s'agit maintenant de vérifier que $(L.M)$ ainsi défini coïncide avec la notion introduite par Arakelov (I,). Il est d'abord clair sur la définition que $(L.M) = (M.L)$ et que $(L.\mathcal{O}_X) = 0$. D'autre part si K' est une extension finie de K d'anneau d'entiers \mathcal{O}' , on dispose de la surface arithmétique $X' \xrightarrow{f'} S'$ obtenue par changement de base (bien entendu, les métriques $\rho_{\Delta', \sigma'}$ (pour $\sigma' \in S'_\infty$, $\Delta' = \text{diagonale de } X' \times X'$) sont celles déduites des $\rho_{\Delta, \sigma}$). Si $\pi : S' \longrightarrow S$ et $\pi' : X' \longrightarrow X$ désignent les projections naturelles alors on a un isomorphisme canonique

$$(6.7.1) \quad \langle \pi'^* L, \pi'^* M \rangle \xrightarrow{\sim} \pi^* \langle L, M \rangle$$

d'où

$$(6.7.2) \quad (\pi'^* L \cdot \pi'^* M) = [K' : K] (L.M).$$

Pour faire le lien avec Arakelov, on se propose de calculer $(L.\mathcal{O}_X(D))$ pour

$D \in \text{Div}_C(X)$.

DÉFINITION 6.7.3.- Notons $\text{CH}_1^C(X)$ le groupe des "1-cycles compactifiés" de X , formé des combinaisons linéaires formelles $Z = Z_f + Z_\infty$ où Z_f est un cycle de dimension 1 sur X et Z_∞ une combinaison linéaire formelle $\sum_{\sigma \in S_\infty} \lambda_\sigma [X_\sigma]$ (où $\lambda_\sigma \in \mathbb{R}$) .

Pour $L \in \text{ob } \text{PIC}_C(X)$ et $Z \in \text{CH}_1^C(X)$ on définit un réel $L \wedge Z$ par les conditions suivantes :

(i) $L \wedge Z$ est additif en Z .

(ii) Si $Z = \lambda Z_0$ où Z_0 est un cycle intègre contenu dans la fibre X_v ($v \in S$) avec $\lambda \in \mathbb{Z}$ (si $v \in S_f$) ou $\lambda \in \mathbb{R}$ (si $v \in S_\infty$) , alors

$$L \wedge Z = \lambda \varepsilon_v \deg_{\kappa(v)}(L|_{Z_0})$$

où $\kappa(v)$ désigne le corps résiduel de v , et où

$$\varepsilon_v = \log \# \kappa(v) \quad (v \in S_f)$$

$$\varepsilon_v = 1 \quad (v \text{ réelle})$$

$$\varepsilon_v = 2 \quad (v \text{ complexe}).$$

(iii) Si Z est un cycle intègre fini sur S_f , alors

$$L \wedge Z = \deg_Z(L|_Z).$$

(Ceci a un sens car Z est le spectre d'un ordre d'un corps de nombres, et $L|_Z$ est de façon naturelle un objet de $\text{PIC}_C(Z)$.

On vérifie immédiatement que si D_0 est un diviseur compactifié sur S et si $Z = f^*D_0$ (définition évidente) alors

$$(6.7.3.1) \quad L \wedge Z = (\deg L) (\deg_S D_0) .$$

Il est d'autre part immédiat que $L \wedge Z$ est linéaire en L , et que dans une situation de "changement de base" (notation de 6.7) on a

$$(6.7.3.2) \quad \pi'^*L \wedge \pi'^*Z = [K' : K] (L \wedge Z) .$$

Bien entendu, le groupe $\text{Div}_C(X)$ s'identifie à un sous-groupe de $\text{CH}_1^C(X)$, de sorte que l'on peut définir $L \wedge D$ pour $D \in \text{Div}_C(X)$.

6.7.4.- Calculs locaux.- Soit $Z = Z_f + Z_\infty \in \text{CH}_1^C(X)$ et soit $D \in \text{Div}_C(X)$ tel que $\Sigma := \text{Supp } D_f \cap \text{Supp } Z_f$ soit fini et contenu dans l'ouvert de régularité X_{reg} de X . Appliquant la définition 6.7.3, on obtient une décomposition

$$(6.7.4.1) \quad \mathcal{O}_X(D) \cap Z = \sum_{x \in \Sigma} [D, Z]_x + \sum_{\sigma \in S_\infty} [D, Z]_\sigma$$

où les différents termes sont donnés par les formules suivantes :

- pour $x \in \Sigma$, soit $\prod_i^{m_i} \varphi_i$ (resp. $\prod_j^{n_j} \psi_j$) une équation locale de D (resp. Z) au point x , avec $\varphi_i, \psi_j \in \mathcal{O}_{X,x}$, $m_i, n_j \in \mathbb{Z}$. Alors

$$(6.7.4.2) \quad [D, Z]_x = \sum_{i,j} m_i n_j \log \#(\mathcal{O}_{X,x}/(\varphi_i, \psi_j))$$

- pour $\sigma \in S_\infty$ on a, en posant $D_\infty = \sum_\sigma \lambda_\sigma [X_\sigma]$ et $Z_\infty = \sum_\sigma \mu_\sigma [X_\sigma]$:

$$(6.7.4.3) \quad [D, Z]_\sigma = (\deg D) \varepsilon_\sigma \mu_\sigma + (\deg Z) \varepsilon_\sigma \lambda_\sigma + [D_f \cdot Z_f]_\sigma$$

et le terme $[D_f \cdot Z_f]_\sigma$ se calcule comme suit : D_f et Z_f induisent respectivement sur X_σ des diviseurs $\sum_i m_i P_i$, $\sum_j n_j Q_j$ à supports disjoints ; soit d'autre part $G_\sigma = \rho_{\Delta_\sigma}(s_{\Delta_\sigma})$ la fonction sur $X_\sigma \times X_\sigma - \Delta_\sigma$ définie en (4.11.4.1). Alors

$$(6.7.4.4) \quad [D_f \cdot Z_f]_\sigma = \varepsilon_\sigma \sum_{i,j} - \log G_\sigma(P_i, Q_j) .$$

On vérifie ces formules en se ramenant au cas où Z est intègre et en utilisant la section rationnelle canonique s_D de $\mathcal{O}_X(D)$ et le "diviseur" qu'elle induit sur Z , en un sens à préciser dans chaque cas.

Les formules ci-dessus montrent en tout cas que, si Z est aussi un diviseur de Cartier, on a

$$(6.7.4.5) \quad \mathcal{O}_X(D) \cap Z = \mathcal{O}_X(Z) \cap D$$

(on rappelle que la fonction G_σ est symétrique, cf. (4.11.4.2)).

Cela étant, le résultat suivant justifie la définition 6.6 :

PROPOSITION 6.8.- Pour tout $L \in \text{ob } \text{PIC}_C(X)$ et tout $D \in \text{Div}_C(X)$, on a

$$(L \cdot \mathcal{O}_X(D)) = L \cap D .$$

En particulier le produit $(L \cdot M)$ est bilinéaire (car linéaire en L et symétrique).

Démonstration : On a d'abord le lemme utile (et trivial) :

LEMME 6.8.1.- Soit L un faisceau inversible (ordinaire) sur X et soit Σ un ensemble fini de points (non nécessairement fermés) de X . Alors L admet une section rationnelle s telle que $\text{Supp}(\text{div}(s)) \cap \Sigma = \emptyset$.

Démonstration : Comme f est projectif et S_f affine, il existe un ouvert affine U de X contenant Σ ; on peut donc trouver une section globale de L sur U , non nulle en chaque point de Σ . ■

LEMME 6.8.2. - Soient L et $M \in \text{ob } \text{PIC}_C(X)$, et soit $D \in \text{Div}_C(X)$ tel que $\text{Supp}(D_f)$ soit contenu dans l'ouvert de lissité de f . Alors

$$\langle L \cdot M \otimes \mathcal{O}_X(D) \rangle = \langle L, M \rangle + L \wedge D .$$

Démonstration : Vu nos hypothèses, les composantes de D_f sont encore des diviseurs de Cartier. Nous sommes donc ramenés à deux cas :

(a) $D = f^*D_0$ où $D_0 \in \text{Div}_C(S)$. Posant $M_0 = \mathcal{O}_S(D_0) \in \text{ob } \text{PIC}_C(S)$, il suffit de voir d'après (6.7.3.1) que l'on a un isomorphisme

$$\langle L, M \otimes f^*M_0 \rangle = \langle L, M \rangle \otimes M_0^{\otimes \deg L} .$$

Cette formule est elle-même conséquence de

$$\det Rf_*(N \otimes f^*M_0) = \det Rf_*N \otimes M_0^{\otimes X/S(N)}$$

pour tout $N \in \text{ob } \text{PIC}_C(X)$ (en appliquant la définition de $\langle L, M \rangle$).

On a déjà (1.1.7) un tel isomorphisme entre les \mathcal{O} -modules inversibles sous-jacents; le fait qu'il soit compatible aux normes de Faltings résulte de 4.13.1(a).

(b) D est intègre et fini sur S : dans ce cas on se ramène (par changement de base) au cas où D est combinaison linéaire de sections de f (toujours contenues dans l'ouvert de lissité), puis au cas où $D = E(S)$ est une telle section. On a alors, pour tout $N \in \text{ob } \text{PIC}_C(X)$, un isomorphisme canonique (1.3.3)

$$\det Rf_*(N \otimes \mathcal{O}_X(E)) = \det Rf_*N \otimes E^*(N \otimes \mathcal{O}_X(E))$$

qui est compatible aux normes aux places à l'infini, en vertu de 4.13 (iii).

Appliquant la définition de $\langle L, M \rangle$ on en tire

$$\langle L, M \otimes \mathcal{O}_X(E) \rangle = \langle L, M \rangle \otimes E^*L$$

d'où le lemme, puisque $L \wedge E = \deg_S E^*L$. ■

6.8.3. Fin de la démonstration de 6.8 : Soient L et D comme dans l'énoncé. Alors, d'après le lemme 6.8.1, L est de la forme $\mathcal{O}_X(D')$, où D'_f est contenu dans le lieu lisse de f et est sans composantes communes avec D_f (appliquer le lemme avec $\Sigma = \text{Sing}(f) \cup \{\text{points maximaux de } \text{Supp}(D_f)\}$). On a donc

$$\begin{aligned}
 (L \cdot \mathcal{O}_X(D)) &= (\mathcal{O}_X(D') \cdot \mathcal{O}_X(D)) \\
 &= (\mathcal{O}_X(D) \cdot \mathcal{O}_X(D')) \quad (\text{symétrie}) \\
 &= \mathcal{O}_X(D) \wedge D' \quad (6.8.2, \text{ avec } M = \mathcal{O}_X) \\
 &= \mathcal{O}_X(D') \wedge D \quad (6.7.4.5) \\
 &= L \wedge D \quad . \blacksquare
 \end{aligned}$$

COROLLAIRE 6.9. - Soit $X' \longrightarrow \text{Spec } \sigma$ une autre surface arithmétique et soit $\pi : X' \longrightarrow X$ un morphisme birationnel compatible aux données de 6.0 (ii) sur X_σ et X'_σ pour $\sigma \in S_\infty$. Si L_1 et $L_2 \in \text{ob } \text{PIC}_C(X)$, alors

$$(L_1 \cdot L_2) = (\pi^* L_1 \cdot \pi^* L_2) .$$

Démonstration : le morphisme π est un isomorphisme en dehors d'un ensemble fini Σ de points fermés de X . Grâce au lemme 6.8.1 on peut donc supposer que $L = \mathcal{O}_X(D)$, où D vérifie $\text{Supp}(D_f) \cap \Sigma = \emptyset$. Le corollaire est alors trivial, compte tenu de 6.8. ■

Remarques 6.10.-

a) Bien entendu, derrière la bilinéarité de $(L \cdot M)$ se cache celle de $\langle L, M \rangle$ mentionnée en 2.9 (et qui est compatible aux normes de Faltings). Un avantage de la définition "homologique" 6.6 est que $\langle L, M \rangle$ n'est pas un élément de $\text{Pic}_C(S)$ mais bien un objet de $\text{PIC}_C(S)$ (du moins "à isomorphisme unique près"). Ceci permet, en particulier, de raisonner localement sur S pour certaines questions. Bien entendu, la signification géométrique de $(L \cdot M)$ apparaît mieux (au moins à distance finie) dans les calculs locaux de 6.7.4.

b) Lorsque l'on change les métriques $\rho_{\Delta, \sigma}$ en $\rho'_{\Delta, \sigma} = \alpha_\sigma \rho_{\Delta, \sigma}$, on obtient une nouvelle théorie des intersections $(\cdot \cdot)'$. On vérifie alors que

$$(6.10.1) \quad (L, M)' = (L \cdot M) + (\deg L) (\deg M) \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} \log \alpha_{\sigma}$$

en utilisant par exemple 4.13.1.c).

De même, si D_1 et $D_2 \in \text{Div}_C(X)$, posons $[D_1 \cdot D_2] = (\mathcal{O}_X(D_1) \cdot \mathcal{O}_X(D_2))$.

Alors les $\rho'_{\Delta, \sigma}$ donnent une nouvelle intersection $[D_1 \cdot D_2]'$, et l'on a

$$(6.10.2) \quad [D_1 \cdot D_2]' = [D_1 \cdot D_2] - (\deg D_1) (\deg D_2) \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} \log \alpha_{\sigma} ;$$

on obtient cette formule soit par (6.10.1) et 6.3, soit directement à partir des calculs locaux 6.7.4.

THÉORÈME 6.11. - (*formule d'adjonction*). Soit $E : S_f \rightarrow X$ une section contenue dans l'ouvert de lissité. Alors on a un isomorphisme canonique dans $\text{PIC}_c(S)$

$$E^* \omega_{X/S} = E^* \mathcal{O}_X(-E)$$

et en particulier (en prenant les degrés)

$$(\omega_{X/S} \cdot \mathcal{O}_X(E)) = -(\mathcal{O}_X(E) \cdot \mathcal{O}_X(E)) = -[E \cdot E]$$

(notation de 6.10.b)).

Démonstration : On obtient, par la formule d'adjonction classique, un isomorphisme canonique entre les \mathcal{O} -modules inversibles sous-jacents. Le fait qu'il soit compatible aux normes résulte de la définition des métriques sur $\omega_{X/S}$, qui sont telles que pour tout $\sigma \in S_\infty$ et tout $a \in X_\sigma$, l'isomorphisme naturel (4.11.3.1)

$$(\omega_{X_\sigma})_a = (\mathcal{O}_{X_\sigma}(-a))_a$$

soit une isométrie. ■

Notons que présentée ainsi, la formule d'adjonction est tautologique. Le point non trivial est le fait que les métriques sur les ω_{X_σ} sont permises (4.10), donc que $\omega_{X/S}$ est bien un objet de $\text{PIC}_c(X)$.

6.12.- Le théorème de Riemann-Roch (préliminaires)

Définition 6.12.1. - Un \mathcal{O} -module compactifié M est la donnée d'un \mathcal{O} -module de type fini M_f et, pour chaque $\sigma \in S_\infty$, d'une norme hermitienne sur $M_\sigma := M_f \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{C}$ (notation de 6.0).

(De façon équivalente, on aurait pu choisir sur chaque $M \otimes K_\sigma$ une norme euclidienne (resp. hermitienne) pour σ réelle (resp. complexe)).

Pour M comme ci-dessus, on a un élément de volume (réel) canonique sur $M_{\mathbb{R}} = M \otimes \mathbb{R}$, obtenu en décomposant $M_{\mathbb{R}}$ en $\bigoplus_{\sigma \in S_\infty} M \otimes K_\sigma$, et en normalisant les volumes de la façon suivante : pour chaque σ , si (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormale de $M \otimes K_\sigma$, alors le pavé

$$\{\sum x_i e_i \mid 0 \leq x_i \leq 1\} \quad (\sigma \text{ réelle})$$

$$\{\sum z_i e_i \mid 0 \leq \operatorname{Re} z_i \leq 1, \quad 0 \leq \operatorname{Im} z_i \leq 1\} \quad (\sigma \text{ complexe})$$

est de volume 1 (peu importe la définition de $\operatorname{Im} z_i$) .

On pose alors, généralisant I, :

$$(6.12.2) \quad \chi(M) = -\log \operatorname{vol}(M_{\mathbb{R}}/\bar{M}_f) + \log \#(M_f)_{\text{tors}}$$

où $(M_f)_{\text{tors}}$ est le sous-module de torsion de M_f , et $\bar{M}_f = M_f/(M_f)_{\text{tors}}$.

Une suite exacte de \mathcal{O} -modules compactifiés M', M, M'' est par définition une suite exacte

$$0 \longrightarrow M'_f \longrightarrow M_f \longrightarrow M''_f \longrightarrow 0$$

des \mathcal{O} -modules sous-jacents, induisant en chaque place à l'infini une suite exacte d'espaces hermitiens. L'existence d'une telle suite exacte implique que

$$(6.12.3) \quad \chi(M) = \chi(M') + \chi(M'') .$$

6.12.4.- Pour tout \mathcal{O} -module compactifié M , il existe une "résolution" de M , i.e. une suite exacte

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

de \mathcal{O} -modules compactifiés, où $(P_1)_f$ et $(P_0)_f$ sont localement libres.

On pose alors

$$(6.12.4.1) \quad \det M = (\det P_0) \otimes (\det P_1)^{-1}$$

où $\det P_0$ et $\det P_1$ sont munis des normes déduites de celles de P_0 et P_1 .

On obtient ainsi un objet de $\text{PIC}_C(S)$ qui ne dépend pas, à isomorphisme unique près, de la résolution choisie, et qui est "additif" pour les suites exactes, en un sens évident.

Toutes ces assertions résultent essentiellement de [K-M], l'introduction des normes hermitiennes ne posant pas de difficultés.

On pose

$$(6.12.5) \quad \deg M = \deg (\det M)$$

et l'on vérifie que l'on a

$$(6.12.6) \quad \begin{aligned} \chi(M) &= \chi(\det M) + (\text{rg } M - 1) \chi(\mathcal{O}) \\ &= \deg M + (\text{rg } M) \chi(\mathcal{O}) \quad (\text{Riemann-Roch sur } \mathcal{O}). \end{aligned}$$

Remarque 6.12.7 : Nous appelons ici $\deg M$ ce que Faltings [F] note à tort $\chi(M)$.

6.12.8.- Revenons à la surface arithmétique $X \xrightarrow{f} S$. Si $L \in \text{ob } \text{PIC}_C(X)$, on est tenté de poser

$$(6.12.8.1) \quad \chi(X, L) = \chi(f_* L) - \chi(R^1 f_* L) .$$

Il faut, pour que cela ait un sens, munir $f_* L$ et $R^1 f_* L$ de normes aux places à l'infini. Or il résulte de [K-M] que l'on a un isomorphisme canonique de \mathcal{O} -modules inversibles

$$(6.12.8.2) \quad \det Rf_* L = \det(f_* L) \otimes (\det(R^1 f_* L))^{-1}$$

Supposons choisie, pour tout $\sigma \in S_\infty$, une norme sur $\det R\Gamma(\mathcal{O}_{X_\sigma})$. Alors $\det Rf_*L$ devient un objet de $\text{PIC}_C(S)$.

On peut dès lors munir f_*L et R^1f_*L de normes à l'infini telles que (6.12.8.2) soit un isomorphisme dans $\text{PIC}_C(S)$. De cette façon (6.12.8.1) acquiert un sens ; d'autre part (6.12.6) donne alors

$$(6.12.8.3) \quad \begin{aligned} \chi(X, L) &= \deg(f_*L) - \deg(R^1f_*L) + \chi_{X/S}(L) \chi(\mathcal{O}) \\ &= \deg(\det Rf_*L) + \chi_{X/S}(L) \chi(\mathcal{O}) \end{aligned}$$

Ceci ne dépend pas du choix des normes sur les R^1f_*L vérifiant la condition requise plus haut. La définition suivante a donc un sens (dépendant des normes sur $\det Rf_*\mathcal{O}_X$) :

DÉFINITION 6.12.9. Soit $L \in \text{ob } \text{PIC}_C(X)$; on pose

$$\chi(X, L) = \deg(\det Rf_*L) + (\deg L + 1 - g) \chi(\mathcal{O}) ,$$

où $\deg L$ désigne comme d'habitude le degré de L dans les fibres.

THÉORÈME 6.13. (Riemann-Roch pour les surfaces arithmétiques).

Pour tout $L \in \text{ob } \text{PIC}_C(X)$, on a

$$\chi(X, L) = \frac{1}{2}(L \cdot L \otimes \omega_X^{-1}) + \chi(X, \mathcal{O}_X) .$$

(on rappelle que $\omega_X = \omega_{X/S} \otimes f^*\omega_{\mathcal{O}}$).

Démonstration : Appliquant les définitions de χ et ω_X , on voit que la formule ci-dessus équivaut à

$$(6.13.1) \quad \deg(\det Rf_*L) - \deg(\det Rf_*\mathcal{O}_X) = \frac{1}{2}(L \cdot L \otimes \omega_{X/S}^{-1})$$

ou encore à

$$\deg(\det Rf_*L \otimes (\det Rf_*\mathcal{O}_X)^{-1}) = -\frac{1}{2} \deg(L \cdot L \otimes \omega_{X/S}) .$$

Cette dernière formule est une conséquence de

$$(6.13.2) \quad \langle L, L^{-1} \otimes \omega_{X/S} \rangle \simeq (\det Rf_*L)^{\otimes -2} \otimes (\det Rf_*\mathcal{O}_X)^{\otimes 2} ,$$

isomorphisme dans $\text{PIC}_C(S)$ que l'on obtient en développant le premier membre (6.5.1) :

$$\langle L, L^{-1} \otimes \omega_{X/S} \rangle = \det Rf_* \omega_{X/S} \otimes (\det Rf_*L)^{-1}$$

$$\otimes (\det Rf_*(L^{-1} \otimes \omega_{X/S}))^{-1} \otimes \det Rf_*\mathcal{O}_X$$

et en remarquant que par dualité de Serre (4.14.2) on a

$$\det Rf_* \omega_{X/S} \simeq \det Rf_* \mathcal{O}_X$$

$$\det Rf_*(L^{-1} \otimes \omega_{X/S}) \simeq \det Rf_* L . \quad \blacksquare$$

6.14.- La formule de Faltings-Hriljac

Désignons par J_K la jacobienne de X_K sur le corps de nombres K , par $\Phi_K : J_K \xrightarrow{\sim} J_K^t$ sa polarisation canonique, et par $h_\Phi : J_K(K) \times J_K(K) \longrightarrow \mathbb{R}$ l'accouplement

$$h_\Phi(x, y) = h(x, \Phi_K(y))$$

où $h : J_K(K) \times J_K^t(K) \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'accouplement de Néron-Tate.

Soient L_K et M_K deux faisceaux inversibles de degré 0 sur X_K . On se propose de calculer $h_\Phi(\text{cl } L_K, \text{cl } M_K)$ en termes d'intersections d'Arakelov.

LEMME 6.14.1.- *On suppose le schéma X régulier. Soit L_K un faisceau inversible de degré 0 sur X_K . Il existe un entier $n \geq 1$ et un unique faisceau inversible sur X , prolongeant $L_K^{\otimes n}$ et dont la restriction à chaque composante de chaque fibre de $f : X \longrightarrow S$ est de degré 0.*

Démonstration : La question est locale au voisinage des fibres réductibles de f . Soit F une telle fibre, et soient C_i ($1 \leq i \leq m$) ses composantes irréductibles. Considérons le \mathbb{Q} -espace vectoriel

$$V := \left(\bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Q}[C_i] \right) / \mathbb{Q} \cdot \sum_{i=1}^m C_i .$$

On sait que la forme intersection (habituelle) induit sur V une forme bilinéaire définie négative ([SPC], I, Prop. 2.6), et en particulier non dégénérée. D'autre part, si L est un prolongement arbitraire de L_K , l'intersection avec L induit une forme linéaire sur V (puisque $\deg L_K = 0$). Il existe donc $n \geq 1$ et $D = \sum_{i=1}^m r_i C_i$ ($r_i \in \mathbb{Z}$) tels que $n \deg(L|_{C_j}) = -D \cdot C_j$ pour $j = 1, \dots, m$. Le prolongement annoncé est alors $L^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}_X(D)$. ■

THÉORÈME 6.15.- (Faltings-Hriljac). *Soient L et $M \in \text{ob PIC}_C(X)$. On suppose que $\deg M_K = 0$, et que $L \cap C = 0$ pour toute composante C de toute fibre de $f : X \longrightarrow S$. Alors*

$$(L \cdot M) = -h_\Phi(\text{cl } L_K, \text{cl } M_K) .$$

Démonstration : D'après 6.9, on peut supposer le schéma X régulier (remarquer que si $\pi : X' \longrightarrow X$ est birationnel, alors $\pi^* L$ vérifie encore l'hypothèse

requise). On peut aussi remplacer L et M par des puissances non triviales ; d'autre part, l'hypothèse sur L implique que le membre de gauche ne dépend de M que par sa fibre générique M_K , de sorte qu'appliquant 6.14.1 ci-dessus on peut également supposer que M est orthogonal aux composantes des fibres.

Introduisons les composantes neutres respectives J et J^t des modèles de Néron de J_K et J_K^t sur S , ainsi que l'unique biextension \mathcal{P} sur $J \times J^t$ prolongeant le faisceau de Poincaré \mathcal{P}_K sur $J_K \times J_K^t$ (2.8.2). L'isomorphisme $\phi_K : J_K \xrightarrow{\sim} J_K^t$ se prolonge en $\phi : J \xrightarrow{\sim} J^t$.

L'hypothèse sur L et M signifie que $\text{cl } L_K$ et $\text{cl } M_K$ se prolongent en des sections $\text{cl } L$ et $\text{cl } M : S \longrightarrow J$. On a alors

$$\begin{aligned} (6.15.1) \quad h_{\phi}(\text{cl } L_K, \text{cl } M_K) &= h(\text{cl } L_K, \phi_K(\text{cl } M_K)) \\ &= \deg_S[(\text{cl } L, \phi \circ \text{cl } M)^*(\mathcal{P})] \quad (5.4) \\ &= \deg_S[(\text{cl } L, \text{cl } M)^*(\text{id}_J \times \phi)^*(\mathcal{P})] \quad . \end{aligned}$$

Posons $\mathcal{B} = (\text{id}_J \times \phi)^*(\mathcal{P})$: c'est l'unique biextension sur $J \times J$ prolongeant la biextension dualisante \mathcal{B}_K sur $J_K \times J_K$ de (2.7.1). On a donc, en vertu de 2.8.5, un isomorphisme canonique

$$(6.15.2) \quad (\text{cl } L, \text{cl } M)^* \mathcal{B} = \langle L, M \rangle^{-1}$$

dont nous avons vu en 4.14.1 qu'il est compatible aux normes à l'infini. Par suite

$$h(\text{cl } L_K, \text{cl } M_K) = \deg_S(\text{cl } L, \text{cl } M)^* \mathcal{B} \quad (6.15.1)$$

$$\begin{aligned} &= -\deg_S \langle L, M \rangle \quad (6.15.2) \\ &= -(L \cdot M) \end{aligned}$$

par définition de $(L \cdot M)$. ■

6.16.- Application : le théorème de l'indice

Désignons par $\text{Pic}_C^T(X)$ le sous-groupe de $\text{Pic}_C(X)$, noyau de la forme intersection (\cdot, \cdot) .

PROPOSITION 6.16.1.- Soit $L \in \text{ob } \text{PIC}_C(X)$. Pour que $\text{cl } L \in \text{Pic}_C^T(X)$ il faut et il suffit qu'il existe $n \geq 1$ tel que $L^{\otimes n}$ provienne d'un faisceau inversible compactifié de degré 0 sur S .

Démonstration : La suffisance est évidente. Inversement si L est dans $\text{Pic}_C^T(X)$ alors L est orthogonal aux composantes des fibres et en particulier

$\text{cl } L_K \in J_K(K)$. Le théorème précédent implique alors que

$$h_\phi(\text{cl } L_K, \text{cl } L_K) = 0$$

donc L_K est d'ordre fini car la forme bilinéaire h_ϕ sur $J(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est définie positive ([L], 5, §6). La proposition résulte alors de l'assertion d'unicité de 6.14.1. ■

Posons maintenant $\text{Pic}_C^{\text{num}}(X) = \text{Pic}_C(X)/\text{Pic}_C^T(X)$. Si v est une place quelconque de K et si $\sigma \in S_\infty$, il est immédiat que $\mathcal{O}_X([X_v] - \frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_\sigma} [X_\sigma])$ est dans $\text{Pic}_C^T(X)$. Les classes des fibres engendrent donc dans $\text{Pic}_C^{\text{num}}(X)$ un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 1, évidemment isotrope, et noté F , de sorte que l'on a une filtration

$$0 \subset F \subset F^\perp \subset \text{Pic}_C^{\text{num}}(X)$$

et que le degré (dans les fibres) induit un isomorphisme

$$\deg : \text{Pic}_C^{\text{num}}(X)/F^\perp \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z} .$$

Posons $V = (F^\perp/F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Alors V contient le sous-espace

$$W := \bigoplus_{v \in S_f} W_v$$

$$\text{où } W_v := \left(\bigoplus_{\substack{C \text{ composante} \\ \text{de } X_v}} \mathbb{Q}.[C] \right) / \mathbb{Q}.[X_v]$$

de sorte que $W_v = 0$ si X_v est irréductible, et que W est somme orthogonale des W_v . On sait d'autre part ([SPC], I, prop. 2.6) que la forme intersection est définie négative sur chaque W_v . De plus le lemme 6.14.1 implique que l'orthogonal de W dans V s'identifie canoniquement à $J(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, qui est un \mathbb{Q} -vectoriel de dimension finie sur lequel ([L], loc. cit) la forme intersection est encore définie négative. Celle-ci est donc définie négative sur V .

Pour exprimer de façon commode le théorème de l'indice remarquons que $\text{Pic}_C^{\text{num}}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est extension d'un \mathbb{Q} -espace vectoriel de dimension finie par le \mathbb{R} -espace vectoriel F : nous pouvons donc considérer le complété $\text{Pic}_C^{\text{num}}(X)_{\mathbb{R}}$ pour la topologie obtenue en trivialisant cette extension et en munissant \mathbb{Q} de sa topologie naturelle. On obtient ainsi un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie muni d'une filtration

$$0 \subset F \subset F_{\mathbb{R}}^\perp \subset \text{Pic}_C^{\text{num}}(X)_{\mathbb{R}} .$$

THÉORÈME 6.16.2 (Théorème de l'indice). -La signature de la forme intersection sur $\text{Pic}_C^{\text{num}}(X)_{\mathbb{R}}$ est $(+ \dots -)$, le nombre de signes $-$ étant

$$1 + \text{rang}(J(K)) + \sum_{v \text{ finie}} ((\text{nombre de composantes de } X_v) - 1).$$

Démonstration : Si $L \in \text{ob Pic}_C(X)$ est de degré > 0 , considérons le sous-espace $F \otimes \mathbb{Q}L$ de $\text{Pic}_C^{\text{num}}(X) \otimes \mathbb{Q}$: il est immédiat que celui-ci contient des éléments de carré > 0 et des éléments de carré < 0 . De plus son orthogonal est contenu dans F^\perp et se projette isomorphiquement sur V , donc d'après ce qui précède la forme est définie < 0 sur cet orthogonal. On a donc une décomposition

$$\text{Pic}_C^{\text{num}}(X) \otimes \mathbb{Q} = (F \otimes \mathbb{Q}L) \oplus (F \otimes \mathbb{Q}L)^\perp$$

$$(+ -) \quad (- \dots -)$$

$$\begin{aligned} \text{et l'on a } \dim(F \otimes \mathbb{Q}L)^\perp &= \dim V \\ &= \text{rang}(J(K)) + \sum_{v \in S_f} \dim W_v . \end{aligned}$$

Le théorème en résulte. ■

Le théorème de l'indice a (entre autres) le corollaire utile suivant (cf. [SPC], III, §3, Proposition 2) :

PROPOSITION 6.17..- (Szpiro) Soit $E : S_f \longrightarrow X$ une section à valeurs dans l'ouvert de lissité, identifiée au diviseur compactifié qu'elle définit. Alors on a :

$$(\omega_{X/S} \cdot \omega_{X/S}) \leq 4g(g-1)(\omega_{X/S} \wedge E)$$

ou encore, compte tenu de la formule d'adjonction 6.11 :

$$(\omega_{X/S} \cdot \omega_{X/S}) \leq -4g(g-1)E^2 .$$

Démonstration : notons e, w, f les classes dans $\text{Pic}_C^{\text{num}}(X)_{\mathbb{R}}$ définies respectivement par $\mathcal{O}_X(E)$, $\omega_{X/S}$ et $\mathcal{O}_X(F)$ où F est une fibre (disons à l'infini). Considérons la forme quadratique sur \mathbb{R}^3 :

$$(x, y, z) \longrightarrow (xe + yw + zf)^2 .$$

Pour z assez grand, on a $(e + zf)^2 > 0$, et le théorème de l'indice implique donc que cette forme est soit dégénérée, soit de type $(+ --)$. Par suite son discriminant est ≥ 0 , ce qui donne, en appliquant la formule d'adjonction :

$$\left| \begin{array}{ccc} E^2 & -E^2 & 1 \\ -E^2 & (\omega_{X/S} \cdot \omega_{X/S}) & 2g-2 \\ 1 & 2g-2 & 0 \end{array} \right| \geq 0$$

On obtient le résultat annoncé en développant. ■

B I B L I O G R A P H I E

- [A] S.Ju. ARAKELOV - *Intersection Theory of Divisors on an Arithmetic Surface*, Math. USSR Izvestija 8(1974), n°6, 1167-1180.
- [AV] D. MUMFORD, *Abelian Varieties*, Oxford University Press, (1974).
- [D-M] P. DELIGNE et D. MUMFORD, *The Irreducibility of the Space of Curves of given Genus*, Pub. Math. IHES n°36. (1969), 75-109.
- [EGA] A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNÉ, *Eléments de Géométrie Algébrique I*, Springer, (1971).
- [F] G. FALTINGS, *Calculus on Arithmetic Surfaces*, Ann. of Math. 119 (1984), 387-424.
- [G-H] P. GRIFFITHS et J. HARRIS, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley-Interscience, (1978).
- [GIT] D. MUMFORD, *Geometric Invariant Theory*, Springer Ergebnisse n°34, (1965).
- [K-M] F. KNUDSEN et D. MUMFORD, *The Projectivity of the Moduli Space of Stable Curves I*, Math. Scand. 39 (1976), 19-55.
- [L] S. LANG, *Fundamentals of Diophantine Geometry*, Springer, (1983).
- [MB] L. MORET-BAILLY, *Pinceaux de variétés abéliennes*, Astérisque, à paraître.
- [SGA] A. GROTHENDIECK et al., *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie*, Springer Lecture Notes n°305 (SGA 4, 3ème partie) et n°288 (SGA 7, 1ère partie).
- [SPC] L. SZPIRO et al., *Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins deux*, Astérisque n°86, (1981).

Laurent MORET-BAILLY
Université PARIS XI - Bat. 425
Département de Mathématiques
91405 ORSAY CEDEX

Astérisque

RENÉE ELKIK

**Fonctions de Green, volumes de Faltings. Application
aux surfaces arithmétiques**

Astérisque, tome 127 (1985), p. 89-112

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985_127_89_0>

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » ([http://smf4.emath.fr/
Publications/Asterisque/](http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/)) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

Exposé III

FONCTIONS DE GREEN, VOLUMES DE FALTINGS
APPLICATION AUX SURFACES ARITHMÉTIQUES

Renée ELKIK

I.- Fonctions de Green.

II.- Volumes de Faltings : le théorème de comparaison.

III.- Application aux surfaces arithmétiques : positivité du faisceau dualisant relatif.

Tous les résultats démontrés ici se trouvent dans l'article de Faltings "Calculus on arithmetic surfaces". La seule différence notable, quoique mineure, est qu'on établit de façon plus complète l'existence de la fonction de Green G .

I.- FONCTIONS de GREEN

0.- Introduction

Soit X une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 1$ munie d'une forme de Kähler μ . On montre l'existence sur $X \times X$ d'une fonction G , réelle positive s'annulant exactement le long de la diagonale D de $X \times X$, à l'ordre 1, et telle que la restriction à chaque fibre $X \times \{a\}$ ou $\{a\} \times X$ de la fonction $G = \log G$ ait un laplacien constant sur $X - \{a\}$ (cette constante étant indépendante de $\{a\}$). On en déduit que

- G est un noyau pour l'opérateur de Green \tilde{G} sur $C^\infty(X, \mathbb{C})$. On obtient donc ici (i.e. dans le cas des fonctions sur une surface de Riemann) le fait que \tilde{G} est un opérateur à noyau en utilisant seulement le théorème de décomposition de Hodge (sur lequel repose le lemme 2 de I.1)). L'aspect résolution d'une équation différentielle à coefficients distribution se trouve ici masqué.

Cette première partie est indépendante du reste du séminaire.

1.- Rappels sur les fibrés hermitiens

Pour plus de détails sur ces quelques rappels on renvoie à [G.H., chap. 0, I] dont on a respecté les conventions et notations.

Soit V une variété kählerienne compacte et soit \mathcal{L} un fibré holomorphe inversible sur V , muni d'une structure hermitienne. On associe à ces données une 2-forme fermée de type $(1,1)$ sur V , θ , appelée forme de courbure du fibré hermitien \mathcal{L} qu'on peut définir comme suit : soit s une section locale holomorphe ne s'annulant pas de \mathcal{L} , alors

$$\theta = - \partial \bar{\partial} \log \|s\|^2.$$

(c'est indépendant de la section holomorphe choisie, et définit donc une 2-forme globale sur V).

On note $[\omega]$ la classe dans $H_{DR}^1(V)$ d'une forme fermée ω , et on désigne par $c_1(\mathcal{L})$ la classe de Chern de \mathcal{L} . On a alors [G.H. p. 141 et p. 148].

LEMME 1. - : $c_1(\mathcal{L}) = \frac{-1}{2\pi i} [\theta]$ dans $H_{DR}^2(V)$.

LEMME 2. - : Soit ω une forme réelle fermée de type $(1,1)$ vérifiant $[\omega] = c_1(\mathcal{L})$. Alors il existe sur le fibré \mathcal{L} une métrique hermitienne dont la courbure est égale à $-2\pi i \omega$.

On notera qu'une telle métrique est définie à une constante multiplicative réelle positive près.

2.- La fonction de Green - Définition

Soient X une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 1$, T_X son fibré tangent, Ω_X son fibré cotangent et μ une forme de Kähler sur X vérifiant $\int_X \mu = 1$. L'espace $H^0(X, \Omega_X)$ des 1-formes holomorphes est muni du produit hermitien :

$$\langle \omega, \omega' \rangle = \frac{-1}{2\pi i} \int_X \omega \wedge \bar{\omega}'.$$

Soit $(\omega_1, \dots, \omega_g)$ une base orthonormée de cet espace.

On désigne par D la diagonale de $X \times X$ et par p_1 et p_2 les 2 projections et on considère sur $X \times X$ la 2-forme fermée réelle de type $(1,1)$:

$$\Phi = p_1^* \mu + p_2^* \mu + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^g p_1^* \omega_j \wedge p_2^* \bar{\omega}_j + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^g p_2^* \omega_j \wedge p_1^* \bar{\omega}_j.$$

LEMME 3. - : On a dans $H_{DR}^2(X \times X)$: $[\Phi] = c_1(\mathcal{D}_{X \times X}(D))$.

Démonstration : On montre que pour toute 2-forme fermée α sur $X \times X$ on a :

$$\int_D \alpha = \int_{X \times X} \alpha \wedge \Phi.$$

Si α est de type $(2,0)$ ou $(0,2)$ les deux membres sont nuls.

Si $\alpha = p_1^* \omega_j \wedge p_1^* \bar{\omega}_k$ on a $\int_D \alpha = \int_X \omega_j \wedge \bar{\omega}_k$ et

$$\alpha \wedge \Phi = p_1^* \omega_j \wedge p_1^* \bar{\omega}_k \wedge p_2^* \mu,$$

donc

$$\int_{X \times X} \alpha \wedge \Phi = \int_X \omega_j \wedge \bar{\omega}_k \cdot \int_X \mu = \int_X \omega_j \wedge \bar{\omega}_k.$$

Si $\alpha = p_1^* \omega_j \wedge p_2^* \bar{\omega}_k$ on a $\int_D \alpha = \int_X \omega_j \wedge \bar{\omega}_k = -2\pi i \delta_{jk}$ et

$$\alpha \wedge \Phi = \alpha \wedge \left(\frac{1}{2\pi i} \sum_{\ell=1}^g p_2^* \omega_\ell \wedge p_1^* \bar{\omega}_k \right)$$

donc :

$$\int_{X \times X} \alpha \wedge \Phi = \frac{-1}{2\pi i} \sum_{\ell=1}^g \left(\int_X \omega_j \wedge \bar{\omega}_\ell \cdot \int_X \omega_\ell \wedge \bar{\omega}_k \right)$$

$$= \frac{-1}{2\pi i} \sum_{\ell=1}^g (-2\pi i \delta_{j\ell}) (-2\pi i \delta_{\ell k})$$

$$= -2\pi i \delta_{jk}.$$

Compte tenu de l'invariance de la situation par l'involution

$i : X \times X \longrightarrow X \times X$, $i(P, Q) = (Q, P)$ ceci termine la démonstration du lemme.

COROLLAIRE : Il existe sur $\mathcal{O}_{X \times X}(D)$ une métrique hermitienne dont la forme de courbure est $-2\pi i \Phi$.

Cette métrique est a priori définie à une constante multiplicative près. Soit σ la section canonique de $\mathcal{O}'_{X \times X}(D)$. On normalise la métrique sur ce fibré par la condition supplémentaire

$$(1) \quad \int_{X \times X} \log \|\sigma\| p_1^* \mu \wedge p_2^* \mu = 0$$

et on pose $G = \|\sigma\|$.

La fonction G^2 est une fonction C^∞ réelle positive sur $X \times X$ s'annulant exactement le long de D . On peut noter que la fonction G est invariante par l'involution $i : X \times X \longrightarrow X \times X$ donnée par $i(P, Q) = (Q, P)$. En effet, on a

$$G(i(a, b)) = a \cdot G(a, b) \quad a \in \mathbb{R}^{++}, \quad a^2 = 1;$$

En outre on a sur $X \times X - D$: $-\delta \bar{\delta} \log G^2 = -2\pi i \Phi$.

Soit, avec $\mathcal{G}_j = \log G$:

$$(2) \quad \frac{1}{\pi i} \delta \bar{\delta} \mathcal{G}_j = \Phi \quad \text{sur } X \times X - D.$$

On montre après quelques rappels sur le laplacien Δ que $-\mathcal{G}_j$ est un noyau pour l'opérateur de Green.

3.- Rappels sur Δ :

On considère sur $C^\infty(X, \mathbb{C})$ l'opérateur laplacien Δ défini par la condition :

$$\Delta f \cdot \mu = \frac{1}{\pi i} \partial \bar{\partial} f.$$

(On a pris $\Delta = \frac{1}{\pi} \Delta_{\partial}$ où Δ_{∂} est le laplacien complexe usuel).

On désigne par H le sous-espace de $C^\infty(X, \mathbb{C})$ formé des fonctions harmoniques, c'est-à-dire des fonctions constantes et par H^\perp son orthogonal pour le produit scalaire L^2 i.e. :

$$H^\perp = \{f \in C^\infty(X, \mathbb{C}) / \int_X f \mu = 0\}.$$

On utilisera dans la suite les résultats suivants

$$\Delta(C^\infty(X, \mathbb{C})) = H^\perp$$

Δ/H^\perp est inversible.

Les valeurs propres de Δ sont réelles positives et peuvent être ordonnées

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m \leq \dots \quad \text{et} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m = +\infty.$$

En outre on peut choisir les fonctions propres, $\phi_0 = 1, \phi_1, \dots, \phi_m, \dots$ dans $C^\infty(X, \mathbb{R})$ de telle sorte que la famille $(\phi_0, \dots, \phi_m, \dots)$ soit une base hilbertienne orthonormée de l'espace $L^2(X, \mu)$.

L'opérateur de Green \tilde{G} : $C^\infty(X, \mathbb{C}) \longrightarrow C^\infty(X, \mathbb{C})$ est défini par :

$$\tilde{G} \cdot H^\perp = (\Delta / H^\perp)^{-1}, \quad \tilde{G} \cdot H^\perp = 0.$$

On a en particulier dans $L^2(X, \mu)$:

$$(3) \quad \tilde{G} \cdot f = \sum_{m>0} \frac{1}{\lambda_m} \langle f, \phi_m \rangle \phi_m$$

et donc quelque soient f et h dans $C^\infty(X, \mathbb{C})$:

$$(4) \quad \int_X h(x) \cdot \tilde{G}f(x) \mu_x = \sum_{m>0} \frac{1}{\lambda_m} \langle f, \phi_m \rangle \langle h, \phi_m \rangle$$

THÉORÈME 1. - Pour tout f dans $C^\infty(X, \mathbb{C})$ on a $(\tilde{G}f)(P) = \int_X -G_f(P, Q) f(Q) \mu_Q$.

Cet énoncé se découpe en les deux lemmes suivants, qui traitent, le premier, le cas d'une fonction f dans H^\perp , l'autre le cas d'une fonction dans H . Le premier repose sur l'égalité (2) et la forme de la singularité de G_f au voisinage de D , le second dépend de la normalisation choisie (1).

LEMME 4. - Soit $f \in C^\infty(X, \mathbb{C})$ vérifiant $\int_X f \mu = 0$. Alors

$$\forall P \in X \quad f(P) = \int_X -G_f(P, Q) \Delta f(Q) \mu_Q.$$

Démonstration

$$\begin{aligned} \int_X -G_f(P, Q) \Delta f(Q) \mu_Q &= \frac{-1}{\pi i} \int_X G_f(P, Q) \partial \bar{\partial} f(Q) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{\pi i} \int_{X - K_\epsilon} G_f(P, Q) \partial \bar{\partial} f(Q) \end{aligned}$$

où K_ϵ est un disque de rayon $\epsilon > 0$ assez petit.

Appliquons une première fois la formule de Stokes

$$-\int_{\partial K_\epsilon} G(P,Q) \bar{\partial} f(Q) = \int_{X-K_\epsilon} \partial_Q G(P,Q) \wedge \bar{\partial} f(Q) + \int_{X-K_\epsilon} G(P,Q) \partial_Q \bar{\partial} f(Q).$$

Le premier membre tend vers 0 quand ϵ tend vers 0. Donc

$$\int_X -G(P,Q) \Delta f(Q) \mu_Q = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi i} \int_{X-K_\epsilon} \partial_Q G(P,Q) \wedge \bar{\partial} f(Q).$$

Une nouvelle application de la formule de Stokes donne

$$\int_X -G(P,Q) \Delta f(Q) \mu_Q = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi i} \left[\int_{X-K_\epsilon} f(Q) \bar{\partial}_Q \partial_Q G(P,Q) + \int_{\partial K_\epsilon} f(Q) \partial_Q G(P,Q) \right].$$

Mais $\bar{\partial}_Q \partial_Q G(P,Q)$ est proportionnel à μ sur $X - \{P\}$ et $\int_X f\mu = 0$.

On obtient donc :

$$\int_X -G(P,Q) \Delta f(Q) \mu_Q = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi i} \int_{\partial K_\epsilon} f(Q) \partial_Q G(P,Q).$$

Si z est une uniformisante en P la fonction $G(P,Q)$ se comporte au voisinage de P comme $\log |z|$ à l'addition d'une fonction C^∞ près d'où

$$\begin{aligned} \int_X -G(P,Q) \Delta f(Q) \mu_Q &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi i} f(P) \int_{|z|= \epsilon} \delta \log |z| \\ &= f(P). \end{aligned}$$

LEMME 5. - Quel que soit $P \in X$ on a : $\int_X -G(P,Q) \mu_Q = 0$.

Soit $f \in H^1$, il existe une unique fonction $u \in H^1$ telle que $\Delta u = f$ et d'après ce qui précède

$$u(P) = \int_X -G(P,Q) f(Q) \mu_Q.$$

On a donc, quel que soit f vérifiant $\int_X f\mu = 0$:

$$\int_X \int_X -G(P,Q) f(Q) \mu_Q \mu_P = 0.$$

Donc

$$\int_X f(Q) \mu_Q = 0 \Rightarrow \int_X f(Q) \left(\int_X -G_j(P, Q) \mu_P \right) \mu_Q = 0$$

La fonction de Q , $\int_X G_j(P, Q) \mu_P$ est donc constante, et donc identiquement nulle, étant donné le choix fait en (1).

(et $\int_X G_j(P, Q) \mu_Q = 0$ car G_j est symétrique en P et Q)

Compte tenu du théorème 1, la formule (4) se traduit par : Quelles que soient les fonctions f et h dans $C^\infty(X, \mathbb{C})$

$$(5) \quad \int_{X \times X} -G_j(P, Q) f(P) h(Q) \mu_P \wedge \mu_Q = \sum_{m>0} \frac{1}{\lambda_m} \left(\int_X f(P) \phi_m(P) \mu_P \right) \left(\int_X h(P) \phi_m(P) \mu_P \right)$$

4.- La capacité de G est bornée.

Soit r un entier et soient P_1, P_2, \dots, P_r points deux à deux distincts de X .

Le produit $\prod_{i \neq j} G(P_i, P_j)$ est majoré par une expression de la forme A^{r^2} puisque

la fonction G est bornée supérieurement sur $X \times X$. On montre que si on fait tendre r vers $+\infty$ et varier P_1, \dots, P_r dans X^r , ce produit est majoré par une expression de la forme $e^{O(r^2)}$: intuitivement si on prend beaucoup de points sur X ils sont assez proches les uns des autres.

THÉORÈME 2. - Quel que soit $\epsilon > 0$, il existe un entier r_0 tel que, quel que soit $r \geq r_0$, et quel que soient P_1, \dots, P_r , r points deux à deux distincts de X on ait

$$\prod_{i \neq j} G(P_i, P_j) \leq e^{\epsilon r^2}.$$

Démonstration : On établit en fait $\sum_{i \neq j} G_j(P_i, P_j) \leq \epsilon r^2$.

Dans un premier temps on régularise G_j en la convolvant avec des fonctions en cloche à support dans un voisinage de D . Et on établit le résultat pour ces convolées. Puis on montre que ces convolées sont proches de G_j .

Munissons X d'une distance convenable, par exemple de la distance associée à la métrique définie par μ . et soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur $X \times X$ vérifiant les conditions suivantes

1) K_n est C^∞ réelle positive à support dans le $\frac{1}{n}$ -voisinage de la diagonale

2) pour tout $P \in X$, on a $\int_X K_n(P, Q) \mu_Q = 1$

3) il existe une constante C telle que $\sup_{X \times X} K_n \leq Cn^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Posons } G_n(R, Q) = G * K_n(R, Q) = \int_X G(R, S) K_n(S, Q) \mu_S$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_n(P, Q) &= K_n * G_n(P, Q) = \int_X K_n(R, P) G_n(R, Q) \mu_R \\ &= \int_{X \times X} G(R, S) K_n(R, P) K_n(S, Q) \mu_R \mu_S. \end{aligned}$$

Compte tenu de la décomposition d'une convolution avec G en termes des valeurs propres de Δ (4) on a donc

$$\tilde{G}_n(P, Q) = - \sum_{m>0} \frac{1}{\lambda_m} \int_X \phi_m(R) K_n(R, P) \mu_R \cdot \int_X \phi_m(R) K_n(R, Q) \mu_R.$$

Etant donnés r points distincts P_1, \dots, P_r de X on a

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j} \tilde{G}_n(P_i, P_j) &= \sum_{m>0} \frac{-1}{\lambda_m} \sum_{i \neq j} \left(\int_X \phi_m(R) K_n(R, P_i) \mu_R \right) \left(\int_X \phi_m(R) K_n(R, P_j) \mu_R \right) \\ &= \sum_{m>0} \frac{-1}{\lambda_m} \left[\left(\sum_i \int_X \phi_m(R) K_n(R, P_i) \mu_R \right)^2 - \sum_i \left(\int_X \phi_m(R) K_n(R, P_i) \mu_R \right)^2 \right] \\ &\leq \sum_{m>0} \frac{+1}{\lambda_m} \sum_i \left(\int_X \phi_m(R) K_n(R, P_i) \mu_R \right)^2 \\ &\leq \sum_i \left(\sum_{m>0} \frac{1}{\lambda_m} \left(\int_X \phi_m(R) K_n(R, P_i) \mu_R \right)^2 \right) \\ &\leq \sum_i \frac{1}{\lambda_1} \left(\sum_{m>0} \left(\int_X \phi_m(R) K_n(R, P_i) \mu_R \right)^2 \right). \end{aligned}$$

En outre puisque les $(\phi_m)_{m>0}$ forment une partie d'une base orthonormée de $L^2(X, \mu)$ on a :

$$\sum_{m>0} \left(\int_X \phi_m(R) K_n(R, P_i) \mu_R \right)^2 \leq \int_X K_n^2(R, P_i) \mu_R.$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j} \tilde{G}_n(P_i, P_j) &\leq \frac{1}{\lambda_1} \sum_i \int_X K_n^2(R, P_i) \mu_R \\ &\leq \frac{r}{\lambda_1} \sup_{P \in X} \int_X K_n^2(R, P) \mu_R \\ &\leq A \cdot r \end{aligned}$$

où A est une constante (dépendant de n).

Fin de la démonstration du Théorème 2

On a posé

$$\begin{aligned} K_n * G(P, Q) &= \int_X K_n(R, P) G(R, Q) \mu_R \\ G_n(P, Q) &= G * K_n(P, Q) = \int_X G(P, R) K_n(R, Q) \mu_R \\ \tilde{G}_n(P, Q) &= K_n * \tilde{G}_n(P, Q) = \int_X K_n(R, P) \tilde{G}_n(R, Q) \mu_R. \end{aligned}$$

Pour finir la démonstration du théorème il suffit de montrer qu'il existe une constante A telle que pour tout $\epsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait :

$$(i) \quad G(P, Q) \leq (1-\epsilon) \tilde{G}_n(P, Q) + \epsilon A. \quad \forall (P, Q) \in X \times X$$

On montre en fait qu'il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que

$$(ii) \quad G(P, Q) \leq (1-\epsilon) G * K_n(P, Q) + \epsilon B$$

$$(iii) \quad G(P, Q) \leq (1-\epsilon) K_n * G(P, Q) + \epsilon B.$$

Comme K_n est ≥ 0 la convolution avec K_n est monotone et on déduit de (ii)

$$K_n * \mathcal{G}(P, Q) \leq (1-\varepsilon) \tilde{\mathcal{G}}_n(P, Q) + \varepsilon B$$

et de (iii)

$$\mathcal{G}(P, Q) \leq (1-\varepsilon) ((1-\varepsilon) \tilde{\mathcal{G}}_n(P, Q) + \varepsilon B) + \varepsilon B$$

et donc une inégalité du type (i).

On donne quelques indications sur la démonstration de (ii) (ou (iii)) [cf [F]].

a) La fonction \mathcal{G} est continue sur $X \times X - D$, donc uniformément continue sur tout fermé F de $X \times X$ disjoint de D . Un argument standard permet alors d'établir que quel que soit $\varepsilon > 0$, et quel que soit ce fermé F , il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on ait

$$\sup_{(P, Q) \in F} |\mathcal{G}(P, Q) - \mathcal{G}_n(P, Q)| < \varepsilon$$

et donc

$$\mathcal{G}(P, Q) < (1-\varepsilon) \mathcal{G}_n(P, Q) + \varepsilon (\sup_{X \times X} \mathcal{G}(P, Q) + 2).$$

Il suffit donc d'établir que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage U de D et un entier n_0 , tel qu'une inégalité du type (ii) soit vérifiée pour $(P, Q) \in U$, $n \geq n_0$ (avec la constante B de (ii) indépendante de ε, \dots etc.).

b) On peut trouver un recouvrement ouvert fini $(U_i)_{i \in I}$ de X des isomorphismes analytiques $\phi_i : U_i \longrightarrow \Omega_i \subset \mathbb{C}$ tels que

$$\mathcal{G}(\phi_i^{-1}(P), \phi_i^{-1}(Q)) = \log|P, Q| + f_i(P, Q)$$

où f_i est uniformément continue sur tout compact de $\Omega_i \times \Omega_i$.

Après quelques calculs, dont les détails, fastidieux, sont omis, on déduit la proposition souhaitée du lemme suivant :

iii) LEMME 6.- On désigne maintenant par $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions C^∞ réelles positives sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ vérifiant les trois conditions suivantes :

$$1) K_n(P, Q) = 0 \quad \text{si} \quad |P-Q| \geq 1/n ;$$

$$2) \text{ pour tout } Q \in \mathbb{C} , \int_{\mathbb{C}} K_n(P, Q) \mu_P = 1 , \text{ où } \mu \text{ désigne la mesure de Lebesgue ;}$$

$$3) \text{ il existe } C \in \mathbb{R} \text{ tel que } \sup K_n \leq C n^2 .$$

Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $n > n_0$ et tout (P, Q) tel que $|P-Q| < 2^{-1/\epsilon}$, on ait

$$(1) \quad \log |P-Q| \leq (1-\epsilon) \int_{\mathbb{C}} K_n(z, P) \log |z - Q| \mu_z .$$

Démonstration : L'inégalité (1) peut se réécrire sous la forme

$$(1-\epsilon) \int_{\mathbb{C}} \log \frac{|z-Q|}{|P-Q|} K_n(z, P) \mu_z \geq \epsilon \log |P-Q| .$$

Fixons n et étudions séparément les deux cas

$$|P-Q| \geq 2/n, \quad \text{et} \quad |P-Q| \leq 2/n.$$

• Si $|P-Q| \geq 2/n$ alors $|z-P| \leq 1/n \Rightarrow |z-Q| \geq \frac{1}{2} |P-Q|$ et donc

$$\log \left| \frac{z-P}{P-Q} \right| \geq -\log 2 \quad \text{si} \quad K_n(z, P) \neq 0$$

on a donc

$$\begin{aligned} (1-\epsilon) \int_{\mathbb{C}} \log \left| \frac{z-P}{P-Q} \right| K_n(z, P) \mu_z &\geq (1-\epsilon) (-\log 2) \int_{\mathbb{C}} K_n(z, P) \mu_z \\ &\geq -\log 2 + \epsilon \log 2 \\ &\geq -\log 2 \\ &\geq \epsilon \log |P-Q| \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité provenant de l'hypothèse $|P-Q| \leq 2^{1/\varepsilon}$.

• Si $|P-Q| \leq 2/n$ introduisons $s = \frac{z-Q}{P-Q}$

$$z = Q + s(P-Q).$$

Le premier membre de (1) est donc égal à

$$(1-\varepsilon) |P-Q|^2 \int_{\mathbb{C}} \log|s| K_n(Q + s(P-Q), P) \mu_s.$$

Pour $|s| \geq 1$ $\log|s| \geq 0$ donc ce premier membre est supérieur ou égal à

$$\geq (1-\varepsilon) |P-Q|^2 \int_{|s| \leq 1} \log|s| K_n(Q + s(P-Q), P) \mu_s.$$

Comme $\log|s| \leq 0$ si $|s| \leq 1$ on a encore

$$\geq (1-\varepsilon) \frac{4}{n^2} \int_{|s| \leq 1} \log|s| C n^2 \mu_s$$

$$\geq 4 C \int_{|s| \leq 1} \log|s| \mu_s$$

Il est maintenant clair que si $n >> 0$, l'hypothèse $|P-Q| \leq 2/n$ implique

$$\varepsilon \log|P-Q| \leq 4 C \int_{|s| \leq 1} \log|s| \mu_s$$

II.- LES VOLUMES DE FALTINGS

On désigne toujours par X une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 1$ qu'on munit désormais de la forme de Kähler

$$\mu = \frac{1}{2\pi i g} \sum_{j=1}^g \omega_j \wedge \bar{\omega}_j$$

$(\omega_1, \dots, \omega_g)$ est comme précédemment une base orthonormée de l'espace $H^0(X, \Omega_X)$.

La forme μ est la forme canonique considérée au chapitre II [M.B.].

On rappelle qu'une métrique hermitienne sur un fibré inversible holomorphe sur X est dite μ -admissible si sa forme de courbure Θ vérifie l'égalité

$$\Theta = -2\pi i (\deg \mathcal{L}) \mu .$$

Deux telles métriques sur \mathcal{L} ont un rapport constant et si P est un point de X , il y a une métrique hermitienne μ admissible canonique sur $\mathcal{O}_X(P)$ pour laquelle la section canonique σ_P a pour norme $\|\sigma_P\|(Q) = G(P, Q)$ (G est la fonction de Green définie au paragraphe précédent).

Si $\delta = \sum n_k P_k$ est un diviseur, le faisceau $\mathcal{O}_X(\delta)$ a donc une métrique admissible canonique pour laquelle la section marquée σ_δ a pour norme

$$\|\sigma_\delta\|(Q) = \prod_k G(P_k, Q)^{n_k}.$$

On sous-entend toujours que $\mathcal{O}_X(\delta)$ est muni de cette métrique.

On rappelle que si \mathcal{L} est un faisceau sur X on désigne par $\text{Det } R\Gamma(X, \mathcal{L})$ le \mathbb{C} -espace vectoriel de dim 1

$$\det R\Gamma(X, \mathcal{L}) = \Lambda^{h_0} H^0(X, \mathcal{L}) \otimes (\Lambda^{h_1} H^1(X, \mathcal{L}))^{\otimes -1}$$

($h_1 = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{L})$).

Choisissons une métrique hermitienne sur $\det R\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Il a été établi à (Exposé II) ([MB] Théor. 4.13]) le Théorème suivant :

THÉORÈME : On peut d'une manière et d'une seule définir pour tout faisceau inversible hermitien μ -admissible, \mathcal{L} sur X , une métrique hermitienne qu'on appelle métrique de Faltings sur $\det R\Gamma(X, \mathcal{L})$ de telle sorte que les propriétés suivantes soient vérifiées :

a) la métrique de Faltings sur $\det R\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est celle choisie précédemment si \mathcal{O}_X est muni de sa métrique naturelle ($\|1\| = 1$).

b) Une isométrie $u : \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}'$ induit une isométrie de $\det R\Gamma(X, \mathcal{L})$ sur $\det R\Gamma(X, \mathcal{L}')$.

c) Pour tout faisceau inversible hermitien μ admissible \mathcal{L} sur X et tout point P de X l'isomorphisme $\det R\Gamma(X, \mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} \det R\Gamma(X, \mathcal{L}(-P)) \otimes_{\mathcal{L}_P}^{\mathcal{L}}$ déduit de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}(-P) \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}_P \longrightarrow 0$$

est une isométrie.

(La notation \mathcal{L}_P désigne la fibre de \mathcal{L} en P).

On notera dans la suite $V_{\text{Falt}; \det R\Gamma(X, \mathcal{L})}$ ou simplement $V_{\text{Falt}})$ la forme volume correspondante.

Une extension de la propriété c).

Soit $r \in \mathbb{N}$ et soient P_1, P_2, \dots, P_r , r points 2 à 2 distincts de X , et \mathcal{L} un faisceau inversible hermitien sur X . L'espace vectoriel de rang 1 sur \mathbb{C} $\bigotimes_{i=1}^r \mathcal{L}_{P_i} = \Lambda^r(\bigoplus_i \mathcal{L}_{P_i})$ est un produit de \mathbb{C} -espaces vectoriels hermitiens de rang 1. Il a donc une métrique hermitienne "naturelle", $\|\cdot\|_{\text{nat}}$ (celle qu'on obtient en considérant $\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{L}_{P_i}$ comme somme directe orthogonale des \mathcal{L}_{P_i} : $\|a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_r\|_{\text{nat}} = \prod_i \|a_i\|$).

On appelle métrique de Faltings sur $\bigotimes_{i=1}^r \mathcal{L}_{P_i}$ la métrique

$$\|\cdot\|_{\text{Falt}} = \|\cdot\|_{\text{nat}} \times \frac{1}{\prod_{i < j} G(P_i, P_j)}.$$

Si on désigne par V_{Falt} (resp V_{nat}) les éléments de volume on a donc :

$$V_{\text{Falt}} = V_{\text{nat}} \times \frac{1}{\prod_{i \neq j} G(P_i, P_j)}$$

Considérons alors la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}(-P_1, \dots, -P_r) \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^r \mathcal{L}_{P_i} \longrightarrow 0$$

Elle induit un isomorphisme

$$\det R\Gamma(X, \mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} \det R\Gamma(X, \mathcal{L}(-P_1, -P_2, \dots, -P_r)) \otimes (\bigotimes_{i=1}^r \mathcal{L}_{P_i}).$$

Cet isomorphisme est une isométrie si chacun des termes est muni de sa métrique de Faltings.

Démonstration : Nous nous limitons à $r = 2$ pour alléger l'écriture. Considérons les deux suites exactes

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathcal{L}(-P_1, -P_2) \longrightarrow \mathcal{L}(-P_1) \longrightarrow \mathcal{L}(-P_1)_{P_2} \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \mathcal{L}(-P_1) \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}_{P_1} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

On en déduit en appliquant à chacune, la propriété c), une isométrie :

$$\begin{aligned} \det R\Gamma(X, \mathcal{L}) &= \det R\Gamma(X, \mathcal{L}(-P_1, -P_2)) \otimes \mathcal{L}(-P_1)_{P_2} \otimes \mathcal{L}_{P_1} \\ &= \det R\Gamma(X, \mathcal{L}(-P_1, -P_2)) \otimes \mathcal{L}_{P_1} \otimes \mathcal{L}_{P_2} \otimes \mathcal{L}(-P_1)_{P_2} \end{aligned}$$

et le \mathbb{C} -espace hermitien de dimension 1, $\mathcal{L}(-P_1)_{P_2}$ est identifié à \mathbb{C} grâce à sa base marquée mais la norme de celle-ci est $\frac{1}{G(P_1, P_2)}$.

Le Théorème de Comparaison

Dans la suite \mathcal{L} désigne toujours un faisceau inversible hermitien sur X de degré $d \geq 2g-1$, de sorte que $H^1(X, \mathcal{L}) = 0$. On dispose donc d'une métrique de Faltings sur $\det H^0(X, \mathcal{L})$ et on désigne par V_{Falt} l'élément de volume correspondant sur $H^0(X, \mathcal{L})$. Par ailleurs l'espace vectoriel $H^0(X, \mathcal{L})$ a une métrique hermitienne \mathbb{L}^2

$$\|\sigma\|^2 = \int_X \|\sigma(P)\|^2 \mu_P$$

et on désigne par $V_{\mathbb{L}^2}$ l'élément de volume correspondant sur $H^0(X, \mathcal{L})$.

THÉORÈME 3. - (Faltings)

Quel que soit $\varepsilon > 0$ il existe d_0 tel que pour tout faisceau inversible hermitien \mathcal{L} sur X de degré $d \geq d_0$ ($\geq 2g-1$), les éléments de volume V_{Falt} et $V_{\mathbb{L}^2}$ sur $H^0(X, \mathcal{L})$ vérifient l'inégalité

$$V_{\text{Falt}} \geq e^{-\varepsilon d^2} V_{\mathbb{L}^2}.$$

Démonstration : Soit \mathcal{L} un faisceau de degré d ($\geq 2g-1$) et posons

$$r = d + 1-g = \dim H^0(X, \mathcal{L})$$

Il existe un ouvert dense U de X^r défini par les conditions $P = (P_1, \dots, P_r) \in U$ ssi

$$1^\circ) P_i \neq P_j \quad \forall i \neq j$$

2^o) la suite exacte

$$(*) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{L}(-P_1, -P_2, \dots, -P_r) \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \bigoplus_i \mathcal{L}_{P_i} \longrightarrow 0$$

induit un isomorphisme

$$\phi_P : H^0(X, \mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_i \mathcal{L}_{P_i};$$

cette condition équivaut à $H^0(\mathcal{L}(-P_1, \dots, -P_r)) = 0$, ou à $H^1(\mathcal{L}(-P_1, \dots, -P_r)) = 0$ puisque $\chi(\mathcal{L}(-P_1, \dots, -P_r)) = 0$.

Soient \mathcal{E} sur $\text{Pic}^{g-1}(X) \times X$ le faisceau universel et $p : \text{Pic}^{g-1}(X) \times X \longrightarrow \text{Pic}^{g-1}(X)$ la projection. On a vu au chapitre II [M.B] que $\det R_p_* \mathcal{E} \simeq \mathcal{O}(-\theta)$, et qu'il existe une métrique hermitienne sur $\mathcal{O}(-\theta)$ tel que pour tout point $x \in \text{Pic}^{g-1}(X)$ l'isomorphisme précédent induise une isométrie de $\mathcal{O}(-\theta)_x$ sur $\det R\Gamma(X, \mathcal{E}_x)$.

Soit alors $\psi : X^r \longrightarrow \text{Pic}^{g-1}(X)$

$$(Q_1, \dots, Q_r) \longmapsto \mathcal{L}(-Q_1, \dots, -Q_r).$$

L'ouvert U introduit précédemment est inclus dans $\psi^{-1}(\text{Pic}^{g-1}(X) - \theta)$. Si $(P_1, \dots, P_r) \in U$, $\det R\Gamma(X, \mathcal{L}(-P_1 - \dots - P_r))$ s'identifie comme espace métrique à la fibre en $\psi(P_1, \dots, P_r)$ de $\mathcal{O}(-\theta)$. Soit σ_θ la section canonique de $\mathcal{O}(-\theta)$ sur $\text{Pic}^{g-1}(X) - \theta$ et désignons par $\lambda(P_1, \dots, P_r)$ la fonction sur U :

$$\lambda(P_1, \dots, P_r) = \|\sigma_\theta(\psi(P_1, \dots, P_r))\|^2.$$

L'espace vectoriel métrique $\det R\Gamma(X, \mathcal{L}(-P_1 - \dots - P_r))$ s'identifie donc à \mathbb{C} muni de la métrique $\|1\|^2 = \lambda(P_1, \dots, P_r)$. Reprenons la suite (*). On obtient

$$V_{\text{Falt}; \det H^0(X, \mathcal{L})} = \lambda(P_1, \dots, P_r)^{\frac{1}{2}} V_{\text{Falt}; \theta, \mathcal{L}_{P_i}}$$

$$= \lambda(P_1, \dots, P_r)^{-\frac{1}{2}} \prod_{i \neq j} \frac{1}{G(P_i, P_j)} \phi^* V_{\text{nat}}.$$

Fixons maintenant une base orthonormée \mathbb{L}^2 , soit (f_1, \dots, f_r) de $H^0(X, \mathcal{L})$ on a :

$$\phi^* V_{\text{nat}} = V_{\mathbb{L}^2 / H^0(X, \mathcal{L})} \times \|\phi(f_1) \wedge \dots \wedge \phi(f_r)\|_{\text{nat}}^2$$

on obtient donc l'égalité suivante entre les deux volumes sur $H^0(X, \mathcal{L})$:

$$V_{\text{Falt}} = V_{\mathbb{L}^2} \times \lambda(P_1, \dots, P_r)^{-\frac{1}{2}} \prod_{i \neq j} \frac{1}{G(P_i, P_j)} \|\phi(f_1) \wedge \dots \wedge \phi(f_r)\|_{\text{nat}}^2$$

Donc

$$\frac{V_{\text{Falt}} \times \prod_{i \neq j} G(P_i, P_j)}{V_{\mathbb{L}^2} \times \lambda(P_1, \dots, P_r)} = \|\phi(f_1) \wedge \dots \wedge \phi(f_r)\|_{\text{nat}}^2$$

$$\begin{aligned} \frac{V_{\text{Falt}}}{V_{\mathbb{L}^2}} \times \int_U \frac{\prod_{i \neq j} G(P_i, P_j)}{\lambda(P_1, \dots, P_r)} \mu_{P_1} \dots \mu_{P_r} &= \int_U \|\phi(f_1) \wedge \dots \wedge \phi(f_r)\|_{\text{nat}}^2 \mu_{P_1} \dots \mu_{P_r} \\ &= \int_X \|\phi(f_1) \wedge \dots \wedge \phi(f_r)\|_{\text{nat}}^2 \mu_{P_1} \dots \mu_{P_r} \end{aligned}$$

Calcul de $\int_{X^r} \|\phi(f_1) \wedge \dots \wedge \phi(f_r)\|^2 \mu_{p_1}, \dots, \mu_{p_r}$.

On désigne par p_i la $i^{\text{ème}}$ projection de X^r sur X^r et on considère les r sections,

$$F_i = p_1^* f_1 + p_2^* f_1 + \dots + p_r^* f_i \quad (i = 1, \dots, r)$$

du fibré $\bigoplus_{j=1}^r p_j^* \mathcal{L}$, muni de la métrique somme orthogonale des métriques sur les r facteurs.

Désignons par $(i) = (i_1, \dots, i_r)$ la permutation $(1, 2, \dots, r) \mapsto (i_1, \dots, i_r)$ de l'ensemble $\{1, 2, \dots, r\}$, et par $\epsilon(i)$ sa signature. On a

$$\phi(f_1) \wedge \dots \wedge \phi(f_r) = (F_1 \wedge \dots \wedge F_r)(P_1, \dots, P_r)$$

$$= \sum_{(i)} p_{i_1}^* f_1 \wedge p_{i_2}^* f_2 \wedge \dots \wedge p_{i_r}^* f_r$$

$$= \sum_{(i)} (-1)^{\epsilon(i)} p_{i_1}^* f_{i_1} \wedge \dots \wedge p_{i_r}^* f_{i_r}$$

$$\|\phi(f_1) \wedge \dots \wedge \phi(f_r)\|^2 = \sum_{(i), (j)} (-1)^{\epsilon(i) + \epsilon(j)} \langle p_{i_1}^* f_{i_1} \wedge \dots \wedge p_{i_r}^* f_{i_r}, p_{j_1}^* f_{j_1} \wedge \dots \wedge p_{j_r}^* f_{j_r} \rangle$$

$$= \sum_{(i), (j)} (-1)^{\epsilon(i) + \epsilon(j)} \prod_k \langle p_k^* f_{i_k}, p_k^* f_{j_k} \rangle,$$

$$\int_{X^r} \|\phi(f_1) \wedge \dots \wedge \phi(f_r)\|^2 = \sum_{(i), (j)} (-1)^{\epsilon(i) + \epsilon(j)} \prod_k \int_X \langle f_{i_k}, f_{j_k} \rangle \mu.$$

Par hypothèse on a $\int_X \langle f_{i_k}, f_{j_k} \rangle \mu = \delta_{i_k j_k}$, donc

$$\prod_k \int_X \langle f_{i_k}, f_{j_k} \rangle \mu = \delta_{(i), (j)}$$

et par suite

$$\int_{X^r} \|\phi(f_1) \wedge \dots \wedge \phi(f_r)\|^2 \mu_{p_1} \dots \mu_{p_r} = \sum_{(i)} 1 = r !$$

d'où

$$\frac{V_{\text{Falt}}}{V_{\mathbb{L}^2}} = r! \times \frac{1}{\int_U \frac{\prod_{i \neq j} G(P_i, P_j)}{(P_1, \dots, P_r)} u_{P_1} \cdots u_{P_r}}.$$

La norme de σ_θ est bornée inférieurement sur $\text{Pic}^{g-1}(X)$ (et tend vers $+\infty$ au voisinage de θ) il existe donc une constante positive A indépendante de r et de P_1, \dots, P_r telle que

$$\lambda(P_1, \dots, P_r) \geq A.$$

Donc

$$\frac{V_{\text{Falt}}}{V_{\mathbb{L}^2}} \geq A \cdot r! \cdot \frac{1}{\int_U \frac{\prod_{i \neq j} G(P_i, P_j)}{(P_1, \dots, P_r)} u_{P_1} \cdots u_{P_r}}$$

D'après le théorème , quel que soit $\epsilon' > 0$ il existe r_0 tel que pour tout $r \geq r_0$ on ait $\prod_{i \neq j} G(P_i, P_j) \leq e^{\epsilon' r^2}$ et donc pour $d \geq r_0 + g-1$ on obtient

$$V_{\text{Falt}} \geq A \cdot r! \cdot e^{-\epsilon' r^2} V_{\mathbb{L}^2}$$

et donc pour un choix convenable de ϵ'

$$V_{\text{Falt}} \geq e^{-\epsilon d^2} V_{\mathbb{L}^2}.$$

III.- APPLICATION AUX SURFACES ARITHMÉTIQUES

Ce paragraphe est la suite du paragraphe 6 de l'exposé II [MB] et nous ne rappelons que le minimum de notations indispensables. On désigne désormais par X_K une courbe projective lisse de genre $g \geq 1$ sur un corps de nombres K et par X un modèle régulier de X_K , projectif sur $C = \text{Spec } \mathcal{O}_K$ (\mathcal{O}_K = anneau des entiers de K).

Pour toute place à l'infini v de K on désigne par K_v le complété de K en v et on choisit un isomorphisme de \bar{K}_v avec \mathbb{C} . On désigne par X_v la surface de Riemann obtenue à partir de X_K par le changement de base $K \longrightarrow K_v \longrightarrow \mathbb{C}$ et par μ_v la forme de Kähler canonique sur X_v .

On rappelle qu'un faisceau inversible hermitien admissible \mathcal{L} sur X est un faisceau inversible sur X dont toutes les fibres à l'infini \mathcal{L}_v sur X_v sont munies d'une métrique μ_v admissible. Le degré de \mathcal{L} est le degré de \mathcal{L}_K sur X_K . Si ce degré est supérieur à $2g-1$, le \mathcal{O}_K -module $H^1(X, \mathcal{L})$ est de torsion et on dispose grâce aux volumes de Faltings définis au paragraphe précédent d'une mesure de Haar sur le \mathbb{R} -espace vectoriel

$$\bigoplus_v H^0(X, \mathcal{L}) \otimes_{\mathcal{O}_K} K_v = H^0(X, \mathcal{L}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

qu'on désigne dans la suite par mesure de Faltings.

THÉORÈME 4. - Soit \mathcal{L} un faisceau inversible hermitien admissible sur X vérifiant $\deg(\mathcal{L}) > 0$ et $\langle \mathcal{L}, \mathcal{L} \rangle > 0$. Alors il existe un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$ il existe un diviseur d'Arakelov effectif D_n tel que $\mathcal{L}^{\otimes n} \simeq \mathcal{O}(D_n)$.

Démonstration : On doit montrer qu'il existe $\sigma \in H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ tel que

$$\forall v : \int_{X_v} \log \|\sigma_v\|_{\mu_v} \leq 0$$

et il suffit pour cela qu'on ait :

$$\forall v : \int_{X_v} \|\sigma_v\|^2_{\mu_v} \leq 1.$$

On suppose toujours n assez grand pour avoir $\deg \mathcal{L}^{\otimes n} \geq 2g-1$. Le \mathbb{R} espace vectoriel $H^0(X, \mathcal{L}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \prod_v H^0(X, \mathcal{L}_v) \otimes_K K_v$ étant muni de sa mesure de Faltings on compare le volume du réseau $H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ et celui de

$$B_n = \{\sigma = (\sigma_v) / \int_{X_v} \|\sigma_v\|_{\mu_v}^2 \leq 1 \text{ pour tout } v\}.$$

D'après les résultats du paragraphe 3 :

$$\forall \epsilon > 0, \text{ il existe } n_0 \text{ tel que pour } n \geq n_0 \text{ on ait } \text{vol}(B_n) \geq e^{-\epsilon n^2}.$$

D'autre part d'après le théorème de Riemann Roch ([M.B])

$$\begin{aligned} \log \text{vol}(H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} / H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n})) &= \\ &= -\frac{1}{2} \langle \mathcal{L}^{\otimes n}, \mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \omega_X^{-1} \rangle - \chi(X, \mathcal{O}_X) - \log \# H^1(X, \mathcal{L}^{\otimes n}) \end{aligned}$$

Et donc pour $n \gg 0$

$$\text{vol}(H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} / H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n})) \leq e^{-n^2/2 \langle \mathcal{L}, \mathcal{L} \rangle + An}$$

pour une certaine constante A .

Et l'énoncé résulte alors du théorème de Minkowski.

THÉORÈME 5.- Supposons le genre g de $X_K \geq 2$ et la fibration

$X \longrightarrow C = \text{Spec } \mathcal{O}_K$ semi-stable. Alors

a) $\langle \omega_{X/C}, \omega_{X/C} \rangle \geq 0$

b) Quel que soit le diviseur d'Arakelov effectif D ,

$$\langle \omega_{X/C}, D \rangle \geq \frac{\langle \omega_{X/C}, \omega_{X/C} \rangle}{4g(g-1)}.$$

On établit d'abord b), dont la démonstration repose sur le théorème de l'indice de Hodge [MB] et est calquée sur celle donnée par Szpiro, dans un cadre géométrique [S].

- Si D est inclus dans une fibre on a

$$\langle D, \omega_{X/C} \rangle + \langle D, D \rangle = 2g(D) - 2$$

et $D^2 \leq 0$. Donc $\langle D, \omega_{X/C} \rangle \geq 0$ avec $\langle D, \omega_{X/C} \rangle = 0$ si et seulement si D est une droite de self intersection -2 contenue dans une fibre singulière de $X \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_K$.

- Si D est horizontal, on peut en faisant une extension du corps de base se ramener au cas où D est une section de $X \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_K$ et

$$\langle \omega_{X/C}, D \rangle = -\langle D, D \rangle.$$

Soit F la classe d'une fibre verticale, alors pour $n \gg 0$ $\langle nF + D, nF + D \rangle > 0$ car $F^2 = 0$, $\langle F, D \rangle = 1$.

Il résulte du théorème de l'indice de Hodge que le déterminant

$$\begin{vmatrix} F^2 & \langle D, F \rangle & \langle \omega_{X/C}, F \rangle \\ \langle D, F \rangle & D^2 & \langle \omega_{X/C}, D \rangle \\ \langle \omega_{X/C}, F \rangle & \langle \omega_{X/C}, D \rangle & \omega_{X/C}^2 \end{vmatrix}$$

est ≥ 0 , d'où en explicitant les termes :

$$-\omega_{X/C}^2 - 4g(g-1)D^2 \geq 0$$

et par adjonction

$$4g(g-1)\langle \omega_{X/C}, D \rangle \geq \langle \omega_{X/C}, \omega_{X/C} \rangle .$$

Démonstration de a) : Posons

$$r_0 = \frac{-\langle \omega_{X/C}, \omega_{X/C} \rangle}{2(2g-2)}.$$

Pour tout $\epsilon > 0$, (choisi tel que $r_0 + \epsilon \in \mathbb{Q}$) $\omega_{X/C} + (r_0 + \epsilon)F$ a une self intersection strictement positive. Il existe donc n_ϵ tel que pour $n \geq n_\epsilon$ $n(\omega_{X/C} + (r_0 + \epsilon)F)$ soit équivalent à un diviseur d'Arakelov effectif (Théorème 4) et donc d'après b)

$$\langle \omega_{X/C}, \omega_{X/C} + (r_0 + \epsilon)F \rangle \geq \frac{\langle \omega_{X/C}, \omega_{X/C} \rangle}{4g(g-1)} 2g-2.$$

Donc

$$\omega_{X/C}^2 + (r_0 + \epsilon)2g-2 \geq \frac{\omega_{X/C}^2}{2g}.$$

Puisque ceci est vrai pour tout ϵ , on obtient en remplaçant r_0 par sa valeur $\omega_{X/C}^2 (1 - \frac{1}{2}) \geq \frac{\omega_{X/C}^2}{2g}$.

Et donc $\omega_{X/C}^2 \geq 0$ puisque $g \geq 2$.

B I B L I O G R A P H I E

- [F] G.FALTINGS : *Calculus on arithmetic surfaces*. Annals of Maths. 199, 1984
387-424.
- [G.H.] P. GRIFFITHS and J. HARRIS : *Principles of Algebraic Geometry*.
Wiley Interscience, 1978.
- [M B] L. MORET-BAILLY : *Exposé 2, ce séminaire*.
- [S] L. SZPIRO : *Séminaire sur les pinceaux de courbe de genre au moins 2*.
Astérisque n° 86, 1981.

RENÉE ELKIK
Université PARIS XI - Bat.425
Département de Mathématiques
91405 ORSAY CEDEX

Astérisque

LAURENT MORET-BAILLY
Compactifications, hauteurs et finitude

Astérisque, tome 127 (1985), p. 113-129

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985_127_113_0>

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » ([http://smf4.emath.fr/
Publications/Asterisque/](http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/)) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

Exposé IV

COMPACTIFICATIONS, HAUTEURS ET FINITUDE

Laurent MORET-BAILLY

0.- Introduction

1.- Compactifications et théorèmes de finitude

2.- La propriété de prolongement

3.- Construction de la compactification

4.- Remarques et compléments

0.- INTRODUCTION

Soient K un corps de nombres, g un entier ≥ 1 , H un réel. L'objet du présent exposé est de prouver que l'ensemble des classes d'isomorphie de K -variétés abéliennes de dimension g et de hauteur différentielle $\leq H$ est fini, ainsi qu'une variante "polarisée" du même énoncé. Pour y parvenir on construit des compactifications des schémas de modules pertinents, permettant de comparer la hauteur stable d'une variété abélienne à la "hauteur projective" (à singularités logarithmiques) du point correspondant.

La présentation adoptée ici est plus "algébrique" que la démonstration originale de Faltings : on n'y fait pas usage des constructions de Baily-Borel, Mumford et al., et Namikawa.

Signalons que Faltings a annoncé récemment la construction d'un champ propre et lisse sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$, compactifiant le champ des variétés abéliennes principalement polarisées, et portant un schéma semi-abélien prolongeant le schéma abélien universel. Ceci permettrait (cf [D], commentaires suivant 1.12) de se passer du "lemme de Gabber" (exposé IV) et par suite du recours aux jacobiniennes. Enfin le §4 suggère quelques simplifications à certaines démonstrations.

Notations :

\mathcal{O}_K = anneau des entiers du corps de nombres K .

Si A est un schéma en groupes lisse commutatif sur une base S , on note $[n]_A$ la multiplication par n dans A ; $\pi^A = \text{Ker}[n]_A$; $\omega_{A/S} = \det(\text{Lie } A/S)^V$; si A est un schéma abélien, on note A^\vee son dual.

1.- COMPACTIFICATIONS ET THÉORÈMES DE FINITUDE

1.0.- Soient g, d deux entiers ≥ 1 , n un entier ≥ 3 . Désignons par $M = M_{g,d,n}$ le schéma de modules sur \mathbb{Q} des variétés abéliennes de dimension g , munies d'une polarisation de degré d^2 et d'une structure de niveau n . Soit $\mathcal{A} \xrightarrow{F} M$ le schéma abélien universel (qui existe puisque $n \geq 3$) et désignons par ω le faisceau inversible $\omega_{\mathcal{A}/M}$ sur M . Le fibré en droites $\omega_{\mathbb{C}}$ sur $M_{\mathbb{C}}$ est muni de façon naturelle d'une métrique hermitienne ρ , de la façon suivante (cf. I, 3.3.) : si $x \in M(\mathbb{C})$, la fibre ω_x s'identifie à $H^0(\mathcal{A}_x, \Omega_{\mathcal{A}_x/\mathbb{C}}^g)$, espace des g -formes (invariantes) sur la variété abélienne \mathcal{A}_x ; si α est une telle forme, on a alors par définition

$$(1.0.1) \quad \rho(\alpha)^2 = \gamma^g \int_{\mathcal{A}_x(\mathbb{C})} |\alpha \cdot \bar{\alpha}|$$

où γ est une constante dépendant des auteurs.

Si $x \in M(K)$, où K est un corps de nombres, on désignera par $hs(x)$ la hauteur stable (I, 3.3) de la variété abélienne A_x sur K correspondante (pour les métriques à l'infini compatibles avec la formule (1.0.1)). Le réel $hs(x)$ est invariant par extension du corps de base ; on obtient ainsi une application

$$(1.0.2) \quad hs : M(\overline{\mathbb{Q}}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

où $\overline{\mathbb{Q}}$ désigne une clôture algébrique de \mathbb{Q} .

THÉORÈME 1.1.- On suppose que n est divisible par $8d^2$. Il existe une compactification \overline{M} de M , un entier $m \geq 1$, et un faisceau inversible ample \mathcal{H} sur \overline{M} prolongeant ω_M^m , tels que

- (i) la métrique ρ^m sur $\mathcal{X}_{\mathbb{C}|M_{\mathbb{C}}} = \omega_{\mathbb{C}}^m$ est à singularités logarithmiques le long de $\overline{M} - M$ (I, 3.2) ;
- (ii) si h désigne la classe de hauteurs (modulo les fonctions bornées) sur $M(\overline{\mathbb{Q}})$ définie par \mathcal{H} et la métrique ρ^m , alors la fonction hs de (1.0.2) est dans la classe $\frac{1}{m} h$.

Par "compactification" on entend une \mathbb{Q} -variété projective contenant M comme ouvert dense.

Ce théorème sera démontré aux § suivants. Auparavant nous allons en déduire des théorèmes de finitude pour les variétés abéliennes sur les corps de nombres.

1.2.- Si K est un corps de nombres, on désigne par $M_g(K)$ (resp. $M_{g,d}(K)$, $M_{g,d,n}(K)$) l'ensemble des classes de K -isomorphie d'objets A_K (resp. (A_K, ξ_K) , resp. (A_K, ξ_K, v_K)) où A_K , ξ_K , v_K désignent respectivement une K -variété abélienne de dimension g , une polarisation de degré d^2 sur A_K , et une structure de niveau n sur A_K (ainsi, $M_{g,d,n}(K)$ est bien l'ensemble des points à valeurs dans K du schéma $M_{g,d,n}$). Pour tout réel H , on désigne respectivement par $M_g^H(K)$, $M_{g,d}^H(K)$, $M_{g,d,n}^H(K)$ les sous-ensembles des précédents obtenus en imposant la condition

$$hdif(A_K) \leq H$$

où $hdif$ désigne la hauteur différentielle (I, 3.3) ; cette condition, rappelons-le, implique $hs(A_K) \leq H$. Nous commettrons à l'occasion des abus d'écriture du genre "soit $(A_K, \xi_K) \in M_{g,d}(K)$ " .

THÉORÈME 1.3.-

- (i) Pour tout corps de nombres K et tout réel H , les ensembles $M_g^H(K)$, $M_{g,d}^H(K)$, $M_{g,d,n}^H(K)$ sont finis.
- (ii) Il existe une constante C_g telle que pour tout corps de nombres K et toute $A_K \in M_g(K)$, on ait

$$hs(A_K) \geq C_g$$

(et a fortiori $hdif(A_K) \geq C_g$).

1.4.- Le théorème 1.1 ci-dessus, joint aux propriétés de finitude des hauteurs à singularités logarithmiques (I,Th.3.19), implique la finitude de $M_{g,d,n}^H(K)$ lorsque $8d^2|n$. De plus, comme toute variété abélienne admet une structure de niveau n après extension finie convenable du corps de base, on en déduit encore, compte tenu de la minoration des hauteurs (I,loc.cit.) :

(1.4.1.) Il existe $C_{g,d}$ telle que pour tout corps de nombres K et tout $(A_K, \tilde{\sigma}_K) \in M_{g,d}(K)$, on ait

$$hs(A_K) \geq C_{g,d}.$$

1.5.- Prouvons maintenant la finitude de $M_{g,d}^H(K)$ (nous suivons [D]).

LEMME 1.5.1.- Soit r un entier divisible par deux entiers premiers entre eux et ≥ 3 (par exemple $r=12$). Soit A_K une variété abélienne de dimension g sur un corps de nombres K , et soit \mathfrak{p} une place de K où A_K n'a pas réduction semi-stable, $\mathbb{N}_{\mathfrak{p}}$ sa norme. Alors

$$\log \mathbb{N}_{\mathfrak{p}} \leq [K : \mathbb{Q}] \operatorname{Card} \operatorname{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}) (hdif(A_K) - hs(A_K)).$$

Démonstration : Il existe une extension K' de K rendant rationnels les points d'ordre r de A_K , et de degré

$$[K' : K] \leq \operatorname{Card} \operatorname{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}).$$

La variété abélienne $A_{K'}$ est à réduction semi-stable sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}_{K'}$, de K' ([SPC],I,5.18). Par suite, si A et A' désignent les modèles de Néron respectifs de A_K et $A_{K'}$, sur \mathcal{O}_K et $\mathcal{O}_{K'}$, le morphisme naturel de $\mathcal{O}_{K'}$ -schémas en groupes

$$A \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K'} \longrightarrow A'$$

n'est pas étale aux places de $\mathcal{O}_{K'}$, divisant \mathfrak{p} . En conséquence le morphisme natu-

rel de $\mathcal{O}_{K'}$ -modules inversibles

$$\omega_{A'/\mathcal{O}_{K'}} \xleftarrow{\quad} \omega_{A/\mathcal{O}_K} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K'}$$

admet un zéro en chacune de ces places (qui sont toutes de norme $\geq N_p$) . On en tire

$$\begin{aligned} \text{hdif}(A_K) &= \frac{1}{[K':\mathbb{Q}]} \deg_{\mathcal{O}_{K'}} (\omega_{A/\mathcal{O}_K} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K'}) \\ &\geq \frac{1}{[K':\mathbb{Q}]} (\deg_{\mathcal{O}_{K'}} \omega_{A'/\mathcal{O}_{K'}} + \log N_p) \\ &= \text{hs}(A_K) + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}] \text{Card } \text{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})} \log N_p \\ &\geq \text{hs}(A_K) + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}] \text{Card } \text{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})} \log N_p . \end{aligned} \quad \blacksquare$$

1.5.2.- Pour $(A_K, \xi_K) \in M_{g,d}^H(K)$, le lemme 1.5.1 et l'assertion (1.4.1) impliquent (avec les notations du lemme)

$$\log N_p \leq [K:\mathbb{Q}] \text{Card } \text{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}) (H - C_{g,d}) .$$

Si donc T_1 désigne l'ensemble (fini) des places p de K vérifiant l'inégalité ci-dessus, alors pour tout $(A_K, \xi_K) \in M_{g,d}^H(K)$ la variété A_K a réduction semi-stable en dehors de T_1 .

1.5.3.- Soit n un entier ≥ 3 , divisible par $8d^2$. Toute $(A_K, \xi_K) \in M_{g,d}^H(K)$ acquiert une structure de niveau n sur une extension de degré borné par $\text{Card } \text{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Les points de $M_{g,d,n}(\bar{\mathbb{Q}})$ correspondant aux diverses structures de niveau n sur les $(A_K, \xi_K)_{\bar{\mathbb{Q}}}$ sont donc de degré borné, et de hauteur bornée par H (th. 1.1). Ils sont donc en nombre fini (I, Th.3.1') et par suite les $(A_K, \xi_K)_{\bar{\mathbb{Q}}}$ (pour $(A_K, \xi_K) \in M_{g,d}^H(K)$) ne forment qu'un nombre fini de classes d'isomorphie. Il existe donc un ensemble fini T_2 de places de K tel que toutes les A_K envisagées aient bonne réduction potentielle en-dehors de T_2 .

1.5.4.- Pour $(A_K, \xi_K) \in M_{g,d}^H(K)$ le lieu de mauvaise réduction de A_K est contenu dans $T_1 \cup T_2$. La variété A_K a donc une structure de niveau n sur une extension de degré borné, non ramifiée en-dehors de $T_1 \cup T_2 \cup \{\text{places divisant } n\}$. Ces extensions sont en nombre fini (Hermite) et il existe donc K' finie sur K telle que les $(A_K, \xi_K)_{K'}$ aient une structure de niveau n , donc ne forment qu'un

nombre fini de classes d'isomorphie. On conclut par un argument galoisien standard: le groupe $\Gamma = \text{Aut}_K(A_{K'}, \xi_{K'})$ étant fini, il en est de même de l'ensemble $H^1(K'/K, \Gamma)$. ■

1.6.- La finitude de $M_{g,d}^H(K)$ implique trivialement celle de $M_{g,d,n}^H(K)$ pour tout n . Il reste à établir celle de $M_g^H(K)$ et l'assertion (ii) de 1.3. On utilise pour cela les faits suivants (où A_K et B_K désignent des variétés abéliennes sur le corps de nombres K):

- a) $\text{hdif}(A_K \times B_K) = \text{hdif}(A_K) + \text{hdif}(B_K)$ (immédiat)
- b) $\text{hdif}(A_K) = \text{hdif}(A_K^t)$ (VII, §2)
- c) $(A_K \times A_K^t)^4$ admet une polarisation principale (VIII, Prop. 1).
- d) l'ensemble des classes d'isomorphie de K -variétés abéliennes facteurs directs de B_K est fini (VIII, Prop. 2).

Le lecteur pourra s'assurer que la démonstration des assertions ci-dessus n'utilise pas le présent exposé. Les assertions a), b), c) et (1.4.1) impliquent l'assertion (ii) du théorème (avec $C_g = \frac{1}{8} C_{8g,1}$). Pour A_K parcourant $M_g^H(K)$, les variétés abéliennes $B_K = (A_K \times A_K^t)^4$ ne forment qu'un nombre fini de classes d'isomorphie (à cause de a), b), c) et de la finitude de $M_{8g,1}^{8H}(K)$). On conclut grâce à d). ■

2.- LA PROPRIÉTÉ DE PROLONGEMENT

DÉFINITION 2.0.- Soit S un schéma. Un S -schéma en groupes $A \longrightarrow S$ est dit semi-stable si :

- (i) A est commutatif, lisse et séparé sur S .
 - (ii) Pour tout $s \in S$, la composante neutre A_s^0 de $A_s := A \otimes_S k(s)$ est extension d'une variété abélienne par un tore.
 - (iii) Il existe un ouvert U de S tel que la restriction A_U soit un U -schéma abélien et que pour tout $s \in S \setminus U$ l'anneau local $\mathcal{O}_{S,s}$ soit normal excellent.
- Un S -schéma semi-abélien est par définition un S -schéma en groupes semi-stable à fibres connexes.

2.1.- Dans tout le §2 on fixe trois entiers $g \geq 1$, $d \geq 1$, $n \geq 3$. Tous les schémas en groupes semi-stables envisagés, sauf évidence du contraire, sont supposés de dimension relative g .

Soient S un schéma de caractéristique 0, $A \xrightarrow{f} S$ un S -schéma semi-abélien, et soit $U \subset S$ un ouvert dense comme en (iii) ci-dessus. Donnons-nous, sur le

schéma abélien A_U , une polarisation ξ_U de degré d^2 et une structure de niveau n , notée v_U . On obtient ainsi, avec les notations de 1.0, un morphisme

$$(2.1.1) \quad j_U = j(A_U, \xi_U, v_U) : S \longrightarrow M = M_{g,d,n}$$

ainsi qu'un isomorphisme de U -schémas abéliens

$$A_U \xrightarrow{\sim} j_U^* \mathcal{A}$$

d'où un isomorphisme de \mathcal{O}_U -modules inversibles

$$(2.1.2) \quad \alpha_U : j_U^* \omega \xrightarrow{\sim} \omega_{A_U/U} = (\omega_{A/S})_U .$$

Cela étant, soient \bar{M} une compactification de M , m un entier ≥ 1 , \mathcal{H} un faisceau inversible sur \bar{M} , prolongeant $\omega^{\otimes m}$ (c'est-à-dire que l'on se donne un isomorphisme $\mathcal{H}|_M \xrightarrow{\sim} \omega^{\otimes m}$) .

DÉFINITION 2.1.3.- Avec les hypothèses et notations de 2.1, nous dirons que $(\bar{M}, m, \mathcal{H})$ a la propriété de prolongement pour $(A \xrightarrow{f} S, \xi_U, v_U)$ si

(i) le morphisme $j_U : U \longrightarrow M$ de (2.1.1) se prolonge en un morphisme $j : S \longrightarrow \bar{M}$ (unique puisque U est schématiquement dense dans S) ;

(ii) l'isomorphisme $\alpha_U^{\otimes m}$ (2.1.2) se prolonge en
 $\beta : j^* \mathcal{H} \xrightarrow{\sim} \omega_{A/S}^{\otimes m}$

(compte tenu de l'identification $\mathcal{H}|_M = \omega^{\otimes m}$) .

Nous dirons que $(\bar{M}, m, \mathcal{H})$ a la propriété de prolongement s'il a ladite propriété pour tout $(A \longrightarrow S, \xi_U, v_U)$ comme ci-dessus.

THÉORÈME 2.2.-

(i) Il existe $(\bar{M}, m, \mathcal{H})$ comme en 2.1, ayant la propriété de prolongement et tel que \mathcal{H} soit ample sur \bar{M} .

(ii) Tout $(\bar{M}, m, \mathcal{H})$ comme en (i) ci-dessus vérifie les conditions (i) et (ii) du théorème 1.1.

2.3.- La partie (i) de 2.2 sera établie au §3. Soit $(\bar{M}, m, \mathcal{H})$ comme en (i) ci-dessus, et montrons que la métrique ρ^m sur $\mathcal{H}|_{M_U} = \omega_U^{\otimes m}$ est à singularités logarithmiques. Il suffit pour cela de trouver un morphisme $\pi : \bar{S} \longrightarrow \bar{M}$ propre et surjectif tel que $\pi^* \rho^m$ soit à singularités logarithmiques. Or le lemme de Gabber (Exposé IV) implique qu'il existe un diagramme

$$\begin{array}{ccc} S & \xleftarrow{i} & \bar{S} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \bar{M} \end{array}$$

où π est propre surjectif, i une immersion ouverte, et \bar{S} propre sur $\text{Spec } \mathbb{Q}$, tels que le S -schéma abélien $\mathcal{A}_S = \pi^*\mathcal{A}$ se prolonge en un \bar{S} -schéma semi-abélien $\mathcal{A}_{\bar{S}}$. On peut supposer (et l'on suppose) que \bar{S} est normal : la propriété de prolongement implique alors l'existence d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} S & \xleftarrow{i} & \bar{S} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \bar{\pi} \\ M & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \bar{M} \end{array}$$

et d'un isomorphisme

$$\pi^*\mathcal{H} \xrightarrow{\sim} \omega_{\mathcal{A}_{\bar{S}}/\bar{S}}^{\otimes m}$$

prolongeant l'isomorphisme initial sur S et par suite respectant les métriques sur S . Il suffit donc de montrer que la métrique habituelle sur $\omega_{\mathcal{A}_{\bar{S}}/\bar{S}}$ est à singularités logarithmiques le long de $\bar{S}-S$; ceci a été vu en I, Th.3.2.

2.4.- Montrons maintenant que $(\bar{M}, \mathfrak{m}, \mathcal{H})$ vérifie la partie (ii) de 1.1. Pour cela soit $(\bar{M}_{\mathbb{Z}}, \mathcal{H}_{\mathbb{Z}})$ un modèle entier de (\bar{M}, \mathcal{H}) et soit h la hauteur sur $M(\bar{\mathbb{Q}})$ associée (pour la métrique $\rho^{\otimes m}$ sur $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$). Toujours d'après le lemme de Gabber, il existe un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X_{\mathbb{Q}} & \xleftarrow{i} & \bar{X}_{\mathbb{Z}} & & \\ \pi_{\mathbb{Q}} \downarrow & & \downarrow & & \\ M & & & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{Spec } \mathbb{Q} & \xleftarrow{\quad} & \text{Spec } \mathbb{Z} & \xrightarrow{\quad} & \end{array}$$

(où $\pi_{\mathbb{Q}}$ est propre et surjectif, et où i induit une immersion ouverte de $X_{\mathbb{Q}}$ dans $\bar{X}_{\mathbb{Q}} := \bar{X}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$), et un schéma semi-abélien $\mathcal{A}_{\bar{X}_{\mathbb{Z}}}$ sur $\bar{X}_{\mathbb{Z}}$ prolongeant $\pi_{\mathbb{Q}}^*\mathcal{A}$. De plus, quitte à modifier $\bar{X}_{\mathbb{Z}}$, on peut supposer qu'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & X_{\mathbb{Q}} & \longleftrightarrow & \bar{X}_{\mathbb{Q}} & \longleftrightarrow & \bar{X}_{\mathbb{Z}} \\
 \pi_{\mathbb{Q}} \downarrow & & \bar{\pi}_{\mathbb{Q}} \downarrow & & \bar{\pi}_{\mathbb{Z}} \downarrow & \\
 M & \xleftarrow{\quad} & \bar{M} & \xleftarrow{\quad} & \bar{M}_{\mathbb{Z}} & \xleftarrow{\quad} \\
 & \searrow & & \swarrow & & \downarrow \\
 & & \text{Spec } \mathbb{Q} & & \text{Spec } \mathbb{Z} &
 \end{array}$$

(il suffit de remplacer $\bar{X}_{\mathbb{Z}}$ par l'adhérence de $X_{\mathbb{Q}}$ dans $\bar{X}_{\mathbb{Z}} \times_{\mathbb{Z}} \bar{M}_{\mathbb{Z}}$).

On suppose de plus $\bar{X}_{\mathbb{Z}}$ normal. Si x est un point de $X_{\mathbb{Q}}$ à valeurs dans un corps de nombres K , il se prolonge en une section $\tilde{x}: \text{Spec } \mathcal{O}_K \longrightarrow \bar{X}_{\mathbb{Z}}$. L'image réciproque $\tilde{x}^* \mathcal{A}_{\bar{X}_{\mathbb{Z}}}$ est un modèle semi-abélien sur \mathcal{O}_K de la variété abélienne $\mathcal{A}_x = x^* \mathcal{A}$ sur K ; c'est donc le "modèle de Néron connexe" de celle-ci, et par suite la hauteur stable de \mathcal{A}_x (c'est-à-dire, avec la notation (1.0.2), le réel $hs(\pi_{\mathbb{Q}}(x))$) n'est autre que la hauteur de $x \in X_{\mathbb{Q}}(K)$, relativement au modèle entier $\bar{X}_{\mathbb{Z}}$ et au faisceau inversible $\omega_{\mathbb{Z}} := \omega_{\mathcal{A}_{\bar{X}_{\mathbb{Z}}}/\bar{X}_{\mathbb{Z}}}$.

D'après la propriété de prolongement, $\omega_{\mathbb{Z}}^{\otimes m}$ s'identifie au-dessus de $\text{Spec } \mathbb{Q}$ avec $\bar{\pi}_{\mathbb{Q}}^* \mathcal{H}$. Par suite les hauteurs sur $X_{\mathbb{Q}}(\bar{\mathbb{Q}})$ définies par $\bar{\pi}_{\mathbb{Z}}^* \mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$ et $\omega_{\mathbb{Z}}^{\otimes m}$ ont une différence bornée. Finalement la différence

$$|hs(\pi_{\mathbb{Q}}(x)) - \frac{1}{m} h(\pi_{\mathbb{Q}}(x))| \quad (x \in X_{\mathbb{Q}}(\bar{\mathbb{Q}}))$$

est bornée, et il en est de même, puisque $\pi_{\mathbb{Q}}$ est surjectif, de la différence

$$|hs(y) - \frac{1}{m} h(y)| \quad (y \in M(\bar{\mathbb{Q}})).$$

■

Remarque 2.5.- On peut montrer une réciproque de la partie (ii) de 2.2 : si $(\bar{M}, m, \mathcal{H})$ est comme dans le théorème 1.1, alors (M, m, \mathcal{H}) a la propriété de prolongement. En fait ceci n'utilise que la propriété (i) de 1.1 (singularités logarithmiques) et l'amplitude de \mathcal{H} , de sorte que la propriété (ii) de 1.1 est conséquence du reste.

3.- CONSTRUCTION DE LA COMPACTIFICATION

3.0.- On garde les notations de 1.0. On note $\xi_M: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}^t$ la polarisation naturelle de degré d^2 sur le schéma abélien universel \mathcal{A} sur M , et $v_M: (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_M^{2g} \xrightarrow{n} \mathcal{A}$ la structure de niveau n naturelle.

3.1.- Construction d'un faisceau inversible sur \mathcal{A}

Soit (A, ξ) un schéma abélien polarisé sur un schéma S . On définit un faisceau inversible $L(\xi)$ sur A de la façon suivante : si P désigne le faisceau de Poincaré sur $A \times A^t$, on considère le morphisme

$$\begin{pmatrix} \text{id}_A \\ \xi \end{pmatrix} : A \longrightarrow A \times A^t$$

et l'on pose

$$(3.1.1) \quad L(\xi) := \begin{pmatrix} \text{id}_A \\ \xi \end{pmatrix}^*(P)^{\otimes 2}.$$

Le faisceau $L(\xi)$ sur A est symétrique (et même "totalement symétrique"), rigidifié (c'est-à-dire muni d'une trivialisation le long de la section unité $e_A : S \longrightarrow A$), très ample relativement à S , et la polarisation $\varphi_{L(\xi)} : A \longrightarrow A^t$ associée n'est autre que 4ξ .

Appliquant cette construction au schéma abélien polarisé (\mathcal{A}, ξ_M) sur M , on obtient un faisceau inversible

$$(3.1.2) \quad \mathcal{L} := L(\xi_M)$$

sur \mathcal{A} ; le sous-schéma en groupes

$$(3.1.3) \quad K(\mathcal{L}) := \text{Ker}(\varphi_{\mathcal{L}} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}^t) = \text{Ker}(4\xi_M)$$

de \mathcal{A} est fini étale sur S de rang $4^{2g_d^2}$, et est contenu dans $4d^2\mathcal{A}$. Notons que vu l'hypothèse $8d^2|n$, on a

$$(3.1.4) \quad K(\mathcal{L}) \subset K(\mathcal{L}^{\otimes 2}) \subset_n \mathcal{A}.$$

3.2.- L'évaluation aux points d'ordre n

Considérons le morphisme naturel de restriction des sections

$$(3.2.1) \quad F_* \mathcal{L} \longrightarrow F_*(\mathcal{L}|_{n\mathcal{A}}) :$$

c'est un morphisme de \mathcal{O}_M -module localement libres, respectivement de rang $4g_d$ et n^{2g} .

PROPOSITION 3.2.2.- Le morphisme (3.2.1) est injectif et fait de $F_* \mathcal{L}$ un sous-faisceau localement facteur direct de $F_*(\mathcal{L}|_{n\mathcal{A}})$.

Démonstration : la formation de (3.2.1) commute à tout changement de base.

Comme d'autre part $K(\mathcal{L}) \subset_n \mathcal{A}$, on est ramené au lemme suivant :

LEMME 3.2.3.- Soient A une variété abélienne sur un corps k , L un faisceau inversible ample et engendré par ses sections sur A . Alors le morphisme

naturel de restriction

$$H^0(A, L) \longrightarrow H^0(K(L), L|_{K(L)})$$

est injectif.

Démonstration : Le groupe de Mumford $\mathcal{G}(L)$ ([M1], [M2]), extension centrale de $K(L)$ par \mathbb{G}_m , opère sur les deux membres du morphisme envisagé, qui est $\mathcal{G}(L)$ -équivariant. On sait de plus que $H^0(A, L)$ est un $\mathcal{G}(L)$ -module irréductible (voir [M2], §1 pour le cas "séparable", qui suffit à nos besoins ; pour le cas général voir [SPC], VII, 5.2.2). Par suite notre morphisme est injectif ou nul, or il n'est pas nul puisque L est engendré par ses sections. ■

L'étape suivante va consister à trivialiser $F_*(\mathcal{L}|_n\mathcal{A})$ (après un changement de base idoine), pour interpréter le morphisme (3.2.1) comme un "point" d'une grassmannienne.

3.3.- Construction d'un revêtement \tilde{M} de M

Comme \mathcal{L} est symétrique et rigidifié, le théorème du cube fournit un isomorphisme canonique

$$[n]^*(\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}^{\otimes n^2}$$

respectant les rigidifications. En particulier, pour tout $x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ identifié à une section de $n\mathcal{A}(M)$ grâce à la structure de niveau, on a une trivialisation canonique du \mathcal{O}_M -module $x^*\mathcal{L}^{\otimes n^2}$, d'où un revêtement "kummérien"

$$\tilde{M}_x = \underline{\text{Spec}}_{\mathcal{O}_M}(\mathcal{O}_M \oplus x^*\mathcal{L}^{-1} \oplus \dots \oplus x^*\mathcal{L}^{-n^2+1})$$

qui est étale sur M de groupe μ_{n^2} . On pose alors

$$(3.3.1) \quad \tilde{M} := \prod_{x \neq 0} \tilde{M}_x \quad ,$$

le produit étant étendu à $x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g} - \{0\}$.

C'est un revêtement principal de M , de groupe

$$(3.3.2) \quad \Gamma := (\mu_{n^2})^{2g-1} \quad .$$

3.4.- Le plongement grassmannien de \tilde{M}

Si l'on désigne par $\tilde{\mathcal{A}}$, $\tilde{\mathcal{L}}$, etc. les données sur \tilde{M} déduites par changement de base de \mathcal{A} , \mathcal{L} , etc., la restriction à $n\tilde{\mathcal{A}}$ du faisceau $\tilde{\mathcal{L}}$ est munie canoniquement d'une trivialisation que nous noterons σ (remarquons que \mathcal{L} est déjà trivialisé sur la section unité de \mathcal{A} ; c'est pourquoi nous avons omis $x=0$ dans la définition (3.3.1)). Considérons la suite de morphismes de

$\mathcal{O}_{\tilde{M}}$ -modules

$$(3.4.1) \quad \widetilde{F}_*\widetilde{\mathcal{L}} \longrightarrow \widetilde{F}_*(\widetilde{\mathcal{L}}|_{n\widetilde{\mathcal{A}}}) \xrightarrow{\sim} \widetilde{F}_*(\mathcal{O}_{n\widetilde{\mathcal{A}}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\tilde{M}}^{n^2g}$$

où la première flèche est la restriction, la seconde est déduite de la trivialisation σ et la troisième de la structure de niveau $v_{\tilde{M}}$. Comme la première flèche est déduite par changement de base de (3.2.1), le composé (3.3.1) fait de $\widetilde{F}_*\widetilde{\mathcal{L}}$, d'après 3.2.2, un sous-faisceau localement facteur direct de $\mathcal{O}_{\tilde{M}}^{n^2g}$, et par suite définit un morphisme de \mathbb{Q} -schémas

$$(3.4.2) \quad \widetilde{\tau}: \tilde{M} \longrightarrow \mathbb{G} := \mathbb{G}_{4g_d, n^2g, \mathbb{Q}}$$

où \mathbb{G} désigne la grassmannienne des sous-espaces de dimension $4g_d$ de \mathbb{Q}^{n^2g} .

THÉORÈME 3.4.3. - Le morphisme $\widetilde{\tau}$ de (3.4.2) est un plongement.

La démonstration est donnée dans [MB], chapitre VII, §2. Indiquons simplement comment l'on reconstitue le schéma abélien $\widetilde{\mathcal{A}}$ sur \tilde{M} à partir du sous-fibré $\mathcal{V} := \widetilde{F}_*\widetilde{\mathcal{L}}$ de $\mathcal{O}_{\tilde{M}}^{n^2g}$. Comme $\widetilde{\mathcal{L}}$ est très ample relativement à \widetilde{F} , $\widetilde{\mathcal{A}}$ s'identifie à un sous-schéma de $\mathbb{P}(\mathcal{V})$. D'autre part les formes coordonnées sur $\mathcal{O}_{\tilde{M}}^{n^2g}$ donnent par composition n^2g homomorphismes surjectifs $\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{M}}^{n^2g}$, donc sections de $\mathbb{P}(\mathcal{V})$ dont la réunion n'est autre que $n\widetilde{\mathcal{A}} \subset \mathbb{P}(\mathcal{V})$. On montre alors que le sous-schéma $\widetilde{\mathcal{A}}$ de $\mathbb{P}(\mathcal{V})$ est défini par l'idéal homogène engendré par

$$\text{Ker}(p_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{V})}(2) \longrightarrow p_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{V})}(2)|_{n\widetilde{\mathcal{A}}}))$$

où $p: \mathbb{P}(\mathcal{V}) \longrightarrow \tilde{M}$ est le morphisme structural. En d'autres termes, $\widetilde{\mathcal{A}}$ est , localement sur \tilde{M} , l'intersection des quadriques de $\mathbb{P}(\mathcal{V})$ contenant $n\widetilde{\mathcal{A}}$. C'est ici que l'on utilise le fait que $K(\mathcal{L}^{\otimes 2}) \subset n\widetilde{\mathcal{A}}$, conséquence de l'hypothèse $8d^2|n$.

3.5.- Construction de \bar{M} et \mathcal{X}

La grassmannienne \mathbb{G} est munie d'un faisceau inversible très ample $\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1)$, définissant le plongement de Plücker de \mathbb{G} . Explicitement, $\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-1)$ est le déterminant du sous-fibré universel de $\mathcal{O}_{\mathbb{G}}^{n^2g}$: par suite, vu la définition du plongement $\widetilde{\tau}$, on a un isomorphisme canonique

$$(3.5.1) \quad t^* \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1) \xrightarrow{\sim} (\det \widetilde{F}_*\widetilde{\mathcal{L}})^{-1}.$$

Le groupe Γ de (3.3.2) opère sur \tilde{M} (le quotient étant M), et aussi sur \mathbb{G} , de sorte que $\widetilde{\tau}$ est Γ -équivariant. En fait, $\Gamma = (\mu_n)^{n^2g-1}$ opère sur l'espace vectoriel \mathbb{Q}^{n^2g} par multiplication sur les coordonnées (sauf celle indexée

par $0 \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ de sorte que le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1)$ est Γ -équivariant ; de plus l'isomorphisme (3.5.1) ci-dessus est compatible aux "actions" de Γ (l'action sur le second membre résultant du fait que celui-ci provient de M) . Il existe donc un entier $m_1 \geq 1$, un faisceau inversible ample Q sur le quotient \mathbb{G}/Γ , descendant $\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(m_1)$, et un isomorphisme

$$(3.5.2) \quad t^*Q \xrightarrow{\sim} (\det F_* \mathcal{L})^{\otimes -m_1}$$

où t désigne le plongement

$$(3.5.3) \quad t : M = \tilde{M}/\Gamma \hookrightarrow \mathbb{G}/\Gamma$$

déduit de \tilde{t} par passage au quotient. On pose alors

$$(3.5.4) \quad \bar{M} = \text{adhérence de } t(M) \text{ dans } \mathbb{G}/\Gamma$$

$$\mathcal{H}_1 = Q|_{\bar{M}}$$

de sorte que \bar{M} est une compactification de M et que \mathcal{H}_1 est ample sur \bar{M} et prolonge, grâce à (3.5.2) le faisceau $(\det F_* \mathcal{L})^{\otimes -m_1}$ sur M .

THÉORÈME 3.5.5.- Le faisceau inversible

$$(\det F_* \mathcal{L})^{\otimes 2} \otimes \omega^{\otimes 4g_d}$$

est d'ordre fini dans $\text{Pic}(M)$. En d'autres termes il existe un entier $\delta \geq 1$ et un isomorphisme de \mathcal{O}_M -modules inversibles

$$\tau : \det(F_* \mathcal{L})^{\otimes -2\delta} \xrightarrow{\sim} \omega^{\otimes 4g_d \delta}.$$

Pour la démonstration, voir [MB], chapitre VIII.

Posons

$$(3.5.6) \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_1^{\otimes 2\delta}$$

$$m = 4g_d \delta m_1 :$$

alors, une fois choisie la trivialisation τ de 3.5.5, le faisceau \mathcal{H} (qui est ample sur \bar{M}) prolonge $\omega^{\otimes m}$. Pour établir l'assertion (i) de 2.2 il reste à voir que $(\bar{M}, m, \mathcal{H})$ a la propriété de prolongement.

3.6.- Démonstration de la propriété de prolongement

Reprenons les hypothèses et notations de 2.1 : il s'agit de montrer que $(\bar{M}, m, \mathcal{H})$ a la propriété de prolongement pour $(A \xrightarrow{f} S, \mathcal{E}_U, v_U)$. Nous pouvons pour cela supposer S normal, excellent et intègre.

LEMME 3.6.1.- Soit $\pi : S' \rightarrow S$ un morphisme fini surjectif. Si $(\bar{M}, m, \mathcal{H})$

a la propriété de prolongement pour les données sur S' déduites par changement de base de (A, ξ_U, v_U) , alors il a la propriété de prolongement pour (A, ξ_U, v_U) .

Démonstration : Remplaçant S' par une composante de S' dominant S , on peut supposer S' intègre.

a) Posons $U' = \pi^{-1}(U)$. On a par hypothèse un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} U' & \xleftarrow{\quad} & S' & \xrightarrow{\quad} & \\ \pi_U \downarrow & & \downarrow \pi & & j' \downarrow \\ U & \xleftarrow{\quad} & S & \xrightarrow{\quad} & M \\ & \searrow j_U & & & \end{array}$$

Considérons dans $S \times \bar{M}$ l'adhérence Z du graphe de j_U . C'est un S -schéma propre et birationnel sur S et il est dominé par le graphe de j' dans $S' \times \bar{M}$, qui est isomorphe à S' donc fini sur S . Par suite Z est fini birationnel sur S normal, donc s'identifie à S et est le graphe d'un morphisme $j : S \longrightarrow \bar{M}$ prolongeant j_U ; de plus on a nécessairement $j' = j \circ \pi$ par densité.

b) On dispose maintenant sur S des faisceaux inversibles $\omega_{A/S}^{\otimes m}$ et $j^*\mathcal{L}$, ainsi que d'un isomorphisme entre leurs restrictions à U , résultant de (2.1.1). Comme S est normal et π surjectif, un tel isomorphisme se prolonge sur S si et seulement si il se prolonge "sur S' ", ce qui résulte de la propriété de prolongement sur S' . ■

3.6.2.- Quitte à remplacer S par un S -schéma $S' \longrightarrow S$ fini surjectif, ce qui est loisible d'après ce qui précède, on peut supposer qu'il existe :

a) un S -schéma en groupes semi-stable (2.0) $A' \xrightarrow{f'} S$ tel que $A'^0 = A$ et $A'_U = A_U$, et un isomorphisme

$$v : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S^{2g} \xrightarrow{\sim} n^{A'}$$

prolongeant la structure de niveau v_U sur A_U ;

b) un faisceau inversible L sur A' , prolongeant $L(\xi_U)$ (cf. (3.1.1)), muni d'une rigidification prolongeant celle de $L(\xi_U)$ et vérifiant le théorème du cube sur A' .

L'assertion a) est démontrée dans [MB], IV, §8, et l'assertion b) dans [MB], II.

Le faisceau L de b) est unique ; il est symétrique et ample relativement à S .

On a comme en 3.3 un isomorphisme canonique

$$[n]^* L \simeq L^{\otimes n^2}$$

résultant du théorème du cube et de la symétrie, d'où comme dans loc. cit., une trivialisation de $L|_{nA'}^{n^2}$, d'où un revêtement étale \tilde{S} de S , de groupe

$\Gamma = (\mu_n^2)^{n^{2g-1}}$. De plus, si l'on pose $\tilde{U} = U \times_S \tilde{S}$, on a un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & \longrightarrow & \tilde{M} \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{j_U} & M \end{array}$$

de sorte que, remplaçant S par \tilde{S} , on peut supposer que l'on a un relèvement $\tilde{j}_U : U \longrightarrow \tilde{M}$ de $j_U : U \longrightarrow M$. Le morphisme $\tilde{\tau} \circ \tilde{j}_U : U \longrightarrow \mathbb{G}$ correspond à un morphisme de \mathcal{O}_U -modules localement libres

$$(f'_* L)_U \hookrightarrow f'_*(L|_{nA'})_U \xrightarrow{\sim} f'_*(\mathcal{O}_{nA'})_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_U^{n^{2g}}$$

déduit de (3.4.1) par le changement de base \tilde{j}_U . Or on dispose maintenant sur S d'une trivialisation de $L|_{nA'}$ (prolongeant $j_U^* \sigma$, où σ est définie dans 3.4) et de l'isomorphisme v de a) ci-dessus, d'où une suite de morphismes

$$(3.6.2.1) \quad f'_* L \longrightarrow f'_*(L|_{nA'}) \xrightarrow{\sim} f'_*(\mathcal{O}_{nA'}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S^{n^{2g}}$$

prolongeant la précédente.

THÉORÈME 3.6.3.- ([MB], VI, théorème 3.5). *Le morphisme (3.6.2.1) fait de $f'_* L$ un sous-faisceau localement facteur direct de $\mathcal{O}_S^{n^{2g}}$ (en particulier $f'_* L$ est localement libre, automatiquement de rang 4^{g_d}) . ■*

On obtient ainsi un morphisme $S \longrightarrow \mathbb{G}$, et par composition un morphisme $h : S \longrightarrow \mathbb{G}/\Gamma$, rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} U & \longleftrightarrow & S \\ j_U \downarrow & & \downarrow h \\ M & \longrightarrow & \mathbb{G}/\Gamma \end{array}$$

de sorte que (par densité) h se factorise par $j : S \longrightarrow \tilde{M}$ prolongeant j_U . C'est la partie (i) de la propriété de prolongement 2.1.3.

Par construction, $j^*(\mathcal{L})$ n'est autre que $(\det f'_* L)^{\otimes -2\delta_m}$; la partie (ii) de 2.1.3 résulte donc du théorème ci-dessous :

THÉORÈME 3.6.4.- *On peut choisir l'entier δ et l'isomorphisme τ de 3.5.5 de telle sorte que pour tout $(A' \longrightarrow S, L, \xi_U, v)$ vérifiant les propriétés a) et b) de 3.6.2, l'isomorphisme*

$$j_U^* \tau : (\det f'_* L)_U^{\otimes -2\delta} \xrightarrow{\sim} {}^\omega A_U/U^{4^{g_d}\delta}$$

se prolonge en un isomorphisme

$$(\det f'_* L)^{\otimes -2\delta} \xrightarrow{\sim} {}_{A/S}^{\otimes 4g_d \delta}$$

C'est la "formule clé canonique" notée $\text{FCC}(\text{Spec } Q, g, d)$ dans [MB]. ■

Remarque 3.7. - On peut montrer, par des méthodes analytiques, la partie (i) de 2.2 en prenant pour \bar{M} la compactification de Satake de M . On aurait pu aussi, au lieu du revêtement \tilde{M} , utiliser les schémas de modules avec "structures thêta" de Mumford [M2], le plongement grassmannien étant remplacé par le plongement projectif de loc. cit.

4.- REMARQUES ET COMPLÉMENTS

L'auteur s'est rendu compte un peu tard qu'on pouvait simplifier les arguments qui précèdent. La propriété de prolongement de 2.1.3 peut être avantageusement remplacée par la version affaiblie suivante, que nous appellerons "propriété de prolongement faible" : avec les notations de 2.1, on suppose de plus l'existence de $j: S \rightarrow \bar{M}$ prolongeant $j_U: U \rightarrow M$, et on exige alors que la propriété 2.1.3 (ii) soit vérifiée, i.e que $j^* \mathcal{X}$ coïncide avec ${}_{A/S}^{\otimes m}$.

Avec cette modification le théorème 2.2 reste valable :

- partie (i) : l'avantage est que l'on est ramené au cas où la base S est un trait. La démonstration est celle de 3.6, mais les résultats de [M.B] utilisés en 3.6.2 et 3.6.3 sont bien moins chers dans ce cas.

- partie (ii) : la partie "prolongement du morphisme" de la propriété de prolongement n'était utilisée qu'en 2.3, et de façon inessentielle puisqu'il suffit de remplacer \bar{S} (notation de loc. cit.) par le normalisé de l'adhérence du graphe de π dans $\bar{S} \times \bar{M}$ (comme on le fait d'ailleurs en 2.4). Le reste de la preuve est inchangé.

Un autre bénéfice est que la propriété de prolongement faible s'étend immédiatement au cas où, avec les notations de 2.1, $A \rightarrow S$ est seulement un "espace algébrique semi-abélien" sur le schéma S : en effet on se ramène au cas où S est un trait, auquel cas A est automatiquement un schéma. Le lemme de Gabber n'est donc utilisé que dans sa version "espaces algébriques", plus simple.

Bien entendu, la remarque 2.5 reste valable, de sorte que la propriété de prolongement faible et l'amplitude de \mathcal{X} impliquent la propriété de prolongement de 2.1.3.

Enfin on peut montrer *l'unicité* (pour m fixé) de $(\bar{M}, m, \mathcal{X})$ vérifiant la propriété de prolongement faible, lorsque l'on impose à \mathcal{X} d'être ample et à \bar{M}

d'être *normal*. Plus précisément, on laisse en exercice au lecteur le résultat suivant :

PROPOSITION.- Soient \bar{M}_1 et \bar{M}_2 deux compactifications normales de M , munies respectivement de faisceaux inversibles \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 prolongeant $\omega^{\otimes m}$ ($m \geq 1$). On suppose que $(\bar{M}_i, m, \mathcal{E}_i)$ vérifie la propriété de prolongement faible (pour $i = 1, 2$), et que \mathcal{E}_1 est ample sur \bar{M}_1 . Alors il existe un unique morphisme $\pi: \bar{M}_2 \longrightarrow \bar{M}_1$ induisant l'identité sur M , et l'on a $\pi^* \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ (comme prolongements de $\omega^{\otimes m}$).

En conséquence, \bar{M}_1 est la compactification de Satake de M .

B I B L I O G R A P H I E

- [D] P. DELIGNE.- *Preuve des conjectures de Tate et de Shafarevich*, Séminaire Bourbaki, n°616 (novembre 1983).
- [M1] D. MUMFORD.- *Abelian Varieties* (Oxford University Press) (1974).
- [M2] D. MUMFORD.- *On the Equations Defining Abelian varieties*, Invent. Math. 1 (1966), 287-354 ; 3(1967), 75-135 et 215-244.
- [MB] L. MORET-BAILLY.- *Pinceaux de variétés abéliennes*, Astérisque (à paraître).
- [SPC] L. SZPIRO et al., .- *Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins deux*, Astérisque vol. 86. (1981).

LAURENT MORET-BAILLY
Université PARIS XI - Bat.425
Département de Mathématiques
91405 ORSAY CEDEX

Astérisque

PIERRE DELIGNE

Le lemme de Gabber

Astérisque, tome 127 (1985), p. 131-150

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985_127_131_0>

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » ([http://smf4.emath.fr/
Publications/Asterisque/](http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/)) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

Exposé V

LE LEMME DE GABBER

Pierre DELIGNE

Le résultat principal de cet exposé, le théorème 1.4, est dû à O. Gabber.

1.- ÉNONCÉS

1.1.- Dans cet exposé, nous travaillerons systématiquement avec des espaces algébriques ([1] ou [6]), plutôt qu'avec des schémas. Ceci pose un problème de références. Nous nous permettrons de renvoyer à un article où un théorème est démontré pour les schémas, et de l'appliquer aux espaces algébriques, lorsque la même preuve permet de le démontrer. Une preuve pose problème lorsqu'elle utilise que tout point à un voisinage affine, et que "voisinage" ne peut pas être remplacé par "voisinage étale".

Ceci nous amène à parler d'*espace algébrique abélien A sur S*, là où on parlerait d'ordinaire de schéma abélien sur S : c'est un S-espace algébrique en groupes commutatifs $f : A \rightarrow S$, avec f propre et plat de présentation finie, de fibres géométriques des variétés abéliennes. Nous appellerons *espace algébrique semi-abélien A sur S* un S-espace algébrique en groupes commutatifs $f : A \rightarrow S$ avec f séparé plat de présentation finie, de fibres géométriques des extensions de variétés abéliennes par des tores. Noter toutefois que

- (a) Pour S le spectre d'un corps, tout espace algébrique en groupes sur S est un schéma ([2] n° 4), d'ailleurs quasi-projectif ([4]).
- (b) Pour S un trait, tout espace algébrique en groupes G sur S, localement de type fini et séparé sur S, est un schéma. Voir [9] 3.3.1, où est traité le cas où G est lisse sur S.
- (c) Pour S normal intègre de point générique η et A un espace algébrique abélien sur S, des arguments de Grothendieck montrent que toute polarisation de A_η (vue comme morphisme symétrique de A dans sa duale) se prolonge de façon unique en une polarisation de A sur S, de sorte que A est projectif sur S et en particulier que A est un schéma si S en est un. Cf [7], ou [10] XI 1.4, rédigés pour des schémas mais valables en général.

Un espace algébrique $f : X \rightarrow S$ plat de présentation finie séparé sur S et à fibres géométriques propres et connexes est propre sur S : par localisation sur S et passage à la limite on se ramène à supposer S spectre d'un anneau noethérien local, qu'on peut supposer complet par descente fidèlement plate, et on applique

EGA III (1^{ère} partie) 5.5. En particulier, un espace algébrique semi-abélien sur S de fibres des variétés abéliennes est abélien sur S .

Sauf mention expresse du contraire, les schémas et espaces algébriques considérés sont quasi-compacts et quasi-séparés.

1.2.- Soient U un ouvert dense d'un espace algébrique normal S et A un espace algébrique abélien sur U . Un prolongement semi-abélien de A sur S est un espace algébrique semi-abélien P sur S , muni d'un isomorphisme $A \xrightarrow{\sim} P|_U$.

THÉORÈME (Raynaud [10] XI 1.15): *Sous les hypothèses ci-dessus, si A admet un prolongement semi-abélien, ce dernier est unique (à isomorphisme unique près).*

Localisation et passage à la limite ramènent à supposer que S est un schéma noethérien. Si S est un trait, et U son point générique, tout prolongement semi-abélien P de A coïncide avec la composante neutre N^0 du modèle de Néron ([8]) N de A : parce que P est lisse à fibres connexes, on dispose de $\phi : P \rightarrow N^0$ avec $\phi_{\eta} = \text{Id}$ et SGA 7 IX 3.1 montre que ϕ est un isomorphisme (cf SGA 7 IX 3.2). Pour S normal noethérien, il en résulte que deux prolongements P', P'' coïncident sur un ouvert $V \supset U$ de complément de codimension ≥ 2 . D'après [10] IX 1.5, P' et P'' coïncident (cf [10] XI 1.15). Correction : voir note (1).

1.3.- Remarque 1 : Si P et Q sont deux espaces algébriques semi-abélien sur S normal et intègre, de fibres génériques P_{η} et Q_{η} des variétés abéliennes sur $k(\eta)$, la même démonstration donne que

$$\text{Hom}_S(P, Q) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\eta}(P_{\eta}, Q_{\eta}).$$

Remarque 2 : L'hypothèse de normalité faite sur S est indispensable, comme le montre l'exemple suivant : $S =$ cubique à point double sur k algébriquement clos $= \mathbb{P}^1$ avec 0 et ∞ identifiés en un point p , $U = S - \{p\}$, $A =$ courbe elliptique constante E sur U ($A = E \times U$).

Se donner un prolongement P de A revient à se donner un prolongement sur \mathbb{P}^1 , plus un isomorphisme de recollement entre les fibres de ce prolongement en 0 et ∞ . Le prolongement à \mathbb{P}^1 est unique : c'est $E \times \mathbb{P}^1$, mais l'isomorphisme de recollement peut être choisi d'au moins deux manières : $\text{Aut}(E) \supset \{\pm 1\}$. Le théorème devrait toutefois être vrai pour U schématiquement dense dans S et S seulement supposé géométriquement unibranche et, pour S quelconque, deux prolongements donnant lieu aux mêmes prolongements P_{λ^n} des A_{λ^n} devraient être isomorphes [λ premier fixe, n variable].

1.4.- Pour éviter d'avoir à faire des références fantômes, et parce que ce cas nous suffira, nous n'énoncerons le lemme de Gabber que sous des hypothèses sans doute inutilement restrictives.

THÉORÈME (lemme de Gabber) : Soient U un ouvert dense d'un schéma intègre normal excellent S et A un espace algébrique abélien sur U . Il existe un morphisme propre surjectif $f : S' \rightarrow S$ tel que l'image inverse de A sur $f^{-1}(U)$ se prolonge en un espace algébrique semi-abélien sur S' .

1.5.- S'il existait un espace de modules pour les espaces algébriques semi-abéliens, le théorème de réduction semi-stable (SGA 7 IX 3.6), joint au critère valuatif de propreté, montrerait que cet espace est propre sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$, et le lemme de Gabber en serait une conséquence immédiate. On est toutefois loin du compte : non seulement les objets considérés ont des automorphismes, même parfois en nombre infini, mais, pire, un espace algébrique semi-abélien A sur un anneau de valuation discrète complet V n'est pas déterminé par l'espace algébrique formel correspondant. Si la fibre spéciale est isomorphe à \mathbb{G}_m^n , la réduction mod m^k est isomorphe à \mathbb{G}_m^n quelque soit k (rigidité des tores), sans pour autant que A soit nécessairement un tore.

Le mauvais comportement des espaces semi-abéliens, vis à vis de la complétion formelle, tient au fait que ceux-ci ne sont pas nécessairement propres. Pour les courbes, la situation est meilleure, car on dispose de la notion de courbe stable de genre g ([5] 1.1). Ces courbes sont propres et, pour $g \geq 2$, n'ont qu'un nombre fini d'automorphismes. A cause des groupes finis d'automorphismes, les courbes stables de genre $g \geq 2$ ne donnent pas lieu à un espace fin de modules mais donnent du moins lieu à un champ algébrique propre sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ (d'après le critère valuatif de propreté et le théorème de réduction stable pour les courbes ([5] 2.7 ou [3])). On a :

1.6.- LEMME : Soient U un ouvert (quasi-compact) dense d'un espace algébrique S : $X \rightarrow S$ une famille de courbes stables de genre $g \geq 2$ paramétrée par U . Il existe $f : S' \rightarrow S$ propre surjectif tel que l'image inverse de X sur $f^{-1}(U)$ se prolonge en une famille de courbes stables paramétrée par S' .

Preuve : Fixons $g \geq 2$. Pour abréger, nous dirons *courbe stable* pour courbe stable de genre g . Le champ algébrique \mathcal{M} classifiant les courbes stables est propre sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$. Il existe donc ([5] 4.11, 4.12) S_0 , propre sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ et un morphisme surjectif de S_0 dans \mathcal{M} . En d'autres termes : S_0 est propre sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$, muni d'une famille de courbes stables $u_0 : X_0 \rightarrow S_0$ telle que toute

courbe stable de genre g sur k algébriquement clos soit la fibre de X_0/S_0 en un k -point de S_0 .

Sur $U \times S_0$, on dispose des deux courbes stables pr_1^*X et pr_2^*X . Soit l'espace algébrique sur $U_0 \times S_0$

$$I := \underline{\text{Isom}}(\text{pr}_1^*X, \text{pr}_2^*X)$$

(c'est $U_0 \times_{\mathcal{M}} S_0$). Il est fini sur $U \times S_0$ et s'envoie sur U . Soit Γ son image dans $U_0 \times S_0$, $\bar{\Gamma}$ l'adhérence de Γ dans $S \times S_0$, et prolongeons le morphisme fini $I \rightarrow \Gamma$ en un morphisme fini $\bar{I} \rightarrow \bar{\Gamma}$

$$\begin{array}{ccccc} I & \longrightarrow & \Gamma & \hookrightarrow & U \times S_0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \bar{I} & \longrightarrow & \bar{\Gamma} & \hookrightarrow & S \times S_0 \end{array}$$

L'espace \bar{I} , muni du morphisme propre $\bar{I} \rightarrow \bar{\Gamma} \hookrightarrow S \times S_0 \rightarrow S$, est le S' cherché.

L'image inverse sur \bar{I} de X_0/S_0 prolonge l'image inverse sur I de X/U .

Au n° 3, nous tâcherons de démysterifier l'usage fait dans cette preuve des champs algébriques.

1.7.- Le principe de la démonstration du lemme de Gabber sera de se ramener au cas des courbes en utilisant les jacobiniennes. Quelques remarques préliminaires.

(a) Comme expliqué en 1.1 (b), A/U est automatiquement un schéma abélien.

(b) Etant donnés $U \rightarrow S$, A/U et $f : S' \rightarrow S$ comme dans le théorème, tout $f_1 : S'' \rightarrow S$ propre surjectif, avec S'' au-dessus de S' (i.e. tel qu'existe un S -morphisme de S'' dans S'), vérifie encore la conclusion. Appliquant le lemme de Chow ([6]IV 3.1) et normalisant, on voit que si la conclusion du théorème vaut pour $U \subset S$ et A/U , elle vaut aussi avec un $f : S' \rightarrow S$ projectif et surjectif, S' étant intègre et normal.

(c) Il suffit de vérifier le théorème localement sur S : si S est recouvert par une famille finie d'ouverts S_i , et que pour chaque un d'eux on dispose de $f_i : S'_i \rightarrow S_i$, on peut trouver $f : S' \rightarrow S$ projectif et surjectif tel que $S'|_{S_i}$ soit au-dessus de S'_i , que $f^{-1}(U)$ soit dense dans S' et que S' soit normal. Les prolongements de A sur les $S'|_{S_i}$ se recollent en un prolongement sur S , grâce à 1.2.

(d) Il suffit de vérifier le théorème avec U remplacé par un ouvert non vide $V \subset U$: pour S' intègre et normal un prolongement de la restriction de A et V sera automatiquement un prolongement de A (1.2).

2.- DÉMONSTRATION

Soient $U \subset S$ et A/U comme en 1.4, et d la dimension relative de A sur U . On peut supposer, et on suppose, que $d \geq 1$. On cherche S' intègre et normal, et un morphisme surjectif projectif $f : S' \rightarrow S$ tel que l'image inverse de A sur $f^{-1}(U)$ se prolonge en un espace semi-abélien sur S' . Pour ce faire, il est loisible de rapetisser U (1.7(d)), et de remplacer S par S_1 intègre normal s'envoyant par un morphisme surjectif projectif sur S , U par son image inverse U_1 dans S_1 et A_{η} par son image inverse sur U_1 .

Soient $\eta = \text{Spec}(K)$ le point générique de U et A_{η} la variété abélienne sur K fibre de A/U en η . On peut supposer, et on suppose, K infini (sans quoi $S = \text{Spec}(K) = U$). Choisissons un plongement projectif $A_{\eta} \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ de A . Dans la grassmannienne des sous-espaces linéaires H de \mathbb{P}^N de codimension $d-1$, les H dont l'intersection avec A_{η} est une courbe lisse sont les points d'un ouvert dense, donc ayant des K -points. La densité se déduit, par itération, de ce qu'une section hyperplane générale est transverse - voir par exemple SGA 7 XVII 3.1.4.

Choisissons un tel sous-espace linéaire H et soit $\Gamma_{\eta} = A_{\eta} \cap H$. Sur la clôture algébrique \bar{K} de K , on a

$$H^0(A_{\eta}, \mathbb{Z}_{\ell}) \xrightarrow{\sim} H^0(\Gamma_{\eta}, \mathbb{Z}_{\ell})$$

et

$$H^1(A_{\eta}, \mathbb{Z}_{\ell}) \hookrightarrow H^1(\Gamma_{\eta}, \mathbb{Z}_{\ell})$$

(théorème de Lefschetz faible - ou de Bertini - une référence moderne est SGA 2 XIV 4.6 + 1.10) de sorte que Γ_{η} est connexe et que le morphisme $\text{Alb}(\Gamma_{\eta}) = \text{Pic}^0(\Gamma_{\eta}) \rightarrow A_{\eta}$ de la jacobienne de Γ_{η} dans A_{η} est un épimorphisme. En particulier, Γ_{η} est de genre $g \geq d$. Excluons provisoirement le cas $d = 1$. On a alors $g \geq 2$.

Ce qui est vrai sur $\eta = \text{Spec}(K)$ l'est aussi dans un voisinage assez petit V de η : il existe au-dessus de $V \subset U$ convenable une courbe lisse Γ_V de genre $g \geq 2$, plongée dans A_V , avec $\text{Pic}_V^0(\Gamma_V) \rightarrow A_V$. Rapetissant U , on peut supposer et on suppose que $U = V$.

Appliquons le lemme 1.6 à la courbe Γ_U sur $U \subset S$, et remplaçons S par le S' fourni par le lemme (ou plutôt par le normalisé d'une composante irréductible) :

on se ramène à supposer que Γ_U se prolonge en une famille de courbes stables sur S . D'après [2] 7.3, $\text{Pic}_S^0(\Gamma)$ existe comme espace algébrique sur S . Soit $P := \text{Pic}_S^0(\Gamma)$ le sous-espace algébrique en groupes ouvert qui paramètre les faisceaux inversibles sur Γ dont la restriction à chaque composante irréductible de chaque fibre géométrique est de degré 0. Cet espace algébrique est séparé et lisse de type fini sur S . Ses fibres géométriques sont des extensions de variétés abéliennes par des tores : c'est un espace algébrique semi-abélien sur S .

On a ainsi obtenu (rappelons-le, après changement de S , et de U) un espace algébrique semi-abélien P sur S , dont la restriction P_U à U est un espace algébrique abélien sur U muni d'un épimorphisme $u : P_U \rightarrow A$. Soit $K_U = \text{Ker}(u)$. C'est un sous-espace algébrique en groupes de P_U . Quitte à rapetisser U (ce n'est d'ailleurs pas nécessaire), on peut le supposer plat sur U . D'après [11] 5.7.9, une nouvelle modification de S permet de supposer que l'adhérence schématique \bar{K}_U de K_U dans P^0 est un sous-espace algébrique *plat* de P^0 . Lorsque \bar{K}_U est S -plat, c'est automatiquement un sous-espace algébrique en groupes de P^0 .

Pour les espaces algébriques en groupes sur une base S , le passage au quotient par un sous-espace en groupes plat et fermé se fait sans problème. Il est compatible au changement de base et fournit un quotient séparé sur S , plat si l'espace de départ l'est. Voir [1] 7 (les preuves ne sont pas données). Soient K l'adhérence schématique de K_U , supposée plate sur S , et $N = P/K$. Les fibres géométriques de N sont des quotients d'extensions de variété abéliennes par des tores, donc encore des extensions de variétés abéliennes par des tores. L'espace algébrique en groupes N est donc semi-abélien. Puisque $A = P_U/K_U$, il prolonge A et répond au problème posé.

Il reste à traiter le cas $d = 1$ qui avait été exclu. La même preuve continue à s'appliquer si on définit une courbe stable de genre un comme une courbe pointée : $X \xrightarrow[\epsilon]{\sim} S$, avec ϵ dans l'ouvert de lissité, de fibres géométriques des courbes elliptiques ou des cubiques nodales.

Autre possibilité : définir Γ_η comme une section hyperplane de $A_\eta \times A_\eta$.

3.- EXORCISER LES CHAMPS

3.1.- Rappelons la définition d'un groupoïde en schémas (SGA 3 VI). C'est un diagramme

$$(3.1.1) \quad S_2 \rightrightarrows S_1 \rightrightarrows S_0$$

(flèches d_i , $i = 0, 1$ et $0, 1, 2$ respectivement), avec

$$\begin{array}{ccc} & d_0 & \\ S_2 & \xrightarrow{\quad} & S_1 \\ d_2 \downarrow & & \downarrow d_1 \\ S_1 & \xrightarrow{d_0} & S_0 \end{array}$$

cartésien tel que, pour tout schéma T , si on appelle objets les éléments de $\text{Hom}(T, S_0)$, flèches ceux de $\text{Hom}(T, S_1)$, source (resp but) de f l'objet $d_1(f)$ (resp $d_0(f)$) et si pour f de but la source de g (de sorte qu'il existe un et un seul $\langle g, f \rangle \in \text{Hom}(T, S_2)$ avec $d_2\langle g, f \rangle = f$ et $d_0\langle g, f \rangle = g$), on définit la composition par $g \circ f = d_1\langle g, f \rangle$, on obtient un groupoïde, i.e une catégorie dont toutes les flèches sont inversibles. On la note $S_*(T)$. Pour T variable, les $S_*(T)$ forment un préchamp en groupoïdes.

Les champs algébriques quasi-compacts et séparés sont les champs en groupoïdes obtenus comme champ associé à un préchamp $S_*(T)$ (pour la topologie étale) pour lequel S_0 est quasi-compact, $(d_0, d_1) : S_1 \rightarrow S_0 \times S_0$ est un morphisme fini et où les $d_i : S_1 \rightarrow S_0$ sont étales.

Les espaces algébriques quasi-compacts et séparés correspondent au cas particulier où $(d_0, d_1) : S_1 \rightarrow S_0 \times S_0$ est un plongement fermé. Le sous-schéma S_1 de $S_0 \times S_0$ est alors une relation d'équivalence étale et l'espace algébrique "est" le quotient S_0/S_1 .

3.2.- Soient g un entier ≥ 2 et disons simplement *courbe stable* pour une courbe stable de genre g . Expliquons comment on peut construire un diagramme (3.1.1) dans le cas du champ \mathcal{M} des courbes stables. Etant donné T_i ($i = 1, 2$), munis d'une courbe stable $u_i : X_i \rightarrow T_i$, on note $T_1 \times_{\mathcal{M}} T_2$ le schéma $\underline{\text{Isom}}(X_1, X_2)$ qui représente le foncteur $T \mapsto \{(a_1, a_2, \phi) | a_i \text{ est un morphisme de } T \text{ dans } T_i \text{ et } \phi \text{ est un isomorphisme de } a_1^*X_1 \text{ avec } a_2^*X_2\}$.

Ce "produit fibré" est fini sur $T_1 \times T_2$. On dit que S , muni d'une courbe stable X (i.e de $S \rightarrow \mathcal{M}$) est étale sur \mathcal{M} (resp lisse, resp s'envoie sur \mathcal{M}) si pour tout T , muni d'une courbe stable Y , $S \times_{\mathcal{M}} T$ est étale sur T (resp lisse, resp s'envoie sur T). Si S est étale sur \mathcal{M} et s'envoie sur \mathcal{M} , le champ \mathcal{M} correspond au diagramme (3.1.1) suivant :

$$S \times_{\mathcal{M}} S \times_{\mathcal{M}} S \rightrightarrows S \times_{\mathcal{M}} S \rightarrow S$$

L'espace de modules H des courbes stables X munies d'un plongement tri-canonical $X \hookrightarrow \mathbb{P}^{5g-6}$ est lisse sur \mathcal{M} et s'envoie sur \mathcal{M} . Le groupe $\mathrm{PGL}(5g-5)$ agit sur H avec des stabilisateurs finis et réduits. Si S est une somme disjointe de sous-schémas lisses de H , transverses aux orbites de PGL , de dimension complémentaire et les rencontrant toutes, S est étale sur \mathcal{M} et s'envoie sur \mathcal{M} , donc fournit un diagramme (3.1.1). Le champ \mathcal{M} est séparé de type fini sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ ([5] 5.1). Les déformations des courbes n'étant pas obstruées, il est lisse. On peut aussi le déduire de ce que H , lisse sur \mathcal{M} , est lisse est $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

3.3.- Soient $n \geq 1$ un entier et $\mathcal{M}_n^0[1/n]$ le champ algébrique classifiant les courbes propres et lisses de genre g , X , sur des bases S où n est inversible, munies d'un isomorphisme (la structure de niveau n) $\alpha : \mathrm{Pic}_S^0(X)_n \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$. Si \mathcal{M}^0 est l'ouvert de \mathcal{M} correspondant aux courbes lisses, le morphisme "oubli de la structure de niveau n " : $\mathcal{M}_n^0[1/n] \rightarrow \mathcal{M}^0[1/n]$ fait de $\mathcal{M}_n^0[1/n]$ un revêtement fini étale de $\mathcal{M}^0[1/n]$.

3.4.- DÉFINITION : \mathcal{M}_n est le normalisé de \mathcal{M}_g dans $\mathcal{M}_n^0[1/n]$.

Dans le langage 3.1., cette définition signifie ceci.

(a) On choisit S_0 étale sur \mathcal{M} et s'envoyant sur \mathcal{M} , d'où comme en 3.2 un diagramme (3.1.1) S_* .

(b) Sur chaque S_i , on dispose par construction d'une courbe stable X_i ($i = 0, 1, 2$), et elles donnent lieu à un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccccc} X_2 & \rightrightarrows & X_1 & \rightrightarrows & X_0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S_2 & \rightrightarrows & S_1 & \rightrightarrows & S_0. \end{array}$$

(c) Soit S_i^0 l'ouvert de S_i au-dessus duquel X_i est lisse, et $S_{i,n}^0[1/n]$ revêtement fini étale $\mathrm{Isom}(\mathrm{Pic}^0(X_i)_n, (\mathbb{Z}/n)^{2g})$ de $S_i^0[1/n]$.

Soit enfin $S_{i,n}$ le normalisé de S_i dans $S_{i,n}^0[1/n]$. Parce que $S_{i,n}^0[1/n]$ est lisse sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$, donc normal, c'est encore la somme disjointe, sur les composantes irréductibles T de $S_{i,n}^0[1/n]$ du normalisé de la composante image de S_i dans le corps des fonctions rationnelles de T .

La normalisation commutent aux changements de base étale, les $S_{i,n}$ forment à nouveau un diagramme (3.1.1). Le champ \mathcal{M}_n est le champ défini par ce diagramme.

Le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} S_{2,n} & \rightrightarrows & S_{1,n} & \rightrightarrows & S_{0,n} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S_2 & \rightrightarrows & S_1 & \rightrightarrows & S_0 \end{array}$$

est cartésien. Dans le langage des champs, cela fournit $S_{0,n} = S_0 \times_{\mathcal{M}} \mathcal{M}_n$ et la représentabilité relative de \mathcal{M}_n sur \mathcal{M} . Nous aurons seulement à utiliser la conséquence, formelle sur les définitions, que pour $t \in S_{0,n}(T)$ d'image s dans $S_0(T)$, on a dans les groupoïdes $S_{*,n}(T)$ et $S_*(T)$ (3.1)

$$(3.4.1) \quad \text{Aut}(t) \hookrightarrow \text{Aut}(s).$$

3.5.-PROPOSITION : Si $n \geq 3$, $\mathcal{M}_n[1/n]$ est un espace algébrique.

En d'autres termes, avec les notations de 3.4, le morphisme (d_0, d_1) identifie $S_{1,n}[1/n]$ à un sous-schéma fermé de $S_{0,n}[1/n] \times S_{0,n}[1/n]$. Le point essentiel est le

LEMME 3.5.1. - Soit X une courbe stable sur k algébriquement clos et $n \geq 3$ inversible dans k . Tout automorphisme de X , agissant trivialement sur $\text{Pic}^0(X)_n$, est l'identité.

Preuve : Ecrivons $\text{Pic}^0(X)$ comme extension d'une variété abélienne par un tore :

$$0 \rightarrow T \rightarrow \text{Pic}^0(X) \rightarrow A \rightarrow 0$$

et soit L le groupe des caractères de T . On sait que tout automorphisme u de X est d'ordre fini. S'il agit trivialement sur $\text{Pic}^0(X)_n$, il agit trivialement sur A_n et sur T_n , donc sur $L/n L$. Par Serre [12], pour A , et un argument direct analogue pour L , il agit trivialement sur A et sur L , donc sur T .

L'endomorphisme u^{-1} de $\text{Pic}^0 X$ envoie donc A sur T , donc est trivial : u agit trivialement sur $\text{Pic}^0(X)$, et on conclut par [5] 1.13.

LEMME 3.5.2.- Soient S un schéma normal, $j : U \hookrightarrow S$ un ouvert dense de S , A un espace algébrique abélien sur U , prolongé en N semi-abélien sur S_* et n un entier inversible sur S

(i) Le faisceau étale N_n sur S des points de division par n de N s'injecte dans $j_* j^* N_n = j_* A_n$.

(ii) Tout isomorphisme α , sur U , de A_n avec le faisceau constant $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S^{2g}$, se prolonge en un monomorphisme $N_n \hookrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S^{2g}$.

L'assertion (i) résulte de ce que N_n est séparé sur S . Parce que S est normal, on a $j_* (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_N^{2g} = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S^{2g}$, et

$$N_n \hookrightarrow j_* j^* N_n = j_* A_n \xrightarrow{\sim} j_* (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_U^{2g} = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S^{2g}$$

est le prolongement cherché.

Preuve de la proposition : Posons $T_i = S_{i,n}[1/n]$. Puisque T_1 est fini et net sur $T_0 \times T_0$ (net car étale, donc net, sur T_0), il suffit de vérifier que pour tout corps algébriquement clos k , $T_1(k)$ s'injecte dans $T_0(k) \times T_0(k)$. On peut supposer n inversible dans k , sans quoi $T_1(k) = \emptyset$. Parce que $T_*(k)$ est un groupoïde, il suffit de vérifier que pour $t \in T_0(k)$, il existe exactement un objet de $T_1(k)$ au dessus de (t,t) i.e que $\text{Aut}(t)$ est réduit à l'identité.

Notons encore X_* la courbe stable sur T_* image inverse de X_* sur S_* de 3.4 (b). Sur les $T_i^0 := S_{i,n}^0[1/n]$, on dispose par définition d'un système cartésien d'isomorphismes $\text{Pic}^0(X_i)_n \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$. D'après 3.5.2, il se prolonge sur T_i en un monomorphisme de faisceaux étals

$$\text{Pic}^0(X_i)_n \hookrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}.$$

Il en résulte que le morphisme du champ défini par T_* dans celui, M , défini par S_* se factorise par le champ (non algébrique, celui-là) des courbes stables X , munies de $\text{Pic}^0(X)_n \hookrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$.

Pour $t \in T_0(k)$, d'image s dans $(S_0(k))$, le monomorphisme (3.4.1)

$\text{Aut}(t) \hookrightarrow \text{Aut}(s) = \text{Aut}(\text{fibre de } X_0 \text{ en } s)$ à donc une image consistant d'automorphismes de $(X_0)_S$ agissant trivialement sur $\text{Pic}^0(X_{0S})_n$. D'après 3.5.1, un tel automorphisme est trivial.

3.6.- COROLLAIRE : Si n est divisible par deux entiers n_i ($i = 1, 2$) premiers entre eux et ≥ 3 , alors \mathcal{M}_n est un espace algébrique.

Il suffit de vérifier que chaque $\mathcal{M}_n^{[1/n_i]}$ est un espace algébrique, i.e que les objets du champ correspondant n'ont pas d'automorphisme. On le déduit de (3.4.1) et de sa factorisation $\mathcal{M}_n^{[1/n_i]} \rightarrow \mathcal{M}_{n_i}^{[1/n_i]} \rightarrow \mathcal{M}$, compte tenu de 3.5.

3.7.- Dans 3.6, le langage des champs a permis de construire, à partir d'une famille S de courbes stables comme en 3.2, un atlas, au sens de la topologie étale, définissant un espace algébrique \mathcal{M}_n . Les critères valuatifs de séparation et de propriété montrent, grâce au théorème de réduction semi-stable, que cet espace algébrique est propre sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$. On peut utiliser ce \mathcal{M}_n comme S_0 dans la preuve du lemme 1.6. Si on préfère que S_0 y soit projectif sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$, il suffit d'appliquer le lemme de Chow à \mathcal{M}_n . En fait, \mathcal{M}_n est projectif (Mumford).

4.- OBTENIR DES SCHÉMAS

Dans ce n°, nous montrons comment modifier et compléter la preuve du lemme de Gabber pour obtenir des schémas, plutôt que des espaces algébriques. Une autre approche m'a été signalée par Michel Raynaud : il me dit savoir prouver que si X est un S -espace algébrique en groupes, lisse et séparé sur S , à fibres connexes, alors X devient représentable après changement de base à un éclaté convenable S'/S .

Soit g un entier ≥ 2 . Pour abréger, nous dirons *courbe stable* pour une courbe stable de genre g .

4.1.- Pour X/S une courbe lisse de genre g , l'autodualité de la jacobienne $\epsilon : \text{Pic}_S^0(X) \xrightarrow{\sim} (\text{Pic}_S^0(X))^*$ fournit un faisceau inversible relativement ample canonique sur $\text{Pic}_X^0(X)$:

$$(\text{Id}, \epsilon)^* \text{ (faisceau de Poincaré).}$$

Il est symétrique, et trivialisé le long de la section nulle. Sa formation est compatible à tout changement de base. Notons le $\mathcal{L}(X/S)$.

4.2.- LEMME : Il est possible, de façon unique à isomorphisme unique près, d'attacher à chaque courbe stable X/S un faisceau inversible $\mathcal{L}(X/S)$, sur $\text{Pic}_S^0(X)$, trivialisé le long de la section nulle, de formation compatible à tout changement de base, et redonnant $\mathcal{L}(X/S)$ de 4.1 pour X lisse.

Il suffit de traiter le cas "universel" que voici : on prend X_*/S_* comme en 3.4, et on cherche des faisceaux inversibles $\mathcal{L}'(X_i/S_i)$ sur les $\text{Pic}_{S_i}^0(X_i)$,

trivialisés le long de la section nulle, prolongeant les faisceaux inversibles 4.1 au-dessus de l'ouvert S_i^0 de S_i où X_i est lisse et formant un système cartésien sur S_* (compatibilité aux changements de base $S_i \rightarrow S_j$). Pour chaque i , S_i est lisse sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$, donc régulier. De même pour $\text{Pic}_{S_i}^0(X_i)$, lisse sur S_i . Il existe donc un prolongement $\mathcal{L}'(X_i/S_i)$ du faisceau inversible $\mathcal{L}(X_i|S_i^0)/S_i^0$ de 4.1 (prendre le déterminant d'un quelconque prolongement cohérent). Le corrigeant par l'image inverse de sa restriction à la section nulle, on obtient un prolongement $\mathcal{L}''(X_i/S_i)$, trivialisé le long de la section nulle (la trivialisation prolongeant celle de 4.1 sur S_i^0). Parce que $\text{Pic}_{S_i}^0(X_i)$ est à fibres géométriques irréductibles, un tel prolongement est unique à isomorphisme unique près. Grâce à cette unicité, les $\mathcal{L}''(X_i/S_i)$ sont compatibles aux changements de base $S_i \rightarrow S_j$ et répondent au problème posé.

4.3.- PROPOSITION : Pour X/S une courbe stable, le faisceau inversible $\mathcal{L}(X/S)$ de 4.2 est relativement ample. En particulier, $\text{Pic}_S^0(X)$ est quasi-projectif sur S , et est un schéma si S en est un.

A nouveau, il suffit de le vérifier dans un cas universel, par exemple, avec les notations précédentes, pour X_0/S_0 . En particulier, on peut supposer que S est un schéma régulier et que l'ouvert S^0 de S au-dessus duquel X est lisse est dense. On le suppose. Si on savait à priori que $\text{Pic}_S^0(X)$ est un schéma, l'affirmation résulterait de [10] XI 1.13. Malheureusement, la preuve de loc cit utilise de façon essentielle qu'on ait affaire à un schéma, pour construire à priori, localement sur S , des diviseurs relativement amples comme compléments d'ouverts affines (cf [10] V 3.10).

4.4.- LEMME : Soit X une courbe géométriquement réduite connexe sur k séparablement clos. Il existe un diviseur D , contenu dans l'ouvert de lissité de X , de degré $g := \dim H^1(X, \mathcal{O})$, tel que

$$H^0(X, \mathcal{O}(D)) = k \quad \text{et} \quad H^1(X, \mathcal{O}(D)) = 0.$$

Preuve : L'assersion $H^0(X, \mathcal{O}(D)) = k$ résulte des autres et de Riemann Roch.

Si ω est le faisceau dualisant, on a

$$\dim H^0(X, \omega) = g$$

et $H^1(X, \mathcal{O}(D)) = 0$ équivaut par dualité à $H^0(X, \omega(-D)) = 0$.

Le faisceau ω n'a pas de composante immergée. Ceci permet de construire par récurrence sur i , $0 \leq i \leq g$, une suite croissante de diviseurs D_i de degré i contenus dans l'ouvert de lissité avec $\dim H^0(X, \omega(-D_i)) = g-i$:

prendre $D_0 = \emptyset$ et $D_{i+1} = D_i + P_i$, avec P_i un k -point lisse où les sections de $H^0(X, \omega(-D_i))$ ne s'annulent pas toutes. On prend $D = D_g$.

4.5.- LEMME : Soit $f : X \rightarrow S$ avec f projectif plat, de fibres géométriques des courbes réduites et connexes. Localement pour la topologie étale sur S , il existe un ouvert $V \subset \mathrm{Pic}_S^0(X)$ qui rencontre chaque fibre et soit un schéma.

Preuve : On se ramène à supposer S strictement local, de point fermé s , et il suffit de construire un ouvert $V \subset \mathrm{Pic}_S^0(X)$ qui soit un schéma et rencontre X_s .

Soit D_s un diviseur de degré $g := \dim H^1(X_s, \mathcal{O})$ sur X_s , contenu dans l'ouvert de lissité X^0 vérifiant $H^1(X_s, \mathcal{O}(D_s)) = 0$ (4.4). Prolongeons-le en un diviseur de Cartier relatif D sur X . C'est possible car S est local hensélien. On a

$$f_* \mathcal{O}(D) = \mathcal{O} \quad \text{et} \quad R^1 f_* \mathcal{O}(D) = 0.$$

Soit V' l'ouvert de $\mathrm{Pic}_S^0(X)$ correspondant aux faisceaux inversibles \mathcal{L} tel que $R^1 f_* \mathcal{L}(D) = 0$. Pour un tel \mathcal{L} , $f_* \mathcal{L}(D)$ est libre de rang un, de formation compatible à tout changement de base. Soit $V \subset V'$ l'ouvert de V' correspondant aux \mathcal{L} tels que si la section s est une base de $f_* \mathcal{L}$, le sous-schéma $s = 0$ de X soit un diviseur de Cartier relatif $D(\mathcal{L})$, contenu dans l'ouvert de lissité X^0 . Par construction, V contient la section nulle. Le morphisme $\mathcal{L} \rightarrow D(\mathcal{L})$ identifie V à un ouvert de $\mathrm{Sym}^g(X^0)$ et V est donc un schéma. La projectivité de X sur S a servi à garantir l'existence de $\mathrm{Sym}^g(X)$.

4.6.- LEMME : Sous les hypothèses de 4.5, localement pour la topologie étale sur S , $\text{Pic}_S^0(X)$ est un schéma.

On se ramène encore à supposer S strictement local. Posons $P := \text{Pic}_S^0(X)$.

C'est un espace algébrique lisse sur S , purement d'une dimension relative g . Soit V comme en 4.5. Il suffit de montrer que P est la réunion des gV pour $g \in P(S)$. On se ramène à supposer S essentiellement de type fini sur \mathbb{Z} , ce qui permet de "compter les dimensions" sans crainte. Soit n un entier, et P^n la puissance fibrée n -uple de P sur S . Pour t un point géométrique de S et $g = (g_1, \dots, g_n)$ un point géométrique de P^n au-dessus de t , disons que g est permis si les $g_i V$ recouvrent P_t . Les points géométriques permis sont les points géométriques d'une partie constructible Y de P^n (EGA IV 3^{ème} partie 9.6.1 (1)).

Soit Z son complément. On vérifie que Z est fibre à fibre de codimension $\geq n-g$. Si $n-g > \dim S$, il en résulte que l'adhérence Z^- de Z ne contient pas toute la fibre spéciale et on peut trouver une section g de $P^n - Z^-$: P est la réunion des $g_i V$.

4.7.- Remarque : Dans 4.5 et 4.6, l'hypothèse que f est projectif peut être remplacée par celle que f soit propre : localement sur S pour la topologie étale, f sera automatiquement projectif.

4.8.- Preuve de 4.3 (sous les hypothèses auxquelles on s'est réduit, voir 4.3).

Le problème est local pour S pour la topologie étale. Grâce à 4.6, on peut donc appliquer [8] XI 1.13.

4.9.- Remarque : La démonstration de [8] XI 1.13 ne fait, me semble t-il, usage de l'hypothèse qu'on ait affaire à des schémas que via la conclusion de 4.5. Ceci permettrait d'éviter 4.6.

4.10.- PROPOSITION : Le lemme de Gabber (théorème 1.4) reste vrai avec, dans la conclusion, espace algébrique semi-abélien remplacé par schéma semi-abélien.

Preuve : Procédant comme dans la démonstration donnée au § 2, on se ramène à supposer l'existence d'une courbe stable X sur S , lisse sur U , et, sur U , d'un épimorphisme $u : \text{Pic}_S^0(X) \rightarrow A$ dont le noyau K_U se prolonge en un sous-espace algébrique en groupes plat K de $\text{Pic}_S^0(X)$. Montrons que l'espace algébrique semi-abélien $P := \text{Pic}_S^0(X)/K$, prolongeant A , est un schéma.

Sur U , le théorème de complète réductibilité de Poincaré assure l'existence de $v : A \rightarrow \text{Pic}_S^0(X)$ tel que uv soit l'endomorphisme de multiplication par un entier $n \geq 1$ de A . Notons encore u le morphisme de passage au quotient de $\text{Pic}_S^0(X)$ dans P . D'après 1.3 remarque 1, v se prolonge en un morphisme encore noté v de P dans $\text{Pic}_S^0(X)$. Par densité de U dans S , on a encore $uv = n$.

La multiplication par $n : P \rightarrow P$ étant quasi-finie, v est quasi-fini, donc quasi-affine. ([6] II-6.15). Puisque $\text{Pic}_S^0(X)$ est un schéma, P en est un aussi.

Je remercie M. Raynaud et O. Gabber d'une lecture critique d'une première version de ce texte.

Note (1)

(1) O. Gabber m'a fait observer que la preuve de [10] XI 1.15 fait usage de ce qu'on travaille avec des schémas. Ci-dessous, nous donnons la preuve d'énoncés voisins, valables pour les espaces algébriques et suffisant à justifier 1.2 et 1.3 Remarque 1.

(1).1. Pour $S = \text{Spec}(A)$ un schéma affine et U un sous-schéma ouvert de S réunion finie d'ouverts $U_i = \text{Spec}(A[f_i^{-1}])$, l'adhérence schématique F dans S d'un sous-schéma fermé F de U , défini dans chaque carte U_i par un idéal I_i de $A[f_i^{-1}]$, est le sous-schéma fermé de S défini par l'idéal I suivant. Pour ϵ_i l'application canonique de A dans $A[f_i^{-1}]$, on prend

$$I = \bigcap_i \epsilon_i^{-1}(I_i).$$

Si $S' = \text{Spec}(A')$ est plat sur S , et si U' (resp F' , resp \bar{F}') est l'image inverse de U (resp F , resp \bar{F}) dans S (resp U , resp S), \bar{F}' est encore l'adhérence schématique de F' dans S' . En particulier, la construction des adhérences schématiques commute à la localisation étale, donc garde un sens pour les espaces algébriques.

Généralisation : Pour S comme ci-dessus et $f = X \longrightarrow S$ quasi-compact, l'image schématique fermée $f(X)^-$ est le sous-schéma fermé d'idéal l'ensemble des $a \in A$ d'image inverse nulle sur X . Pour f l'inclusion de F comme ci-dessus, on retrouve la notion d'adhérence schématique. On a pour $f(X)^-$ la même compatibilité aux changements de base que pour l'adhérence schématique.

(1).2. Soient S un espace algébrique noethérien, X et Y deux S -espaces algébriques, munis de sections e, V un ouvert de X , $U = e^{-1}(V)$ son image réci-proque dans S et f_V un S -morphisme de V dans Y , envoyant e sur e :

$f_V \circ (e|_U) = e|_U$. Pour chaque entier n , f_V induit un morphisme du $n^{\text{ième}}$ voisinage infinitésimal de e dans V (ou dans X_U , l'image inverse de U dans X , cela revient au même) dans le $n^{\text{ième}}$ voisinage infinitésimal de e dans Y_U . Le système projectif de ces morphismes est un morphisme f_U^1 de X_U^1 , complété formel de X_U le long de e , dans Y_U^1 .

PROPOSITION : On suppose X lisse sur S et Y séparé de type fini.

(i) Si U contient tous les points de S de profondeur ≤ 1 , alors

$f_U^1 : X_U^1 \rightarrow Y_U^1$ se prolonge, de façon unique en un morphisme f^1 du complété formel X^1 de X le long de e dans celui, Y^1 , de Y .

(ii) Soit Γ l'adhérence schématique, dans $X \times_S Y$, du graphe

$\Gamma_V \subset V \times_S Y$ de $f_V : X_V^1 \rightarrow Y_V^1$ se prolonge en $f^1 : X^1 \rightarrow Y^1$ et

que U contient tous les points de S de profondeur 0, alors Γ est étale sur X le long de e (de complété le graphe de f^1).

Preuve : Les problèmes sont locaux sur S , pour la topologie étale. Ceci permet de supposer S affine. Les voisinages infinitésimaux de e dans X et Y sont alors également des schémas affines, et (i) se prouve comme dans [10] ; l'hypothèse de lissité sert à assurer que les voisinages infinitésimaux de e dans X sont finis et plats sur S .

Quelques préliminaires avant de prouver (ii). Un espace algébrique E a en chaque point s un anneau local - en fait local hensélien - qui, dans le cas particulier où E "est" un schéma est l'hensélisé de l'anneau local ordinaire. Le complété de E en s est le spectre du complété de cet anneau local.

LEMME : Soient S le spectre d'un anneau local noethérien complet A , X le spectre de $A[[T_1 \dots T_n]]$, e la section nulle de X/S , V un ouvert de X tel que $U := e^{-1}(V)$ contienne tous les points de S de profondeur 0 et $F \subset V$ un sous-schéma fermé contenant tous les voisinages infinitésimaux de $e(U)$ dans V . Alors $F = V$.

Preuve : Il suffit de montrer que X est l'adhérence schématique de F dans X .

En effet, si $f = \sum_i a_i T_i^i$ est nul sur F , chaque a_i est nul sur $U \subset S$, donc nul, et $f = 0$.

Preuve de (ii) : Soit s un point de S . Ecrivons x_s^1 pour $X_{e(s)}^1$ et v_s^1 (resp U_s^1) pour l'image inverse de V (resp. U) dans X_s^1 (resp S_s^1). Le morphisme formel f^1 induit $f_1 : X_s^1 \rightarrow Y$ et f induit $f_2 : V_s^1 \rightarrow Y$. Montrons que f_2 est la restriction $f_1|_{V_s^1}$ de f_1 à V_s^1 : ces morphismes coïncident sur un sous-schéma

fermé de V_s^1 contenant tous les voisinages infinitésimaux de $e(U_s^1)$, et on applique le lemme précédent. L'image inverse de Γ_V dans $X_s^1 \times_S Y$ est donc le graphe de la restriction de f_1 à V_s^1 , d'adhérence schématique le graphe de $f_1 : X_s^1 \rightarrow Y$. La formation de l'adhérence schématique commutant au changement de base plat $X_s^1 \times_S Y \rightarrow X \times_S Y$, on voit que, après le changement de base, $X_s^1 \rightarrow X$, Γ est étale sur X . Il en résulte que Γ est étale sur X en $e(s)$.

(1).3. PROPOSITION : Soient S un espace algébrique noethérien, G et H deux espaces algébriques en groupes sur S , U un ouvert de S et f_U un morphisme de G_U dans H_U . On suppose G lisse à fibres connexes, H de type fini et séparé sur S et que U contient tous les points de profondeur 0 de S . Si le complété f_U^1 de f_U le long des sections neutres se prolonge en $f^1 : G^1 \rightarrow H^1$ - tel est le cas si U contient tous les points de S de profondeur ≤ 1 (proposition (1).2 (i)) - alors f se prolonge en un morphisme (unique) de G dans H .

Preuve : L'unicité provient de ce que U est schématiquement dense dans S , donc G_U schématiquement dense dans G . Prouvons l'existence. Soient Γ_U le graphe de f_U , $\Gamma \subset G \times_S H$ son adhérence schématique et Γ^0 l'ouvert de Γ où Γ est étale sur G . D'après (1).2 (ii), Γ^0 contient la section neutre de $G \times_S H$. Pour toute section γ de Γ , la translation à gauche par $\gamma|_{U \times \rho_U(\gamma|U)}$ envoie Γ_U sur lui-même. Par transport de structure, la translation à gauche par γ envoie donc Γ^0 sur lui-même. Ceci reste vrai après tout changement de base plat. Prenant pour changement de base Γ^0/S , on trouve que Γ^0 est un sous-espace en groupes de $G \times_S H$. Son image dans G est un sous-schéma en groupes ouvert de G , donc est G puisque G/S est à fibres connexes. Puisque Γ^0/G est étale et séparé, la fonction sur G "nombres de points de la fibre géométrique de Γ^0/G en $x \in |G|'$ " est semi-continue inférieurement. Etant partout ≥ 1 et égale à 1 sur G_U , elle est constante égale à 1 : le morphisme $\Gamma^0 \rightarrow G$ est étale, surjectif et radiciel, donc un isomorphisme (SGA 1 I 5.1). Le prolongement cherché est le composé $G \hookleftarrow \Gamma^0 \rightarrow H$, de graphe Γ^0 .

(1).4. Remarque : La proposition devrait rester vraie avec l'hypothèse G/S lisse affaiblie en G/S plat de type fini, et en omettant l'hypothèse que H est séparé sur S .

B I B L I O G R A P H I E

- [1] M. ARTIN.- *The implicit function theorem in algebraic geometry*, in Proc. Coll. Alg. Geom., Tata Institute (1969).
- [2] M. ARTIN.- *Algebraization of formal moduli I*, p. 21-71 in *Global analysis, papers in honor of K. Kodaira*. Princeton University Press 1969.
- [3] M. ARTIN and G. WINTERS.- *Degenerate fibres and stable reduction of curves*. Topology 10 (1971) p. 373-383.
- [4] W.L. CHOW.- *On the projective embedding of homogeneous varieties*, p. 122-128 in *A symp. in honor of S. Lefschetz*. Princeton University Press.
- [5] P. DELIGNE and D. MUMFORD.- *The irreducibility of the space of curves of a given genus*. Publ. math. IHES 36 (1969) p. 75-110.
- [6] D. KNUTSON.- *Algebraic spaces*. Lecture Notes in Math. 203. Springer Verlag 1971.
- [7] J.P MURRE.- *Representation of unramified functors. Applications*, Séminaire Bourbaki, 294, 1964-1965.
- [8] M. RAYNAUD.- *Modèles de Néron*. C.R. Acad. Sci. 262, (1966), pp.413-416.
- [9] M. RAYNAUD.- *Spécialisation du foncteur de Picard*. Publ. Math. IHES 38 (1970) p. 27-76.
- [10] M. RAYNAUD.- *Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes*. Lecture Notes in Math. 119. Springer Verlag 1970.
- [11] M. RAYNAUD et L. GRUSON.- *Critères de platitude et de projectivité*. Inv. Math. 13 (1971) p. 1-89.
- [12] J-P.SERRE.- *Rigidité du foncteur de Jacobi d'échelon $n \geq 3$* . App. à l'exposé 17 du séminaire Cartan 60/61.

S I G L E S

E.G.A : Eléments de géométrie algébrique, par A. Grothendieck et J. Dieudonné,
publié aux Publ. Math. IHES. EGA III 1^{ère} partie = n° 11,
EGA IV 3^{ème} partie = n° 28.

S.G.A. : Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie. Publié aux Lecture
Notes in Math. (sauf SGA 2 : cohomologie locale des faisceaux cohérents
et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux; North Holland Publ. Co 1968).
SGA 2 XIV=profondeur et théorèmes de Lefschetz en cohomologie étale,
par Michèle Raynaud ; SGA 3 V = construction de préschémas quotient,
par A. Gabriel, in LN 151 ; SGA 7 XI = modèles de Néron et monodromie,
par A. Grothendieck, in LN 288 ; SGA 7 XVII = pinceaux de Lefschetz :
théorème d'existence, par N. Katz, in LN 340 .

P. DELIGNE
I.H.E.S
Le Bois Marie
35 route de Chartres
91440 BURES SUR YVETTE

Astérisque

LUC ILLUSIE

Déformations de groupes de Barsotti-Tate

Astérisque, tome 127 (1985), p. 151-198

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985_127_151_0>

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » ([http://smf4.emath.fr/
Publications/Asterisque/](http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/)) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

Exposé VI

DÉFORMATIONS DE GROUPES DE BARSOTTI-TATE (*)

d'après A. GROTHENDIECK

par Luc ILLUSIE

0.- INTRODUCTION

Dans son cours au Collège de France, en juin 1971, Grothendieck avait établi un théorème d'existence de prolongements infinitésimaux pour les groupes de Barsotti-Tate et Barsotti-Tate tronqués. Nous présentons ici la démonstration de ce résultat (non publié), telle que nous avons pu la reconstituer d'après les notes des auditeurs du cours. Ce théorème jouait un rôle central dans les travaux de Grothendieck sur la classification des groupes de Barsotti-Tate et des groupes finis commutatifs localement libres en termes de cristaux de Dieudonné, cf.[11] et [12]. Une partie de son programme a été menée à bien par Messing [22] et Mazur-Messing [20], puis par Berthelot-Breen-Messing [3], suivant une méthode différente utilisant, à la place du résultat de Grothendieck, un résultat de Raynaud affirmant qu'un groupe fini commutatif localement libre se plonge localement, pour la topologie de Zariski, dans un schéma abélien [3, 3.1.1]; le recours à ce résultat simplifie d'ailleurs assez sensiblement la construction des cristaux de Dieudonné que Grothendieck avait en vue. La raison pour laquelle nous donnons ici la démonstration du théorème de Grothendieck est qu'il permet, très simplement, d'étendre le théorème de Raynaud sur le déterminant du module de Tate d'un groupe p -divisible [25,4.2.1] au cas des groupes de Barsotti-Tate tronqués, et que cette extension conduit, comme l'ont montré Deligne et Paršin, à des améliorations "effectives" du théorème de Faltings [9], voir [7], [26].

La démonstration du théorème de Grothendieck utilise deux ingrédients. Le premier est constitué par les propriétés différentielles des groupes de Barsotti-Tate tronqués, qui figurent pour l'essentiel dans [22], et auxquelles

(*) Cet exposé ne correspond à aucun exposé oral du séminaire.

nous consacrons le n°2, après avoir réuni au n°1, pour la commodité du lecteur, quelques définitions et résultats standard. Le second est la théorie d'obstructions de [14], dont nous rappelons, au n°3, les énoncés dont nous avons à nous servir. Nous donnons la démonstration du théorème de Grothendieck au n°4, en même temps que quelques applications, notamment à la variante du théorème de Raynaud sur le déterminant à laquelle on a fait allusion plus haut.

Je remercie P. Deligne, T. Ekedahl, O. Gabber et M. Raynaud pour d'utiles discussions pendant la préparation de cet exposé. En outre, P. Berthelot et O. Gabber ont lu attentivement le manuscrit ; ils m'ont signalé quelques erreurs et m'ont suggéré plusieurs améliorations; je les en remercie très chaleureusement.

Dans toute la suite, p désigne un nombre premier fixé. Si n est un entier ≥ 0 et G un groupe abélien, on note $\underset{p^n}{G}$ ou, comme Grothendieck et quand il n'en peut résulter de confusion, $G(n)$ le noyau de la multiplication par p^n dans G .

1.- GÉNÉRALITÉS SUR LES GROUPES DE BARSOTTI-TATE (cf. [22] , [12])

Soit S un schéma. On travaillera avec la topologie fppf sur $(\text{Sch})/S$ (mais cette topologie ne jouera qu'un rôle de figurant).

Définition 1.1.- Soient n un entier ≥ 1 et G un faisceau abélien sur S . On dit que G est un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon n (en abrégé, BTT d'échelon n , ou BT_n) si G vérifie les conditions (i) et (ii) ci-après et la condition supplémentaire (iii) quand $n = 1$:

- (i) G est annulé par p^n et plat sur \mathbb{Z}/p^n ;
 - (ii) $G(1)$ est représentable par un S -schéma en groupes fini localement libre (le rang de $G(1)$ est alors de la forme p^h , où h est un entier localement constant sur S , qu'on appelle la hauteur de G) ;
 - (iii) ($n = 1$) si $S_0 := V(p) \subset S$ et $G_0 := G|_{S_0}$, la suite
- $$G_0 \xrightarrow{F} G_0^{(p)} \xrightarrow{V} G_0 \text{ est exacte. (*)}$$

Il est clair que ces conditions sont stables par changement de base $S' \longrightarrow S$.

Exemple 1.2.: Si A est un S -schéma abélien de dimension relative g , $A(n)$ est un BTT d'échelon n et de hauteur $2g$ [22,I 3.4].

(*) Dans [22,I 1.3], Messing définit un BT₁ sur S par les conditions (i) à (iii) en supposant p localement nilpotent sur S ; j'ignore l'utilité de cette restriction.

Remarques 1.3. : a) Pour G annulé par p^n , la condition de platitude sur \mathbb{Z}/p^n équivaut aux suivantes : (i') $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}/p^n}(\mathbb{Z}/p, G) = 0$, i.e la suite

$G \xrightarrow{p^{n-1}} G \xrightarrow{p} G$ est exacte ; (ii') pour tout i tel que $1 \leq i \leq n-1$, $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}/p^n}(\mathbb{Z}/p^i, G) = 0$, i.e la suite $G \xrightarrow{p^{n-i}} G \xrightarrow{p^i} G$ est exacte.

b) Pour G fini localement libre annulé par p , l'exactitude de la suite

$G_0 \xrightarrow{F} G_0^{(p)} \xrightarrow{V} G_0$ équivaut à celle de la suite $G_0^{(p)} \xrightarrow{V} G_0 \xrightarrow{F} G_0^{(p)}$,

et implique que $\text{Ker } F$ et $\text{Ker } V$ sont finis localement libres (si $\text{Im } F = \text{Ker } V$, le critère de platitude par fibres (EGA IV 11.3.11) montre que $\text{Im } F$ est fini localement libre et $F: G_0 \longrightarrow \text{Im } F$ plat, donc $\text{Ker } F$ et $\text{Im } V = G_0 / \text{Im } F$ sont finis localement libres et $V: G_0^{(p)} \longrightarrow \text{Im } V$ est plat ; or on a $\text{Im } V \subset \text{Ker } F$, et $\text{rg } \text{Im } V = (\text{rg } G / (\text{rg } \text{Ker } V)) = \text{rg } \text{Ker } F$, donc $\text{Im } V = \text{Ker } F$; même raisonnement pour l'autre implication).

c) Si G est un BTT d'échelon n et hauteur h , G est représentable par un S-schéma en groupes fini localement libre de rang p^{nh} (cela résulte des suites exactes $0 \longrightarrow G(1) \longrightarrow G(i) \xrightarrow{p} G(i-1) \longrightarrow 0$ pour $2 \leq i \leq n$, cf. [22, I, 1.5]). On voit aussi, à l'aide du critère de platitude par fibres, que si G est un faisceau abélien vérifiant les conditions (i) et (iii) de 1.1 et tel que, pour un r avec $1 \leq r \leq n$, $G(r)$ soit représentable par un S-schéma en groupes fini et plat de présentation finie, alors G est un BT_n .

d) Soit G un BT_n sur S . Alors, pour $1 \leq i \leq n$, $G(i)$ est un BT_i (comme $G(n-i) = p^i G$, la suite exacte $0 \longrightarrow G(n-i) \longrightarrow G \xrightarrow{p^{n-i}} G(i) \longrightarrow 0$ donne un isomorphisme $G \otimes \mathbb{Z}/p^i \xrightarrow{\sim} G(i)$, d'où la platitude de $G(i)$ sur \mathbb{Z}/p^i ; pour la vérification de (iii) pour $n \geq 2$ et $i=1$, voir [22 II 3.3.11]).

e) Si G est un BTT d'échelon n et hauteur h sur S , son dual de Cartier $G^* = \underline{\text{Hom}}(G, \mathbb{G}_m)$ est un BTT d'échelon n et hauteur h .

f) Si $0 \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow G'! \longrightarrow 0$ est une suite exacte de S-groupes finis localement libres annulé par p^n , et si deux des groupes sont des BT_n , le troisième l'est également [3, 3.3.9].

1.4.- Supposons que $S = \text{Spec}(k)$, où k est un corps parfait de caractéristique p , et soit $W = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt sur k . Notons $D = W_{\sigma}[F, V]/(FV = VF = p)$ l'anneau de Dieudonné (σ = automorphisme de Frobenius de W). Rappelons que le foncteur (contravariant) associant à un p -groupe fini commutatif G sur S son module de Dieudonné

$$M(G) := \underline{\text{Hom}}_S(G, CW),$$

où CW est le faisceau des covecteurs de Witt sur S , est une anti-équivalence de la catégorie des p -groupes finis (commutatifs) sur celle des D -modules de longueur finie sur W [10, p.128]. De plus, le foncteur $M(-)$ est exact. Dans cette équivalence, les BT_n sur S correspondent aux D_n -modules libres de type fini sur W_n (où $D_n := D \otimes \mathbb{Z}/p^n$, $W_n = W \otimes \mathbb{Z}/p^n$), vérifiant quand $n=1$ la condition supplémentaire $\text{Im } F = \text{Ker } V$ (équivalente à $\text{Im } V = \text{Ker } F$). Si G est un BT d'échelon n et hauteur h , $M(G)$ est libre de rang h sur W_n .

Définition 1.5.- Soit G un faisceau abélien sur S . On dit que G est un groupe de Barsotti-Tate (en abrégé, BT) si :

- (i) G est de p -torsion, i.e. $G = \varinjlim G(n)$,
- (ii) G est p -divisible, i.e. $p\text{Id}_G$ est un épimorphisme,
- (iii) $G(1)$ est représentable par un schéma en groupes fini localement libre.

Sorites 1.6.- Si G est un BT sur S , alors, pour tout $n \geq 1$, $G(n)$ est un BT_n [22,I,2.3], et le foncteur qui à G associe le système inductif des $G(n)$ (avec les inclusions évidentes) est une équivalence de la catégorie des BT sur S sur celle des systèmes inductifs $(G_1 \xrightarrow{i_1} G_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow G_n \xrightarrow{i_n} \dots)$ où G_n est un BT_n et i_n induit un isomorphisme $G_n \xrightarrow{\sim} G_{n+1}(n)$. De même, le foncteur qui associe à G le système projectif des $G(n)$ (avec les projections $p : G(n+1) \longrightarrow G(n)$) est une équivalence de la catégorie des BT sur S sur celle des systèmes projectifs $(G_1 \xleftarrow{p_1} G_2 \leftarrow \dots \leftarrow G_n \xleftarrow{p_n} \dots)$ où G_n est un BT_n et p_n induit un isomorphisme $\mathbb{Z}/p^{n+1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/p^n$.

On appelle *hauteur* d'un BT G sur S la hauteur de $G(1)$.

Une extension de deux BT est un BT (et de même pour un quotient G/H) [22,I.2.4] mais le noyau d'un épimorphisme de BT n'est pas en général un BT (par exemple le noyau de p). Le quotient d'un BT par un sous-groupe fini localement libre est un BT [3, 3.3.12].

Si G est un BT, le système inductif des $G(n)^*$, où $i_n : G(n)^* \longrightarrow G(n+1)^*$ est dual de p , est un BT qu'on appelle *dual* de G , et qu'on note G^* .

Enfin, sous les hypothèses de 1.4, si G est un BT, $M(G) := \varprojlim M(G(n))$ est un D -module libre de type fini sur W , et le foncteur (contravariant) $G \longmapsto M(G)$ est une anti-équivalence de la catégorie des BT sur S sur celle des D -modules libres de type fini sur W .

Il est naturel de poser la question suivante : si G est un BT_n sur S , existe-t-il un BT H tel que $G = H(n)$? Voici une réponse partielle, que nous généraliserons plus loin.

PROPOSITION 1.7.- On suppose que $S = \text{Spec}(k)$, où k est un corps parfait de caractéristique p . Soit G un BT_n sur S . Alors il existe un $\text{BT} H$ tel que $G = H(n)$.

C'est un résultat bien connu. Faute d'avoir pu trouver une référence, nous en donnerons une démonstration - et même deux (le lecteur choisira).

a) (d'après T. Ekedahl). Par dualité, on peut se borner à traiter le cas où G est unipotent, i.e. V nilpotent sur le module de Dieudonné M de G . On peut donc considérer M comme un E_n -module, où $E_n = E \otimes \mathbb{Z}/p^n$ et E est le complété V -adique de l'anneau de Dieudonné D . Soit (e_i) ($1 \leq i \leq r$) une famille d'éléments de M dont les images dans M/V forment une base de M/V sur k . On a alors

$$Fe_i = \sum a_{ij}(V)e_j ,$$

où les $a_{ij}(V)$ sont des polynômes en V à coefficients dans W_n . Notons L (resp. R) le E_n -module libre de base g_i (resp. h_i) ($1 \leq i \leq r$). Soient $u: R \rightarrow L$ l'application E_n -linéaire définie par $u(h_i) = Fg_i - \sum a_{ij}(V)g_j$, $v: L \rightarrow M$ l'application E_n -linéaire définie par $v(g_i) = e_i$. Par construction, la suite

$$(*) \quad 0 \longrightarrow R \xrightarrow{u} L \xrightarrow{v} M \longrightarrow 0$$

est un complexe. Montrons qu'elle est exacte. Comme les termes de $(*)$ sont plats sur W_n (G étant un BT_n , M est libre sur W_n), il suffit de prouver que $(*) \otimes \mathbb{Z}/p$ est exacte, autrement dit, on peut supposer $n=1$. Il est clair que $(*) = \varprojlim_n E_1/V^n \otimes_{E_1} (*)$, donc il suffit de prouver que $E_1/V \otimes_{E_1} (*) = 0$, et

pour cela il suffit de montrer que le noyau et le conoyau de V sur $(*)$ sont acycliques. Or, par hypothèse, on a, sur M , $\text{Im } F = \text{Ker } V$ et $\text{Im } V = \text{Ker } F$, de sorte que la multiplication à gauche par F donne un isomorphisme $F: M/V \xrightarrow{\sim} V^M$.

On vérifie facilement d'autre part que la même propriété est vraie pour E_1 , i.e. que $F: E_1/V \xrightarrow{\sim} V^{E_1}$. Il suffit donc de montrer que le conoyau de V sur $(*)$ est acyclique, ce qui se vérifie par un calcul direct standard : soit $\sum x_{ki} F^k g_i \in L/V$, où, en notation matricielle, $x = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{r1} & \dots & x_{rr} \end{pmatrix}$,

$t_{x_k} = (x_{k1}, \dots, x_{kr})$; alors $Vx = \sum t_{x_k} a^{(k)} e$, où $a = (a_{ij} \bmod V)$,

$a^{(k)} := a^{(\sigma^{k-1})} \dots a$, σ = automorphisme de Frobenius de k ; $Vx = 0$ donne

$\sum t_{x_k} a^{(k)} = 0$, d'où $x = \sum t_{x_k} (F^k - a^{(k)}) g$, mais pour $k \geq 1$,

$$F^k - a^{(k)} = (F^{k-1} + F^{k-2} a^\sigma + \dots + a^{(\sigma^{k-1})} \dots a^\sigma)(F - a) ,$$

d'où finalement

$$x = u \left(\sum_{k \geq 1} t_{x_k} (F^{k-1} + \dots + a^{(\sigma^{k-1})} \dots a^\sigma) h \right),$$

ce qui prouve l'exactitude de (*) mod V en L/V ; l'injectivité de u mod V est immédiate. L'exactitude de (*) étant ainsi établie, on relève u en un homomorphisme E-linéaire $u' : R' \longrightarrow L'$, où L' (resp. R') est le E-module libre de base (g'_i) (resp. (h'_i)) et $u'(h'_i) = Fg'_i - \sum a'_{ij}(V)g'_j$, $a'_{ij}(V)$ étant un polynôme en V à coefficients dans W relevant $a_{ij}(V)$. Alors $M' = \text{Coker } u'$ relève M , est de type fini sur W (car p -adiquement séparé et complet et de type fini mod p), et sans p -torsion (par la suite exacte du serpent, compte tenu de l'exactitude de $(*) \otimes \mathbb{Z}/p$), donc M' , en tant que D-module, est le module de Dieudonné d'un BT qui relève G .

b) (d'après O. Gabber). Soit M le module de Dieudonné de G . Le D_n -module M est libre sur W_n , soit m son rang. Posons $\bar{M} = M/p$, \bar{M} est donc de dimension m sur k . Comme $F\bar{M} = \bar{M}$ (1.3 d)), il existe des éléments $\bar{e}_{r+1}, \dots, \bar{e}_m$ de \bar{M} tels que $V\bar{e}_{r+1}, \dots, V\bar{e}_m$ forment une base de $F\bar{M}$. Soit $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_r)$ une base d'un supplémentaire de $F\bar{M}$ dans \bar{M} . Relevons \bar{e}_i en e_i dans M . Alors $(e_1, \dots, e_r, V\bar{e}_{r+1}, \dots, V\bar{e}_m)$ engendrent M sur W_n , donc forment une base de M sur W_n . D'autre part, par construction, $(Fe_1, \dots, Fe_r, \bar{e}_{r+1}, \dots, \bar{e}_m)$ forment une base de $F\bar{M} = \bar{M}$, et comme $V\bar{e}_{r+1}, \dots, V\bar{e}_m$ sont linéairement indépendants, $(Fe_1, \dots, Fe_r, \bar{e}_{r+1}, \dots, \bar{e}_m)$ forment une base de \bar{M} , donc $(Fe_1, \dots, Fe_r, e_{r+1}, \dots, e_m)$ forment une base de M sur W_n . Notons (g_i) (resp. (h_i)) la base $(e_1, \dots, e_r, V\bar{e}_{r+1}, \dots, V\bar{e}_m)$ (resp. $(Fe_1, \dots, Fe_r, e_{r+1}, \dots, e_m)$), et a la matrice (inversible) définie par $g_i = \sum a_{ij}h_j$. Dans les bases (g_i) et (h_i) , F a pour matrice $\begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$, et dans les bases (h_i) et (g_i) , V a pour matrice $\begin{pmatrix} p \cdot 1_r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $a' = (a'_{ij}) \in GL_m(W)$ un relèvement de a . Notons M'

un W -module libre de base (h'_i) ($1 \leq i \leq m$), et (g'_i) la base de M' telle que $g'_i = \sum a'_{ij}h'_j$. Soient $F : M' \longrightarrow M'$ l'homomorphisme σ -linéaire de matrice

$\begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ dans les bases (g'_i) et (h'_i) , et $V : M' \longrightarrow M'$ l'homomorphisme

σ^{-1} -linéaire de matrice $\begin{pmatrix} p \cdot 1_r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans les bases (h'_i) et (g'_i) . On a

évidemment $FV = VF = p$, de sorte que F et V munissent M' d'une structure de

D -module, et comme M' est libre sur W , M' est le module de Dieudonné d'un BT sur k . D'autre part, si l'on identifie M'/p^n à M par $h_i \mapsto h_i$, par construction g_i^* s'envoie sur g_i , et l'endomorphisme de M'/p^n induit par F (resp. V) coïncide avec l'endomorphisme F (resp. V) de M . Autrement dit, M' relève M , ce qui achève la démonstration.

2.- PROPRIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES ET COHOMOLOGIQUES DES GROUPES DE BARSOTTI-TATE TRONQUÉS

2.1.- Rappels sur les complexes de Lie et co-Lie

Soient S un schéma et G un S -schéma en groupes, plat et localement de présentation finie. On note ℓ_G le complexe de co-Lie de G , défini par

$$(2.1.1) \quad \ell_G = \mathrm{Le}^* L_{G/S} \in \mathrm{ob} \, D(S)$$

où $L_{G/S}$ est le complexe cotangent de G/S et $e : S \rightarrow G$ la section unité (cf. [14, VII]). Comme G/S est localement d'intersection complète, ℓ_G est parfait, d'amplitude parfaite $\subset [-1, 0]$. La connaissance de ℓ_G équivaut à celle de $L_{G/S}$, car on a un isomorphisme canonique $L_{G/S} \xrightarrow{\sim} \pi^* \ell_G$ où $\pi : G \rightarrow S$ est la projection, mais nous n'aurons pas besoin de ce fait. Le complexe de Lie de G est par définition le dual de ℓ_G ,

$$(2.1.2) \quad \check{\ell}_G := \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\ell_G, \mathcal{O}_S) ;$$

c'est donc un complexe d'amplitude parfaite $\subset [0, 1]$. Le foncteur $G \mapsto \ell_G$ (resp. $\check{\ell}_G$) transforme suites exactes courtes en triangles distingués, ce qui permet notamment le calcul de ℓ_G quand on dispose d'une résolution $0 \rightarrow G \rightarrow G^0 \rightarrow G^1 \rightarrow 0$, avec G^0 et G^1 lisses (ou formels lisses), car on a $\ell_G = \omega_{G^1} = e^* \Omega_{G^1/S}^1$, d'où

$$(2.1.3) \quad \ell_G \xrightarrow{\sim} (\omega_{G^1} \longrightarrow \omega_{G^0}) .$$

Les seuls faisceaux de cohomologie éventuellement non nuls de ℓ_G (resp. $\check{\ell}_G$) sont \underline{H}^0 et \underline{H}^{-1} (resp. \underline{H}^0 et \underline{H}^1) : on pose (notations de Grothendieck)

$$(2.1.4) \quad \omega_G = \underline{H}^0(\ell_G), \quad n_G = \underline{H}^{-1}(\ell_G), \quad t_G = \underline{H}^0(\check{\ell}_G), \quad v_G = \underline{H}^1(\check{\ell}_G) ;$$

on a donc

$$t_G = \omega_G^\vee, \quad n_G = v_G^\vee .$$

D'autre part, le rang (au sens de (SGA 6 I)) du complexe parfait ℓ_G (resp. $\check{\ell}_G$) est égal à la dimension relative de G/S . En particulier, si G est fini localement libre, cas qui nous occupe principalement, on a $\mathrm{rg} \, \ell_G = \mathrm{rg} \, \check{\ell}_G = 0$; si de

plus ω_G est localement libre de type fini, alors il en est de même de n_G , t_G , v_G , et ces quatre modules ont même rang.

Quand G est commutatif, fini localement libre, le complexe de Lie de G admet la description suivante, due à Grothendieck [20, 14.1] : pour tout Ω_S -Module quasi-cohérent M , on a un isomorphisme canonique (de $D(S, \Omega_S)$)

$$(2.1.5) \quad \underline{R\text{Hom}}_{\Omega_S}(\ell_G, M) \xrightarrow{\sim} t_{\leq 1} \underline{R\text{Hom}}_{\mathbb{Z}}(G^*, M),$$

où G^* est le dual de Cartier de G et M est considéré comme faisceau sur S_{fppf} (la topologie importe peu : on ne changerait pas le second membre en regardant M comme faisceau sur le grand site zariskien). Pour $M = \Omega_S$, on a notamment :

$$(2.1.6) \quad \check{\ell}_G \xrightarrow{\sim} t_{\leq 1} \underline{R\text{Hom}}_{\mathbb{Z}}(G^*, \Omega_S)$$

et en particulier

$$(2.1.6.1) \quad t_G \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{Z}}(G^*, \Omega_S), \quad v_G \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Ext}}_{\mathbb{Z}}^1(G^*, \Omega_S).$$

2.1.7.- Soient A un anneau (discret) commutatif et G un schéma en A -modules, plat et localement de présentation finie sur S . Notons $A \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega_S$ un produit tensoriel dérivé de A et Ω_S dans la catégorie des \mathbb{Z} -algèbres différentielles graduées à degré ≤ 0 (cf. [14, VI 10.3.19]), et $D(A \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega_S)$ la catégorie déduite de celle des modules différentiels gradués sur $A \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega_S$ par inversion des flèches qui induisent des isomorphismes sur les objets de $D(\mathbb{Z})$ sous-jacents (loc. cit.). Dans [14, VII 4.1.4], on définit, à partir d'un certain diagramme traduisant l'action de A sur G , un objet $A \check{\ell}_G$ de $D(A \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega_S)$, qui, par restriction des scalaires via $\Omega_S \longrightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega_S$, donne le complexe de Lie $\check{\ell}_G$ de (2.1.2). On définit aussi (loc. cit.) un objet $A \ell_G$ de $D(A \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega_S)$ (dual de $A \check{\ell}_G$ à valeurs dans Ω_S), qui, par oubli, donne le complexe de co-Lie ℓ_G de (2.1.1). Bien entendu, $A \ell_G$ (resp. $A \check{\ell}_G$) et ℓ_G (resp. $\check{\ell}_G$) donnent le même objet de $D(S, \mathbb{Z})$ par oubli. Dans la suite, nous nous permettrons parfois d'omettre l'indice A de la notation $A \ell_G$ (resp. $A \check{\ell}_G$).

2.2.- Propriétés différentielles et cohomologiques des BT

Les résultats, dûs à Grothendieck, concernent d'une part la structure de ℓ_G pour G un BT_n sur S , avec $n \geq N$, et $p^N \Omega_S = 0$, d'autre part le calcul des $\underline{\text{Ext}}_{\mathbb{Z}/p^n}^i(G, M)$ pour $n \geq N$, M quasi-cohérent annulé par p^N , et $i \leq 2$.

PROPOSITION 2.2.1.- Soit S un schéma tel que $p^N \Omega_S = 0$, où N est un entier ≥ 1 , et soit G un BT_n sur S . On suppose $n \geq N$.

a) Pour tout entier $m \geq 1$ tel que $n \geq m+N-1$ et tout entier k tel que

$1 \leq k < p^m$, on a

$$\text{Inf}^k G \subset G(m+N-1)$$

où $\text{Inf}^k G$ désigne le k -ième voisinage infinitésimal de la section unité $e : S \rightarrow G$.

b) Pour tout entier k tel que $1 \leq k < p^{n-N+1}$, G est lisse tronqué d'échelon k le long de e , ce qui signifie que les conditions suivantes - équivalentes d'après [22, II 3.1.1]- sont satisfaites :

(i) ω_G est localement libre de type fini, et l'application canonique

$S^i \omega_G \longrightarrow J^i/J^{i+1}$ (où J est l'idéal définissant e) est un isomorphisme pour $i \leq k$;

(ii) pour tout S -schéma affine Y , tout voisinage infinitésimal d'ordre k X' de Y , tout sous- S -schéma fermé X de X' contenant Y , tout S -morphisme $g : X \rightarrow G$ tel que $g|_Y = 0$ se prolonge à X' (*).

c) Les faisceaux n_G , t_G , v_G sont localement libres de type fini de même rang que ω_G . De plus, pour $n \geq n' \geq N$:

(i) l'inclusion $G(n') \rightarrow G$ induit un isomorphisme $\omega_G \xrightarrow{\sim} \omega_{G(n')}$ (resp. $t_{G(n')} \xrightarrow{\sim} t_G$), et, si $n-n' \geq N$, induit le morphisme nul $n_G \rightarrow n_{G(n')}$ (resp. $v_{G(n')} \rightarrow v_G$) ;

(ii) l'épimorphisme $p^{n-n'} : G \rightarrow G(n')$ induit un isomorphisme $n_{G(n')} \xrightarrow{\sim} n_G$ (resp. $v_G \xrightarrow{\sim} v_{G(n')}$) et, si $n-n' \geq N$, le morphisme nul $\omega_{G(n')} \rightarrow \omega_G$ (resp. $t_G \rightarrow t_{G(n')}$) .

L'assertion a) est prouvée dans [22, II 3.3.17]. L'assertion b) est prouvée, si $N=1$, dans [22, II 2.1.2, 2.1.5] (compte tenu de 1.3.d)), et si $k < p^{n-N}$, découle aisément de [22, II 3.3.10] : soit $g : X \rightarrow G$ comme en (ii), alors par définition, g se factorise à travers $\text{Inf}^k G$, donc $G(n-N+N-1) = G(n-1)$ d'après a), et l'obstruction à prolonger $g : X \rightarrow G(n-1)$ à X' se tue quand on passe à $G(n)$ d'après (loc. cit.) (réduction au cas où l'idéal J (resp. I) de X (resp. Y) dans X' vérifie $JI = pJ = 0$ et application de (loc. cit.) pour $N=0$). Dans le cas général, on se ramène au cas où g se factorise à travers $G(n-1)$ par l'argument suivant (de Grothendieck). Par changement de base, on peut supposer $S = X'$. D'autre part, on peut supposer $N \geq 2$ (le cas $N=1$ étant déjà traité), et $JI = 0$ où J (resp. I) est l'idéal de X (resp. Y) dans X' . Notons X'_{N-2} (resp. X_{N-2}, Y_{N-2}) le sous-schéma fermé de X' (resp. X, Y) défini par l'annulation de p^{N-1} :

$$\begin{array}{ccccc} Y & \longleftrightarrow & X & \longleftrightarrow & X' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Y_{N-2} & \hookrightarrow & X_{N-2} & \hookrightarrow & X'_{N-2} \end{array},$$

et g_{N-2} la restriction de g à X_{N-2} . Comme par hypothèse on a $k < p^{n-(N-1)}$, par le cas déjà traité g_{N-2} admet un prolongement $g'_{N-2} : X'_{N-2} \rightarrow G$. Les flèches g et g'_{N-2} définissent $\bar{g} : \bar{X} = X \coprod_{X_{N-2}} X'_{N-2} \rightarrow G$. Or \bar{X} est un sous-schéma fermé de X' contenant X'_{N-2} , donc on peut supposer que X contient X'_{N-2} , i.e que $J \subset p^{N-1}\Omega_X$, (ce qui entraîne notamment que $pJ = 0$). L'obstruction à prolonger g à X' est alors un élément $x \in \text{Ext}_{\Omega_Y}^1(\ell_{G_0}, J)$ [14, III 2.2.4] où Y_0 est le lieu de $p=0$ et $G_0 = G_{X_0} Y_0$. Posons $p^{N-1}\Omega_{X'} = J'$, et considérons la suite exacte des Ext associée à $0 \rightarrow J \rightarrow J' \rightarrow J'' \rightarrow 0$:

$$\text{Hom}(\ell_{G_0}, J') \xrightarrow{a} \text{Hom}(\ell_{G_0}, J'') \rightarrow \text{Ext}_{\Omega_Y}^1(\ell_{G_0}, J) \xrightarrow{b} \text{Ext}_{\Omega_Y}^1(\ell_{G_0}, J').$$

La flèche a s'identifie à $\text{Hom}(\omega_{G_0}, J') \rightarrow \text{Hom}(\omega_{G_0}, J'')$. Comme ω_{G_0} est localement libre de type fini (d'après le cas particulier $N=1$) et que Y_0 est affine, a est surjective, donc b est injective. Il suffit donc de montrer que l'image de x par b est nulle, ce qui nous ramène au cas où $X = X'_{N-2}$. Or $g'_{N-2} : X'_{N-2} \rightarrow G$ se factorise à travers $\text{Inf}^k G$ et comme $k < p^{n-N'}$ ($N' = N - 1$) et $p^{N'} = 0$ sur X'_{N-2} , on a $\text{Inf}^k G \subset G(n-N'+N'-1) = G(n-1)$ par a), ce qui ramène au cas déjà traité, et achève d'établir b) dans le cas général. Le fait que n_G, t_G, v_G soient localement libres de type fini de même rang que ω_G découle aussitôt de b) (cf. la remarque suivant 2.1.4). Par a), pour $k = m = 1$, on a $\text{Inf}^1 G \subset G(n)$, d'où la première assertion de c) (i). La seconde en résulte par la suite exacte à six termes

$$0 \rightarrow n_{G(n-n')} \rightarrow n_G \rightarrow n_{G(n')} \rightarrow \omega_{G(n-n')} \rightarrow \omega_G \rightarrow \omega_{G(n')} \rightarrow 0$$

déduite du triangle distingué $\ell_{G(n-n')} \rightarrow \ell_G \rightarrow \ell_{G(n')} \rightarrow$ associé à la suite exacte $0 \rightarrow G(n') \rightarrow G \xrightarrow{p^{n'}} G(n-n') \rightarrow 0$. La preuve de (ii) est analogue.

- Remarques 2.2.2. a) Soit G un BT_n sur S . Si p est inversible sur S , G est étale (il suffit d'ailleurs de supposer que G est fini localement libre et annulé par p^n) : en effet $p^n : \omega_G \rightarrow \omega_G$ est à la fois 0 et un isomorphisme.
 b) Si $p^n \Omega_S = 0$ ($n \geq N$) et $n \geq N$, et G est un BT_n sur S , on appelle *dimension* de G le rang de ω_G . Si p est localement nilpotent sur S , et H est un BT sur S , on appelle *dimension* de H le rang du Ω_S -module localement libre $\omega_H = \varprojlim \omega_{H(n)}$; c'est aussi la dimension du groupe de Lie formel associé à H

(cf. [22, II]) ; si S est le spectre d'un anneau local noethérien complet de corps résiduel k de caractéristique p , et G (resp. H) un BT_n (resp. BT) sur S , on appelle encore dimension de G (resp. H) celle de $G_S \text{Spec}(k)$. Dans l'un ou l'autre cas, soit G^* (resp. H^*) le dual de Cartier de G (resp. H). Si d^* est la dimension de G^* (resp. H^*), on a $d + d^* = h$, où h est la hauteur de G (resp. H). Pour le voir, on peut se borner au cas où S est le spectre d'un corps de caractéristique p , et il suffit de noter qu'on a

$$\begin{aligned} p^{\dim G} &= \text{rang } \text{Ker}(F_{G(1)}) \\ &= \text{rang } \text{Coker}(F_{G(1)}) \\ &= \text{rang } \text{Ker}(V_{G^*(1)}) \\ &= \text{rang } \text{Im}(F_{G^*(1)}) \\ &= p^{ht(G) - \dim(G^*)}. \end{aligned}$$

c) Supposons $p^N \mathcal{O}_S = 0$ ($N \geq 1$), et soit G un BT_n sur S . Sans l'hypothèse $n \geq N$, il n'est pas vrai en général que ω_G soit localement libre. L'exemple le plus simple est μ_{p^n} , qui a pour complexe de co-Lie $\mathcal{O}_S \xrightarrow{p^n} \mathcal{O}_S$ (utiliser la résolution $0 \longrightarrow \mu_{p^n} \xrightarrow{p^n} \mathcal{E}_m \xrightarrow{p^n} \mathcal{E}_m \longrightarrow 0$) : on a $\omega_G = \mathcal{O}_S/p^n$, $n_G = (p^n) \mathcal{O}_S$. Voir 4.9 pour des compléments sur ce point.

2.2.3.- Munissons S d'une topologie comme en 1. Posons $A = \mathbb{Z}/m$ (m entier ≥ 1). Soient G, M des faisceaux de A -modules sur S . L'isomorphisme d'adjonction

$$(2.2.3.1) \quad R\text{Hom}_A^L(G \otimes_{\mathbb{Z}} A, M) \xrightarrow{\sim} R\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, M)$$

donne une suite spectrale

$$E_2^{ij} = \underline{\text{Ext}}_A^i(\underline{\text{Tor}}_{\mathbb{Z}}^j(G, A), M) \Longrightarrow \underline{\text{Ext}}_{\mathbb{Z}}^*(G, M),$$

qui se réduit à l'isomorphisme $\underline{\text{Hom}}_A(G, M) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{Z}}(G, M)$ et la suite exacte longue

$$(2.2.3.2) \quad 0 \longrightarrow \underline{\text{Ext}}_A^1(G, M) \longrightarrow \underline{\text{Ext}}_{\mathbb{Z}}^1(G, M) \xrightarrow{\phi} \underline{\text{Hom}}_A(G, M) \longrightarrow \underline{\text{Ext}}_A^2(G, M) \longrightarrow \underline{\text{Ext}}_{\mathbb{Z}}^2(G, M) \longrightarrow \underline{\text{Ext}}_A^1(G, M) \longrightarrow \dots \longrightarrow \underline{\text{Ext}}_A^i(G, M) \longrightarrow \underline{\text{Ext}}_{\mathbb{Z}}^i(G, M) \longrightarrow \underline{\text{Ext}}_A^{i-1}(G, M) \longrightarrow \underline{\text{Ext}}_A^{i+1}(G, M) \longrightarrow \dots$$

Si l'on préfère, on peut voir (2.2.3.2) comme la suite exacte des $\underline{\text{Ext}}_A^i(-, M)$ associée au triangle distingué

$$G[1] \longrightarrow G \otimes_{\mathbb{Z}} A \longrightarrow G \longrightarrow \dots$$

L'homomorphisme ϕ de (2.2.3.2) est déduit par faisceautisation de l'homomorphisme associant à une \mathbb{Z} -extension $0 \longrightarrow M \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow 0$ l'homomorphisme $G \longrightarrow M$

déduit par passage au quotient de la multiplication par m dans H (vérification : pour $u: G \rightarrow M[1]$ réalisé par la suite exacte $0 \rightarrow M \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow 0$, u correspond par (2.2.3.1) à la flèche u' de $D(A)$ composée de $G \otimes_{\mathbb{Z}} A \xrightarrow{u \otimes A} M \otimes_{\mathbb{Z}} A[1] \longrightarrow H^0(M \otimes_{\mathbb{Z}} A)[1] = M[1]$, et $\phi(u)$ à la composée de u' avec $H^{-1}(G \otimes_{\mathbb{Z}} A)[1] = G[1] \longrightarrow G \otimes_{\mathbb{Z}} A$; comme $u \otimes A$ est réalisé par l'extension de complexes (en degrés -1 et 0)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & H & \longrightarrow & G & \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow m & & \downarrow m & & \downarrow m & \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & H & \longrightarrow & G & \longrightarrow 0 \end{array},$$

$\phi(v)$ est le cobord correspondant, i.e l'application déduite de $m: H \rightarrow H$ par passage au quotient).

Supposons que G soit un schéma en groupes commutatif, annulé par m , et que $m \Omega_S = 0$. Compte tenu de (2.1.6), l'homomorphisme ϕ de (2.2.3.2) pour G^* (dual de Cartier de G) et $M = \Omega_S$ s'identifie à un homomorphisme

$$(2.2.3.3) \quad \phi_G: v_G \longrightarrow t_G.$$

Comme $t_G = \omega_G^\vee$ et $n_G^\vee = v_G$, si ω_G est localement libre, on en déduit par dualité un homomorphisme

$$(2.2.3.4) \quad \phi_G^\vee: \omega_G \longrightarrow n_G.$$

PROPOSITION 2.2.4.- Soient G un BT_n sur S et M un Ω_S -Module quasi-cohérent tel que $p^n M = 0$. Posons $A = \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$. Alors l'application canonique

$$\phi: \underline{\text{Ext}}_{\mathbb{Z}}^1(G, M) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_A(G, M) (= \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{Z}}(G, M))$$

de (2.2.3.2) (pour $m = p^n$) est un isomorphisme. En d'autres termes, on a

$$(2.2.4.1) \quad \underline{\text{Ext}}_A^1(G, M) = 0$$

et l'application naturelle

$$(2.2.4.2) \quad \underline{\text{Ext}}_A^2(G, M) \longrightarrow \underline{\text{Ext}}_{\mathbb{Z}}^2(G, M)$$

est un isomorphisme.

On peut considérer M comme un faisceau quasi-cohérent sur le sous-schéma fermé S' de S défini par l'annulation de p^n : plus précisément $M = i_* M'$, où $M' = M \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega_S$, et $i: S' \rightarrow S$ est l'inclusion. Le calcul des $\underline{\text{Ext}}^i$ sur les grands sites zariskiens donne un isomorphisme d'adjonction

$$\underline{\text{Ext}}_{\mathbb{Z}}^j(G, i_* M') \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Ext}}_{\mathbb{Z}}^j(G', M'),$$

où $G' = G \times_X S'$. Donc, quitte à remplacer S par S' , on peut supposer que

$p^n \underline{0}_S = 0$. Alors, d'après 2.2.1 c), t_{G^*} et v_{G^*} sont localement libres (de même rang) et ϕ s'identifie, d'après 2.1.5, à $\phi_{G^*} \otimes M : v_{G^*} \otimes M \longrightarrow t_{G^*} \otimes M$, avec la notation de (2.2.3.3). On peut donc supposer que $M = \underline{0}_S$. Comme les complexes de Lie et co-Lie commutent au changement de base, donc aussi w et v , et par suite t et n quand w est localement libre, on est ramené à vérifier que ϕ_{G^*} est un isomorphisme quand S est le spectre d'un corps algébriquement clos de caractéristique p . De plus, comme ϕ_{G^*} ne dépend que de la composante connexe de G^* , on peut se borner à supposer G unipotent (i.e annulé par une puissance de V). Nous aurons besoin de l'interprétation suivante de ϕ :

LEMME 2.2.4.3. - Soient $S = \text{Spec}(k)$, où k est un corps parfait de caractéristique p , G un S -schéma en groupes commutatifs, fini, annulé par p^n et unipotent, et L le module de Dieudonné de G , i.e $L = \text{Hom}(G, CW^U)$ où $CW^U = \varprojlim V_n$ est le faisceau des covecteurs unipotents. Alors on a des isomorphismes canoniques

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{G}_a) \xrightarrow{\sim} V^L, \quad \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(G, \mathbb{G}_a) \xrightarrow{\sim} L/V,$$

et moyennant ces isomorphismes, $\phi : \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(G, \mathbb{G}_a) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{G}_a)$ s'identifie à $p^{n-1}F : L/V \longrightarrow V^L$.

Soit D l'anneau de Dieudonné. Le module de Dieudonné de \mathbb{G}_a est D/V [8,p.551]. D'après [8,5.1 p.556], le foncteur module de Dieudonné induit des isomorphismes

$$(*) \quad \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{G}_a) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_D(D/V, L), \quad \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(G, \mathbb{G}_a) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_D^1(D/V, L),$$

d'où la première assertion. Compte tenu de l'interprétation de ϕ donnée en 2.2.3 et des isomorphismes (*), $\phi : \text{Ext}_D^1(D/V, L) \longrightarrow \text{Hom}_D(D/V, L)$ associe à une extension $0 \longrightarrow L \longrightarrow E \longrightarrow D/V \longrightarrow 0$ l'homomorphisme $D/V \longrightarrow L$ déduit de $p^n : E \longrightarrow L$ par passage au quotient. On doit vérifier la commutativité du carré

$$\begin{array}{ccc}
 L/V & \xrightarrow{p^{n-1}F} & V^L \\
 a \downarrow \simeq & & \simeq \downarrow b \\
 \text{Ext}_D^1(D/V, L) & \xrightarrow{\phi} & \text{Hom}_D(D/V, L)
 \end{array}$$

où a associe à l'image dans L/V de $u : D \longrightarrow L$ l'extension déduite par u de $0 \longrightarrow D \xrightarrow{V} D \longrightarrow D/V \longrightarrow 0$, et $b(x)$, pour $x \in V^L$, envoie $1 \in D/V$ sur x . Cette vérification est immédiate, et laissée au lecteur.

Achevons la démonstration de 2.2.4. Soit L le module de Dieudonné de G . D'après 2.2.4.3, on doit montrer que $p^{n-1}F : L/V \rightarrow V^L$ est un isomorphisme. On procède par récurrence sur n . Pour $n=1$, $F : L/V \rightarrow V^L$ est un isomorphisme par l'hypothèse que G est un BT_1 (1.4). Supposons $n \geq 2$. Comme L est de longueur finie, on a $\dim_k(L/V) = \dim_k(V^L)$. Donc il suffit de montrer que $p^{n-1}F : L/V \rightarrow V^L$ est injectif. Or, comme L est plat sur W_n , $p : L/p^{n-1} \rightarrow L$ est injectif. Par l'hypothèse de récurrence, $p^{n-2}F : (L/p^{n-1})/V = L/V \rightarrow V^{(L/p^{n-1})}$ est un isomorphisme. On conclut par le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} L/V & \xrightarrow[p^{n-2}F]{\simeq} & V^{(L/p^{n-1})} \\ \parallel & & \downarrow p \\ L/V & \xrightarrow[p^{n-1}F]{} & V^L \end{array}$$

Ceci achève la démonstration de 2.2.4.

COROLLAIRE 2.2.5.- Supposons $p^n \Omega_S = 0$ ($n \geq 1$), et soit G un S -schéma en groupes commutatifs, fini localement libre, annulé par p^n . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) G est un BT_n ;
- (ii) ω_G et ω_{G^\ast} sont localement libres, et les flèches $\phi_G : v_G \rightarrow t_G$, $\phi_{G^\ast} : v_{G^\ast} \rightarrow t_{G^\ast}$ (2.2.3.3) sont des isomorphismes ;
- (ii') ω_G et ω_{G^\ast} sont localement libres, et les flèches $\phi_G^\vee : \omega_G \rightarrow n_G$, $\phi_{G^\ast}^\vee : \omega_{G^\ast} \rightarrow n_{G^\ast}$ sont des isomorphismes.

L'équivalence de (ii) et (ii') est triviale, et (i) \Rightarrow (ii) découle de 2.2.4. Supposons (ii) satisfaite. D'après 1.3 a) (i') et b), on doit vérifier que, si $n \geq 2$, $p^{n-1} : G \rightarrow G(1)$ est un épimorphisme, et si $n=1$, que $F : G_0 \rightarrow V_0^{G(p)}$ est un épimorphisme (notation de (loc. cit.)). Vu la commutation de ω , n , t , v au changement de base observée dans la preuve de 2.2.4, le critère de platitude par fibres (EGA IV 11.3.11) nous ramène au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos de caractéristique p . Si $G = \mathbb{Z}/p^a \mathbb{Z}$, $a < n$, ϕ_{G^\ast} est nul d'après 2.2.4.3. On peut donc supposer G unipotent connexe (donc G^\ast aussi). Pour $n=1$, (ii) exprime exactement, d'après 2.2.4.3, la condition $\text{Im } F = \text{Ker } V$ (cf. 1.3.b)). Supposons $n \geq 2$. Soit L le module de Dieudonné de G . Considérons le morphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & L/V & \xrightarrow{F} & L/p & \longrightarrow & L/F \longrightarrow 0 \\
 & p^{n-1}F \downarrow & & p^{n-1} \downarrow & & p^{n-1}V \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & V^L & \longrightarrow & p^L & \longrightarrow & F^L \quad .
 \end{array}$$

Par hypothèse, on a $\phi_{G^*} : v_{G^*} \xrightarrow{\sim} t_{G^*}$, i.e (2.2.4.3) $p^{n-1}F : L/V \xrightarrow{\sim} V^L$.

D'autre part, le module de Dieudonné de G^* est $L^\vee = \text{Hom}(L, W_n)$, et $\phi_G : v_G \xrightarrow{\sim} t_G$ signifie que $p^{n-1}F : L^\vee/V \xrightarrow{\sim} V^L$. Dualisant, on trouve que $p^{n-1}V : L/V \xrightarrow{\sim} F^L$. Par le lemme des cinq, on en conclut que $p^{n-1} : L/p \xrightarrow{\sim} p^L$ est un isomorphisme, donc que $p^{n-1} : G \longrightarrow G(1)$ est un épimorphisme, ce qui achève la démonstration.

Remarque 2.2.6.- Supposons que $p^n \Omega_S = 0$, et soit G un BT_{2n} sur S .

Considérons la suite exacte

$$(*) \quad 0 \longrightarrow G(n) \longrightarrow G \xrightarrow{p^n} G(n) \longrightarrow 0 .$$

Il résulte de 2.2.1 c) que la flèche bord

$$\delta : n_{G(n)} \longrightarrow \omega_{G(n)}$$

figurant dans la suite exacte à six termes déduite du triangle distingué $\ell_{G(n)} \longrightarrow \ell_G \longrightarrow \ell_{G(n)} \longrightarrow$ associé à (*) est un isomorphisme. Il est facile de vérifier que δ est inverse de $\phi_{G(n)}^\vee$ (2.2.3.4).

COROLLAIRE 2.2.7.- Soient $n \geq n' \geq N \geq 1$ des entiers avec $n - n' \geq N$, M un Ω_S -Module quasi-cohérent tel que $p^N M = 0$, G un BT_n sur S . Alors, dans la suite exacte des $\underline{\text{Ext}}_{\mathbb{Z}}^i(-, M)$ associée à la suite exacte

$$0 \longrightarrow G(n') \longrightarrow G \xrightarrow{p^{n'}} G(n-n') \longrightarrow 0 \quad :$$

- (i) $\underline{\text{Ext}}_{\mathbb{Z}}^2(G(n-n'), M) \longrightarrow \underline{\text{Ext}}_{\mathbb{Z}}^2(G, M)$ est un isomorphisme,
- (ii) $\underline{\text{Ext}}_{\mathbb{Z}}^2(G, M) \longrightarrow \underline{\text{Ext}}_{\mathbb{Z}}^2(G(n'), M)$ est la flèche nulle,
- (iii) $\underline{\text{Ext}}_{\mathbb{Z}}^1(G, M) \longrightarrow \underline{\text{Ext}}_{\mathbb{Z}}^1(G(n'), M)$ est un isomorphisme.

Comme dans la preuve de 2.2.4, on se ramène aussitôt au cas où $p^n \Omega_S = 0$. Il suffit de prouver (i) : (ii) en découle trivialement, et implique que la flèche de (iii) est un épimorphisme, donc un isomorphisme, v_{G^*} et $v_{G(n')}^*$ étant localement libres de même rang (en fait, on retrouve l'isomorphisme de 2.2.1 c) $v_{G^*} \otimes M \longrightarrow v_{G(n')}^* \otimes M$ induit par $p^{n-n'} : G^* \longrightarrow G(n')^*$ (dual de

l'inclusion $G(n') \longrightarrow G$, pour lequel on n'a d'ailleurs pas besoin de l'hypothèse $n-n' \geq N$.

Considérons le carré commutatif, où les flèches horizontales sont définies par $p^{n'} : G \longrightarrow G(n-n')$ et les flèches verticales par restriction des scalaires :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Ext}}_{\mathbb{Z}/p^{n-n'}}^2(G(n-n'), M) & \longrightarrow & \underline{\text{Ext}}_{\mathbb{Z}/p^n}^2(G, M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{\text{Ext}}_{\mathbb{Z}}^2(G(n-n'), M) & \longrightarrow & \underline{\text{Ext}}_{\mathbb{Z}}^2(G, M) \end{array} .$$

Comme $n \geq N$ et $n-n' \geq N$, les flèches verticales sont des isomorphismes d'après 2.2.4. D'autre part, $p^{n'}$ s'identifie à la projection canonique

$G \longrightarrow G \otimes_{\mathbb{Z}/p^n} \mathbb{Z}/p^{n-n'}$, et comme G est plat sur \mathbb{Z}/p^n , il en résulte que la

flèche horizontale supérieure est un isomorphisme. Donc la flèche de (i) est un isomorphisme.

3.- OBSTRUCTIONS AUX DÉFORMATIONS DE SCHÉMAS EN GROUPES

3.0.- Soit A un anneau (discret) commutatif. Les résultats de [14,VII] dont nous aurons à nous servir concernent les prolongements infinitésimaux de schémas en A -modules, plats et localement de présentation finie sur la base (en pratique finis et localement libres), et de morphismes de tels. Nous les reproduisons ici pour la commodité du lecteur. On fixe dans ce qui suit des immersions fermées

$$S_0 \hookrightarrow S \hookrightarrow S'$$

définies par des idéaux $J \subset K$, avec $JK = 0$. Tous les schémas en A -modules considérés seront supposés plats et localement de présentation finie sur la base.

PROPOSITION 3.1.- Soient F' , G' des schémas en A -modules sur S' , F , F_0 (resp. G , G_0) les schémas déduits de F' (resp. G') par les changements de base $S \rightarrow S'$, $S_0 \rightarrow S'$, et soit $f : F \rightarrow G$ un S -morphisme de schémas en A -modules.

a) Il existe une obstruction

$$o(f) \in \underline{\text{Ext}}_A^1(F_0, {}^V_G \otimes^L J)$$

dont l'annulation est nécessaire et suffisante pour l'existence d'un morphisme de schémas en A -modules $f' : F' \rightarrow G'$ prolongeant f . Cette obstruction a les propriétés de fonctorialité suivantes : pour $u' : E' \rightarrow F'$, $o(fu)$ est l'image de $o(f)$ par $u_0 : E_0 \rightarrow F_0$, et pour $v' : G' \rightarrow H'$, $o(vf)$ est l'image de

$\circ(f)$ par $\check{\lambda}_{V_0} : \check{\lambda}_{G_0} \longrightarrow \check{\lambda}_{H_0}$ (notations évidentes).

b) Quand $\circ(f) = 0$, l'ensemble des prolongements f' de f est un espace affine sous le groupe $\text{Ext}_A^0(F_0, \check{\lambda}_{G_0} \otimes J)$.

(Le produit tensoriel \otimes , calculé sur $\underline{\mathcal{O}}_{S_0}$, est un objet de $D(A \otimes_{\mathbb{Z}} \underline{\mathcal{O}}_{S_0})$, qui, dans le calcul de $\text{Ext}_A^i(\cdot, \cdot)$ (sur le grand site zariskien de S_0), est considéré comme objet de $D(A)$ par restriction des scalaires).

Notons $i : S_0 \longrightarrow S$ l'inclusion. Pour M dans $D^+(A \otimes_{\mathbb{Z}} \underline{\mathcal{O}}_{S_0})$, à cohomologie quasi-cohérente sur S_0 , le calcul des Ext_A^i comme cohomologie spatiale [14, VI 11.5.3.11] fournit un isomorphisme d'adjonction

$$(3.1.1) \quad \text{Ext}_A^i(F, i_* M) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_A^i(F_0, M).$$

Comme la formation du complexe cotangent d'un morphisme plat commute au changement de base [14, II 2.2.3], il en est de même de la formation du complexe $A \check{\lambda}$ -d'un schéma en A -modules plat et localement de présentation finie sur la base, de sorte qu'on a canoniquement (dans $D(A \otimes_{\mathbb{Z}} \underline{\mathcal{O}}_S)$)

$$(3.1.2) \quad \check{\lambda}_G \otimes_{\mathcal{O}_S} J \xrightarrow{\sim} i_*(\check{\lambda}_{G_0} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} J).$$

Compte tenu de (3.1.1) et (3.1.2), 3.1 est une reformulation de [14, VII 4.2.3].

Remarque 3.1.3. - Sous l'hypothèse de 3.1 b), fixons un prolongement $\tilde{f} : F' \longrightarrow G'$ de f , d'où une identification de l'ensemble des prolongements de f avec le groupe $\text{Ext}_A^0(F_0, \check{\lambda}_{G_0} \otimes J)$. Pour $v' : G' \longrightarrow H'$ donné, le prolongement $v'\tilde{f}$ de vf fournit une identification de l'ensemble des prolongements de vf avec $\text{Ext}_A^0(F_0, \check{\lambda}_{H_0} \otimes J)$. Il est facile de voir qu'alors l'application qui à un prolongement f' de f associe le prolongement $v'f'$ de vf correspond, par les identifications précédentes, à l'homomorphisme naturel de $\text{Ext}_A^0(F_0, \check{\lambda}_{G_0} \otimes J)$ dans $\text{Ext}_A^0(F_0, \check{\lambda}_{H_0} \otimes J)$ donné par $\check{\lambda}_{V_0} : \check{\lambda}_{G_0} \longrightarrow \check{\lambda}_{H_0}$. On a une compatibilité analogue pour un morphisme $u' : E' \longrightarrow F'$, qu'on laisse au lecteur le soin de formuler.

PROPOSITION 3.2. - Soient G un schéma en A -modules sur S , $G_0 = G \times_{S_0} S_0$.

a) Il existe une obstruction

$$\circ(G) \in \text{Ext}_A^2(G_0, \check{\lambda}_{G_0} \otimes J)$$

dont l'annulation est nécessaire et suffisante pour l'existence d'un schéma en A -modules G' sur S' prolongeant G . Cette obstruction possède la propriété

de fonctorialité suivante : soit $u : F \longrightarrow G$ un morphisme de schémas en A -modules, alors on a

$$(3.2.1) \quad u_0^* o(G) = \check{\lambda}_{u_0} o(F) ,$$

où

$$\text{Ext}_A^2(G_0, \check{\lambda}_{G_0} \overset{L}{\otimes} J) \xrightarrow{u_0^*} \text{Ext}_A^2(F_0, \check{\lambda}_{G_0} \overset{L}{\otimes} J) \xrightarrow{\check{\lambda}_{u_0}} \text{Ext}_A^2(F_0, \check{\lambda}_{F_0} \overset{L}{\otimes} J)$$

sont les flèches de fonctorialité.

b) Si $o(G) = 0$, l'ensemble des classes d'isomorphie de prolongements de G en un schéma en A -modules G' sur S' est un espace affine sous $\text{Ext}_A^1(G_0, \check{\lambda}_{G_0} \overset{L}{\otimes} J)$, et le groupe des automorphismes d'un prolongement donné G' est $\text{Ext}_A^0(G_0, \check{\lambda}_{G_0} \overset{L}{\otimes} J)$.

(Mêmes notations que pour 3.1).

Grâce à (3.1.1) et (3.1.2), c'est une traduction de [14, VII 4.2.1] (la fonctorialité de $o(G)$ découle de (loc. cit. (iii))).

Remarques 3.3.- a) Sous les hypothèses de 3.1, soit F'' un schéma en A -modules sur S' tel que $F''x_{S'} S = F$. D'après 3.1 a), on a donc une obstruction $o(f, F')$ (resp. $o(f, F'') \in \text{Ext}_A^1(F_0, \check{\lambda}_{G_0} \overset{L}{\otimes} J)$) à prolonger f en $f' : F' \longrightarrow G'$ (resp. $f' : F'' \longrightarrow G'$). D'autre part, d'après 3.2. b), la différence $[F'] - [F'']$ des classes des prolongements F' et F'' est un élément de $\text{Ext}_A^1(F_0, \check{\lambda}_{F_0} \overset{L}{\otimes} J)$. Revenant à la définition de $o(f)$ (cf. [14, III 2.2.4]), on peut montrer que l'on a

$$(3.3.1) \quad o(f, F') - o(f, F'') = \check{\lambda}_{f_0} ([F'] - [F''])$$

(avec la notation de (3.2.1)). De même, si G'' est un schéma en A -modules prolongeant G , on a

$$(3.3.2) \quad o(f, G') - o(f, G'') = -f_0^*([G'] - [G'']) .$$

b) Soit $A' \longrightarrow A$ un homomorphisme d'anneaux (commutatifs). L'image de l'obstruction $o(f)$ de 3.1 dans $\text{Ext}_{A'}^1(F_0, \check{\lambda}_{G_0} \overset{L}{\otimes} J)$ par restriction des scalaires est l'obstruction à prolonger f en un morphisme de schémas en A' -modules $F' \longrightarrow G'$. De même, l'image de l'obstruction $o(G)$ de 3.2 a) dans $\text{Ext}_{A'}^2(G_0, \check{\lambda}_{G_0} \overset{L}{\otimes} J)$ par restriction des scalaires est l'obstruction à prolonger G en un schéma en A' -modules sur S' . Ces propriétés résultent aussitôt de la définition de ces obstructions (cf. [14, VII 4.1.4 a), 4.1.6, 4.2.1, 4.2.3]).

4.- DÉFORMATIONS DE BTT

Pour étudier les obstructions aux déformations de BTT , nous nous appuierons sur le lemme suivant, conséquence de 2.2.4 :

LEMME 4.1.- Soient n un entier ≥ 1 , S_0 un schéma affine tel que $p^n \mathcal{O}_{S_0} = 0$, J un \mathcal{O}_{S_0} -Module quasi-cohérent, F_0 , G_0 des BT_n sur S_0 . Alors les flèches naturelles suivantes sont des isomorphismes :

$$(4.1.1) \quad t_{F_0^*} \otimes t_{G_0} \otimes J \xrightarrow{(2.1.5)} \text{Hom}_{\mathbb{Z}/p^n}(F_0, t_{G_0} \otimes J) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}/p^n}(F_0, \check{\lambda}_{G_0}^L \otimes J) ,$$

$$(4.1.2) \quad \text{Ext}_{\mathbb{Z}/p^n}^1(F_0, \check{\lambda}_{G_0}^L \otimes J) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}/p^n}(F_0, v_{G_0} \otimes J) \xrightarrow{(2.1.5)} t_{F_0^*} \otimes v_{G_0} \otimes J ,$$

$$(4.1.3) \quad \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^2(F_0, t_{G_0} \otimes J) \xleftarrow{(2.2.4.2)} \text{Ext}_{\mathbb{Z}/p^n}^2(F_0, t_{G_0} \otimes J) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}/p^n}^2(F_0, \check{\lambda}_{G_0}^L \otimes J) .$$

Considérons le triangle distingué de $D(A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_S)$ ($A = \mathbb{Z}/p^n$) défini par troncation de $\check{\lambda}_{G_0}^L$:

$$(1) \quad t_{G_0} \longrightarrow \check{\lambda}_{G_0} \longrightarrow v_{G_0} [-1] \longrightarrow .$$

D'après 2.2.1 c), t_{G_0} et v_{G_0} sont localement libres de type fini sur S_0 , donc le triangle distingué déduit par application de $\otimes_{\mathcal{O}_{S_0}}^L J$ s'écrit

$$(2) \quad t_{G_0} \otimes J \longrightarrow \check{\lambda}_{G_0}^L \otimes J \longrightarrow v_{G_0} \otimes J [-1] \longrightarrow .$$

La suite exacte des $\text{Ext}_{\mathbb{Z}/p^n}^i(F_0, -)$ correspondante fournit d'abord le second

isomorphisme de (4.1.1), puis, compte tenu de (2.2.4.1) et du fait que S_0 est affine, la suite exacte (où $A = \mathbb{Z}/p^n$)

$$(3) \quad 0 \longrightarrow \text{Ext}_A^1(F_0, \check{\lambda}_{G_0}^L \otimes J) \longrightarrow \text{Hom}_A(F_0, v_{G_0} \otimes J) \xrightarrow{d} \text{Ext}_A^2(F_0, t_{G_0} \otimes J) \\ \longrightarrow \text{Ext}_A^2(F_0, \check{\lambda}_{G_0}^L \otimes J) \longrightarrow 0 .$$

Notons que $d=0$. En effet, compte tenu de (2.2.4.2), il suffit de montrer que la flèche déduite par oubli, en remplaçant A par \mathbb{Z} , est nulle. Or celle-ci est définie par la flèche de degré 1 du triangle (2), vu comme triangle de $D(S_0, \mathbb{Z})$. Mais comme S_0 est affine et que t_{G_0} et v_{G_0} sont localement libres de type fini, la flèche de degré 1 de (1), vu comme triangle de $D(S_0, \mathcal{O}_{S_0})$, est

nulle, donc il en est de même de la flèche de degré 1 du triangle (2), vu comme triangle de $D(S_0, \Omega_{S_0})$, donc a fortiori comme triangle de $D(S_0, \mathbb{Z})$. Les isomorphismes de (4.1.2) et (4.1.3) découlent alors aussitôt de (3).

PROPOSITION 4.2.- Soient N un entier ≥ 1 , $S_0 \hookrightarrow S \hookrightarrow S'$ des immersions fermées définies par des idéaux $J \subset K$ tels que $JK = 0$ et $p_{\Omega_{S_0}}^N = 0$, F' , G' des BTT d'échelon $n \geq N$ sur S' , F , F_0 (resp. G , G_0) les BTT déduits de F' (resp. G') par les changements de base $S \rightarrow S'$, $S_0 \rightarrow S'$, $f : F \rightarrow G$ un morphisme de schémas en groupes. On suppose S' affine.

a) Il existe une obstruction

$$o(f) \in t_{F_0^*} \otimes v_{G_0} \otimes J$$

dont l'annulation est nécessaire et suffisante à l'existence de $f' : F' \rightarrow G'$ prolongeant f . Elle dépend fonctoriellement, en un sens évident, de F' , G' .

b) Quand $o(f) = 0$, l'ensemble des prolongements f' de f est un espace affine sous le groupe $t_{F_0^*} \otimes t_{G_0} \otimes J$.

Compte tenu de (4.1.1) et (4.1.2), c'est un cas particulier de 3.1.

COROLLAIRE 4.3.- Soient F' , G' comme en 4.2.

a) Supposons $n \geq 2N$. Soit $f' : F' \rightarrow G'$ tel que $f : F \rightarrow G$ soit nul. Alors $f'(n-N) : F'(n-N) \rightarrow G'(n-N)$ est nul.

b) Soit $f : F \rightarrow G$ tel que $f(N) : F(N) \rightarrow G(N)$ admette un prolongement $g' : F'(N) \rightarrow G'(N)$. Alors f admet un prolongement $f' : F' \rightarrow G'$. (NB. On n'impose pas à f' d'être tel que $f'(N) = g'$).

Prouvons a). Appliquons la compatibilité 3.1.3 avec $v' = p_G^N : G' \rightarrow G'(n-N) = H'$, $\tilde{f} = 0$. On dispose de $cl(f') \in t_{F_0^*} \otimes t_{G_0} \otimes J$ défini par le prolongement f' de f , et de $cl(p_G^N, f') \in t_{F_0^*} \otimes t_{G_0(n-N)} \otimes J$ défini par le prolongement p_G^N, f' de $p_G^N f$, et par suite $cl(p_G^N, f')$ est l'image de $cl(f')$ par l'application définie par $p_{G_0}^N : t_{G_0} \rightarrow t_{G_0(n-N)}$. Or, comme $n-N \geq N$, cette application est nulle d'après 2.2.1 c) (ii). Donc $cl(p_G^N, f') = 0$, i.e. $p_G^N, f' = p_G^N \tilde{f} = 0$. Mais $p_G^N, f' = f'(n-N) p_F^N$, et comme $p_F^N : F' \rightarrow F'(n-N)$ est un épimorphisme, $f'(n-N) = 0$.

Prouvons b). Par hypothèse, on a $0 = o(f(N)) \in t_{F_0(N)^*} \otimes v_{G_0(N)} \otimes J$.

Par fonctorialité de l'obstruction, on a donc

$$0 = (p_{F_0}^{n-N})^* \circ (f(N)) = \circ (f(N) p_F^{n-N}) = \circ (p_G^{n-N} f) = p_G^{n-N} \circ (f) ,$$

mais $p_G^{n-N} : v_{G_0} \otimes J \longrightarrow v_{G_0(N)} \otimes J$ est un isomorphisme d'après 2.2.1 c) (ii),
donc $\circ(f) = 0$, et par suite f se prolonge.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat principal de cet exposé.

THÉORÈME 4.4 (Grothendieck). - Soient $i : S \longrightarrow S'$ une nilimmersion et G un BT_n sur S . On suppose S' affine (mais p n'y est pas supposé localement nilpotent).

a) Il existe un $BT_n G'$ sur S' prolongeant G .

b) Notons $\text{Def}(G, i)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de prolongements G' de G sur S' . Pour tout $n' \leq n$, l'application

$$(4.4.1) \quad \text{Def}(G, i) \longrightarrow \text{Def}(G(n'), i), \quad G' \longmapsto G'(n')$$

est surjective.

c) Soit N un entier ≥ 1 . Supposons que i soit définie par un idéal J et qu'on ait un idéal $K \supset J$, définissant $S_0 \hookrightarrow S'$, avec $JK = 0$, et $p_{S_0}^N = 0$. Alors, si $n \geq N$, l'ensemble des classes d'isomorphie de prolongements G' de G est un espace affine sous $t_{G_0^*} \otimes v_{G_0} \otimes J$ (groupe qui s'identifie à

$t_{G_0^*} \otimes t_{G_0} \otimes J$ par ϕ_{G_0} (2.2.5)) et l'ensemble des automorphismes d'un prolongement G' (induisant l'identité sur G) est isomorphe à $t_{G_0^*} \otimes t_{G_0} \otimes J$ ⁽¹⁾

⁽¹⁾ Il est facile de vérifier, en revenant à la définition de ϕ (2.2.3.2), que pour $n \geq n' \geq N$, le carré suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} v_{G_0} & \xrightarrow{\sim} & v_{G_0(n')} \\ \phi_{G_0} \downarrow \simeq & p^{n-n'} & \downarrow \simeq \phi_{G_0(n')} \\ t_{G_0} & \xleftarrow[\sim]{} & t_{G_0(n')} \end{array}$$

(où les flèches horizontales sont des isomorphismes (2.2.1 c))).

d) Soient N, J, K comme en c). Alors, pour tout $n \geq n' \geq N$, l'application (4.4.1) est bijective. De plus, si G' est un prolongement de G sur S' , alors pour $n \geq n' \geq N$ et $n-n' \geq N$, l'homomorphisme

$$(4.4.2) \quad \text{Aut}(G') \longrightarrow \text{Aut}(G'(n'))$$

est nul, Aut désignant le groupe des automorphismes induisant l'identité au-dessus de S .

e) Si S est local noethérien complet, de corps résiduel parfait de caractéristique p , il existe un BT H sur S tel que $G = H(n)$.

f) S'il existe un BT H sur S tel que $G = H(n)$, alors, pour tout prolongement G' de G sur S' , il existe un BT H' sur S' prolongeant H tel que $G' = H'(n)$.

4.5.- Démonstration de 4.4. Elle va se faire en plusieurs étapes. Notons tout d'abord que si G' est un S' -schéma en groupes commutatifs annulé par p^n , plat sur S' , prolongeant G , G' est automatiquement un BT_n : cela résulte du critère de platitude par fibres (EGA IV 11.3.11).

4.5.1.- Soient i, J, K comme en c), avec $N=1$, $n \geq 1$, et supposons que $G = H(n)$, où H est un BT sur S . Alors :

(i) Il existe un BT_n G' sur S' prolongeant G .

(ii) Avec les notations de b), l'application (4.4.1)

$$\text{Def}(H(n+1), i) \longrightarrow \text{Def}(H(n), i)$$

est bijective. En particulier, pour tout prolongement de G en un BT_n G' sur S' , il existe un BT H' sur S' prolongeant H et tel que $H'(n) = G'$.

D'après 3.2, l'obstruction à prolonger G en un BT_n sur S' , ou ce qui revient au même, en un schéma en \mathbb{Z}/p^n -modules fini et plat sur S' , est un élément $\alpha(G)$ de $\text{Ext}_{\mathbb{Z}/p^n}^2(G_0, \check{\mathcal{L}}_{G_0} \otimes J)$ (où $G_0 = G|_S$). Considérons le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_{\mathbb{Z}/p^n}^2(G_0, \check{\mathcal{L}}_{G_0} \otimes J) & \xrightarrow{(1)} & \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^2(G_0, \check{\mathcal{L}}_{G_0} \otimes J) \\ \uparrow (3) & & \uparrow (4) \\ \text{Ext}_{\mathbb{Z}/p^n}^2(G_0, t_{G_0} \otimes J) & \xrightarrow{(2)} & \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^2(G_0, t_{G_0} \otimes J) \end{array},$$

où les flèches horizontales sont les flèches d'oubli et les flèches verticales sont données par $t_{G_0} \longrightarrow \check{\mathcal{L}}_{G_0}$. D'après 4.1, (2) et (3) sont des isomorphismes.

D'autre part, on a, dans $D(S_0, \Omega_{S_0})$, $\check{\mathcal{L}}_{G_0} \xrightarrow{\sim} t_{G_0} \otimes v_{G_0}[-1]$, parce que S_0

est affine et que v_{G_0} est localement libre de type fini. Donc (4) est l'injection d'un facteur direct. D'autre part, l'image de $\sigma(G)$ par (1) est l'obstruction à déformer G en un schéma en groupes commutatifs plat sur S' (3.3 b)). Donc le diagramme ci-dessus montre que l'existence d'un BT_n sur S' prolongeant G , équivaut à celle d'un schéma en groupes commutatifs plat sur S' prolongeant G , et l'obstruction à ce problème est un élément $\sigma(G)$ du facteur $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^2(G_0, t_{G_0} \otimes J)$ de $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^2(G_0, \check{\chi}_{G_0} \otimes J)$. De même, l'existence d'un BT_{n+1} sur S' prolongeant $H(n+1)$ équivaut à celle d'un schéma en groupes commutatifs plat sur S' prolongeant $H(n+1)$, et l'obstruction correspondante est un élément $\sigma(H(n+1))$ du facteur $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^2(H_0(n+1), t_{H_0(n+1)} \otimes J)$ de $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^2(H_0(n+1), \check{\chi}_{H_0(n+1)} \otimes J)$. Enfin, par $t_{H_0(n+1)} \rightarrow \check{\chi}_{H_0(n+1)}$, $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^2(G_0, t_{H_0(n+1)} \otimes J)$ est facteur direct de $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^2(G_0, \check{\chi}_{H_0(n+1)} \otimes J)$. Par fonctorialité de l'obstruction (3.2 a) appliquée à

$A = \mathbb{Z}$ et u l'inclusion $H(n) = G \rightarrow H(n+1)$, on a donc

$$u^* \sigma(H(n+1)) = t_{u_0} \sigma(G),$$

où

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^2(H_0(n+1), t_{H_0(n+1)} \otimes J) \xrightarrow{u_0^*} \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^2(G_0, t_{H_0(n+1)} \otimes J) \xleftarrow{t_{u_0}} \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^2(G_0, t_{G_0} \otimes J)$$

sont les flèches de fonctorialité. Mais t_{u_0} est un isomorphisme d'après 2.2.1 c) (i), tandis que $u_0^* = 0$ d'après 2.2.7 (ii). Donc $\sigma(G) = 0$, ce qui prouve (i).

Prouvons (ii). Posons $H(n+1) = F$, $F_0 = F \times_S S_0$. Soit G' une déformation de G en un BT_n sur S' . D'après (i), il existe une déformation F' de F en un BT_{n+1} sur S' . Notant $[]$ la classe d'isomorphie d'une déformation, d'après 3.2 b) et 4.1.2), on a

$$[F'(n)] - [G'] \in t_{G_0^*} \otimes v_{G_0} \otimes J.$$

Il s'agit de montrer qu'il existe une unique classe $[F'']$ telle que $[F''(n)] - [G'] = 0$. Comme

$$[F''(n)] - [G'] = [F'(n)] - [G'] + [F''(n)] - [F'(n)],$$

tout revient à voir que l'application

$$(*) \quad t_{F_0^*} \otimes v_{F_0} \otimes J \longrightarrow t_{G_0^*} \otimes v_{G_0} \otimes J, \quad [F''] - [F'] \longrightarrow [F''(n)] - [F'(n)]$$

est bijective. Soit F'' une déformation de F en un BT_{n+1} sur S' , et considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F' & & \\
 & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\
 F & & p & & F'' \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 G & \xrightarrow{\quad} & G' & \xrightarrow{\quad} & G'' \\
 \end{array}$$

où p est la multiplication par p . D'après 3.3 (pour $f = 1$ 'identité), $[F'] - [F'']$ est l'obstruction $\circ(\text{Id}_F, F', F'')$ à prolonger l'identité de F en $F' \rightarrow F''$. De même, $[G'] - [G''] = \circ(\text{Id}_G, G', G'')$. Par fonctorialité de l'obstruction (3.1 a) ou 4.2 a)), on a

$$p^* \circ(\text{Id}_G, G', G'') = \circ(p : F \rightarrow G, F', G'') = p_* \circ(\text{Id}_F, F', F''),$$

où

$$t_{G_O^* \otimes v_{G_O}} \otimes J \xrightarrow{p^*} t_{F_O^* \otimes v_{G_O}} \otimes J \xleftarrow{p^*} t_{F_O^* \otimes v_{F_O}} \otimes J$$

sont les flèches de fonctorialité. Mais, d'après 2.2.1 c), ces deux flèches sont des isomorphismes. Il en est donc de même de l'application (*), qui n'est autre que $(p^*)^{-1} p_*$, ce qui prouve (ii).

4.5.2.- Preuve de e) : Posons $S = \text{Spec}(A)$, soient \underline{m} l'idéal maximal de A , $k = A/\underline{m}$; pour $r \geq 0$, notons $S_r = \text{Spec}(A/\underline{m}^{r+1})$, $G_r = G \times_S S_r$. Comme k est parfait, il existe, d'après 1.7, un BT H_0 sur S_0 tel que $G_0 = H_0(n)$. Supposons donné, pour $r \geq 0$ fixé, un BT H_r sur S_r tel que $G_r = H_r(n)$. Appliquant 4.5.1 (ii) à $(S_0 \hookrightarrow S_r \hookrightarrow S_{r+1}, H_r)$, on trouve qu'il existe un BT H_{r+1} sur S_{r+1} prolongeant H_r et tel que $H_{r+1}(n) = G_{r+1}$. Par récurrence sur r , on obtient donc un système inductif de prolongements H_r tels que $H_r(n) = G_r$. D'après [22, II 4.16], ce système définit un BT H sur S tel que $H(n) = G$.

4.5.3.- Preuve de a) : On va se ramener au cas où S' est artinien de corps résiduel parfait de caractéristique p et l'idéal J de S dans S' annulé par l'idéal maximal.

1) Posons $S' = \text{Spec } A'$, $S = \text{Spec } A$. On a $A' = \varprojlim A'_\alpha$, où A'_α parcourt les sous- \mathbb{Z} -algèbres de type fini de A' , et $A = \varprojlim A_\alpha$, où $A_\alpha = \text{Im } A'_\alpha \rightarrow A$. Des arguments standard montrent que G provient d'un G_α sur un $S_\alpha = \text{Spec } A_\alpha$, et si G_α admet un prolongement G'_α sur $S'_\alpha = \text{Spec } A'_\alpha$, $G' := G'_\alpha \times_{S'_\alpha} S'$ prolonge G . On peut donc supposer que A' est une \mathbb{Z} -algèbre de type fini.

2) Comme A' est alors noethérien, l'idéal J de S dans S' est nilpotent. Prolongeant de $\text{Spec } A'/J^r$ à $\text{Spec } A'/J^{r+1}$, on se ramène à supposer $J^2 = 0$.

3) Soit $S' = \bigcup S'_i$ un recouvrement ouvert, posons $S_i = S'_i \cap S$, $G_i = G|S_i$. Montrons que si, pour tout i , G_i admet un prolongement (en un BT_n) sur S'_i , alors G admet un prolongement (en un BT_n) sur S' . Choisissons, pour

chaque i , un $BT_n G'_i$ sur S'_i prolongeant G_i . Notant $[]$ une classe d'isomorphie, on a, d'après 3.2 b),

$$[G'_i | S'_i \cap S'_j] - [G'_j | S'_i \cap S'_j] \in \underline{\text{Ext}}^1_{\mathbb{Z}/p^n}(G | S_i \cap S_j, \check{\lambda}_G \otimes J) .$$

L'obstruction à trouver, après raffinement éventuel du recouvrement (S'_i) , un système de prolongements G'_i tels que $G'_i | S'_i \cap S'_j \xrightarrow{\sim} G'_j | S'_i \cap S'_j$ est donc un élément

$$c_1 \in H^1(S, \underline{\text{Ext}}^1_{\mathbb{Z}/p^n}(G, \check{\lambda}_G \otimes J)) .$$

Or, le calcul des $\underline{\text{Ext}}^a_{\mathbb{Z}/p^n}(G, M)$ comme cohomologie spatiale [14, VI 11.5.3.11] montre que, pour tout a , $\underline{\text{Ext}}^a_{\mathbb{Z}/p^n}(G, \check{\lambda}_G \otimes J)$ est quasi-cohérent. Donc, comme S est affine, $c_1 = 0$. Un système de prolongements G'_i tels que $G'_i | S'_i \cap S'_j \xrightarrow{\sim} G'_j | S'_i \cap S'_j$ étant choisi, l'obstruction à trouver (après raffinement éventuel de (S'_i)) un système transitif d'isomorphismes

$g_{ij} : G'_i | S'_i \cap S'_j \longrightarrow G'_j | S'_i \cap S'_j$ est, d'après 3.2 b), un élément

$$c_2 \in H^2(S, \underline{\text{Ext}}^0_{\mathbb{Z}/p^n}(G, \check{\lambda}_G \otimes J)) .$$

Pour la même raison que précédemment, on a $c_2 = 0$, donc G admet bien un prolongement G' sur S' . En d'autres termes, le problème de prolongement de G est local sur S pour la topologie de Zariski.

4) Soient $T' = \text{Spec } A' \otimes \mathbb{Z}[1/p]$, $T = \text{Spec } A \otimes \mathbb{Z}[1/p]$. Le BTT G'_1 induit par G sur T est étale (2.2.2 a)), donc admet un prolongement (d'ailleurs unique) G'_1 sur T' . La question de l'existence de G' est donc locale au voisinage des points fermés de S de corps résiduel fini de caractéristique p . On peut donc supposer S' local noethérien, de corps résiduel parfait de caractéristique p .

5) Un argument analogue à celui de 3) montre que la question de l'existence d'un prolongement G' de G sur S' est locale sur S' pour la topologie fpqc. Cela nous permet de supposer de plus que S' est complet. Soit \underline{m} l'idéal maximal de A' . Supposons d'abord S' artinien, de sorte qu'il existe r tel que $\underline{m}^{r+1} = 0$. Décomposant $A' \longrightarrow A = A/J$ en $A' \longrightarrow A'/\underline{m}^r J \longrightarrow \dots \longrightarrow A'/\underline{m}J \longrightarrow A$, on se ramène au cas où $\underline{m}J = 0$. Grâce à e) (prouvé en 4.5.2), il existe un $BT H$ sur S tel que $G = H(n)$. On conclut alors par 4.5.1 (i). Dans le cas général, on a $S' = \varinjlim S'_r$, $S = \varinjlim S_r$, où $S'_r = \text{Spec } A'/\underline{m}^{r+1}$, $S_r = \text{Spec } A/\underline{m}^{r+1}A$. Soit $G_r = G \times_S S_r$. Supposons construit un prolongement G'_r de G_r sur S'_r . Le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} S_r & \hookrightarrow & S_{r+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S'_r & \hookrightarrow & S'_{r+1} \end{array}$$

donne une immersion (de carré nul) $T_{r+1} = S'_r \xrightarrow{\perp} S_{r+1} \hookrightarrow S'_{r+1}$. Le groupe $G'_r \xrightarrow{\perp} G_{r+1}$ sur T_{r+1} est un BT_n prolongeant G_{r+1} et G'_r . D'après le cas artinien déjà traité, il se prolonge en un $BT_n G'_{r+1}$ sur S'_{r+1} . Par récurrence, on obtient donc un système inductif de prolongements G'_r de G_r sur S'_r . D'après [22, II 4.15], ce système inductif définit un prolongement G' de G sur S' , ce qui achève la démonstration de a).

4.5.4.- Preuve de b) : les réductions 1) et 2) de 4.5.3 permettent de supposer que $S' = \text{Spec } A'$, $S = \text{Spec } A$, avec A' de type fini sur \mathbb{Z} , et $J = \text{Ker}(A' \rightarrow A)$ de carré nul. Posons $H = G(n')$. Soit G' un prolongement de G sur S' (un tel prolongement existe d'après a)). Alors $H' := G'(n')$ prolonge H , et, d'après 3.2. b), il s'agit de montrer que l'application

$$a : \text{Ext}_{\mathbb{Z}/p^n}^1(G, \check{\lambda}_G \otimes J) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}/p^n}^1(H, \check{\lambda}_H \otimes J), [G'] - [G'] \mapsto [G''(n)] - [G'(n)]$$

où G'' désigne un prolongement de G sur S' (l'application (*) envisagée en 4.5.1 est un cas particulier de a). Comme en (loc. cit.), on a

$$[G''] - [G'] = o(\text{Id}_G, G', G''), [H''] - [H'] = o(\text{Id}_H, H', H'').$$

D'après 3.3.b), on a un carré commutatif de $D(S, \mathbb{Z}/p^n)$

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{o(\text{Id}_G, G', G'')} & \check{\lambda}_G \otimes J [1] \\ \downarrow & \xrightarrow{o(\text{Id}_H, H', H'')} & \downarrow \\ H & \xrightarrow{\quad} & \check{\lambda}_H \otimes J [1] \end{array}$$

où les flèches verticales sont données par $p^{n-n'} : G \rightarrow H = G(n')$. Par adjonction, ce carré donne un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/p^{n'} \otimes_{\mathbb{Z}/p^n} G & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p^{n'} \otimes_{\mathbb{Z}/p^n} (\check{\lambda}_G \otimes J) [1] \\ \downarrow & & \downarrow \\ H & \xrightarrow{\quad} & \check{\lambda}_H \otimes J [1] \end{array}$$

où la flèche verticale de gauche est un isomorphisme. Il s'ensuit que la flèche à ci-dessus s'insère dans un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_{\mathbb{Z}/p^n}^1(G, \check{\lambda}_G \otimes J) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathbb{Z}/p^n}^1(G, \check{\lambda}_H \otimes J) \\ & \searrow a & \downarrow \simeq \\ & & \text{Ext}_{\mathbb{Z}/p^n}^1(H, \check{\lambda}_H \otimes J) \end{array}$$

où la flèche horizontale est donnée par fonctorialité de $\check{\chi}$, et la flèche verticale est l'isomorphisme d'adjonction. On a déjà observé (en 4.5.3.3)) que les faisceaux $\underline{\text{Ext}}^1$ associés sont quasi-cohérents. Comme les flèches du triangle ci-dessus sur les $\underline{\text{Ext}}^1$ sont \mathcal{O}_S -linéaires, on voit que la surjectivité de a est locale pour la topologie fpqc. Les réductions 3), 4) et 5) de 4.5.3 nous ramènent alors à la situation de 4.5.1, où la flèche a est même bijective d'après (ii).

4.5.5.- Preuve de f). Conséquence immédiate de b).

4.5.6.- Preuve de c). Résulte aussitôt de 3.2. b) et 4.1.

4.5.7.- Preuve de d). La première assertion résulte de la description de la flèche a donnée en 4.5.4 : dans la situation de d), la flèche (4.4.1) n'est autre que l'isomorphisme donné par 2.2.1 c) :

$$t_{(p^{n-n'})^*}^{-1} \otimes v_{p^{n-n'}} : t_{G_0^*} \otimes v_{G_0} \otimes J \xrightarrow{\sim} t_{H_0^*} \otimes v_{H_0} \otimes J,$$

où $H = G(n')$ et $(p^{n-n'})^* : H_0^* \longrightarrow G_0^*$ est l'inclusion duale de $p^{n-n'} : G_0 \longrightarrow H_0$ (on pourrait aussi appliquer 4.3 b)). Pour la seconde assertion, il suffit de noter que, d'après c), la flèche (4.4.2) s'identifie, avec les notations ci-dessus à la flèche

$$t_{(p^{n-n'})^*}^{-1} \otimes t_{p^{n-n'}} : t_{G_0^*} \otimes t_{G_0} \otimes j \longrightarrow t_{H_0^*} \otimes t_{H_0} \otimes J,$$

qui, pour $n \geq n' \geq N$, $n-n' \geq N$, est nulle d'après 2.2.1 c). Ceci achève la démonstration de 4.4.

Remarques 4.6.- a) Dans la situation de 4.5.1, identifions $t_{H_0(n)}$ à $t_{H_0} := t_{H_0(1)}$ au moyen de l'isomorphisme $t_{H_0(1)} \xrightarrow{\sim} t_{H_0(n)}$ donné par l'inclusion $H_0(1) \hookrightarrow H_0(n)$ (2.2.1 c)). Les groupes $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^2(H_0(n), t_{H_0(n)} \otimes J)$, identifiés ainsi à $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^2(H_0(n), t_{H_0} \otimes J)$, forment, suivant les inclusions $H_0(n) \hookrightarrow H_0(n+1)$, un système projectif " \varprojlim " $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^2(H_0(n), t_{H_0} \otimes J)$. Un point clé de la démonstration de 4.5.1 (donc de 4.5) est que les flèches de transition de ce système projectif sont nulles : si $o_n \in \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^2(H_0(n), t_{H_0} \otimes J)$ est l'obstruction à prolonger $H(n)$, les o_n définissent un élément

$$(*) \quad (o_n)_{n \geq 1} \in \varprojlim \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^2(H_0(n), t_{H_0} \otimes J),$$

d'où la nullité des o_n . En fait, il suffit, pour conclure, de connaître la nullité du second membre de (*), i.e. de savoir que

$$(4.6.1) \quad \varprojlim_{\mathbb{Z}} \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^2(H_0(n), \mathbb{G}_a) = 0 .$$

Ce résultat, un peu plus simple, est établi dans [3] : d'après [3, 2.4.6.1], on a

$$(4.6.2) \quad \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^2(H_0, \mathbb{G}_a) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\mathbb{Z}} \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^2(H_0(n), \mathbb{G}_a)$$

et le premier membre de (4.6.2) est nul d'après [3, 3.3.2].

Pour $p \neq 2$, on a déjà

$$(4.6.3) \quad \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^2(H_0(n), \mathbb{G}_a) = 0$$

pour tout n , comme cas particulier du théorème d'annulation de Breen [5].

Par contre, pour $p = 2$, il peut arriver qu'on ait $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^2(H_0(n), \mathbb{G}_a) \neq 0$.

Supposons par exemple que H_0 soit le groupe p -divisible d'une courbe elliptique supersingulière sur un corps algébriquement clos de caractéristique p . On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \alpha_p \longrightarrow H_0(1) \xrightarrow{"F"} \alpha_p \longrightarrow 0 .$$

Dans la suite exacte des $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(-, \mathbb{G}_a)$ correspondante, on a

$$\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_0(1), \mathbb{G}_a) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\alpha_p, \mathbb{G}_a) \xrightarrow{\sim} k$$

(comme le montre par exemple 2.2.4.3), d'où une inclusion

$$\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^2(\alpha_p, \mathbb{G}_a) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^2(H_0(1), \mathbb{G}_a) .$$

Mais, pour $p = 2$, on a $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^2(\alpha_p, \mathbb{G}_a) \neq 0$ (en fait, $\simeq k$) d'après Breen [4] (dans loc. cit.), Breen montre que les classes des cocycles $(1, 1+uxy)$ pour $u \in k$ définissent un isomorphisme de k sur $\mathrm{Ext}^2(\alpha_p, \mathbb{G}_m)$, mais les mêmes arguments montrent que les classes des cocycles $(0, uxy)$ définissent un isomorphisme de k sur $\mathrm{Ext}^2(\alpha_p, \mathbb{G}_a)$; de plus, dans le cas de \mathbb{G}_a , l'hypothèse que k soit séparablement clos (donc ici, algébriquement clos) est inutile).

b) Il semble que Raynaud sache démontrer (du moins pour G connexe) 4.4 a) et b), et se débarrasser de l'hypothèse de perfection sur le corps résiduel dans e), en utilisant, à la place de la théorie d'obstructions de [14], la théorie des modules de Cartier des groupes de Lie formels ([6], [19]).

COROLLAIRE 4.7.- Soient i, J, K, N comme en 4.4 c), et H un BT sur S . Alors :

(i) Pour tout $n \geq N$, l'application

$$(4.7.1) \quad \mathrm{Def}(H, i) \longrightarrow \mathrm{Def}(H(n), i)$$

associant à la classe d'isomorphie d'un prolongement H' de H en un BT sur S' la classe du prolongement $H'(n)$ de $H(n)$, est bijective.

(ii) Le groupe des automorphismes d'un prolongement H' de H sur S' (induisant l'identité sur H est réduit à 0).

D'après 1.6, prolonger H en un BT H' sur S' équivaut à prolonger le système projectif des $H(n)$ en un système projectif $(H'_1 \leftarrow H'_2 \leftarrow \dots \leftarrow H'_n \xleftarrow{p_n} \dots)$ où H'_n est un BT $_n$ et p_n induit un isomorphisme $\mathbb{Z}/p^{n+1} H'_{n+1} \xrightarrow{\sim} H'_n$.

En fait, comme on l'a observé au début de 4.5, le critère de platitude par fibres montre que si H'_n est un schéma en \mathbb{Z}/p^n -modules, plat sur S' , prolongeant $H(n)$, H'_n est un BT $_n$; le même critère montre de plus que la condition sur p_n est alors automatiquement vérifiée. Notons $S.$ le topos des systèmes projectifs $(E_1 \leftarrow E_2 \leftarrow \dots \leftarrow E_n \leftarrow \dots)$ de faisceaux sur le grand site zariskien (ou fppf, ou fpqc) de S , et \mathbb{Z}/p^\cdot l'anneau de $S.$ défini par le système projectif $(\mathbb{Z}/p \leftarrow \mathbb{Z}/p^2 \leftarrow \dots \leftarrow \mathbb{Z}/p^n \leftarrow \dots)$. Considérant le système projectif $H(\cdot)$ des $H(n)$ comme un schéma en \mathbb{Z}/p^\cdot -modules au-dessus de $S.$, les constructions de [14,VII] fournissent un complexe de Lie $\check{\mathcal{L}}_{H(\cdot)}$ dans $D(S., \mathbb{Z}/p^\cdot \otimes_{\mathbb{Z}} 0_S)$, et, comme H admet un prolongement sur S' d'après 4.4 a) et f), une variante de 3.2 b) (laissée au lecteur) montre que l'ensemble des classes d'isomorphie de prolongements de H sur S' est un espace affine sous le groupe $\text{Ext}_{\mathbb{Z}/p^\cdot}^1(H_0(\cdot), \check{\mathcal{L}}_{H_0(\cdot)} \otimes J)$, et que le groupe des automorphismes d'un prolongement H' est $\text{Ext}_{\mathbb{Z}/p^\cdot}^0(H_0(\cdot), \check{\mathcal{L}}_{H_0(\cdot)} \otimes J)$. Il est aisément d'expliquer ces groupes. En effet,

si $E.$ est un objet de $D^-(S., \mathbb{Z}/p^\cdot)$ dont les flèches de transition induisent des isomorphismes $\mathbb{Z}/p^n \otimes_{\mathbb{Z}/p^{n+1}} E_{n+1} \xrightarrow{\sim} E_n$ et $F.$ un objet de $D^+(S., \mathbb{Z}/p^\cdot)$, pour i donné, les $\text{Ext}_{\mathbb{Z}/p^n}^i(E_n, F_n)$ forment de façon naturelle un système projectif (de groupes abéliens), et il est facile de voir qu'on a une suite exacte canonique

$$(*) \quad 0 \longrightarrow R^1 \varprojlim_{\mathbb{Z}/p^n} \text{Ext}_{\mathbb{Z}/p^n}^{i-1}(E_n, F_n) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}/p^\cdot}^i(E., F.) \longrightarrow \varprojlim_{\mathbb{Z}/p^n} \text{Ext}_{\mathbb{Z}/p^n}^i(E_n, F_n) \longrightarrow 0.$$

Appliquant cela sur $S_0.$ à $E. = H_0(\cdot)$, $F. = \check{\mathcal{L}}_{H_0(\cdot)} \otimes J$, on obtient un isomorphisme

$$(1) \quad \text{Ext}_{\mathbb{Z}/p^\cdot}^0(H_0(\cdot), \check{\mathcal{L}}_{H_0(\cdot)} \otimes J) \xrightarrow{\sim} \varprojlim \text{Ext}_{\mathbb{Z}/p^n}^0(H_0(n), \check{\mathcal{L}}_{H_0(n)} \otimes J),$$

et une suite exacte

$$(2) \quad 0 \longrightarrow R^1 \varprojlim_{\mathbb{Z}/p^n} \text{Ext}_{\mathbb{Z}/p^n}^0(H_0(n), \check{\mathcal{L}}_{H_0(n)} \otimes J) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}/p^\cdot}^1(H_0(\cdot), \check{\mathcal{L}}_{H_0(\cdot)} \otimes J) \\ \longrightarrow \varprojlim_{\mathbb{Z}/p^n} \text{Ext}_{\mathbb{Z}/p^n}^1(H_0(n), \check{\mathcal{L}}_{H_0(n)} \otimes J) \longrightarrow 0.$$

Or, pour $n \geq N$, on a, d'après 4.1,

$$(3) \quad \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}/p^n}^0(H_0(n), \check{\mathcal{L}}_{H_0(n)}^{\frac{L}{\theta} J}) \xrightarrow{\sim} t_{H_0(n)^*} \otimes t_{H_0(n)} \otimes J ,$$

et

$$(4) \quad \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}/p^n}^1(H_0(n), \check{\mathcal{L}}_{H_0(n)}^{\frac{L}{\theta} J}) \xrightarrow{\sim} t_{H_0(n)^*} \otimes v_{H_0(n)} \otimes J .$$

Pour $n \geq n' \geq N$ et $n - n' \geq N$, la flèche de transition de n à n' du second membre de (3) est nulle (2.2.1 c), ou 4.4 c) et d)). Donc le premier membre de (1) est nul, ce qui prouve (ii). De plus, le terme de gauche de (2) est nul, et comme, pour $n \geq n' \geq N$, la flèche de transition de n à n' du second membre de (4) est un isomorphisme, on en conclut que, pour $n \geq N$, la flèche naturelle

$$(5) \quad \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}/p^n}^1(H_0(.), \check{\mathcal{L}}_{H_0(.)}^{\frac{L}{\theta} J}) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}/p^n}^1(H_0(n), \check{\mathcal{L}}_{H_0(n)}^{\frac{L}{\theta} J})$$

est un isomorphisme. Mais, si l'on fixe un point-base dans $\mathrm{Def}(H, i)$, (5) n'est autre que (4.7.1), ce qui achève la démonstration.

Remarque 4.7.2.- Comme le système projectif des $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}/p^n}^1(H_0(n), \check{\mathcal{L}}_{H_0(n)}^{\frac{L}{\theta} J})$ est essentiellement constant, son $\mathrm{R}\lim^1$ est nul, de sorte que (*), pour $i = 2$, donne

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}/p^n}^2(H_0(.), \check{\mathcal{L}}_{H_0(.)}^{\frac{L}{\theta} J}) &\xrightarrow{\sim} \varprojlim \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}/p^n}^2(H_0(n), \check{\mathcal{L}}_{H_0(n)}^{\frac{L}{\theta} J}) \\ &\xrightarrow{\sim} \varprojlim \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}/p^n}^2(H_0(n), t_{H_0(n)} \otimes J) \quad (4.1.3) \end{aligned}$$

car le système projectif des $t_{H_0(n)}$ est essentiellement nul (2.2.1 c)). Par la variante de 3.2. b) mentionnée plus haut, on retrouve que l'obstruction à prolonger H est nulle.

COROLLAIRE 4.8.- Soient k un corps parfait de caractéristique p , $W = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt sur k , n un entier ≥ 1 , H_0 un BT sur k de hauteur h et dimension d (2.2.2 b)), H_0^* le BT dual (qui est donc de hauteur h et dimension d^* , avec $h = d + d^*$). Notons \underline{A} la catégorie des W -algèbres locales artiniennes de corps résiduel k .

(i) Le foncteur des déformations de H_0 sur \underline{A} est pro-représentable par un W -schéma formel lisse S , de dimension relative dd^*

(i.e $S \cong \mathrm{Spf}(W[[t_{ij}]])$).

(ii) Soit H la déformation universelle de H_0 sur S . Alors, le couple $(S, H(n))$ est une déformation verselle de $H_0(n)$ sur \underline{A} (au sens de

Schlessinger [27]).

(iii) Posons $t_{H_0} = t_{H_0(1)}$, $t_{H_0^*} = t_{H_0(1)^*}$. L'application "de Kodaira-Spencer"

$$(4.8.1) \quad T_S(k) \longrightarrow t_{H_0^*} \otimes t_{H_0}$$

associant à un point $f : \text{Spec}(k[\varepsilon]/\varepsilon^2) \longrightarrow S$ tel que $f(0)$ soit l'inclusion canonique $\text{Spec}(k) \hookrightarrow S$ la différence $[f^*H] - [H_0(n) \times_{\text{Spec}(k)} \text{Spec}(k[\varepsilon]/\varepsilon^2)]$

(resp. $[f^*H(n)] - [H_0(n) \times_{\text{Spec}(k)} \text{Spec}(k[\varepsilon]/\varepsilon^2)]$), considérée comme élément de $t_{H_0^*} \otimes t_{H_0}$ via 4.4 c) via (4.7.1), est bijective.

Cela résulte immédiatement de 4.4 et 4.7 (rappelons que (ii) signifie que (a) pour tout $A \in \underline{A}$ et toute déformation G'_n de $H_0(n)$ sur A , il existe un W -morphisme $g : \text{Spec}(A) \longrightarrow S$ tel que $g^*H(n) \simeq G'_n$, i.e une déformation H' de H_0 sur A telle que $H'(n) \simeq G'_n$, (b) la classe de H' est unique quand $A = k[\varepsilon]/\varepsilon^2$, (c) pour toute flèche surjective $A \rightarrow A'$ de \underline{A} et toute déformation G'_n de $H_0(n)$ sur A , toute application $g' : \text{Spec}(A') \rightarrow S$ représentant $G'_n|_{\text{Spec}(A')}$ se prolonge en une application $g : \text{Spec}(A) \rightarrow S$ représentant G'_n).

Remarque 4.8.2. - Compte tenu de 4.8 (iii), il est naturel, dans (i), de choisir les "paramètres" t_{ij} de manière que, si \underline{m} est l'idéal maximal de S , on ait, via (4.8.1),

$$t_{ij} \bmod \underline{m}^2 = a_i \otimes b_j,$$

où (a_i) (resp. (b_j)) est une base de $t_{H_0^*}$ (resp. t_{H_0}).

COROLLAIRE 4.9. - Soient n un entier ≥ 1 , R un anneau local noethérien complet, de corps résiduel k parfait de caractéristique p , G un BT_n de dimension d (2.2.2 b)) sur $S = \text{Spec}(R)$.

(i) On a, dans $D(S, \underline{\mathcal{O}}_S)$,

$$(4.9.1) \quad \ell_G \xrightarrow{\sim} (\underline{\mathcal{O}}_S^d \xrightarrow{p^n} \underline{\mathcal{O}}_S^d).$$

En particulier, si R est sans p -torsion, on a

$$\ell_G \xrightarrow{\sim} \omega_G \xrightarrow{\sim} (\underline{\mathcal{O}}_S/p^n \underline{\mathcal{O}}_S)^d$$

$$\dot{\ell}_G \xrightarrow{\sim} v_G[-1] \xrightarrow{\sim} (\underline{\mathcal{O}}_S/p^n \underline{\mathcal{O}}_S)^d[-1].$$

(ii) Notons $\underline{\mathcal{O}}_{G/S} \subset \underline{\mathcal{O}}_S$ l'idéal différente absolue de G (cf. [25, Appendice, Définition 8]). On a :

$$(4.9.2) \quad d_{G/S} = p^{nd} Q_S .$$

D'après [22, II 4.8, 4.15] , il existe une suite exacte de BT_n

$$0 \longrightarrow G^0 \longrightarrow G \longrightarrow G^{\text{ét}} \longrightarrow 0 ,$$

avec G^0 connexe (i.e de fibre spéciale radicielle) et $G^{\text{ét}}$ étale. Le triangle distingué des complexes de co-Lie donne $\ell_G \xrightarrow{\sim} \ell_{G^0}$, ce qui ramène à supposer G connexe. Soit H un BT sur S tel que $G = H(n)$, (4.4 e)). On a alors une suite exacte

$$(1) \quad 0 \longrightarrow G \longrightarrow \bar{H} \xrightarrow{p^n} \bar{H} \longrightarrow 0 ,$$

où \bar{H} est le groupe de Lie formel associé à H [22, II 4.4, 4.14] . On a $\omega_{\bar{H}} = \omega_H$, et $\omega_{\bar{H}}$ est un Ω_S -module libre de rang d . Le triangle distingué des complexes de co-Lie de (1) fournit (4.9.1) (cf. (2.1.3)).

Pour la preuve de (ii), nous aurons besoin de quelques rappels sur la différente (cf. [26, 1.3]).

Soit $f: X \longrightarrow Y$ un morphisme fini et plat, d'intersection complète, avec Y noethérien. D'après la théorie de dualité de Grothendieck [13] , $\omega_{X/Y} := f^! \Omega_Y$ est alors un Ω_X -module inversible. On a de plus une "classe fondamentale"

$$(4.9.3) \quad c_{X/Y} : \Omega_X \longrightarrow \omega_{X/Y} ,$$

définie de l'une des façons équivalentes suivantes :

(a) Supposons que l'on dispose d'une Y -immersion fermée i de X dans un Y -schéma lisse Z , de dimension relative N , et soit J l'idéal de i .

Alors on a [13, chap. III] un isomorphisme canonique

$$\omega_{X/Y} \xrightarrow{\sim} \Lambda^N(J/J^2)^{\otimes -1} \otimes \Omega_{Z/Y}^N ,$$

et $c_{X/Y}$ est définie par

$$c_{X/Y} = (\Lambda^N d_{Z/Y}) \otimes \Lambda^N(J/J^2)^{\otimes -1} ,$$

où

$$d_{Z/Y} : J/J^2 \longrightarrow \Omega_{Z/Y}^1 \otimes \Omega_X$$

est la différentielle.

b) Soit $Tr_{X/Y} : f_* \Omega_X \longrightarrow \Omega_Y$ l'homomorphisme trace, i.e $Tr_{X/Y}(b) =$ trace de la multiplication par b dans $f_* \Omega_X$. Alors $c_{X/Y}$ est le morphisme correspondant à $Tr_{X/Y}$ par la formule de dualité $\text{Hom}(f_* \Omega_X, \Omega_Y) = \text{Hom}(\Omega_X, f^! \Omega_Y)$.

Une démonstration, due à Tate, de l'équivalence des définitions (a) et (b) est donnée dans [21, Appendix]. La différente de X/Y est l'idéal

$$(4.9.4) \quad \underline{D}_{X/Y} := \text{Im } \zeta_{X/Y} : \omega_{X/Y}^{-1} \longrightarrow \underline{0}_X$$

C'est un idéal localement principal, mais pas en général, inversible. La description (a) montre que, si $X = V(f_1, \dots, f_N) \subset Y[T_1, \dots, T_N]$, où (f_1, \dots, f_N) est une suite régulière (fibre à fibre), on a $\omega_{X/Y} \xrightarrow{\sim} \underline{0}_X$ et

$$(4.9.5) \quad \underline{D}_{X/Y} = \det(\partial f_i / \partial T_j) \cdot \underline{0}_X.$$

Cette formule serait encore valable si $Y[T_1, \dots, T_N]$ était remplacé par $Y[[T_1, \dots, T_N]]$.

Si maintenant X est un schéma en groupes commutatifs, fini et plat sur Y , l'idéal $\underline{D}_{X/Y}$ est muni d'une action naturelle de X , de sorte que, si $f : X \rightarrow Y$ est la projection et $e : Y \rightarrow X$ la section unité, on a

$$(4.9.6) \quad \underline{D}_{X/Y} \xrightarrow{\sim} f^* \underline{d}_{X/Y}, \quad \underline{d}_{X/Y} := e^* \underline{D}_{X/Y},$$

où l'idéal $\underline{d}_{X/Y}$ de $\underline{0}_Y$ est la différente absolue de X dans la terminologie de [25, Appendice, Définition 8]. Pour X défini par des équations (f_1, \dots, f_N) comme ci-dessus, $\underline{d}_{X/Y}$ est l'idéal engendré par la valeur en e de $\det(\partial f_i / \partial T_j)$.

LEMME 4.9.7.- (cf. [21, 6.3 + 8.3]). Soit

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow G^0 \xrightarrow{h} G^1 \longrightarrow 0$$

une suite exacte, où G^0 et G^1 sont des schémas en groupes commutatifs lisses (resp. formels lisses) sur Y . Alors on a

$$(4.9.7.1) \quad \underline{d}_{X/Y} = \det((dh)_e) \cdot \underline{0}_Y,$$

où $(dh)_e = \omega_h : \omega_{G^1} \longrightarrow \omega_{G^0}$, et \det désigne un déterminant (bien défini à une unité près).

Cela résulte facilement de (4.9.5).

Prouvons maintenant 4.9 (ii). On peut supposer G connexe. Il suffit alors d'appliquer 4.9.7 à la suite exacte (1) de la démonstration de (i).

COROLLAIRE 4.10 (Raynaud).- Soient R un anneau de valuation discrète complet, de corps résiduel k algébriquement clos de caractéristique p , de corps des fractions K de caractéristique nulle, n un entier ≥ 1 , et G un BT (resp. BT_n) sur $\text{Spec}(R)$, de hauteur h et de dimension d (2.2.2 b)). Posons $G_K = G \times_{\text{Spec}(R)} \text{Spec}(K)$. Alors on a

$$\Lambda^h \mathbb{Z}_p^{T_p(G_K)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p^{(d)} \quad (\text{avec } T_p(G_K) = \varprojlim_{\mathfrak{m}} (p^{\mathfrak{m}})^{G_K})$$

$$(\text{resp. } \Lambda_{\mathbb{Z}/p^n}^h G_K \simeq (\mathbb{Z}/p^n)(d)) ,$$

où, au second membre, (d) désigne un twist à la Tate.

Le cas où G est un BT est traité dans [25,4.2.1]. Le cas d'un BT_n s'en déduit grâce à 4.4 e).

Remarques 4.10.1. a) Pour $n = 1$, 4.10 concorde avec le résultat de Raynaud [25,4.1.1], compte tenu de 4.9 (ii).

b) On peut reformuler 4.10 en disant que le déterminant de $T_p(G_K)$ (resp. G_K^0) a la même valeur que si $G_k = G_{\text{Spec}(R)/\text{Spec}(k)}$ était ordinaire, i.e. G_k^0 de type multiplicatif. La démonstration de Raynaud consiste à se ramener à ce cas par déformation. Le lemme clé [25, 4.2.3] est qu'il existe une déformation de G sur $R[[t]]$ qui est ordinaire au point générique de la fibre spéciale. Raynaud démontre ce lemme au moyen de la théorie des modules de Cartier des groupes de Lie formels. On peut aussi le prouver par un calcul infinitésimal utilisant 4.8 (iii) et le cristal de Dieudonné de G au sens de Grothendieck-Berthelot-Breen-Mazur-Messing [II], [22], [20], [3], cf. Appendice 2.

4.11.- Complément. Soient $n \geq 1$, $i : S \rightarrow S'$ une nilimmersion avec S' affine, F' un S' -schéma en groupe fini commutatif, localement libre, annulé par p^n , $F = F' \times_{S'} S$, $u : F \rightarrow G$ un homomorphisme qui est une immersion fermée, avec G un BT_n sur S . Il existe alors un $BT_n G'$ sur S' prolongeant G et un homomorphisme $u' : F' \rightarrow G'$ prolongeant u (automatiquement une immersion fermée).

Cet énoncé généralise 4.4 a) (4.4 a) correspond à $F' = 0$). La démonstration est analogue, nous allons l'indiquer rapidement.

Notons tout d'abord que l'énoncé ci-dessus équivaut à celui-ci, qui en est dual :

4.11* : Soient n , i , G comme en 4.11, H' un S' -schéma en groupe fini commutatif, localement libre, annulé par p^n , $H = H' \times_{S'} S$, $v : G \rightarrow H$ un épimorphisme. Il existe alors un $BT_n G'$ sur S' prolongeant G et un épimorphisme $v' : G' \rightarrow H'$ prolongeant v .

Techniquement, il nous sera plus commode de traiter le problème de 4.11*.

Les réductions de 4.5.3 1) et 2) ramènent à supposer que $S' = \text{Spec}(A')$, avec A' une \mathbb{Z} -algèbre de type fini et l'immersion i définie par un idéal J de carré nul.

Soit $F = \ker v$; c'est un S -schéma en groupe fini, localement libre, annulé par p^n . D'après [14,VII 4.2.5], l'obstruction à l'existence du prolongement cherché (G', v') est un élément

$$o(i, G', v) \in \text{Ext}_{\mathbb{Z}/p^n}^2(G, \check{\chi}_F \otimes J)$$

(en fait, comme d'après 4.4 a) G admet un prolongement G' sur S' , cette obstruction appartient même au sous-groupe

$$\text{Coker } \text{Ext}_{\mathbb{Z}/p^n}^1(G, \check{\chi}_G \otimes J) \xrightarrow{\phi} \text{Ext}_{\mathbb{Z}/p^n}^1(G, \check{\chi}_H \otimes J),$$

l'application ϕ , induite par $\check{\chi}_v$, s'interprétant, une fois choisi un prolongement \tilde{G} , comme associant à la classe d'un prolongement G' l'obstruction à prolonger v en $v' : G' \rightarrow H'$; de plus, si $o(i, G', v) = 0$, l'ensemble des classes de solutions du problème est un espace affine sous $\text{Ext}_{\mathbb{Z}/p^n}^1(G, \check{\chi}_F \otimes J)$, et l'ensemble des automorphismes d'une solution s'identifie à $\text{Ext}_{\mathbb{Z}/p^n}^0(G, \check{\chi}_F \otimes J)$.

Par suite, les arguments de 4.5.3 3), 4), 5) ramènent à supposer A' artinien, de corps résiduel k parfait de caractéristique p , d'idéal maximal \underline{m} , et l'idéal J de S dans S' annulé par \underline{m} . D'après 4.4 e), il existe alors un BT C sur S tel que $G = C(n)$. Notons $C(\cdot)$ le système projectif des $C(m)$, $m \geq n$, avec $p : C(m+1) \rightarrow C(m)$ comme flèche de transition, $v : C(\cdot) \rightarrow H$ le système projectif des $v.p^{m-n} : C(m) \rightarrow H$, $B_\cdot = (B_m)_{m \geq n}$ le système projectif noyau de v . Pour prouver l'existence d'un prolongement (G', v') , il suffit de résoudre le problème (a priori plus difficile) suivant :

(P) Trouver un BT C' sur S' prolongeant C et un prolongement $(v') : C'(\cdot) \rightarrow H'$ du système projectif v .

Notons par l'indice zéro la réduction sur $S_0 = \text{Spec}(k)$ (k le corps résiduel de A' , de sorte qu'on a $S_0 \hookrightarrow S \xrightarrow{i} S'$). D'après une variante de [14,VII 4.2.5] (cf. preuve de 4.7), l'obstruction au problème (P) est un élément $o(P)$ de

$$(4.11.1) \quad E = \text{Ext}_{\mathbb{Z}/p}^2(C_0(\cdot), \check{\chi}_{(B_\cdot)_0} \otimes J)$$

(et même du sous-groupe

$$\text{Coker } \text{Ext}_{\mathbb{Z}/p}^1(C_0(\cdot), \check{\chi}_{C_0(\cdot)} \otimes J) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}/p}^1(C_0(\cdot), \check{\chi}_{H_0} \otimes J),$$

mais cela ne nous servira pas). Nous allons montrer que $E = 0$.

On procède pour cela comme en 4.7.2. Le point est que le système projectif B_\cdot est "aussi bon" que le système projectif des tronqués d'un BT. Soient C^* le BT dual de Cartier de C , et

$$0 \rightarrow H^* \rightarrow C^*(\cdot) \rightarrow B^* \rightarrow 0$$

la suite exacte de systèmes inductifs duals de Cartier de la suite exacte

$$0 \rightarrow B_\cdot \rightarrow C(\cdot) \rightarrow H \rightarrow 0.$$

On sait [3,3.3.12] que $B^* := \varinjlim B_n^*$ est un BT. L'argument de (loc.cit.) montre aussi que l'on a $B^*(r) \subset B_{n+r}^*$ pour tout $r \geq 1$, de sorte que le système inductif des B_{an}^* contient "en sandwich" celui des $B^*(an)$:

$$B_n^* \subset B^*(n) \subset B_{2n}^* \subset \dots \subset B_{an}^* \subset B^*(an) \subset B_{(a+1)n}^* \dots .$$

Dualemment, si B est le dual de Cartier de B^* , le système projectif des $B(an)$ (avec $p^n : B((a+1)n) \rightarrow B(an)$ comme flèche de transition) s'insère en sandwich dans celui des B_{an} :

$$(4.11.2) \quad B_n \leftarrow B(n) \leftarrow B_{2n} \leftarrow \dots \leftarrow B_{an} \leftarrow B(an) \leftarrow B_{(a+1)n} \leftarrow \dots .$$

Cela posé, la suite exacte (*) de la démonstration de 4.7 donne une suite exacte

$$0 \rightarrow R^1 \varprojlim_{\mathbb{Z}/p^m} \text{Ext}^1(C_0(m), \check{\chi}_{(B_m)_0} \otimes J) \rightarrow E \rightarrow \varprojlim_{\mathbb{Z}/p^m} \text{Ext}^2(C_0(m), \check{\chi}_{(B_m)_0} \otimes J) \rightarrow 0 .$$

Vu le triangle distingué

$$t_{(B_m)_0} \longrightarrow \check{\chi}_{(B_m)_0} \longrightarrow v_{(B_m)_0} [-1] \longrightarrow$$

et (2.2.4.1), on a une suite exacte (de k -vectoriels)

$$0 \rightarrow \text{Ext}^1_{\mathbb{Z}/p^m}(C_0(m), \check{\chi}_{(B_m)_0} \otimes J) \rightarrow \text{Hom}(C_0(m), v_{(B_m)_0} \otimes J) \\ (= t_{C_0^*(m)} \otimes v_{(B_m)_0} \otimes J) .$$

Donc les Ext^1 sont de dimension finie sur k , donc le système projectif des Ext^1 (qui est k -linéaire) vérifie (ML), donc son $R^1 \varprojlim$ est nul, et par suite on a

$$E \cong \varprojlim_{\mathbb{Z}/p^m} \text{Ext}^2(C_0(m), \check{\chi}_{(B_m)_0} \otimes J) .$$

D'autre part, par le triangle ci-dessus et (2.2.4.1) on a une suite exacte de systèmes projectifs

$$\text{Ext}^2_{\mathbb{Z}/p^m}(C_0(m), t_{(B_m)_0} \otimes J) \rightarrow \text{Ext}^2_{\mathbb{Z}/p^m}(C_0(m), \check{\chi}_{(B_m)_0} \otimes J) \rightarrow 0 .$$

Comme la flèche de $t_{B_0((a+1)n)}$ dans $t_{B_0(an)}$ induite par p^n est nulle

(2.2.1 c) (ii)), (4.11.2) montre que le système projectif des $t_{(B_m)_0}$ ($m \geq n$)

est essentiellement nul. Il en est donc de même du système des $\text{Ext}^2_{\mathbb{Z}/p^m}(C_0(m), \check{\chi}_{(B_m)_0} \otimes J)$, et par suite $E = 0$. Le problème (P) a donc une solution, ce qui achève la démonstration des énoncés 4.11 et 4.11*.

Dans le cas où l'idéal J de i est de carré nul, on peut, grâce à [14, VII 4.2.5, VII 4.2.7], décrire par des Ext convenables l'ensemble des solu-

tions du problème 4.11 (resp. 4.11*) et l'ensemble des automorphismes d'une solution. Nous en laissons le soin au lecteur.

A P P E N D I C E 1

Le Théorème de Serre-Tate, d'après Grothendieck

Rappelons le résultat classique suivant de Grothendieck (~ 1962) :

THÉORÈME A 1.1.- Soient S' un schéma affine, $i : S \rightarrow S'$ une nilimmersion d'idéal J , A un schéma abélien sur S .

- (i) Il existe un schéma abélien A' sur S' prolongeant A .
- (ii) Supposons qu'on ait un idéal $K \supset J$ définissant $S_0 \subset S'$ tel que $JK = 0$. Notons A^* le schéma abélien dual de A , et désignons par l'indice o les schémas déduits par le changement de base $S_0 \rightarrow S$. Alors l'ensemble des classes d'isomorphie de déformations de A sur S' est un espace affine sous $t_{A_o^*} \otimes t_{A_o} \otimes J$, et le groupe des automorphismes d'un prolongement A' de A (induisant l'identité sur A) est réduit à zéro.

L'argument de Grothendieck est esquissé dans [24, p.231-238], avec, semble-t-il, une légère inexactitude p. 238, 1.18. On peut aussi procéder comme suit. Tout d'abord, des arguments standard ramènent à prouver (i) dans la situation de (ii). L'existence d'un prolongement et les assertions de (ii) découlent alors de 3.2 et du lemme suivant :

LEMME A.1.2.- Soient S un schéma affine, A un schéma abélien sur S , M un \mathcal{O}_S -module quasi-cohérent. Alors on a

$$\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^2(A, M) = 0.$$

Voir [3, 2.5.6 et p. 107, 1.11]. On peut aussi se ramener à supposer qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $p^n \mathcal{O}_S = 0$ et que $M = \mathcal{O}_S$. Il suffit alors d'écrire la suite exacte des Ext associée à la suite exacte $0 \rightarrow A(n) \rightarrow A \xrightarrow{p^n} A \rightarrow 0$, et de noter que la flèche

$$(t_{A^*} \simeq) \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(A, \mathcal{O}_S) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(A(n), \mathcal{O}_S) (\simeq_{v_{A(n)}^*})$$

est un isomorphisme (examiner les rangs).

COROLLAIRE A 1.3 (Serre-Tate).- Soient $i : S \rightarrow S'$ une nilimmersion, A un schéma abélien sur S , $G = \varinjlim A(n)$ le BT associé. On suppose que p est localement nilpotent sur S . Notons $\underline{\mathrm{Def}}(A, i)$ (resp. $\underline{\mathrm{Def}}(G, i)$) le champ des

déformations de A (resp. G) en un schéma abélien (resp. BT) sur S' . Alors le foncteur "BT associé"

$$\underline{\text{Def}}(A,i) \longrightarrow \underline{\text{Def}}(G,i)$$

est une équivalence.

On se ramène au cas où S' est affine, p nilpotent sur S , et l'idéal de i de carré nul. La conclusion découle alors de 4.4 c), 4.7 et A 1.1.

L'argument ci-dessus est dû à Grothendieck. La démonstration originale de Serre-Tate est, à notre connaissance, non publiée. Pour d'autres démonstrations voir [22, V 2.3], et [17,1], qui présente une preuve due à Drinfeld.

A P P E N D I C E 2

Inversibilité générique de Hasse-Witt, d'après Koblitz

Koblitz a étudié dans [18] la variation infinitésimale de la matrice de Hasse-Witt d'une variété abélienne principalement polarisée. Il est aisément de transcrire ses calculs dans le cadre des F-cristaux, ce qui permet de les appliquer au cristal de Dieudonné d'un BT.

A 2.1.- Soient k un corps parfait de caractéristique p , $A = k[[t_1, \dots, t_n]]$, \underline{m} l'idéal maximal de A , $A_i = A/\underline{m}^{i+1}$, M un A -module libre de rang h , muni d'une connexion intégrable $\nabla : M \rightarrow \Omega_A^1 \otimes M$ (où $\Omega_A^1 = \Omega_{A/\mathbb{F}_p}^1 = \Omega_{A/k}^1 = \Theta A dt_i$) et d'un endomorphisme σ -linéaire F , horizontal pour ∇ , σ désignant l'endomorphisme de Frobenius de A ; autrement dit, (M, ∇, F) est un F -cristal sur A/k , libre de rang h . On fait l'hypothèse que $N = \text{Im } F : M \rightarrow \sigma_* M$ est libre, de sorte que $L = \text{Ker } F$ l'est aussi. On note r (resp. s) le rang de L (resp. N). On pose $M_i = M \otimes_{A/k} A_i$, et d'une manière générale, on désigne par l'indice i les objets déduits par extension des scalaires de A à A_i .

Ces données déterminent deux invariants principaux : d'une part, *l'endomorphisme de Hasse-Witt*

$$(A 2.1.1) \quad HW : N \longrightarrow N,$$

qui est l'endomorphisme σ -linéaire déduit de F par passage au quotient, d'autre part *l'application de Kodaira-Spencer*

$$(A 2.1.2) \quad \text{Kod} : L \longrightarrow \Omega_A^1 \otimes N,$$

qui est l'application A -linéaire déduite de ∇ par passage au quotient.

Le problème auquel on s'intéresse est le suivant : calculer $HW_1 : N_1 \longrightarrow N_1$, connaissant $HW_0 : N_0 \longrightarrow N_0$ et $\text{Kod}_0 : L_0 \longrightarrow \Omega_A^1 \otimes N_0 (= \underline{m}/\underline{m}^2 \otimes_k N_0)$. En fait, ces données ne suffisent pas tout à fait, mais on donnera une formule pour HW_1 en termes de Kod_0 et F_0 .

Nous allons pour cela transcrire dans le cadre précédent le calcul de Koblitz [18, p. 183-185]. Soit

$$(A 2.1.3) \quad P : M_1 \longrightarrow M_1 \quad (\text{resp. } P : A_1 \longrightarrow A_1)$$

l'application définie par

$$Px = x - \sum t_i \nabla(\partial_{t_i})x \quad (\text{resp. } Px = x - \sum t_i \partial_{t_i} x).$$

On déduit de [18, p. 173-175] (ou l'on vérifie directement) que P possède les propriétés suivantes :

$$(A.2.1.4) \quad \begin{aligned} P^2 &= P, \\ P(fx) &= P(f)P(x) \quad (\forall f \in A_1, \forall x \in M_1) \\ P(\underline{m} M_1) &= 0 \\ P(F_1 x) &= F_1 x \quad (\forall x \in M_1). \end{aligned}$$

Notons d'autre part que $\nabla : M \longrightarrow \otimes (dt_i \otimes M)$ est donné par $\nabla x = \sum dt_i \otimes \nabla(\partial_{t_i})x$, de sorte que

$$\text{Kod}_o : L_o \longrightarrow \Omega_A^1 \otimes N_o \quad (= \underline{m}/\underline{m}^2 \otimes_k N_o = \underline{m} M / (\underline{m} L + \underline{m}^2 M))$$

est donné par

$$(A.2.1.5) \quad \text{Kod}_o(\bar{x}) = \text{classe de } \sum t_i \nabla(\partial_{t_i})x \text{ dans } \underline{m} M / (\underline{m} L + \underline{m}^2 M)$$

pour $\bar{x} = \text{classe de } x \in L_1$ dans L_o .

Choisissons des éléments

$$(A.2.1.6) \quad (e_i) \quad (1 \leq i \leq r) \quad (\text{resp. } (f_j) \quad (1 \leq j \leq s))$$

de L_1 (resp. M_1) tels que (e_i) soit une base de L_1 , les images de f_j dans N_1 forment une base de N_1 , et $Pf_j = f_j$ pour tout j (on prend d'abord $(e_i), (f_j)$ vérifiant les deux premières conditions, puis on remplace f_j par $Pf_j = f_j$: comme P est l'identité mod \underline{m} , les deux premières conditions sont encore satisfaites, et la troisième l'est aussi car $P^2 = P$). On a donc une décomposition

$$M_1 = L_1 \oplus N_1,$$

où N_1 est identifié à $\otimes A_1 f_j$, et $F_1 : M_1 \longrightarrow M_1$ est donné par une matrice

$$(A.2.1.7) \quad \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ 0 & H_1 \end{pmatrix}$$

dans la base $((e_i), (f_j))$, avec B_1 de type (r, s) et H_1 carrée d'ordre s . La matrice H_1 représente $HW_1 : N_1 \longrightarrow N_1$ (A 2.1.1), et le rang de F_o , donc de $\begin{pmatrix} B_o \\ H_o \end{pmatrix}$, est égal à s . D'autre part, dans les bases (e_i^o) et (f_j^o) de L_o et N_o induites par (e_i) et (f_j) , l'application Kod_o (A 2.1.2, 2.1.5) est représentée par une matrice K_o de type (s, r) à coefficients dans $\underline{m}/\underline{m}^2$.

PROPOSITION A 2.1.8 (cf. [18, p. 185, 1.-2]). Avec les notations ci-dessus, on a l'égalité suivante entre matrices carrées d'ordre s à coefficients dans A_1 :

$$H_1 = H_0 - K_0 B_0$$

(dans cette formule, H_0 et B_0 sont à coefficients dans $k = A_0 \subset A_1$) .

C'est le calcul de (loc. cit.). Posons $B_1 = (b_{ij})$, $H_1 = (h_{ij})$, $K_0 = (k_{ij})$. On a

$$F_1 f_j = \sum_i b_{ij} e_i + \sum_\ell h_{\ell j} f_\ell .$$

Comme $P F_1 = F_1$, et compte tenu des formules de (A 2.1.4), on en déduit (en notant a^0 le terme constant (dans k) d'un élément a de A_1) :

$$\begin{aligned} F_1 f_j &= \sum_i b_{ij}^0 p e_i + \sum_\ell h_{\ell j}^0 f_\ell \quad (\text{car } P f_\ell = f_\ell) \\ &= \sum_i b_{ij}^0 (e_i - \sum_m t_m \nabla(\partial_{t_m}) e_i) + \sum_\ell h_{\ell j}^0 f_\ell , \end{aligned}$$

d'où, compte tenu de (A 2.1.5),

$$\begin{aligned} H_1 f_j &= -\sum_i b_{ij}^0 (\sum_m k_{mi} f_n) + \sum_\ell h_{\ell j}^0 f_\ell \\ &= \sum_\ell (h_{\ell j}^0 - \sum_i k_{\ell i} b_{ij}^0) f_\ell , \end{aligned}$$

ce qui est l'égalité annoncée.

COROLLAIRE A 2.1.9.- On suppose que M est "modulaire", en ce sens que l'application de Kodaira-Spencer (A.2.1.2) induit un isomorphisme $(\Omega_A^1)^* = T_A \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(L, N)$ (ou, ce qui revient au même, que Kod_0 induit un isomorphisme $T_A(k) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(L_0, N_0)$). On note (T_{ij}) ($1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq r$) un système de coordonnées sur A tel que la dérivation $\partial_{T_{ij}}$ corresponde par cet isomorphisme à $(e_j^0)^* \otimes f_j^0$ ($(-)^*$ désignant la base duale). Alors K_0 est la matrice (T_{ij}) . Pour $u \in T_A(k)$, $u : A \longrightarrow k[\varepsilon]$ ($\varepsilon^2 = 0$), donné par $\sum u_{ij} \partial_{T_{ij}}$, la matrice $u^* H$, à coefficients dans $k[\varepsilon]$, induite par u , est

$$u^* H = H_0 - \varepsilon U B_0 ,$$

où $U = (u_{ij})$ ($1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq r$) .

C'est immédiat.

COROLLAIRE A 2.1.10.- Sous les hypothèses de (A 2.1.9), supposons que $\text{rg}(H_0) = a < s$. Soit V le sous-espace de $T_A(k)$ défini par

$$V = \{u : A \longrightarrow k[\varepsilon], \Lambda^{a+1} u^* H = 0\} .$$

Alors on a $V \neq T_A(k)$.

Il existe a lignes de H_0 qui sont linéairement indépendantes. Quitte à rénuméroter la base (f_j) , on peut supposer que ce sont les a premières. Les $s-a$ dernières en sont donc des combinaisons linéaires, et comme le rang

de $\begin{pmatrix} B_0 \\ H_0 \end{pmatrix}$ est $s > a$, il existe une ligne (b_m^0, \dots) de B_0 telle que la matrice $(a+1) \times s$

$$C = \begin{pmatrix} b_m^0, \dots \\ h_1^0, \dots \\ \dots \\ h_a^0, \dots \end{pmatrix}$$

soit de rang $a+1$. Soit $u : L_0 \longrightarrow N_0$ l'application linéaire telle que $u(e_m^0) = f_{a+1}^0$ et $u(e_i^0) = 0$ pour $i \neq m$. La matrice U de u (dans les bases (e_i^0) et (f_j^0)) a donc pour seul terme non nul celui d'indice $(a+1, m)$, égal à 1. La matrice UB_0 a pour seule ligne non nulle la $(a+1)$ -ième, égale à b_m^0, \dots . La matrice des $a+1$ premières lignes de $H_0 - \varepsilon UB_0$ est donc

$$D = \begin{pmatrix} h_1^0, \dots \\ \dots \\ h_a^0, \dots \\ h_{a+1}^0, \dots -\varepsilon b_m^0, \dots \end{pmatrix}.$$

Si Δ est un mineur $\neq 0$ de C , formé avec les colonnes d'indice $j_1 < \dots < j_{a+1}$, le mineur de D formé avec les mêmes colonnes est non nul, car le coefficient de ε est $\pm \Delta$. Donc $\Lambda^{a+1} u^* H \neq 0$, ce qui achève la démonstration.

Le résultat ci-dessus est très grossier. On pourrait, comme Koblitz dans [18, IV §9], étudier les sous-espaces de $T_A(k)$ définis par des conditions de rang ou de p-rang sur H .

A 2.2.- On suppose maintenant que k est algébriquement clos, et on considère un k -schéma lisse de type fini $S \neq \emptyset$, et un F -cristal (M, ∇, F) sur S , localement libre de rang h , tel que $L = \text{Ker } F$ soit localement libre de rang r , et $N = M/L$ localement libre de rang s . On définit comme en A 2.1 l'endomorphisme de Hasse-Witt HW et l'application de Kodaira-Spencer Kod . On suppose que M est modulaire, i.e. que Kod induit un isomorphisme $T_S \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}(L, N)$.

PROPOSITION A 2.2.1. - Sous les hypothèses précédentes, il existe un ouvert non vide S' de S tel que, pour tout point fermé x de S' , $(HW)(x)$ soit inversible.

Soit a le sup des rangs de $(HW)(x)$, pour x parcourant les points fermés

de S . Supposons que l'on ait $a < s$. Alors $\Lambda^{a+1} H_W = 0$. Appliquant A 2.1.10 au cristal induit par M sur le complété de S en un point fermé x où $rg(H_W)(x) = a$, on obtient une contradiction.

Bien entendu, comme on l'a signalé plus haut, on peut paraphraser Koblitz, et stratifier S par le rang et le p-rang de H_W .

A 2.3.- Soient S/k comme en A 2.2, et G un BT (resp. BTT) de hauteur h sur S . On sait alors associer à G un F -cristal $M = \underline{D}(G)$ sur S/k , localement libre de rang h , tel que $L = \text{Ker } F$ s'identifie canoniquement au module $\omega_G = \omega_{G(1)} = \varprojlim \omega_{G(n)}$, localement libre de rang $d = \dim G$, et le quotient $N = M/L$ au module $t_{G^*} = t_{G(1)^*} = \varinjlim t_{G^*(n)}$, localement libre de rang $d^* = \dim G^*$:

$$(A 2.3.1) \quad 0 \longrightarrow \omega_G \longrightarrow M \longrightarrow t_{G^*} \longrightarrow 0 ,$$

voir par exemple [3, 3.3.6 et 3.3.11]. Il résulte de (loc. cit.) et de [2, 1.5.1] que l'endomorphisme de Hasse-Witt correspondant

$$(A 2.3.2) \quad HW : t_{G^*} \longrightarrow t_{G^*}$$

n'est autre que l'opération de puissance p-ième symbolique. On a d'autre part une application de Kodaira-Spencer

$$(A 2.3.3) \quad \text{Kod} : \omega_G \longrightarrow \Omega_S^1 \otimes t_{G^*} .$$

LEMME A 2.3.4. - Soit s un point fermé de S . L'application

$$\text{Kod}(s) : T_S(s) \longrightarrow \text{Hom}(\omega_G(s), t_{G^*}(s)) = t_G(s) \otimes t_{G^*}(s)$$

associe à un morphisme f de $S' = \text{Spec } k[\epsilon]/\epsilon^2$ d'origine s la différence des classes de déformations de $G(s)$ sur S' , $[f^*H] - [H(s)x_s S']$ (cf. 4.4 c) et 4.7).

D'après [3, 3.3.5], M est défini par $M = \underline{\text{Ext}}_{S/k}^1(G, \Omega_{S/k})$. Ce groupe peut se calculer comme cohomologie cristalline "spatiale" d'un diagramme convenable. Pour faire le lien avec [14], il est commode d'utiliser, plutôt que le diagramme [3, 2.1.6.2], le diagramme (beaucoup plus compliqué) $(\underline{G} \longrightarrow \underline{S}) = (N(\mathbb{Z}, G) \longrightarrow N(\mathbb{Z}, S))$ de [14, VI 4.1.6]. Pour vérifier A 2.3.4, on peut se ramener à supposer que G est un BT formel lisse. Alors M se calcule comme un groupe de cohomologie de De Rham relative formelle

$$M = H_{\text{DR}}^1(\underline{G}/\underline{S}) ,$$

la connexion ∇ est donnée par Gauss-Manin, et (A 2.3.1) par la filtration de Hodge. Il est standard (cf. par exemple [16, 1.4.1.7]) que l'application

(de Kodaira-Spencer) $T_S(k) \longrightarrow H^1(G, T_{G/S})$ induite par ∇ associe à $f: S' \longrightarrow S$ la différence des classes de déformations de $G(s)$ sur S' , $[f^*G] - [G(s)x_{S'}]$. Il ne reste plus qu'à identifier $H^1(G, T_{G/S})$ à $t_G \otimes t_{G^*}$ de manière compatible avec (4.7.1) et 4.4 c).

LEMME A 2.3.5.- Soit s un point fermé de S . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $G(s)$ est ordinaire, i.e $G^0(s)$ de type multiplicatif (cf. 4.10.1)) ;
- (ii) $HW(s) (=x \mapsto x^{(p)}) : t_{G^*(s)} \longrightarrow t_{G^*(s)}$ est bijectif.
- (ii') $(x \mapsto x^{(p)}) : t_{G(s)} \longrightarrow t_{G(s)}$ est bijectif.

En effet, il revient au même de dire que $G(s)$ ou que $G^*(s)$ est ordinaire, et pour $G(s)$ radiciel on a $(G(s) \text{ multiplicatif}) \Leftrightarrow (\forall \text{ bijectif sur } G(s)) \Leftrightarrow (x \mapsto x^{(p)} \text{ bijectif sur } t_{G(s)})$.

PROPOSITION A 2.3.6.- Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) pour tout point fermé s de S , si \hat{S}_s désigne le complété de S en s , la restriction de G à \hat{S}_s est une déformation verselle de $G(s)$ sur la catégorie des k -algèbres locales artiniennes de corps résiduel k (cf. 4.8) ;

(ii) L'application

$$T_S \longrightarrow t_G \otimes t_{G^*}$$

induite par l'application de Kodaira-Spencer (A 2.3.3) est un isomorphisme. Si ces conditions sont remplies, il existe un ouvert non vide U de S tel que, pour tout point fermé s de U , $G(s)$ soit ordinaire.

La première assertion découle de 4.8 et A 2.3.4, la seconde de A 2.2.1 et A 2.3.5.

Remarque A 2.3.7.- Les théorèmes d'algébrisation de M. Artin [1] montrent qu'il existe des BTT G/S vérifiant les conditions de A 2.3.6. J'ignore ce qu'il en est pour les BT.

B I B L I O G R A P H I E

- [1] M. ARTIN, *Algebraization of formal moduli*, I , in *Global Analysis*, papers in honor of K. Kodaira, Univ. of Tokyo Press & Princeton Univ. Press, 1969, et *Construction techniques for algebraic spaces*, Cong. int. 1970, I, 419-423, Gauthier-Villars, 1971.
- [2] P. BERTHELOT. *Théorie de Dieudonné sur un anneau de valuation parfait*, Ann. Scient. E.N.S, 4ème série, t. 13, 1980, 225-268.
- [3] P. BERTHELOT, L. BREEN, W. MESSING. *Théorie de Dieudonné cristalline* II, Lecture Notes in Mathematics n°930, Springer Verlag, 1982.
- [4] L. BREEN. *On a nontrivial higher extension of representable abelian sheaves*, Bull. Amer. Math. Soc., 75, 1969, 1249-1253.
- [5] L. BREEN. *Un théorème d'annulation pour certains Extⁱ de faisceaux abéliens*, Ann.Scient. E.N.S 5 (1975), 339-352.
- [6] P. CARTIER. *Groupes formels associés aux anneaux de Witt généralisés*, CRAS Paris, t. 265, 1967, série A, 49-52, et *Modules associés à un groupe formel commutatif, courbes typiques*, CRAS Paris, t. 265, 1967, série A, 129-132.
- [7] P. DELIGNE. *Le Lemme de Gabber et Représentaions ℓ -adiques*, Exposés n°5 et 9, ce Séminaire.
- [8] M. DEMAZURE et P. GABRIEL. *Groupes algébriques*, North-Holland, 1970.
- [9] G. FALTINGS, *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*, Inv. Math., 73, 1983, 349-366.
- [10] J-M FONTAINE. *Groupes p divisibles sur les corps locaux*, Astérisque 47-48, SMF, 1977.
- [11] A. GROTHENDIECK. *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux*, Cong. int. 1970, I, 431-436, Gauthiers-Villars, 1971.

- [12] A. GROTHENDIECK. *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux de Dieudonné*, Sémin. Math. Sup. 45, Presses de l'Univ. de Montréal, 1970.
- [13] R. HARTSHORNE. *Residues and Duality*, Lecture Notes in Mathematics n°20, Springer-Verlag, 1966.
- [14] L. ILLUSIE. *Complexe cotangent et déformations I, II*, Lecture Notes in Mathematics n°239 et 283, Springer-Verlag, 1971, 1972.
- [15] N. KATZ. *Nilpotent connections and the monodromy theorem*, Pub. Math. IHES, 39, 175-232, 1970.
- [16] N. KATZ. *Algebraic solutions of differential equations (p-curvature and the Hodge filtration)*, Inv. Math., 18, 1972, 1-118.
- [17] N. KATZ. *Serre-Tate local moduli*, Exp. V bis dans Surfaces Algébriques, Lecture Notes in Mathematics n° 868, Springer-Verlag 1981.
- [18] N. KOBLITZ. *p-adic variation of the zeta-function over families of varieties defined over finite fields*, Comp. Math., 31, 1975, 119-218.
- [19] M. LAZARD. *Commutative Formal Groups*, Lecture Notes in Mathematics n°443, Springer-Verlag, 1975.
- [20] B. MAZUR, W. MESSING. *Universal extensions and one dimensional crystalline cohomology*, Lecture Notes in Math. n°370, Springer-Verlag, 1974.
- [21] B. MAZUR, L. ROBERTS. *Local Euler Characteristics*, Inv. Math., 9 1970, 201-234.
- [22] W. MESSING. *The crystals associated to Barsotti-Tate groups, with applications to abelian schemes*, Lecture Notes in Math. n°264, Springer-Verlag, 1972.
- [23] A. OGUS. *F-crystals and Griffiths transversality*, Int. Symp. on Algebraic Geometry, Kyoto, 1977, 15-44.

- [24] F. OORT, *Finite group schemes, local moduli for abelian varieties and lifting problems*, Proc. 5th Nordic Summer School, The Netherlands, Walters-Noordhoff, 1970.
- [25] M. RAYNAUD. *Schémas en groupes de type (p,...,p)*, Bull. Soc. math. France, 102, 1974, 241-280.
- [26] M. RAYNAUD. *Hauteurs et isogénies*. Exp.7, ce Séminaire.
- [27] M. SCHLESSINGER. *Functors of Artin rings*, Trans. AMS, 130, (1968), 208-222.
- EGA IV *Eléments de Géométrie algébrique*, par A. Grothendieck, rédigés avec la collaboration de J. Dieudonné, Etude locale des schémas et des morphismes de schémas, Pub. IHES 20, 24, 28, 32.
- SGA 6 *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch*, Séminaire de Géométrie algébrique du Bois-Marie 66/67, par P. Berthelot, A. Grothendieck, L. Illusie, Lecture Notes in Mathematics n°225, Springer-Verlag, 1971.

LUC ILLUSIE
Université PARIS XI - Bat.425
Département de Mathématiques
91405 ORSAY CEDEX

Astérisque

MICHEL RAYNAUD
Hauteurs et isogénies

Astérisque, tome 127 (1985), p. 199-234

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985_127_199_0>

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » ([http://smf4.emath.fr/
Publications/Asterisque/](http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/)) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

Exposé VII

H A U T E U R S E T I S O G É N I E S

Michel RAYNAUD

INTRODUCTION

Considérons un corps de nombres K , une K -variété abélienne A_K et son modèle de Néron A sur l'anneau d'entiers \mathcal{O} de K . Si ω_A est le \mathcal{O} -module inversible des formes différentielles sur A , de degré maximum et invariantes par translations, on a sur ω_A une structure d'Arakelov et en particulier, ω_A a un degré $\deg(\omega_A)$. Si de plus A est semi-stable, on définit la hauteur de A_K :

$$ht(A_K) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \deg(\omega_A) .$$

Dans cet exposé on étudie le comportement de $\deg(\omega_A)$ par isogénie.

Soit donc $u_K : A_K \rightarrow B_K$ une K -isogénie et $u : A \rightarrow B$ son extension aux modèles de Néron.

Dans le §1 on exprime $\deg(\omega_A) - \deg(\omega_B)$ en fonction de la ramification de u , et plus précisément, en fonction de la différente de $\text{Ker}(u)$, lorsque u est plat.

Au §2, on montre que si A' est le modèle de Néron de la variété duale A_K' de A_K , on a $\deg(\omega_{A'}) = \deg(\omega_{A_K})$. Ce résultat ne sera pas utilisé dans la suite du volume ; la preuve est locale et plaide en faveur des propriétés différentielles du modèle de Néron, y compris dans le cas où A n'est pas semi-stable.

Les résultats essentiels pour la suite se trouvent au §4. On suppose A semi-stable et on établit le résultat suivant :

THÉORÈME. - L'ensemble des hauteurs des variétés abéliennes B_K , K -isogènes à A_K est fini. Son cardinal, ainsi que les différences $|ht(A_K) - ht(B_K)|$ peuvent être majorés de façon effective.

La démonstration du théorème a pour point de départ le résultat suivant, dû

à Faltings :

Soient p un nombre premier, $(A_K)_{p^\infty} = \bigcup_n (A_K)_{p^n}$, le K -groupe p -divisible constitué par la torsion p - primaire de A_K , $T_p(A_K)$ son module de Tate. Considérons $H_K = \bigcup_n (H_K)_{p^n}$ un sous- K -groupe p - divisible de $(A_K)_{p^\infty}$. Il lui correspond un sous- \mathbb{Z}_p -module M de $T_p(A_K)$, stable sous l'action du groupe de Galois $\text{Gal}(\bar{K}/K)$; soit h le rang de M . Supposons pour simplifier $K = \mathbb{Q}$. Faltings calcule la puissance du caractère cyclotomique qui décrit l'action de $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ sur $\Lambda^h M$, au moyen d'un invariant local, lié à la réduction de H_K en p . Cette relation entraîne que les isogénies $u_K : A_K \rightarrow B_K$, de noyau $(H_K)_{p^n}$, conservent le degré d'Arakelov pour $n \gg 0$.

Ceci étant, les sous-groupes p -divisibles de $(A_K)_{p^\infty}$, du type H_K , qui apparaissent dans la démonstration de Faltings, s'introduisent de façon non effective : ils sont extraits, par un argument de compacité des noyaux, de familles infinies de p -isogénies.

Pour sauver l'effectivité, dans cette partie galoisienne de la démonstration, on remplace la considération des sous-groupes p -divisibles H_K , par celle des sous-groupes $(H_K)_{p^n}$, dont les points à valeurs dans \bar{K} , sont du type $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^h$. Autrement dit, au lieu des groupes p -divisibles, appelés aussi de Barsotti-Tate (BT), on utilise les groupes de Barsotti-Tate tronqués (BT_n) . Les propriétés différentielles des BT_n , ainsi que les propriétés de déformation dont on a besoin, sont établies dans ce volume Exp. VI.

Que l'on utilise les BT ou bien les BT_n , il arrive que ceux-ci se spécialisent mal en les places ramifiées de K . On contrôle ce phénomène, de façon effective, au §3, grâce à la "presque décomposition de Hodge-Tate" des schémas en groupes finis, mise en évidence par Fontaine.

J'ai appris l'idée d'utiliser les BT_n dans une lettre de Parshin. Le §4 doit également beaucoup à l'exposé de Deligne au séminaire Bourbaki.

I.- ISOGÉNIES ET DIFFÉRENTE

1.0.- Notations : Dans la suite K sera un corps de l'un des deux types suivants :

Cas global : K est un corps de nombres, extension finie de \mathbb{Q} .

Cas local : K est le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète complète, d'inégales caractéristiques, de corps résiduel k parfait de caractéristique $p > 0$.

Dans les deux cas, on note \mathcal{O} l'anneau d'entiers de K et \bar{K} une clôture algébrique de K .

Partant d'un corps global K et d'une place finie v de K , on obtient par

complétion de K en v un corps local K_v , d'anneau d'entiers \mathcal{O}_v , de corps résiduel fini k_v .

1.1.- Modèle de Néron et isogénies

Soient A_K une K -variété abélienne de dimension g et A son modèle de Néron sur \mathcal{O} . Donc A est \mathcal{O} -schéma en groupes lisse, séparé, de type fini, de fibre générique A_K . On note A^0 le sous-schéma en groupes ouvert de A , à fibres connexes. Nous dirons abusivement que A^0 est le modèle de Néron connexe de A_K sur \mathcal{O} .

Soit $u_K : A_K \rightarrow B_K$ une K -isogénie entre K -variétés abéliennes, de noyau M_K . Le degré d de u_K est le cardinal de $M_K(\bar{K})$:

$$d = \# M_K(\bar{K}).$$

Le morphisme u_K s'étend canoniquement en un \mathcal{O} -morphisme des modèles de Néron $u : A \rightarrow B$. Soit $u^0 : A^0 \rightarrow B^0$ la restriction de u aux modèles de Néron connexes. On pose $M = \text{Ker } u^0$ qui est un \mathcal{O} -schéma en groupes.

Si K est global et si v est une place finie de K , par changement de base on obtient $A_v = A \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_v$, $A_{K_v} = A_K \otimes_K K_v \dots$, et A_v est un modèle de Néron de A_{K_v} sur \mathcal{O}_v .

La proposition suivante est immédiate : (cf. [5], 2.2.1) :

PROPOSITION 1.1.1. - Supposons K local. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $u : A \rightarrow B$ est plat.
- (ii) M est plat sur \mathcal{O}
- (iii) M est quasi-fini sur \mathcal{O}
- (iv) $(u^0) \otimes_{\bar{K}} k$ est surjectif.

De plus, lorsque ces conditions sont réalisées, on a une suite exacte de schémas en groupes pour la topologie fidèlement plate de présentation finie (fppf) :

$$0 \rightarrow M \rightarrow A^0 \xrightarrow{u^0} B^0 \rightarrow 0.$$

Exemples 1.1.2 : Supposons K local.

- a) Si A_K a bonne réduction sur \mathcal{O} , u et M sont finis et plats.
- b) Si A_K a réduction semi-stable sur \mathcal{O} , u et M sont quasi-finis et plats. (car u se factorise à travers la multiplication par $d : A \rightarrow A$ qui a un noyau quasi-fini).
- c) Si $(d, p) = 1$, alors u et M sont étales.

d) Supposons que A ne soit pas semi-stable. Prenons $A_K = B_K$ et pour u_K la multiplication par p . Alors u est la multiplication par p dans A et u n'est pas plate.

1.2.- Schémas en groupes quasi-finis

Supposons K local.

Soit X un \mathcal{O} -schéma quasi-fini et séparé. Alors, comme \mathcal{O} est complet (hensélien suffirait), X se décompose canoniquement en

$$X = X_1 \amalg X_2 ,$$

où X_1 est fini sur \mathcal{O} et X_2 est au-dessus de $\text{Spec}(K)$. Le schéma X_1 n'est autre que la complétion de X le long de sa fibre au-dessus de k ; nous le notons désormais \hat{X} et nous dirons que \hat{X} est la partie finie de X .

Si X est un \mathcal{O} -schéma en groupes, \hat{X} est un sous-schéma en groupes ouvert et fermé de X . Si de plus X est plat sur \mathcal{O} et est un schéma en groupes commutatifs, le groupe quotient fppf X/\hat{X} est un \mathcal{O} -schéma en groupes étale, prolongement par zéro sur $\text{Spec}(\mathcal{O})$ de sa fibre générique.

1.3.- Différente (cf. Exp. VI, 4.9.4).

Considérons à nouveau une isogénie u_K , comme dans 1.1, et ses extensions u (resp. u^0) aux modèles de Néron (resp. aux modèles de Néron connexes).

Soit $\omega_{A/\mathcal{O}}$ le faisceau inversible sur A des formes différentielles relatives, de degré maximum, et soit ω_A l'image réciproque de $\omega_{A/\mathcal{O}}$ sur $\text{Spec}(\mathcal{O})$, par la section unité de A . On a donc $\omega_A = \det(\text{Lie } A)^v$, où v désigne le \mathcal{O} -module dual. On définit de même ω_B .

Considérons le \mathcal{O} -module inversible $\omega_A \otimes \omega_B^{-1}$. Lorsque u^0 est surjectif, de sorte que l'on a une suite exacte fppf de schémas en groupes :

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow A^0 \xrightarrow{u^0} B^0 \longrightarrow 0 ,$$

alors $\omega_A \otimes \omega_B^{-1}$ s'interprète en terme du noyau M : $\omega_A \otimes \omega_B^{-1}$ est l'image réciproque, par la section unité de M , du module dualisant relatif $\omega_{M/\mathcal{O}}$. En effet, si \mathcal{J} est le faisceau d'idéaux de A^0 qui définit M , M est localement intersection complète dans A^0 et l'on a :

$$\omega_{M/\mathcal{O}} = \omega_{A^0/\mathcal{O}} \otimes \det(\mathcal{J}/\mathcal{J})^v = \omega_{A^0/\mathcal{O}} \otimes (u^0)^*(\omega_{B^0/\mathcal{O}}^{-1}) = f^*(\omega_A \otimes \omega_B^{-1}) ,$$

où $f : M \longrightarrow \text{Spec}(\mathcal{O})$ est le morphisme structural.

Dans le cas où M n'est pas plat sur \mathcal{O} , $\omega_A \otimes \omega_B^{-1}$ n'a plus de raison de se calculer au moyen de M , mais est déterminé par u et nous poserons :

$$\omega_A \otimes \omega_B^{-1} = \omega_u .$$

Du fait que u_K est étale, la flèche canonique $\omega_B \rightarrow \omega_A$, déduite de u , est injective. Par tensorisation avec ω_B^{-1} , on obtient donc une injection canonique :

$$0 \hookrightarrow \omega_A \otimes \omega_B^{-1} = \omega_u ,$$

et il existe un idéal non nul \mathcal{J}_u de 0 , tel que $\omega_u = 0/\mathcal{J}_u^{-1}$.

En d'autres termes, l'application $\text{Lie}(u) : \text{Lie}(A) \rightarrow \text{Lie}(B)$ est injective et si, dans des bases locales, on calcule son déterminant, celui-ci engendre \mathcal{J}_u .

En particulier, on voit que $0/\mathcal{J}_u$ a pour support les places v où u_v n'est pas étale et nous dirons que \mathcal{J}_u est la différente de u . Pour justifier cette terminologie, nous allons esquisser le lien avec la notion classique de différente, en une place v où M_v est quasi-fini.

Pour ce faire, "rappelons" (cf. [7], Appendix), que si on a un morphisme fini et plat de S -schémas lisses :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ & \searrow & \\ & S & \end{array}$$

on dispose d'une application canonique sur les différentielles relatives de degré maximum, la trace :

$$\text{Tr} : u_*(\omega_{X/S}) \rightarrow \omega_{Y/S}$$

qui est \mathcal{O}_Y -linéaire et telle que

$$(1) \quad \text{Tr}(fu_*(\omega)) = \text{Tr}_{X/Y}(f)\omega, \quad \forall V \text{ ouvert de } Y, \\ \forall f \in \mathcal{O}_X|u^{-1}(V), \forall \omega \in \omega_{Y/S}|V .$$

De plus, l'application \mathcal{O}_X -linéaire associée :

$$(2) \quad \omega_{X/S} \rightarrow \mathbb{H}^0_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X, \omega_{Y/S})$$

$$\omega \mapsto (f \mapsto \text{Tr}(f\omega))$$

est un isomorphisme.

Tensorisant les deux membres de (2) par $\omega_{Y/S}^{-1}$, on en déduit un isomorphisme de \mathcal{O}_X -modules inversibles :

$$(3) \quad \omega_{X/S} \otimes \omega_{Y/S}^{-1} \xrightarrow{\text{can}} \mathbb{H}^0_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y)$$

qui est la formule de passage clé entre le calcul du complexe dualisant relatif $\omega_{X/Y}$ en terme de présentation par des schémas lisses d'une part, et en terme du morphisme fini et plat, localement intersection complète $u : X \rightarrow Y$ d'autre part.

Par ailleurs, l'application canonique déduite de $u : u^*(\omega_{Y/S}) \rightarrow \omega_{X/S}$ donne une flèche $\mathcal{O}_X \rightarrow \omega_{X/S} \otimes \omega_{Y/S}^{-1}$ qui, composée avec (3) fournit une application \mathcal{O}_X -linéaire :

$$(4) \quad \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y) .$$

D'après (1), (4) n'est autre que l'application

$$f \mapsto (g \mapsto \text{Tr}_{X/Y}(gf)) .$$

Supposons de plus que la restriction de u à un ouvert U de X , schématiquement dense dans X , soit étale. Alors (4) est un isomorphisme au-dessus de U et il existe un idéal inversible \mathcal{J} de \mathcal{O}_X tel que (4) s'identifie à l'application canonique

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{J}^{-1} .$$

Alors \mathcal{J}^{-1} coïncide avec la différente inverse classique, formée des sections méromorphes f de \mathcal{O}_X , telles que $\text{Tr}(fx) \in \mathcal{O}_Y, \forall x \in \mathcal{O}_X$.

Supposons de plus que X et Y soient des S -schémas en groupes et que u soit un morphisme de S -schémas en groupes. Alors \mathcal{J} est un faisceau équivariant sur X , donc est l'image réciproque, d'un faisceau d'idéaux de \mathcal{O}_S , noté encore \mathcal{J} . De plus $H = \text{Ker}(u)$ est un S -schéma en groupes fini et plat et par le changement de base $S \rightarrow Y$ défini par la section unité, on trouve que \mathcal{J}_H est bien la différente classique de la \mathcal{O}_S -algèbre finie, génériquement étale \mathcal{O}_H .

Revenons à notre isogénie u_K et à son prolongement u^0 . Supposons u quasi-fini et soit \hat{M} la partie finie (1.2) de M , de sorte que l'on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \hat{M} \longrightarrow A^0 \xrightarrow{\hat{u}} A^0/\hat{M} \longrightarrow 0$$

avec \hat{u} fini et un morphisme étale

$$v : A^0/\hat{M} \longrightarrow B^0$$

tels que $u = v\hat{u}$.

Comme v est étale, $\mathcal{J}_u = \mathcal{J}_{\hat{u}}$ et les considérations précédentes montrent que $\mathcal{J}_u \mathcal{O}_M$ est l'idéal différente de la \mathcal{O}_M -algèbre finie $\mathcal{O}_{\hat{M}}$.

1.4.- Isogénie et degré d'Arakelov

Dans ce numéro, K est un corps global.

Soit $\tau : K \rightarrow \mathbb{C}$ un plongement complexe de K . Partant d'une isogénie $u_K : A_K \rightarrow B_K$ comme dans 1.1, on en déduit par le changement de corps τ , une isogénie de tores complexes $u_\tau : A_\tau \rightarrow B_\tau$.

Rappelons (exposé I §3-3) que sur ω_{A_τ} on a une métrique hermitienne telle que

$$\langle \omega, \omega \rangle_\tau = \int_{A_\tau} |\omega \wedge \bar{\omega}|$$

où le second membre désigne l'intégrale pour une mesure de Haar normalisée par un facteur ne dépendant que de la dimension de A .

On munit le faisceau $\omega_{U_\tau} = \omega_{A_\tau} \otimes \omega_{B_\tau}^{-1} = \mathcal{N}_u^{\mathfrak{f}-1}$ de la métrique "différence".

Soit $\omega \in \omega_B$. On a

$$\int_{A_\tau} |u^*(\omega) \wedge u^*(\bar{\omega})| = d \int_{B_\tau} |\omega \wedge \bar{\omega}| ,$$

où d est le degré de u_K .

C'est dire que la section 1 de $\omega_u = \mathcal{N}_u^{\mathfrak{f}-1}$ est telle que

$$\langle 1, 1 \rangle_\tau = d .$$

Donc, si v est une place à l'infini de K , la valeur absolue v -adique de la section 1 de $\mathcal{N}_u^{\mathfrak{f}-1}$ est telle que

$$\|1\|_v = d \text{ si } v \text{ est complexe}$$

$$\|1\|_v = d^{1/2} \text{ si } v \text{ est réelle.}$$

La contribution des places à l'infini dans le calcul du degré d'Arakelov (réf. exposé I §1, corollaire de la proposition 1.1) de la section 1 de $\mathcal{N}_u^{\mathfrak{f}-1}$ est alors:

$$-\sum_{v \text{ infini}} \log \|1\|_v = -\log(d)[K:\mathbb{Q}]/2 .$$

Par ailleurs, le degré, à distance finie de la section 1 de $\mathcal{N}_u^{\mathfrak{f}-1}$ est $\log \#(O/\mathcal{N}_u^{\mathfrak{f}})$. D'où la proposition :

PROPOSITION 1.4.1.-

$$\deg(\omega_A) - \deg(\omega_B) = \deg(\omega_u) = \deg(\mathcal{N}_u^{\mathfrak{f}-1}) = -\log(d)[K:\mathbb{Q}]/2 + \log \#(O/\mathcal{N}_u^{\mathfrak{f}}) .$$

COROLLAIRE 1.4.2.- Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\deg(\omega_A) = \deg(\omega_B)$,

(ii) $\#(O/\mathcal{N}_u^{\mathfrak{f}}) = d^{[K:\mathbb{Q}]/2}$

(iii) $d^{[K:\mathbb{Q}]/2}$ est un entier et engendre l'idéal $\text{Norm}_{O/\mathbb{Z}}(\mathcal{N}_u^{\mathfrak{f}})$,

(iv) Pour tout nombre premier p , si p^h est la puissance de p qui divise d , on a :

$$h[K:\mathbb{Q}]/2 = \sum_{\mathfrak{p}/p} v_{\mathfrak{p}}(\mathcal{N}_u^{\mathfrak{f}}) d_{\mathfrak{p}} ,$$

où $v_{\mathfrak{p}}$ est la valuation de $O_{\mathfrak{p}}$, de groupe de valeurs \mathbb{Z} et $d_{\mathfrak{p}}$ est le degré

du corps résiduel $k_{\mathfrak{p}}$ sur \mathbb{F}_p .

COROLLAIRE 1.4.3.- Les conditions de 1.4.2, sont en particulier satisfaites, si pour tout p premier et toute place \mathfrak{p} de O au-dessus de p , on a

$$v_{\mathfrak{p}}(\mathcal{N}_u) = e_{\mathfrak{p}} h/2$$

où h et $v_{\mathfrak{p}}$ sont comme dans 1.4.2 et $e_{\mathfrak{p}}$ est l'indice de ramification de $O_{\mathfrak{p}}$ au-dessus de \mathbb{Z}_p .

De plus, si ces conditions sont réalisées, le faisceau d'Arakelov $\mathcal{N}_u^{\otimes 2}$ est trivial. Pour que le faisceau d'Arakelov \mathcal{N}_u soit trivial, il faut et il suffit qu'il existe $f \in K$, tel que $f^2 = \alpha d$, où α est une racine de l'unité.

Démonstration de 1.4.3

Si pour toute place \mathfrak{p} de O au-dessus de p on a $v_{\mathfrak{p}}(\mathcal{N}_u) = e_{\mathfrak{p}} h/2$, la condition iv) de 1.4.2 est vérifiée car $\sum_{\mathfrak{p} \mid p} e_{\mathfrak{p}} d_{\mathfrak{p}} = [K:Q]$, d'où la première assertion.

Supposons que $v_{\mathfrak{p}}(\mathcal{N}_u) = e_{\mathfrak{p}} h/2$ pour toute place finie \mathfrak{p} de O . Alors d engendre $\mathcal{N}_u^{\otimes 2}$, donc $1/d$ engendre \mathcal{N}_u^{-2} . Par ailleurs, pour tout plongement complexe $\tau : K \rightarrow \mathbb{C}$, la section 1 du faisceau d'Arakelov \mathcal{N}_u^{-2} est telle que $\langle 1, 1 \rangle_{\tau} = d^2$, donc $\langle 1/d, 1/d \rangle_{\tau} = 1$ et $1/d$ trivialise le faisceau d'Arakelov \mathcal{N}_u^{-2} .

Enfin, si le faisceau d'Arakelov \mathcal{N}_u est trivialisé par une section f , on a $f^2 = \alpha d$, où α est une unité de O , qui dans tout plongement complexe est de module 1, donc α est une racine de l'unité.

Remarque 1.4.4 : Les conditions de 1.4.2 sont celles qui interviennent dans la démonstration de Faltings. Elles introduisent une moyenne des valuations de \mathcal{N}_u en les diverses places de O au-dessus de tout premier p . On peut les traduire encore en disant que le faisceau d'Arakelov $\text{Norm}_{O/\mathbb{Z}}(\mathcal{N}_u)$ est trivial.

La condition de 1.4.3 est locale sur $\text{Spec}(O)$. C'est elle qui intervient, au numéro suivant, dans la comparaison du degré d'une variété abélienne et celui de sa dual.

2.- DEGRÉ D'ARAKELOV D'UNE VARIÉTÉ ABÉLIENNE ET DE SA DUALE

2.1.- Soient K un corps local ou global (1.0), $u_K : A_K \rightarrow B_K$ une K -isogénie entre K -variétés abéliennes, $u'_K : B'_K \rightarrow A'_K$ l'isogénie duale, d le degré commun de u_K et u'_K . On étend ces isogénies en des morphismes $u : A \rightarrow B$ et $u' : B' \rightarrow A'$, entre les modèles de Néron sur l'anneau d'entiers O de K . On dispose alors des idéaux différentes \mathcal{N}_u et \mathcal{N}'_u , (1.3).

THÉORÈME 2.1.1. - On a $\mathcal{V}_u^{\mathcal{V}_u} = (d)$.

Remarque 2.1.2 : Supposons dans 2.1.1 que A ait bonne réduction sur 0 . Alors il en est de même de A' ; u et u' sont finis et plats et ont pour noyaux des 0 -schémas en groupes finis et plats, duals l'un de l'autre pour la dualité de Cartier. Dans ce cas, 2.1.1 résulte de [8] , appendice prop. 9.

Il suffit clairement d'établir le théorème dans le cas d'un corps local, ce qui fera l'objet des numéros suivants. Pour l'instant, donnons quelques corollaires.

COROLLAIRE 2.1.3. - Supposons K global. Soient A_K une K -variété abélienne, A'_K la variété abélienne duale, A et A' les modèles de Néron respectifs de A_K et A'_K sur l'anneau d'entiers 0 . Alors les faisceaux d'Arakélov ω_A^2 et $\omega_{A'}^2$ sont isomorphes ; en particulier $\deg(\omega_A) = \deg(\omega_{A'})$.

Démonstration du corollaire : Soit L_K un faisceau ample sur A_K . On lui associe, de la manière habituelle, une isogénie autoduale :

$$u_K : A_K \longrightarrow A'_K .$$

Soit $u : A \longrightarrow A'$ son extension aux modèles de Néron et soit d le degré de u_K . Comme u_K est autoduale, le théorème 2.1.1 entraîne :

$$\mathcal{V}_u^2 = (d) .$$

Alors $1/d$ trivialise le faisceau inversible \mathcal{V}_u^{-2} . Compte tenu des métriques à l'infini, calculées dans 1.4, $1/d$ est même une trivialisation du faisceau d'Arakelov \mathcal{V}_u^{-2} .

Comme on a $\omega_A^2 = \omega_{A'}^2$, \mathcal{V}_u^{-1} , égalité entre faisceaux d'Arakelov, on a bien $\omega_A^2 = \omega_{A'}^2$, d'où le corollaire.

COROLLAIRE 2.1.4. - Gardons les hypothèses de 2.1.1 et supposons K global.

1) On a :

$$|\deg(\omega_A) - \deg(\omega_B)| \leq \frac{[K:\mathbb{Q}]}{2} \log(d) .$$

2) Supposons $d = p^n$, avec p premier. Alors

$$\deg(\omega_A) - \deg(\omega_B) = \frac{m}{2} \log(p)$$

avec m entier, $|m| \leq [K:\mathbb{Q}]n$.

Démonstration du corollaire : d'après 1.4.1, on a :

$$\deg(\omega_A) - \deg(\omega_B) = -\frac{[K:\mathbb{Q}]}{2} \log(d) + \log(\text{Norme}_{0/\mathbb{Z}}(\mathcal{V}_u)) .$$

D'après 2.1.1, on a $\mathcal{V}_u \supset (d)$, donc $\text{Norme}_{O/\mathbb{Z}}(\mathcal{V}_u) \supset d^{[K:\mathbb{Q}]}$, d'où :

$$0 \leq \text{Log}(\text{Norme}_{O/\mathbb{Z}}(\mathcal{V}_u)) \leq [K:\mathbb{Q}] \cdot \text{Log}(d).$$

L'assertion 1) en résulte. Si $d = p^n$, $\text{Norme}_{O/\mathbb{Z}}(\mathcal{V}_u) = p^h$, avec h entier, $0 \leq h \leq [K:\mathbb{Q}]n$. Alors $\deg(\omega_A) - \deg(\omega_B) = \log(p) \left[h - \frac{[K:\mathbb{Q}]}{2} n \right] = \text{Log}(p) \frac{m}{2}$ avec $m = 2h - [K:\mathbb{Q}]n$, d'où l'assertion 2).

Remarque 2.1.5 : Soit k un corps de caractéristique $p > 0$ et soit C une k -courbe algébrique intègre, régulière. Considérons le modèle de Néron sur C d'une variété abélienne définie sur le corps des fractions de C et soit A' le modèle de Néron de la variété duale. On dispose alors sur C des faisceaux inversibles ω_A et $\omega_{A'}$. Si A est semi-stable, Moret-Bailly a montré dans [8] qu'il existe N entier > 0 , tel que $\omega_A^N \simeq \omega_{A'}^N$, ce qui apparaît comme un substitut à 2.1.3. Le cas des modèles de Néron non semi-stables reste ouvert.

2.2.- Jusqu'à la fin du §2, on suppose K local donc (1.0) de corps résiduel k parfait de caractéristique $p > 0$.

Pour démontrer 2.1.1, on peut, quitte à remplacer O par le complété d'une extension maximale non ramifiée de O , supposer k algébriquement clos. Nous allons d'abord donner une démonstration "géométrique", utilisant les structures pro-algébriques sur les groupes de cohomologie. Ces structures ont été étudiées par Lucile Bégueri [1] et complètent la théorie du corps de classes d'un corps local à corps résiduel algébriquement clos de J.-P. Serre [12].

Après cet effort, et pour se rassurer un peu, nous donnerons également une démonstration "arithmétique", valable lorsque k est fini et basée sur les mêmes idées, mais où l'on remplace les arguments géométriques par un décompte de points.

Notons π une uniformisante de O et v la valuation de K telle que $v(\pi) = 1$. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $O_n = O/\pi^n O$. Si X est un O -schéma, X_n est le O_n -schéma $X \otimes_{O_n} O_n$.

Rappelons ([4] et [13]) que le foncteur de Greenberg de niveau n associe à X_n un k -schéma $\text{Gr}(X_n)$ et une bijection fonctorielle :

$$(\text{can}) \quad X(O_n) \xrightarrow{\sim} \text{Gr}(X_n)(k).$$

On ne s'intéresse qu'à la structure quasi-algébrique sous-jacente à $\text{Gr}(X_n)$, notée \underline{X}_n .

On a de plus des morphismes de transition $\underline{X}_{n+1} \longrightarrow \underline{X}_n$ qui, par les applications (can) correspondent aux applications naturelles de réduction mod π^n $X(O_{n+1}) \longrightarrow X(O_n)$. On définit alors $\underline{X} = \varprojlim_n \underline{X}_n$, de sorte que l'on a une bijection can : $X(O) \longrightarrow \underline{X}(k)$. Si X est lisse sur O , équidimensionnel de dimension relative d , $\text{Gr}(X_n)$ est lisse sur k , équidimensionnel, de

dimension nd.

Le foncteur $X \mapsto \underline{X}$ transforme \mathcal{O} -schémas en groupes en k -groupes pro-algébriques. De plus ces constructions sont compatibles aux extensions finies étales de \mathcal{O} et au passage au complété d'une extension maximale non ramifiée de \mathcal{O} .

Sous les hypothèses de 2.1.1, appliquons le foncteur de Greenberg au morphisme $u : A \rightarrow B$. On obtient un morphisme $\underline{u} : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$ de k -groupes pro-algébriques, de noyau \underline{M} et soit \underline{S} le conoyau, de sorte que l'on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \underline{M} \rightarrow \underline{A} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{B} \rightarrow \underline{S} \rightarrow 0 .$$

LEMME 2.2.1. - \underline{S} est un groupe quasi-algébrique, de dimension $v(\mathcal{J}_u)$

Démonstration : Pour n entier $>> 0$, l'application exponentielle réalise un isomorphisme de $\pi^n \underline{\text{Lie}}(A)$ sur $\text{Ker } A(\mathcal{O}) \rightarrow A(\mathcal{O}_n)$, compatible avec les structures pro-algébriques, et de même pour B . On en déduit un diagramme commutatif de groupes pro-algébriques, à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \pi^n \underline{\text{Lie}}(A) & \longrightarrow & \underline{A} & \longrightarrow & \underline{A}_n & \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \underline{\text{Lie}}(u) & & \downarrow \underline{u} & & \downarrow \underline{u}_n & \\ 0 & \longrightarrow & \pi^n \underline{\text{Lie}}(B) & \longrightarrow & \underline{B} & \longrightarrow & \underline{B}_n & \longrightarrow 0 \end{array} .$$

Le lemme du serpent fournit alors une suite exacte de k -groupes pro-algébriques :

$$(2) \quad 0 \rightarrow M \rightarrow \text{Ker } (\underline{u}_n) \rightarrow \text{Coker } \underline{\text{Lie}}(u) \rightarrow \underline{S} \rightarrow \text{Coker } (\underline{u}_n) \rightarrow 0 .$$

Or \underline{M} est fini, (car $M(\mathcal{O})$ est fini) et $\text{Ker } (\underline{u}_n)$ et $\text{coker } (\underline{u}_n)$ ont même dimension car \underline{A}_n et \underline{B}_n ont même dimension, égale à n fois la dimension g de la K -variété abélienne A_K . $\text{Coker } (\underline{\text{Lie}} u)$ est un \mathcal{O} -module de longueur finie égale à $v(\mathcal{J}_u)$; le groupe $\text{Coker } (\underline{\text{Lie}} u)$ a donc pour dimension $v(\mathcal{J}_u)$. On déduit de (2) que \underline{S} est quasi-algébrique, de dimension finie, égale à $v(\mathcal{J}_u)$, d'où le lemme.

Dualemment, on a une suite exacte de k -groupes pro-algébriques :

$$(1') \quad 0 \rightarrow \underline{M}' \rightarrow \underline{B}' \xrightarrow{\underline{u}'} \underline{A}' \rightarrow \underline{S}' \rightarrow 0$$

et on a de même $\dim(\underline{S}') = v(\mathcal{J}_{u'})$.

2.3.- Supposons maintenant k algébriquement clos et considérons la suite exacte de cohomologie galoisienne associée à la suite exacte de K -groupes

$$\text{algébriques } 0 \rightarrow M_K \rightarrow A_K \xrightarrow{u_K} B_K \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow M(K) \rightarrow A(K) \xrightarrow{u_K} B(K) \rightarrow H^1(\mathbb{A}_K^\times, M_K) \rightarrow H^1(\mathbb{A}_K^\times, A_K) \rightarrow H^1(\mathbb{A}_K^\times, B_K) \rightarrow 0$$

comme $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ est de dimension cohomologique 1 ([13]II 3.3), les groupes de cohomologie de degré ≥ 2 sont nuls

Puisque A et B sont des modèles de Néron, les applications naturelles $A(\mathcal{O}) \rightarrow A(K)$ et $B(\mathcal{O}) \rightarrow B(K)$ sont bijectives et $u(K)$ s'identifie à $u(\mathcal{O})$ de conoyau $\underline{S}(k)$.

Posons $T = \ker H^1(\mathcal{A}_K) \rightarrow H^1(\mathcal{B}_K)$. De (3) on déduit la suite exacte :

$$(4) \quad 0 \rightarrow \underline{S}(k) \rightarrow H^1(\mathcal{M}_K) \rightarrow T \rightarrow 0.$$

Rappelons, maintenant quelques-uns des résultats de [1].

a) le groupe $H^1(\mathcal{M}_K)$ est le groupe des k -points d'un k -groupe quasi-algébrique de dimension $v(d)$ ([1] th. 4.3.3).

b) Pour tout entier m , le sous-groupe de $H^1(\mathcal{A}_K)$ annulé par m est le groupe des points rationnels d'un groupe quasi-algébrique ([1] 8.1.1) et donc $H^1(\mathcal{A}_K)$ est un groupe ind-algébrique.

c) On a un isomorphisme canonique, fonctoriel en la variété abélienne \mathcal{A}_K :

$$H^1(\mathcal{A}_K) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}^1(\underline{A}', \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

qui identifie la partie de p -torsion du H^1 , au "dual de Serre" du groupe pro-algébrique A' ([1], 8.3.6).

De ces considérations et de ([1] 8.1.1), on déduit que la suite exacte (4) est une suite exacte de groupes de points rationnels de k -groupes quasi-algébriques. On a vu que $H^1(\mathcal{M}_K)$ était de dimension $v(d)$ et que \underline{S} était de dimension $v(\mathcal{N}_u')$. Reste à voir que T a même dimension que \underline{S}' , à savoir $v(\mathcal{N}_u')$.

Or si on applique le "foncteur $\text{Rhom}(\cdot, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ " à la suite exacte (1'), on trouve compte tenu de c), que $\text{Ext}^1(\underline{S}', \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est isogène à T , donc a même dimension que T . Enfin $\text{Ext}^1(\underline{S}', \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est le dual de Serre du groupe unipotent $(\underline{S}')^\circ$, composante neutre de \underline{S}' , donc a bien même dimension que \underline{S}' .

2.4.- Nous considérons maintenant le cas où le corps résiduel k est fini, de cardinal q .

On peut alors utiliser les énoncés de dualité sur les corps locaux établis par Tate en place des résultats de [1]. Les arguments de dimension utilisés dans la démonstration géométrique, sont remplacés par des décomptes de points de k -groupes quasi-algébriques du type \underline{S} . Pour distinguer la contribution de la composante neutre \underline{S}° de celle du groupe des composantes connexes $\underline{S}/\underline{S}^\circ$, on est amené à considérer aussi les extensions non ramifiées \mathcal{O}_r de \mathcal{O} , de corps résiduel k_r à q^r éléments ; on note K_r le corps des fractions de \mathcal{O}_r .

Commençons par rappeler les résultats de Tate.

a) Soient M_K un K -schéma en groupes fini d'ordre d et M_K' son dual de Cartier.

1) Les groupes de cohomologie galoisienne $H^i(\mathcal{M}_K)$ sont finis, nuls pour $i \neq 0, 1, 2$. On note $h^i(M_K)$ le cardinal de $H^i(\mathcal{M}_K)$.

2) $h^1(M_K)/h^0(M_K)h^2(M_K) = \#(\mathcal{O}/d\mathcal{O})$

3) Le cup produit :

$$H^i(\mathcal{M}_K) \times H^{2-i}(\mathcal{M}_K^*) \longrightarrow H^2(\mathcal{G}_m) \xrightarrow{\text{can}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

est une dualité parfaite pour $i=0,1,2$.

b) Soit A_K une K -variété abélienne. Alors $H^1(\mathcal{A}_K)$ est canoniquement isomorphe au dual de Pontryagin $\text{Hom}(A'(K), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Les résultats de a) sont démontrés dans [14] II §5, et b) figure dans [15].

Partons de l'isogénie : $0 \longrightarrow M_K \longrightarrow A_K \xrightarrow{u_K} B_K \longrightarrow 0$ et, pour tout entier $r > 0$, de son extension à K_r :

$$0 \longrightarrow M_{K_r} \longrightarrow A_{K_r} \longrightarrow B_{K_r} \longrightarrow 0.$$

On déduit alors de la suite exacte de cohomologie galoisienne, la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \text{Coker}(A(K_r) \rightarrow B(K_r)) \longrightarrow H^1(\mathcal{M}_{K_r}) \longrightarrow \text{Ker}(H^1(\mathcal{A}_{K_r}) \rightarrow H^1(\mathcal{B}_{K_r})) \longrightarrow 0$$

Compte tenu de b) ci-dessus et du fait que A, B, A', B' sont des modèles de Néron, cette suite se réécrit :

$$(5) \quad 0 \longrightarrow \text{Coker}(A(\mathcal{O}_r) \rightarrow B(\mathcal{O}_r)) \longrightarrow H^1(\mathcal{M}_{K_r}) \longrightarrow \text{Hom}(\text{coker}(B'(\mathcal{O}_r) \rightarrow A'(\mathcal{O}_r)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

D'après les rappels de a) ci-dessus, on a pour $r \gg 0$

$$\log_q(h^1(\mathcal{M}_{K_r})) = v(d)r + \text{cte}.$$

Notons que si \underline{G} est un k_r -groupe pro-algébrique, sa composante neutre \underline{G}^0 est telle que $H^1(k_r, \underline{G}^0) = 0$ d'après le théorème de Lang [10], p.119.

Comme $H^i(k_r, \underline{G}) = 0$ pour $i \geq 2$ ([14] 3.3), l'application canonique $H^1(k_r, \underline{G}) \xrightarrow{\sim} H^1(k_r, \underline{G}/\underline{G}^0)$ est bijective. Si de plus $\underline{G}/\underline{G}^0$ a tous ses points rationnels sur k_r , auquel cas nous posons $\pi_0(\underline{G}) = (\underline{G}/\underline{G}^0)(k_r)$, on a un isomorphisme canonique $H^1(k_r, \underline{G}) \cong \text{Hom}(\text{Gal}(\bar{k}_r/k_r), \pi_0(\underline{G})) \cong \pi_0(\underline{G})$, qui associe à un homomorphisme $a : \text{Gal}(\bar{k}_r/k_r) \longrightarrow \pi_0(\underline{G})$ l'image par a du Frobenius sur k_r .

Considérons alors la suite exacte (1) de k -groupes pro-algébriques

$$0 \longrightarrow \underline{M} \longrightarrow \underline{A} \longrightarrow \underline{B} \longrightarrow \underline{S} \longrightarrow 0.$$

Notons $\bar{\underline{A}}$ l'image de \underline{A} dans \underline{B} , de sorte que l'on a des suites exactes

$$0 \longrightarrow \underline{M} \longrightarrow \underline{A} \longrightarrow \bar{\underline{A}} \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \longrightarrow \bar{\underline{A}} \longrightarrow \underline{B} \longrightarrow \underline{S} \longrightarrow 0.$$

Choisissons $r \gg 0$ pour que les groupes \underline{M} , $\underline{A}/\underline{A}^0$, $\underline{B}/\underline{B}^0$ aient tous leurs points rationnels sur k_r . Alors si

$$\alpha : \text{Coker}(A(\mathcal{O}_r) \rightarrow B(\mathcal{O}_r)) \longrightarrow S(k_r)$$

est l'application canonique, $\ker(\alpha)$ et $\text{coker}(\alpha)$ sont finis constants, respectivement isomorphe à $\text{Ker } \pi_0(\underline{M}_{k_r}) \rightarrow \pi_0(\underline{A}_{k_r})$ et $\text{Ker } \pi_0(\bar{\underline{A}}_{k_r}) \rightarrow \pi_0(\underline{B}_{k_r})$.

Donc pour $r \gg 0$, le cardinal de $\text{coker } A(\mathcal{O}_r) \rightarrow B(\mathcal{O}_r)$ est le produit d'une constante par $\# \underline{S}(k_r)$.

Or \underline{S} est de dimension $v(\mathcal{V}_u)$ (2.2.1), de torsion, donc \underline{S}^0 est unipotent par suite $\log_q(\# \underline{S}(k_r)) = rv(\mathcal{V}_u) + \text{cte}$. Finalement :

$$\log_q(\# \text{coker } A(\mathcal{O}_r) \rightarrow B(\mathcal{O}_r)) = rv(\mathcal{V}_u) + \text{cte}.$$

De même on a $\log_q(\# \text{coker } B'(\mathcal{O}_r) \rightarrow A'(\mathcal{O}_r)) = rv(\mathcal{V}_{u'}) + \text{cte}$.

Il résulte alors de (5) que pour $r \gg 0$, on a

$$v(d)r + \text{cte} = v(\mathcal{V}_u)r + v(\mathcal{V}_{u'})r + \text{cte},$$

d'où $v(d) = v(\mathcal{V}_u, \mathcal{V}_{u'})$, ce qui achève la démonstration de 2.1.1 lorsque k est fini.

Remarque 2.4.1 : il est bien sûr possible d'estimer $\text{Coker } A(\mathcal{O}_r) \rightarrow B(\mathcal{O}_r)$ sans parler de structure pro-algébriques, en reprenant la suite exacte (2) et en étudiant u_n par filtration suivant les puissances de π .

3.- AFFAISSEMENT DES GROUPES DE BARSOTTI-TATE TRONQUÉS

3.1.- Dans ce paragraphe, K est un corps local (1.0). On note \underline{m} l'idéal maximal de l'anneau d'entiers \mathcal{O} de K , π un générateur de \underline{m} , v la valuation de K normalisée par $v(\pi) = 1$ et $e = v(p)$ l'indice de ramification absolu de \mathcal{O} .

On considère un \mathcal{O} -schéma en groupes commutatif M_n , fini et plat, dont la fibre générique $(M_n)_K$ est un K -groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon n (en abrégé BT_n) (cf. Exp. VI, 1). C'est dire simplement que $M_n(\bar{K})$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^h$, pour un certain entier h que nous appellerons le p -rang de M_n . Par analogie avec les groupes de Barsotti-Tate, h devrait plutôt s'appeler la hauteur, mais dans ce volume, le mot hauteur est réservé en général à un autre usage.

Quand \mathcal{O} est ramifié, ou quand $p=2$ et $e=1$, M_n n'est pas nécessairement un BT_n sur \mathcal{O} , car il se produit certaines dégénérescences, un "affaissement", quand on passe de la fibre générique à la fibre spéciale.

Commençons par donner l'exemple le plus simple d'affaissement. Supposons que \mathcal{O} contienne les racines $p^{\text{èmes}}$ de l'unité (i.e. $(p-1)|e$). On dispose alors d'un morphisme de schémas en groupes $u : (\mathbb{Z}/p \mathbb{Z})_{\mathcal{O}} \rightarrow \mu_p$, qui envoie l'image de 1 sur une racine primitive p -ème de 1 ; u_K est un isomorphisme, tandis que $u \otimes_{\mathcal{O}} k = 0$. Partant, de la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mu_p \xrightarrow{\quad} \mu_{p^2} \xrightarrow{\quad} \mu_p \rightarrow 0,$$

si on prend l'image réciproque de cette extension par u , on obtient une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mu_p \longrightarrow E \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

dans laquelle $E_K \simeq (\mu_{p^2})_K$ est un BT_2 , tandis que $E \otimes_k$ est isomorphe à $(\mu_p)_k \oplus (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_k$, donc est annulée par p ; par suite, E n'est pas un BT_2 .

Dans ce paragraphe, nous allons essayer de contrôler le phénomène d'affaissement.

Pour tout entier i , $0 \leq i \leq n$ soit $(M_i)_K$ le noyau de p^i dans $(M_n)_K$ qui est donc un BT_i sur K et notons M_i l'adhérence schématique de $(M_i)_K$ dans M_n . Alors M_i est un \mathcal{O} -schéma en groupes fini et plat, annulé par p^i , mais qui est strictement plus petit que $\text{Ker}(M_n \xrightarrow{p^i} M_n)$ lorsque ce dernier n'est pas plat sur \mathcal{O} .

La multiplication par p dans M_i se factorise à travers M_{i-1} et induit par passage au quotient un \mathcal{O} -morphisme :

$$t_{i-1} : M_i/M_{i-1} \longrightarrow M_{i-1}/M_{i-2}$$

qui est un isomorphisme sur la fibre générique. On dispose ainsi d'une collection de morphismes de transition :

$$M_n/M_{n-1} \xrightarrow{t_{n-1}} M_{n-1}/M_{n-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow M_2/M_1 \xrightarrow{t_1} M_1 .$$

LEMME 3.1.1.- Pour que M_n soit un BT_n , il faut et il suffit que les conditions suivantes soient réalisées :

1) si $n = 1$, posons $\overline{M}_1 = \overline{M}_1 \otimes_{\mathcal{O}} k$. Alors la suite de k -schémas en groupes :

$$\overline{M}_1 \xrightarrow{F} \overline{M}_1^{(p)} \xrightarrow{V} \overline{M}_1$$

(où F est le Frobenius et V le Verschiebung) est exacte.

2) Si $n \geq 2$, les flèches de transition :

$$M_i/M_{i-1} \xrightarrow{t_{i-1}} M_{i-1}/M_{i-2}$$

sont des isomorphismes pour $i = 2, \dots, n$.

Démonstration : pour $n = 1$, la condition n'est autre que la condition (iii) de Exp VI 1.1. Supposons $n \geq 2$ et que les flèches de transition soient des isomorphismes ; montrons que M_n est un BT_n . La multiplication par p^{n-1} dans M_n se factorise en $u : M_n \longrightarrow M_1$ et u est la composée de la projection $M_n \longrightarrow M_n/M_{n-1}$ et des flèches de transition t_{n-1}, \dots, t_1 donc est plate. Il en résulte que $M(n-1) = \ker p : M_n \longrightarrow M_n$ est plat, et donc égal à M_{n-1} . De proche en proche on montre que $M_i = \text{Ker } p^i : M_n \longrightarrow M_n$ et que les suites

$$M_n \xrightarrow{p^{n-i}} M_n \xrightarrow{p^i} M_n$$

sont exactes. On conclut que M_n est un BT_n à l'aide de Exp. VI, 1.1 et 1.3 a). La réciproque est immédiate.

3.2.- Propriétés de rigidité des BT_n dans le cas peu ramifié

PROPOSITION 3.2.1.- Soit M_n comme dans 3.1 .

- 1) si $e = 1$ et si $n = 1$, M_1 est un BT_1 .
- 2) si $e < p-1$ et $n \geq 2$, M_n est un BT_n
- 3) si $e = p-1$ et $n \geq 2$ et si $M_n \otimes_{\mathcal{O}} k$ est soit connexe, soit ne contient pas de sous-groupe de type multiplicatif non nul, alors M_n est un BT_n .

COROLLAIRE 3.2.2.- Si $e = 1$ et si $p \neq 2$, M_n est un BT_n .

Démonstration de la proposition.

- 1) Supposons $e = 1$, $n = 1$. On doit montrer que la suite :

$$\bar{M}_1 \xrightarrow{F} \bar{M}_1^{(p)} \xrightarrow{V} \bar{M}_1$$

est exacte (3.1).

1ère méthode : Par passage à la complétion de l'extension maximale non ramifiée de \mathcal{O} , on se ramène au cas où k est algébriquement clos.

Puis, par dévissage (Exp. VI 1.3 f)), au cas où $M_1(\bar{k})$ correspond à une représentation irréductible de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$. Il résulte alors de [8] 3.3.7, que M_1 est un schéma en \mathbb{F}_q -vectoriels, pour une certaine puissance q de p . Le fait que $\ker(V) = \text{Im}(F)$ résulte alors de la remarque 1.5.4 de loc. cit. (en fait la propriété est énoncée mais non démontrée).

2ème méthode : On utilise la classification des schémas en groupes commutatifs, finis et plats, sur \mathcal{O} non ramifié, due à Fontaine et Laffaille ([3] 9).

Soit \bar{M} un k -schéma en groupes finis, commutatif, annulé par p et soit \mathcal{U} son module de Dieudonné. Alors, la donnée d'un \mathcal{O} -schéma en groupes commutatif, fini et plat M qui relève \bar{M} équivaut à la donnée d'un sous- k -vectoriel \mathcal{L} de \mathcal{U} tel que :

- (i) \mathcal{L} est un supplémentaire de $F(\mathcal{U})$,
- (ii) La restriction de V à \mathcal{L} est injective.

Alors, comme $\ker(V)$ contient de toute façon $F(\mathcal{U})$, puisque $VF=0$, les conditions (i) et (ii) entraînent que $\ker(V) = F(\mathcal{U})$, d'où la proposition dans ce cas.

Passons à la démonstration de 2) et 3). On doit vérifier que, sous les condi-

tions énoncées, les morphismes de transition t_i sont des isomorphismes (3.1.1), mais cela résulte de [9] 3.3.3 et 3.3.5.

3.3.- Un résultat de Fontaine

Soit G un \mathcal{O} -schéma en groupes commutatif, fini et plat. Notons Ω_G le \mathcal{O} -module (de torsion) des formes différentielles de degré 1 sur G , invariantes par translation.

Notons $\bar{\mathcal{O}}$ la clôture intégrale de \mathcal{O} dans \bar{K} et $\Omega_{\bar{\mathcal{O}}/\mathcal{O}}$ le $\bar{\mathcal{O}}$ -module de torsion des formes différentielles de $\bar{\mathcal{O}}$ relativement à \mathcal{O} .

Soit $u \in G(\bar{\mathcal{O}})$ un point de G à valeurs dans $\bar{\mathcal{O}}$. Il lui correspond donc un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(\bar{\mathcal{O}}) & \xrightarrow{u} & G \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathrm{Spec}(\mathcal{O}) & \end{array}$$

d'où une application naturelle :

$$\Omega_G \otimes_{\mathbb{Z}_p} G(\bar{\mathcal{O}}) \longrightarrow \Omega_{\bar{\mathcal{O}}/\mathcal{O}}$$

$$\omega \otimes u \longmapsto u^*(\omega).$$

Cette application peut s'interpréter aussi comme une application $\bar{\mathcal{O}}$ -linéaire, fonctorielle en G :

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{O}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} G(\bar{\mathcal{O}}) &\xrightarrow{\varphi_G} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\Omega_G, \Omega_{\bar{\mathcal{O}}/\mathcal{O}}) \\ a \otimes u &\longmapsto (a \mapsto a u^*(\omega)). \end{aligned}$$

Soit w la valuation de $\bar{\mathcal{O}}$ telle que $w(p) = 1$. L'anneau \mathcal{O} est fini sur l'anneau $W(k)$ des vecteurs de Witt à coefficients dans k et on note $\mathcal{J}_{\mathcal{O}/W(k)}$ l'idéal de \mathcal{O} différente de la $W(k)$ -algèbre \mathcal{O} . Soit α un élément de $\bar{\mathcal{O}}$ tel que

$$w(\alpha) = 1/p - 1 + w(\mathcal{J}_{\mathcal{O}/W(k)}) = 1/p - 1 + v(\mathcal{J}_{\mathcal{O}/W(k)})/e.$$

On pose δ_0 = partie entière de $w(\alpha)$.

Dans [2] §4, Fontaine introduit une "presque" décomposition de Hodge-Tate pour un \mathcal{O} -schéma en groupes commutatif G , fini et plat. Il montre en particulier que l'application φ_G définie ci-dessus a un conoyau annulé par α ([2] §4, th.3, cor.).

COROLLAIRE 3.3.1.- Soit $t: G_m \rightarrow H_m$ un morphisme de BT_m sur \mathcal{O} qui est un isomorphisme sur la fibre générique et qui n'est pas un isomorphisme. Alors on a $m \leq \delta_{\mathcal{O}}$.

Démonstration : Soit d_G (resp. d_H) la dimension de l'algèbre de Lie de $G \otimes_{\mathcal{O}} k$ (resp. $H \otimes_{\mathcal{O}} k$). Alors le \mathcal{O} -module des différentielles invariantes sur G_m (resp. H_m) est $(0/p^m)^{d_G}$ (resp. $(0/p^m)^{d_H}$) (Exp. VI cor. 4.9) et la différentielle Ω_{G_m} est (p^{md_G}) , (resp. (p^{md_H})).

Par hypothèse $t: G_m \rightarrow H_m$ n'est pas un isomorphisme, donc H_m est strictement plus ramifié sur \mathcal{O} que G_m , donc $d_G < d_H$. Il résulte alors de la structure des \mathcal{O} -modules de longueur finie, que l'application sur les différentielles invariantes déduite de t :

$$\Omega_{H_m} \xrightarrow{dt} \Omega_{G_m}$$

contient dans son noyau un facteur direct de Ω_{H_m} isomorphe à $0/p^m \mathcal{O}$.

Considérons alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathcal{O}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} G_m(\bar{\mathcal{O}}) & \xrightarrow{t(\bar{\mathcal{O}})} & H_m(\bar{\mathcal{O}}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bar{\mathcal{O}} \\ \varphi_{G_M} \downarrow & & \downarrow \varphi_{H_M} \\ \text{Hom}(\Omega_{G_m}, \Omega_{\bar{\mathcal{O}}/\mathcal{O}}) & \longrightarrow & \text{Hom}(\Omega_{H_m}, \Omega_{\bar{\mathcal{O}}/\mathcal{O}}) \end{array}$$

D'après ([2], §1, Th.1), $\Omega_{\bar{\mathcal{O}}/\mathcal{O}}$ est isomorphe à $\bar{K}/\bar{\mathcal{O}}$, donc le calcul ci-dessus entraîne que le conoyau de la flèche inférieure contient un facteur isomorphe à $\bar{\mathcal{O}}/p^m \bar{\mathcal{O}}$. Par ailleurs, comme t_K est un isomorphisme, il en est de même de $t(\bar{\mathcal{O}})$ et d'après le résultat de Fontaine $\text{coker } \varphi_{H_m}$ est annulé par α donc $w(\alpha) \geq w(p^m) = m$. Par définition de $\delta_{\mathcal{O}}$ on a donc $m \leq \delta_{\mathcal{O}}$.

3.4.- Contrôle de l'affaissement

Revenons à la situation considérée dans 3.1, où l'on se donne un \mathcal{O} -schéma en groupes M_n fini et plat dont la fibre générique est un BT_n de rang h . Pour $0 \leq i \leq n$, on dispose des sous-schémas en groupes M_i de M_n . Pour a et b entiers vérifiant $0 \leq a \leq b \leq n$, on pose :

$$M_{[a,b]} = M_b/M_a$$

qui est un \mathcal{O} -schéma en groupes fini et plat, dont la fibre générique est un BT_{b-a} de rang h . Avec ces notations, on a $M_i = M_{[0,i]}$ et on dispose des

des morphismes de transition :

$$M_{]n-1, n]} \xrightarrow{t_{n-1}} M_{]n-2, n-1]} \xrightarrow{t_{n-2}} \dots \xrightarrow{t_1} M_{]0, 1]} .$$

qui sont des isomorphismes sur la fibre générique.

Nous dirons qu'il y a un saut en i si

$$M_{]i, i+1]} \xrightarrow{t_i} M_{]i-1, i]}$$

n'est pas un isomorphisme, c'est-à-dire si la différente $\mathcal{N}_{M_{]i-1, i]}}$ du schéma en groupes $M_{]i-1, i]}$ est strictement contenue dans la différente de $M_{]i, i+1]}$.

LEMME 3.4.1.- Il y a au plus eh sauts.

En effet, rappelons que si H est un 0-schéma en groupes commutatif, fini et plat, tel que la 0-algèbre \mathcal{O}_H soit de rang d , et si H' est le dual de Cartier de H , on a, entre les différentes, la relation

$$\mathcal{V}_H \mathcal{V}_{H'} = (d) .$$

([9] appendice prop. 9).

En particulier on a $v(\mathcal{V}_H) \leq v(d)$.

Appliquons ce résultat à $M_1 = M_{]0, 1]}$, on trouve

$$v(\mathcal{V}_{M_{]0, 1]}}) \leq v(p^h) = eh ,$$

d'où le lemme.

LEMME 3.4.2.- Soient $0 \leq a < b \leq n$., avec a et b entiers et $b-a \geq 2$. Alors $M_{]a, b]}$ est un BT_{b-a} si et seulement si, l'intervalle $]a, b[$ ne contient pas de sauts.

Démonstration : on applique 3.1.1.

LEMME 3.4.3.- Soient des entiers a, b, c, d vérifiant

$$0 \leq a < b \leq c < d \leq n$$

et tels que

- 1) $b-a = d-c = \ell \geq 2$
- 2) il n'y a pas de sauts dans $]a, b[$ et dans $]c, d[$
- 3) il existe un saut dans $[b, c]$

Alors on a $\ell \leq \delta_0$ (3.3).

Démonstration : Les conditions 1) et 2) et le lemme 3.4.2 entraînent que $M_{[a,b]}$ et $M_{[c,d]}$ sont des BT_ℓ . Notons d_1 la dimension de $M_{[a,b]}$ et d_2 celle de $M_{[c,d]}$.

La multiplication par p^{d-b} dans M_d se factorise à travers M_b et induit, par passage au quotient un morphisme $t : M_{[c,d]} \rightarrow M_{[a,b]}$, qui est un isomorphisme sur la fibre générique. La différente de $M_{[c,c+1]}$ est engendrée par $p^{hd}2$, celle de $M_{[b-1,b]}$ par $p^{hd}1$. Comme il y a un saut dans $[b c]$, on a $d_1 > d_2$. Par suite t n'est pas un isomorphisme, et donc (3.3.1), $\ell \leq \delta_0$.

THÉORÈME 3.4.4. - Soit M_n un 0-schéma en groupes commutatif, fini et plat, tel que $M_n(\mathbb{K}) \simeq (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^h$ et soit δ_0 l'entier défini dans 3.3.

Alors, si $n > (he+1) \max(1, \delta_0)$, il existe un unique plus grand intervalle $[r, n-s] \subset [0, n]$ tel que $r+s \leq he \max(1, \delta_0)$ et tel que $M_{[r, n-s]}$ soit un $BT_{n-(r+s)}$.

COROLLAIRE 3.4.5. - Posons $\delta = \delta_0, h = he \max(1, \delta_0)$. Alors, si $n > 2\delta$, $M_{\delta, n-\delta}$ est un $BT_{n-2\delta}$.

Démonstration du théorème : d'après 3.4.1, il y a au plus he sauts et ceux-ci découpent $[0, n]$ en au plus $he + 1$ intervalles. Vu l'hypothèse faite sur n , 1'un au moins de ces intervalles a une longueur $\ell > \max(1, \delta_0)$. D'après 3.4.3, un tel intervalle est unique ; notons le $[r, n-s]$ avec $r < n-s$. Alors $r+s$ est la somme des longueurs de au plus he intervalles, de longueur au plus $\max(1, \delta_0)$, donc $r+s \leq he \max(1, \delta_0)$.

Démonstration du corollaire : on peut supposer $h > 0$. On a alors :

$$n > 2\delta = 2he \max(1, \delta_0) \geq (he + 1)\max(1, \delta_0)$$

donc on peut appliquer le théorème 3.4.4. D'où un intervalle $[r, n-s]$ tel que $r+s \leq he \max(1, \delta_0) = \delta$. Par suite $[\delta, n-\delta] \subset [r, n-s]$ et comme $M_{[r, n-s]}$ est un $BT_{n-(r+s)}$, $M_{[\delta, n-\delta]}$ est un $BT_{n-2\delta}$.

Commentaires 3.4.6. - La valeur de δ donnée dans 3.4.5 n'est pas du tout satisfaisante. Cela est dû à notre majoration du nombre des sauts, qui est très grossière, et sans doute aussi au fait que nous n'avons pas tiré le meilleur parti possible des résultats de Fontaine.

4.- HAUTEURS ET ISOGÉNIES : THÉORÈMES DE FINITUDE

Dans ce paragraphe, on établit le théorème de finitude énoncé dans l'introduction avec des bornes effectives, précisées dans 4.4.8.

4.1.- "Belles p-isogénies"

Définition 4.1.1 : Soient K un corps local ou global (1.0), A_K une K -variété abélienne, dont le modèle de Néron A sur $\text{Spec}(O)$ est semi-stable.

Soient p un nombre premier, n et h des entiers ≥ 0 . On dit qu'une K -isogénie $u_K : A_K \longrightarrow B_K$ est une belle p -isogénie, de niveau n de p -rang h , si son extension $u^0 : A^0 \longrightarrow B^0$, aux modèles de Néron connexes, a un noyau M qui vérifie les conditions suivantes :

$$1) M(\bar{K}) \simeq (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^h,$$

2) Pour toute place v de O , la partie finie (1.2) \hat{M}_v de M en v est un BT_n sur \mathcal{O}_v .

Notons que la condition 2) équivaut à la conjonction des 2 propriétés suivantes:

2 i) Pour toute place v de O , où A_K n'a pas bonne réduction, $\hat{M}_v(K_v)$ est un facteur direct de $M(\bar{K}_v)$ (donc est de la forme $(\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^h v$) ,

2 ii) Pour toute place v de O au-dessus de p , \hat{M}_v est un BT_n sur \mathcal{O}_v . On note d_v la dimension de \hat{M}_v (Exp. VI 2.2.2). (Bien sûr, 2 i) pour $v|p$ est conséquence de 2 ii)).

Exemples 4.1.2.- a) (niveau 1). Si aucune place $v|p$ n'est ramifiée, toute isogénie de noyau annulée par p est belle de niveau 1. En effet, la condition 2 i) est automatique et la condition 2 ii) est réalisée d'après 3.2.1. 1).

b) cas peu ramifié). Si toute place $v|p$ a un indice de ramification $< p-1$, (donc $p \neq 2$), la condition 2 ii) découle des autres dès que $n \geq 2$ d'après 3.2.1.

Pour une belle isogénie, la différente \mathcal{V}_M de M (1.3) en une place $v|p$ se calcule au moyen de la dimension locale d_v de \hat{M}_v . En effet (Exp. VI 4.9 ii))

$$\mathcal{V}_M \mathcal{O}_v = p^{nd_v}.$$

Dans le cas d'un corps K global, on a donc :

$$\text{Norme}_{O/\mathbb{Z}}(\mathcal{V}_M) = p^{n \sum_{v|p} [K_v : \mathbb{Q}_p] d_v}.$$

On déduit alors de 1.4.2 le corollaire suivant :

COROLLAIRE 4.1.3.- Dans le cas d'un corps global K , pour qu'une belle p -isogénie, de p -rang h , conserve le degré d'Arakelov, il faut et il suffit, que les dimensions locales d_v du noyau M vérifient :

$$[K:\mathbb{Q}]h/2 = \sum_{v|p} [K_v:\mathbb{Q}_p]d_v .$$

4.2.- Déterminant du noyau d'une belle isogénie

4.2.1.- Pour p premier et n entier, on note

$$\chi_{n,p} : \text{Gal}(\bar{K}/K) \longrightarrow (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$$

le caractère qui décrit l'action de Galois sur les racines p^n -èmes de l'unité $\mu_p^{n(K)} \subset \bar{K}$.

De même $\chi_{\infty,p} : \text{Gal}(\bar{K}/K) \longrightarrow \mathbb{Z}_p^*$ est le caractère qui décrit l'action de Galois sur les racines de l'unité, d'ordre une puissance de p : $\mu_{\infty,p}(\bar{K}) = \bigcup_n \mu_p^{n(\bar{K})}$.

Lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion sur le nombre premier p , on écrit simplement χ_n et χ_{∞} au lieu de $\chi_{n,p}$ et $\chi_{\infty,p}$.

4.2.2.- Si M_K est un K -schéma en groupes tel que $M_K(\bar{K}) \simeq (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^h$, donc décrit par une représentation $\rho : \text{Gal}(\bar{K}/K) \longrightarrow \text{GL}_h(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$, on note $\det(M_K)$ le K -schéma en groupes $\Lambda^h(M_K)$, décrit par le caractère :

$$\psi[M_K] = \Lambda^h \rho : \text{Gal}(\bar{K}/K) \longrightarrow (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^* .$$

Nous allons étudier $\psi[M_K]$ dans le cas où M_K est la fibre générique du noyau M d'une belle p -isogénie. Commençons par traiter le cas d'un corps local. Le lemme 4.2.4 contient l'information clé tirée de l'étude de la monodromie en une place de mauvaise réduction semi-stable ; le lemme 4.2.5 est en quelque sorte la justification, dans cet exposé, de la considération des B_{T_n} .

4.2.3.- Etude locale

LEMME 4.2.4.- Soient K un corps local, A_K une K -variété abélienne, A^0 son modèle de Néron connexe sur \mathcal{O} , supposé semi-stable, M_K un K -sous-schéma en groupes fini de A_K , M l'adhérence schématique de M_K dans A^0 , \hat{M} la partie finie de M . Alors le quotient M_K/\hat{M}_K est non ramifié sur \mathcal{O} .

Démonstration : supposons d'abord qu'il existe un entier m tel que M_K soit le noyau ${}_m A_K$ de la multiplication par m dans A_K . Comme A^0 est semi-stable, le noyau ${}_m A^0$ de la multiplication par m dans A^0 est plat sur \mathcal{O} , donc est égal à l'adhérence schématique de ${}_m A_K$ dans A^0 . L'assertion résulte alors de [5] exposé IX, et plus précisément de la proposition 3.5 lorsque m est inversible dans \mathcal{O} et du théorème 5.2 (5.2.2), pour m quelconque.

Dans le cas général, soit m un entier qui annule M_K . On a $M_K \subset_m A_K$, donc $M \subset_m A^0$ et par suite $\hat{M} \subset_m \hat{A}^0$. Finalement $\hat{M} \subset M \cap_m \hat{A}^0$ et comme ce dernier est fini sur O , $\hat{M} = M \cap_m \hat{A}^0$. En particulier, sur la fibre générique, on a $\hat{M}_K = M_K \cap (\hat{A}^0)_K$ et donc M_K/\hat{M}_K est contenu dans $A_K/(m\hat{A}^0)_K$.

On vient de rappeler que ce dernier est non ramifié sur O ; il en est donc de même de M_K/\hat{M}_K .

LEMME 4.2.5.- Soient K un corps local et M un BT_n (resp. BT) sur l'anneau O des entiers de K , annulé par une puissance de la caractéristique résiduelle p de O . On suppose que M est de p -rang h (4.1.1) (resp. de hauteur h) et soit d sa dimension (Exp. VI 2.2.2.b)). Soit $\Psi[M_K]$ le caractère de $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ qui décrit la puissance extérieure h -ème de M_K . Alors on a :

$$\Psi[M_K] \mid \text{Inertie} = \chi_n^d \mid \text{Inertie} \text{ (resp. } \chi_\infty^d \mid \text{Inertie}) .$$

Démonstration : quitte à remplacer O par la complétion de l'extension maximale non ramifiée de O , on peut supposer K algébriquement clos. Le lemme n'est autre alors que le cor. 4.10 de Exp. VI.

Remarques 4.2.6.- i) Historiquement, le premier résultat dans la direction de 4.2.5 a été obtenu par Tate (cf [16] §4 Th.3), dans le cas d'un BT . En utilisant les décompositions de Hodge-Tate, il montrait que $\Psi[M]$ coïncidait avec χ_∞^d sur un sous-groupe ouvert du groupe d'Inertie.

ii) On doit également pouvoir établir 4.2.5 en mettant bout à bout quelques-uns des articles de Fontaine reliant les représentations de Galois d'un corps local à des structures de Dieudonné convenablement filtrées.

C'est sans doute la méthode promise au plus bel avenir.

COROLLAIRE 4.2.7.- Soient ℓ un nombre premier et M le noyau d'une belle ℓ -isogénie, de niveau n , de rang h , définie sur l'anneau d'entiers O d'un corps local K et soit $\Psi[M_K]$ le caractère de $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ associé à $\Lambda^h M_K$. Alors :

- 1) Si $\ell \neq p$, caractéristique résiduelle de O , $\Psi[M_K]$ est non ramifié sur O .
- 2) Si $\ell = p$, $\Psi[M_K] \mid \text{Inertie} = \chi_{n,p}^d \mid \text{Inertie}$, où d est la dimension de \hat{M} .

Démonstration : On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \hat{M}_K \longrightarrow M_K \longrightarrow M_K/\hat{M}_K \longrightarrow 0$$

de $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ -modules, libres sur $\mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z}$ d'après 4.1.1. Donc

$$\Psi[M_K] = \Psi[\hat{M}_K]\Psi[M_K\hat{M}_K].$$

Le caractère $\Psi[M_K/\hat{M}_K]$ est non ramifié d'après 4.2.3. Pour $\ell \neq p$, $\Psi[\hat{M}_K]$ est évidemment non ramifié, et pour $\ell = p$, sa restriction au groupe d'inertie est $x_{n,p}^d$, d'après 4.2.5, d'où le corollaire.

4.2.8.- Etude globale

Posons $G = \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, $H = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ qui devient un sous-groupe de G , une fois choisie un isomorphisme $\bar{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \bar{K}$.

Sur les plus grands quotients abéliens, on dispose de l'homomorphisme de transfert ([12] VII §8) :

$$(1) \quad \text{Ver} : G_{ab} \longrightarrow H_{ab} .$$

Rappelons quelques-unes de ses propriétés :

a) Localisation. Soit ℓ un nombre premier et $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ une clôture algébrique de \mathbb{Q}_ℓ . Pour toute place v de K divisant ℓ , choisissons une place \bar{v} de \bar{K} au-dessus de v . Le choix de \bar{v} permet de définir un plongement $\tau_{\bar{v}}$ de $\bar{\mathbb{Q}}$ dans $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ et un diagramme commutatif entre groupes de Galois :

$$\begin{array}{ccccc} H_v & \longrightarrow & j_{\bar{v}} & \longrightarrow & H \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ G_\ell & \longrightarrow & i_{\bar{v}} & \longrightarrow & G \end{array}$$

où $G_\ell = \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_\ell/\mathbb{Q}_\ell)$, $K_{\bar{v}} = \tau_{\bar{v}}(K)$, $\mathbb{Q}_\ell \subset \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ et $H_v = \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_\ell/K_v)$.

De plus, les applications $i_{\bar{v}}$ (resp. $j_{\bar{v}}$) sont définies à conjugaison près par un élément de G (resp. H). On en déduit pour tout v un diagramme commutatif indépendant du choix des relèvements \bar{v} :

$$\begin{array}{ccc} (H_v)_{ab} & \xrightarrow{j_v} & H_{ab} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (G_\ell)_{ab} & \xrightarrow{i} & G_{ab} . \end{array}$$

Par ailleurs, on dispose des transferts locaux $(\text{Ver})_v : (G_\ell)_{ab} \longrightarrow (H_v)_{ab}$ et on a

$$(2) \quad \text{Ver} \circ i = \sum_{v|\ell} j_v \circ (\text{Ver})_v .$$

b) Norme. L'application composée :

$$(G_\ell)_{ab} \xrightarrow{(\text{Ver})_v} (H_v)_{ab} \xrightarrow{\text{can}} (G_\ell)_{ab}$$

(3) est la multiplication par le degré local $[K_v : \mathbb{Q}_\ell]$.

c) Passage au corps résiduel. Notons I_ℓ (resp. I_v) le sous-groupe d'inertie de G_ℓ (resp. de H_v). On a des suites exactes :

$$1 \longrightarrow I_\ell \longrightarrow G_\ell \longrightarrow \text{Gal}(\bar{F}_\ell / F_\ell) \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow I_v \longrightarrow H_v \longrightarrow \text{Gal}(\bar{F}_\ell / k_v) \longrightarrow 1$$

et une application de transfert

$$\text{Ver} : \text{Gal}(\bar{F}_\ell / F_\ell) \longrightarrow \text{Gal}(\bar{F}_\ell / k_v)$$

qui envoie le Frobenius φ_ℓ en ℓ sur le Frobenius φ_v en v .

Si e_v est l'indice de Ramification de K_v sur \mathbb{Q}_ℓ , on a alors le diagramme commutatif :

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} (G_\ell)_{ab} & \xrightarrow{\text{can}} & \text{Gal}(\bar{F}_\ell / F_\ell) \\ (\text{Ver})_v \downarrow & & \downarrow e_v \text{ Ver} \\ (H_v)_{ab} & \longrightarrow & \text{Gal}(\bar{F}_\ell / k_v) \end{array}$$

THÉORÈME 4.2.9.- Soient p un nombre premier et $u^0 : A^0 \longrightarrow B^0$ une belle p -isogénie, de noyau M , de niveau n , de rang h (4.1.1).

Posons $\psi_o[M_K] = \psi[M_K] \circ \text{Ver} : G = \text{Gal}(\bar{Q}/\mathbb{Q})_{ab} \longrightarrow (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$. Alors :

$$\psi_o[M_K] = \chi_{n,p}^d, \quad \text{où } d = \sum_{v|p} d_v [K_v : \mathbb{Q}_p].$$

Démonstration : d'après 4.2.7, si ℓ est un nombre premier $\neq p$, $\psi[M_K]$ est non ramifié en toute place v de K divisant ℓ . Il résulte alors de (2) et (4) que $\psi_o[M_K]$ est non ramifié en ℓ .

Toujours d'après 4.2.7, si $d_v | p$, $\psi[M_K]|_{I_v} = \chi_{n,p}|_{I_v}^{d_v}$. Il résulte alors de (2) et (3) que $\psi_o[M_K]|_{I_p} = \chi_{n,p}|_{I_p}^{d_v}$.

Alors $\psi_o[M_K]\chi_{n,p}^{-d}$ est un caractère de G partout non ramifié, donc trivial puisque \mathbb{Z} est simplement connexe, d'où le théorème.

Remarque 4.2.10.- Partant de M_K , c'est-à-dire d'une représentation ρ de H dans $V = (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^h$, une autre façon naturelle de lui associer un caractère de G , consiste à induire ρ de H à G , puis à prendre le déterminant. Le caractère ainsi obtenu est lié au transfert par la formule :

$$\det(\text{Ind}_H^G(\rho)) = \epsilon^h(\det(\rho) \circ \text{Ver}),$$

où $\epsilon(g)$, pour $g \in G$, est la signature de la permutation définie par g

opérant par translation sur G/H (cf. [11] p.130, exer.). Ce caractère ε^h peut introduire des ramifications parasites en les nombres premiers ℓ ramifiés dans \mathcal{O} , contrairement au transfert.

4.3.- Degré d'Arakelov d'une variété abélienne et belles isogénies

4.3.1.- Dans la suite on considère un corps global K (1.1) et une K -variété abélienne A_K ayant réduction semi-stable A sur $\text{Spec}(\mathcal{O})$. Soit B_K une variété abélienne isogène à A_K et B son modèle de Néron. On va comparer le degré d'Arakelov de ω_B à celui de ω_A .

4.3.2.- Commençons par rappeler l'argument galoisien, dû à Faltings, montrant que certaines isogénies, "extraites" d'un sous-groupe p -divisible de A , conservent le degré d'Arakelov.

Soit donc p un nombre premier et soit $M_K = \bigcup_n (M_n)_K$ un sous-groupe p -divisible, de A_K , de p -torsion, où $(M_n)_K$ désigne le noyau de la multiplication par p^n dans M_K . Supposons que pour tout entier $n \geq 0$, l'adhérence schématique M_n de $(M_n)_K$ dans la composante connexe A^0 de A , soit le noyau d'une belle p -isogénie (4.1.1) :

$$u_n^0 : A^0 \longrightarrow B_{(n)}^0 .$$

Alors la condition 2 i) de 4.1.1 entraîne que pour toute place v , de mauvaise réduction, $\bigcup_n (\widehat{M}_{n,v})(\bar{K}_v)$ est p -divisible, où $\widehat{M}_{n,v}$ désigne la partie finie de M_n sur \mathcal{O}_v . La condition 2 ii) signifie que $\widehat{M}_v = \bigcup_n \widehat{M}_{n,v}$ est un BT sur \mathcal{O}_v pour toute place $v|p$. Soit d_v la dimension de \widehat{M}_v et h la hauteur du groupe p -divisible M_K , donc aussi le p -rang des groupes M_n .

Notons $\Psi[M_K]$ le caractère de $H = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ associé à $\wedge^h M_K$ et soit $\Psi_0[M_K] = \Psi[M_K] \circ \text{Ver}$. Il résulte de 4.2.9 que $\Psi_0[M_K] = \chi_{\infty,p}^d$ avec

$$d = \sum_{v|p} d_v [K_v : \mathbb{Q}_p].$$

Soit ℓ un nombre premier distinct de p , non ramifié dans \mathcal{O} , tel que A_K ait bonne réduction en toute place de \mathcal{O} divisant ℓ . Alors $\Psi_0[M_K]$ est non ramifié en ℓ ; soit λ sa valeur sur le Frobenius φ_ℓ en ℓ . D'après le calcul précédent, $\lambda = \ell^d$. Mais d'autre part, les résultats de Weil appliqués aux réductions de A sur les corps finis au-dessus de F_ℓ entraînent que λ est un entier algébrique qui dans tout plongement complexe a pour valeur absolue $\ell^{h[K:\mathbb{Q}]/2}$. Donc $d = h[K:\mathbb{Q}]/2$ et d'après (4.1.3), chacune des isogénies u_n^0 conserve le degré d'Arakelov.

Dans ce qui suit, nous allons adapter cet argument à de belles p -isogénies,

non nécessairement extraites d'un sous-groupe p -divisible M_K de A_K .

4.3.3.- On choisit un nombre premier ℓ tel que A_K ait bonne réduction en toute place v de O divisant ℓ (mais ℓ peut être ramifié dans O). A partir de ℓ , on va pouvoir contrôler l'effet, sur le degré d'Arakelov, des isogénies de degré premier à ℓ . Pour traiter les ℓ -isogénies, il faudra utiliser un autre nombre premier ℓ' , à la place de ℓ .

Pour toute place w de O divisant ℓ , on note e_w l'indice de ramification de O_w sur $\mathbb{Z}/\ell \mathbb{Z}$ et r_w le degré résiduel $[k_w : F_\ell]$. Soit $A_{k_w} = A \otimes_O k_w$ qui est une variété abélienne sur le corps fini k_w .

Pour tout nombre premier $p \neq \ell$, soit $T_p(A_{k_w})$ le module de Tate de A_{k_w} relatif à p ; c'est un \mathbb{Z}_p -module libre de rang $2 \dim A_K = 2g$ muni d'une action continue de $\text{Gal}(\bar{k}_w/k_w)$. D'après les résultats de Weil, le polynôme caractéristique de Frobenius φ_w en w est un polynôme à coefficients entiers, indépendant du nombre premier $p \neq \ell$, ne dépendant que de la classe d'isogénie de A_{k_w} , donc de la classe d'isogénie de A_K . De plus, pour tout plongement $\bar{\mathbb{Q}}$ dans \mathbb{C} , les racines de ce polynôme caractéristique ont pour valeur absolue $\ell^{r_w/2}$.

Pour p premier $\neq \ell$, soit $u^0 : A^0 \rightarrow B^0$ une belle p -isogénie, de niveau n , de rang h (4.1.1) et soit M son noyau. On associe à M le caractère $\Psi[M] : \text{Gal}(\bar{K}/K) \rightarrow (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^*$ et son composé avec le transfert

$$\Psi_0[M] : \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^*.$$

Alors $\Psi_0[M]$ est non ramifié en ℓ ; soit τ_ℓ sa valeur sur le Frobénius φ_ℓ en ℓ .

Les informations locales en p , fournissent un premier calcul de τ_ℓ . En effet, d'après 4.2.9, on a $\Psi_0[M] = \chi_{n,p}^d$, où $d = \sum_{v|p} d_v [K_v : \mathbb{Q}_p]$, d_v étant la dimension du $B_{T_n} \widehat{M}_v$, donc :

$$(1) \quad \tau_\ell = \ell^d \bmod p^n.$$

Utilisons maintenant les résultats de Weil. Pour $w|\ell$, la fibre $M \otimes_O k_w$ de M au-dessus de k_w correspond à un facteur direct de rang h du $\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$ -module $T_p(A_{k_w})/p^n T_p(A_{k_w})$, stable par l'action de $\text{Gal}(\bar{k}_w/k_w)$. Prenant les puissances extérieures h -èmes, on trouve un facteur direct de rang 1 du $\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$ -module $\Lambda^h T_p(A_{k_w})/p^n \Lambda^h T_p(A_{k_w})$, sur lequel φ_w opère par multiplication par $\tau_w \in (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^*$ et l'on a $\tau_w = \Psi[M](\varphi_w)$.

Si $P_{h,w}$ désigne le polynôme caractéristique de φ_w opérant sur $\Lambda^h T_p(A_{k_w})$ on a donc :

$$(2) \quad P_{h,w}(\tau_w) = 0 \bmod p^n \mathbb{Z}.$$

D'après 4.2.8, formules (2) et (4), on a :

$$(3) \quad \tau_\ell = \prod_{w|\ell} \tau_w^{e_w} .$$

Notons alors $E_{p,h,w}$ le $\mathbb{Z}_p[\text{Gal}(\bar{F}_\ell/F_\ell)]$ -module qui a même espace sous-jacent que $\Lambda_{T_p(A_{K_w})}^h$, mais sur lequel φ_ℓ opère comme opérait $\varphi_w^{e_w}$. Finalement, considérons le produit tensoriel sur \mathbb{Z}_p des représentations $E_{p,h,w}$ de $\text{Gal}(F_\ell/F_\ell)$:

$$(3) \quad E_{p,h} = \bigotimes_{w|\ell} E_{p,h,w} .$$

Dans le $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ -module $E_{p,h}/p^nE_{p,h}$, on dispose donc d'un facteur direct de rang 1, stable par Galois, canoniquement associé à M , sur lequel φ_ℓ opère par multiplication par τ_ℓ .

Soit alors P_h le polynôme caractéristique de φ_ℓ opérant sur $E_{p,h}$. C'est un polynôme à coefficients entiers, indépendant de $p \neq \ell$, ne dépendant que de la classe d'isogénie de A_K et dont les racines, dans tout plongement complexe, ont pour valeur absolue $\ell^{\sum_w r_w e_w h/2} = \ell^{[K:\mathbb{Q}]h/2}$ et l'on a

$$(4) \quad P_h(\tau_\ell) = 0 \pmod{p^n} .$$

Les formules (1) et (4) résument les informations sur τ_ℓ que nous allons utiliser.

Considérons alors l'ensemble fini de puissances de ℓ de la forme

$$(5) \quad \mu = \ell^{\sum_\alpha d_\alpha n_\alpha}, \quad \mu \in I_h$$

tel que :

a) d_α entier ≥ 0 , $d_\alpha \leq \text{Minimum}(\dim A_K, h) = \text{Minimum}(g, h)$

b) n_α entier ≥ 1 , $\sum_\alpha n_\alpha = [K:\mathbb{Q}]$

c) $\sum_\alpha d_\alpha n_\alpha \neq [K:\mathbb{Q}]h/2$.

Alors aucun des μ n'est racine de P_h puisque celles-ci, ont pour valeurs absolues complexes $\ell^{[K:\mathbb{Q}]h/2}$. Donc

$$(6) \quad a_\mu = P_h(\mu), \quad \mu \in I_h$$

est un entier non nul.

THÉORÈME 4.3.4.- Pour p premier, $p \neq \ell$, et pour h entier, $1 \leq h \leq 2\dim A_K - 1$, notons $n_{p,h}$ le plus grand exposant m tel que p^m divise l'un des a_μ définis par (6), $\mu \in I_h$. Alors, pour toute K -variété abélienne A_K^1 , K -isogène à A_K , toute belle p -isogénie de source A_K^1 , de p -rang h , de niveau $n > n_{p,h}$ conserve le degré d'Arakelov.

Démonstration : Soit M le noyau d'une telle isogénie et pour toute place $v|p$, notons d_v la dimension de M_v . Posons $d = \sum_{v|p} d_v [K_v : \mathbb{Q}_p]$. Il nous faut montrer que $[K:\mathbb{Q}]h/2 = d$ (4.1.3). Or, s'il n'en était pas ainsi, le nombre ℓ^d serait de la forme (5), pour un certain $u \in I_h$. Or d'après (1) et (4), on a :

$$P_h(\ell^d) = 0 \pmod{p^n \mathbb{Z}}$$

Comme $n > n_{p,h}$, cette congruence contredit la définition de $n_{p,h}$; donc $d = [K:\mathbb{Q}]h/2$.

Gardons les notations de 4.3.4. Pour p premier, $p \neq \ell$, posons

$$n_p = \max n_{p,h}, \quad 1 \leq h \leq 2g-1, \text{ où } g = \dim A_K.$$

Soit S l'ensemble fini de nombres premiers p , $p \neq \ell$, tels que $n_p \geq 1$.

Soient N le nombre de places de 0 au-dessus de ℓ et $M = \binom{2g}{g}^N$, (où $\binom{n}{m}$ désigne le coefficient du binôme usuel). Le corollaire suivant donne alors une majoration effective des éléments de S et des exposants n_p :

COROLLAIRE 4.3.5.- Pour tout $p \in S$, on a :

$$(7) \quad p^{n_p} \leq 2^M \ell^{[K:\mathbb{Q}]gM}.$$

Démonstration : Reprenons les notations de 4.3.3. Pour tout $w|\ell$, le \mathbb{Z}_p -module $E_{p,h,w}$ est de rang $\binom{2g}{h} \leq \binom{2g}{g}$; donc $E_{p,h}$ est de rang $\binom{2g}{h}^N = M_h \leq M$.

Par ailleurs, d'après (5), pour $\mu \in I_h$, on a :

$$\mu \leq \ell^{[K:\mathbb{Q}] \min(g,h)} \leq \ell^{[K:\mathbb{Q}]g}.$$

Comme les racines du polynôme unitaire P_h sont de valeur absolue complexe $\ell^{[K:\mathbb{Q}]h/2} \leq \ell^{[K:\mathbb{Q}]g}$, on a :

$$|a_i| = |P_h(\mu)| \leq (\ell^{[K:\mathbb{Q}]g} + \ell^{[K:\mathbb{Q}]\min(g,h)})^{M_h} \leq (2\ell^{g[K:\mathbb{Q}]})^M,$$

d'où le corollaire.

COROLLAIRE 4.3.6.- Soit R l'ensemble des nombres premiers ramifiés dans 0 et soit A_K^1 une K -variété abélienne, K -isogène à A_K .

- 1) Toute K -isogénie $A_K^1 \rightarrow B_K^1$ de degré premier à ℓ U R U S conserve le degré d'Arakélov.
- 2) Toute belle p -isogénie $A_K^1 \rightarrow B_K^1$ de niveau n , avec $p \neq \ell$ et $n > n_p$, conserve le degré d'Arakélov.

Démonstration : L'assertion 2) résulte immédiatement de 4.3.4 et de la définition de n_p (4.3.5). Pour établir l'assertion 1), on se ramène par dévissage au

cas d'une p -isogénie avec p premier, $p \notin \mathcal{U}RUS$, puis au cas où le noyau de l'isogénie est annulé par p . L'isogénie est alors automatiquement une belle p -isogénie de niveau ≤ 1 (4.1.2 a)) et l'assertion résulte encore de 4.3.4 et du fait que $n_p = 0$.

Enfin, notant que la borne obtenue dans 4.3.5 ne dépend que de 0 et de g on obtient le corollaire suivant :

COROLLAIRE 4.3.7. - Soient ℓ un nombre premier, g un entier ≥ 0 , \bar{S} l'ensemble des nombres premiers p , $p \neq \ell$, tels que $p \leq 2^M \ell^{[K:\mathbb{Q}]g} M$ (4.3.5).

Soit J_K une K -variété abélienne, de dimension g , ayant réduction semi-stable sur 0 et bonne réduction en toute place divisant ℓ .

1) Toute K -isogénie de source J_K , de degré premier à \bar{S} , conserve le degré d'Arakelov.

2) Si $p \in \bar{S}$ et si n est un entier tel que $p^n > 2^M \ell^{[K:\mathbb{Q}]g} M$, toute belle p -isogénie, de niveau n , de source J_K conserve le degré d'Arakelov.

4.4.- Degré d'Arakélov et isogénies, cas général

4.4.1.- Soit M un \mathbb{Z} -module de type fini, annulé par une puissance d'un nombre premier p . Il existe deux suites d'entiers, uniquement déterminées :

$$0 < n_1 < \dots < n_r \text{ et } d_1, \dots, d_r$$

telles que $M \simeq (\mathbb{Z}/p^{n_1})^{d_1} \oplus \dots \oplus (\mathbb{Z}/p^{n_r})^{d_r}$. Nous appellerons les entiers n_i les exposants élémentaires de M .

Notons M_n le noyau de la multiplication par p^n dans M . Alors les quotients $M_{n_i}/M_{n_{i-1}}$ sont des $\mathbb{Z}/p^{(n_i-n_{i-1})}$ -modules libres, de rang $d_1 + \dots + d_r$ (en convenant que $M_{n_0} = 0$). Si de plus un groupe G opère sur M , les sous-groupes M_n sont évidemment stables par G .

4.4.2.- Soit de nouveau K un corps global, A_K une K -variété abélienne de dimension g , ayant réduction semi-stable sur 0 . Soit T l'ensemble des places de mauvaise réduction et $|T|$ son cardinal. On s'intéresse aux K -variétés abéliennes A_K^1 , K -isogènes à A_K .

LEMME 4.4.3. - Soit p un nombre premier et soit $u_K : A_K^1 \rightarrow B_K^1$ une p -isogénie de noyau M_K . Notons $n_1 < \dots < n_r$ les exposants élémentaires de $M_K(\bar{K})$. Alors on a $r \leq 2g$ et u_K se factorise en r isogénies $(u_i)_K$, telles que $\text{Ker}(u_i)_K(\bar{K})$ soit libre sur $(\mathbb{Z}/p^{n_i-n_{i-1}})$.

C'est clair.

LEMME 4.4.4. - Soit p un nombre premier et $u_K : A_K^1 \rightarrow B_K^1$ une K -isogénie de noyau M_K , avec $M_K(\bar{K}) \simeq (\mathbb{Z}/p^n)^h$, u^0 son extension aux modèles de Néron connexes, $M = \text{Ker}(u^0)$.

Pour $v \in T$, place de mauvaise réduction, notons \hat{M}_v la partie finie (1.2) de $M_v = M \otimes_0 \mathcal{O}_v$ et soit $m_1 < \dots < m_s$ la réunion des exposants élémentaires des groupes $\hat{M}_v(\bar{K}_v)$, $v \in T$.

Alors on a $s \leq h|T|$ et u_K se factorise en s K -isogénies, dont l'extension aux modèles de Néron connexes, à un noyau M_i , $i = 1, \dots, s$, vérifiant les propriétés suivantes :

$$1) M_i(\bar{K}) \simeq (\mathbb{Z}/p^{m_i-m_{i-1}})^h,$$

2) Pour tout $v \in T$, $(\hat{M}_i)_v(\bar{K}_v)$ est facteur direct de $M_i(\bar{K}_v)$.

Etablissons d'abord un lemme.

LEMME 4.4.5. - Soient K un corps local (1.0), A_K une K -variété abélienne de réduction semi-stable, $v_K : A_K \rightarrow B_K$ une K -isogénie, $v^0 : A^0 \rightarrow B^0$ son extension aux modèles de Néron connexes, $N' = \text{Ker } v^0$.

Soit N_K un sous-schéma en groupes fini de A_K qui contient N'_K , et soit N''_K son image par v_K dans B_K . Notons N (resp. N'') l'adhérence schématique de N_K (resp. N''_K) dans A^0 , (resp. B^0). Alors

(i) le morphisme $N \rightarrow N''$, induit par v^0 est fidèlement plat, de sorte que l'on a une suite exacte (fppf) de 0-schémas en groupes :

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$$

(ii) La suite, déduite de la précédente, en prenant les parties finies

$$0 \longrightarrow \hat{N}' \longrightarrow \hat{N} \longrightarrow \hat{N}'' \longrightarrow 0$$

est aussi exacte.

Démonstration de 4.4.5 : Comme v^0 est plat (1.1), l'image réciproque de N'' par v^0 est plate sur 0 , et par suite coïncide avec N . Comme v^0 est fidèlement plat, il en est de même de $N \rightarrow N''$ d'où la première assertion. La seconde s'en déduit par complétion le long des fibres fermées.

Remarque 4.4.6 : les assertions i) et ii) du lemme 4.4.5 ne sont plus nécessairement vraies si on travaille avec les modèles de Néron, au lieu des modèles de Néron connexes, car l'isogénie $v : A \rightarrow B$ n'est plus nécessairement fidèlement plate. Le lemme 4.4.5 est d'ailleurs la seule justification, dans cet exposé, de l'utilisation des modèles de Néron connexes.

Démonstration de 4.4.4. - Pour tout $v \in T$, $\hat{M}_v(\bar{K}_v)$ est un sous-groupe de $M(\bar{K}_v)$, donc a au plus h exposants élémentaires, d'où $s \leq h|T|$.
Pour $i = 1, \dots, s$, soit $(A_i)_K$ le quotient de A_K^1 par $(M_{m_i})_K$, et soit $(u_i)_K : (A_{i-1})_K \longrightarrow (A_i)_K$ l'isogénie naturelle de noyau $(M_{m_i})_K / (M_{m_{i-1}})_K$. Alors u_K est le composé $(u_s)_K \circ \dots \circ (u_1)_K$. Notons u_i^0 l'extension de $(u_i)_K$ aux modèles de Néron connexes et montrons que u_i^0 vérifient les propriétés 1) et 2) de 4.4.4.

La propriété i) est évidente. Prouvons 2). Le noyau de l'isogénie naturelle $(A^1)^0 \longrightarrow A_i^0$ est $M_{m_i} = \text{Ker } p^{m_i} : M \longrightarrow M$. Le lemme 4.4.5 entraîne que $\text{Ker } u_i^0 = M_{m_i} / M_{m_{i-1}}$.

Soit $v \in T$. Posons pour simplifier $N = M(\bar{K}_v)$, $\hat{N} = \hat{M}_v(\bar{K}_v)$. Alors $(\hat{M}_{m_i})_v(\bar{K}_v) = \hat{N}_{m_i}$, pour $i = 1, \dots, s$.

D'après le lemme 4.4.5, la partie finie en v de $\text{Ker } u_i^0 = M_{m_i} / M_{m_{i-1}}$, est le quotient des parties finies $(\hat{M}_{m_i})_v$ et $(\hat{M}_{m_{i-1}})_v$, donc a pour points dans \bar{K}_v , $\hat{N}_{m_i} / \hat{N}_{m_{i-1}}$. Vu le choix des m_i , le groupe $\hat{N}_{m_i} / \hat{N}_{m_{i-1}}$ est libre sur $\mathbb{Z}/p^{m_i-m_{i-1}}$, donc est facteur direct dans $M_{m_i} / M_{m_{i-1}}$. D'où la propriété 2).

4.4.7.- Pour obtenir de belles p -isogénies, il nous faut maintenant considérer la propriété 2 (ii) de 4.1.1, et donc tenir compte de l'affaissement des parties finies \hat{M}_v , pour $v|p$.

Pour p premier posons :

$$\Delta_p = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq 2 \text{ et si } p \text{ n'est pas ramifié dans } 0, \\ 2g & \text{Maximum}(e_v, e_v \delta_v) \text{ sinon,} \end{cases}$$

où l'on a posé comme dans 3.4.5 : $\mathcal{J}_{0/\mathbb{Z}}$ = différente de 0 sur \mathbb{Z} , $\text{val}_v = \text{valuation de } \mathcal{J}_v$ qui vaut 1 sur une uniformisante,

$$\delta_v = \text{partie entière de } \frac{1}{p-1} + \text{val}_v(\mathcal{J}_{0/\mathbb{Z}})/e_v.$$

Soit alors M le noyau d'une p -isogénie $u^0 : A^0 \longrightarrow B^0$ qui vérifie les conditions de 4.4.4 :

1) $M(\bar{K}) \simeq (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^h$, 2) pour toute place v de mauvaise réduction, $\hat{M}_v(\bar{K}_v)$ est facteur direct de $M(\bar{K}_v)$.

Pour tout n' , notons $M_{\{n'\}}$ l'adhérence schématique dans M du noyau de la multiplication par $p^{n'}$ dans M_K .

Supposons $n \geq 2\Delta_p$. D'après 4.4.5 (i), l'isogénie u^0 se factorise en trois isogénies, entre modèles de Néron connexes, de noyaux respectifs :

$M_{\{\Delta_p\}}$, $M_{\{n-\Delta_p\}}/M_{\{\Delta_p\}}$, $M/M_{\{n-\Delta_p\}}$. Notons que chacune de ces isogénies vérifie encore l'analogue des conditions 1) et 2) ci-dessus, comme il résulte de 4.4.5 ii). De plus, on déduit de 3.4.5 et 3.2.2 que l'isogénie médiane est une belle p -isogénie, de niveau $n-2\Delta_p$.

Nous résumons les résultats obtenus dans 4.4, par le corollaire suivant :

COROLLAIRE 4.4.8. - Soit A_K une K -variété abélienne, de dimension g , ayant réduction semi-stable sur 0 et mauvaise réduction en au plus $|T|$ places. Alors pour tout nombre premier p , toute p -isogénie $u_K : A_K \rightarrow B_K$ se factorise en $4g^2|T|$ belles p -isogénies et $8g^2|T|$ isogénies de degré $\leq p^{\Delta_p} 2g$.

Combinons maintenant 4.4 avec les résultats de 4.3.

THÉORÈME 4.4.9. - Soient T un ensemble fini de places de 0 , de cardinal $|T|$ et ℓ deux nombres premiers distincts tels qu'aucune place de T ne divise ℓ ou ℓ' . Soit R l'ensemble des nombres premiers ramifiés dans 0 .

Soit A_K une K -variété abélienne, de dimension g , ayant réduction semi-stable sur 0 et bonne réduction en dehors de T .

Pour tout p premier, on a défini des entiers $\Delta_p \geq 0$ (4.4.7), ne dépendant que de 0 et de g , nuls si $p \notin \{2\} \cup R$.

Pour tout p premier $\neq \ell$, on a défini dans 4.3.5 des entiers $n_p \geq 0$, dépendant de A_K et de ℓ , nuls en dehors d'un ensemble fini S , tels que pour $p \in S$, on a : $n_p \leq 2^M \ell^{[K:\mathbb{Q}]g} M^N$ où N est le nombre de places de K au-dessus de ℓ et $\binom{2g}{g}^N$.

Remplaçons ℓ par ℓ' et prenons $p = \ell$, on obtient un autre entier n_p noté $n_{\ell, \ell'}$, tel que $n_{\ell, \ell'} \leq 2^{M'} \ell^{[K:\mathbb{Q}]g} M'^N$, où N' est le nombre de places de ℓ' au-dessus de ℓ' et $M' = \binom{2g}{g}^{N'}$.

Considérons les K -variétés abéliennes B_K , K -isogènes à A_K .

1) L'ensemble des hauteurs des variétés abéliennes B_K est fini, de cardinal majoré par :

$$\left[\prod_{\substack{p \in R \cup S \cup \{2\} \\ p \neq \ell}} ((2\Delta_p + n_p) 8g^3 [K:\mathbb{Q}] |T| + 1) \right] ((2\Delta_{\ell} + n_{\ell, \ell'}) 8g^3 |T| [K:\mathbb{Q}] + 1).$$

2) On a :

$$|ht(A_K) - ht(B_K)| \leq \left[\left(\sum_{\substack{p \in R \cup S \cup \{2\} \\ p \neq \ell}} (2\Delta_p + n_p) \log(p) + (2\Delta_{\ell} + n_{\ell, \ell'}) \log(\ell) \right) 2g^3 |T| \right].$$

Démonstration : Rappelons que si B est le modèle de Néron de B_K sur \mathcal{O} , la hauteur de B_K , $ht(B_K)$, est $\deg(\omega_B)/[K:\mathbb{Q}]$.

Pour établir le théorème, on peut, d'après 4.3.6, et quitte à remplacer A_K par une K -variété abélienne isogène, se borner à étudier les p -isogénies pour $p \in \mathcal{LURUS}$.

D'après 4.4.7, une p -isogénie se décompose en $4g^2|T|$ belles p -isogénies et $8g^2|T|$ isogénies de degré $\leq p^{2g}$.

D'après 4.3.6, toute belle p -isogénie de niveau $n > n_p$, pour $p \neq \ell$, et de niveau $n > n_{\ell, \ell'}$, pour $p = \ell$, conserve le degré d'Arakelov.

Enfin, il résulte de 2.1.4, que si $u: A \rightarrow B$ est une p -isogénie de degré p^n , $\deg(\omega_A) - \deg(\omega_B)$ peut prendre au plus $2n[K:\mathbb{Q}] + 1$ valeurs et que l'on a $|ht(A_K) - ht(B_K)| \leq \frac{n}{2} \log(p)$. Plus généralement, ces majorations s'étendent au cas où on passe de A à B par une suite finie de p -isogénies dont le produit des degrés est $\leq p^n$.

D'après les considérations qui précèdent, pour contrôler les p -isogénies qui, a priori, ne conservent pas le degré d'Arakelov, on peut prendre

$$n = (\Delta_p 2g) 8g^2|T| + (n_p 2g) 4g^2|T| = (2\Delta_p + n_p) 8g^3|T|, \text{ pour } p \neq \ell$$

et $n = (2\Delta_\ell + n_{\ell, \ell'}) 4g^3|T|$ pour $p = \ell$.

On obtient alors l'assertion 1) (resp. 2)) du théorème en prenant le produit (resp. la somme) des majorations relatives aux différents "mauvais" nombres premiers p .

B I B L I O G R A P H I E

- [1] L. BÉGUERI. *Dualité sur un corps local à corps résiduel algébriquement clos*, Mémoire Soc. Math. de France, supplément t. 108, 1980, 117 p.
- [2] J-M. FONTAINE. *Formes différentielles et modules de Tate des Variétés abéliennes sur les corps locaux*, Invent. Math. 65, 1982, 379-409.
- [3] J-M. FONTAINE et G. LAFFAILLE. *Construction de représentations p-adiques*, Publ. Université Sc. et Méd. de Grenoble, 1981.
- [4] M. GREENBERG. *Schemata over local rings*, Annals of Math. 73, 1961, 624-648.
- [5] A. GROTHENDIECK. *Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique*, Sémin. de géom. Alg. du Bois-Marie 1967-1969, SGA 7 I, Lectures Notes in Math. n° 288, Springer-Verlag, 1972.
- [6] R. HARTSHORNE. *Residues and Duality*, Lect. Notes in Math. n°20, Springer Verlag, 1966.
- [7] B. MAZUR et L. ROBERTS. *Local Euler characteristics*, Invent. math. 9, 1970, pp. 201-234.
- [8] L. MORET-BAILLY. *Pinceaux de variétés abéliennes*, Astérisque, à paraître.
- [9] M. RAYNAUD. *Schémas en Groupes de type (p,...,p)*, Bull. Soc. Math. de Fr. t. 102, 1974, 241-280.
- [10] J-P. SERRE. *Groupes algébriques et corps de classes*, Hermann, 1962.
- [11] J-P. SERRE. *Groupes pro-algébriques*, Publ. Math. I.H.E.S n°7, 1960.
- [12] J-P. SERRE. *Corps locaux*, Hermann, 1962.
- [13] J-P. SERRE. *Corps locaux à corps résiduel algébriquement clos*, Bull. Soc. Math. de Fr. t.89 , 1961, 105-154.

- [14] J-P. SERRE. *Cohomologie Galoisiennne*, Lect. Notes in Math. n°5,
Springer-Verlag, 1965.
- [15] J. TATE. *WC-groups over p-adic fields*, Sémin. Bourbaki 156, Déc. 1957,
W.A. Benjamin, New York, 1965.
- [16] J. TATE. *p-divisible groups, Local fields*, Nuffic Sum. School at
Driebergen, Springer-Verlag, 1967, pp. 158-184.
- [17] A. WEIL. *Variétés abéliennes et courbes algébriques*, Hermann, 1948.

Michel RAYNAUD
Université PARIS XI - Bat.425
Département de Mathématiques
91405 ORSAY CEDEX

Astérisque

MARGUERITE FLEXOR
Endomorphismes de variétés abéliennes

Astérisque, tome 127 (1985), p. 235-248

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__127__235_0>

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » ([http://smf4.emath.fr/
Publications/Asterisque/](http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/)) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

Exposé VIII

ENDOMORPHISMES DE VARIÉTÉS ABÉLIENNES

Marguerite FLEXOR

Cet exposé a pour raison essentielle de montrer que pour K un corps de nombres :

(I) : toute classe d'isogénies de K -variétés abéliennes est constituée d'un nombre fini de classes d'isomorphismes

(II) : l'action de $\text{Gal}(\bar{K}:K)$ sur $V_\ell(A)$ est semi-simple, pour toute variété abélienne A définie sur K .

(III) : La conjecture de Tate relative aux endomorphismes de variétés abéliennes définies sur K .

Ces résultats, nous les obtiendrons à partir de l'énoncé de finitude, démontré au chapitre IV :

(R₁) : Si K est un corps de nombres, (g,n,h) des entiers, il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes de variétés abéliennes polarisées (A,Θ) de dimension g , de degré de polarisation n et de hauteur de Faltings $h_{\text{Falt}}(A) \leq h$,

et de l'énoncé plus précis, relatif à une classe d'isogénie (ch. VI).

(R₂) : Si K est un corps de nombres, A une variété abélienne semi-stable sur K , il n'y a qu'un nombre fini de valeurs possibles pour les hauteurs $h_{\text{Falt}}(B)$, des variétés abéliennes B K -isogènes à A .

Lorsque K est de type fini sur son corps premier, les énoncés (I,II,III) sont vrais, à condition de ne considérer dans (I) que des isogénies de degré premier à la caractéristique. Si $\text{car}(K) > 0$, ceci a été démontré par J. Tate ([T-2]) pour K fini et par Zarhin ([Z]) et Mori ([Mo]) lorsque $\deg \text{tr}(K:\mathbb{F}_q) > 0$. Si $\text{Car}(K) = 0$, ceci est dû à G. Faltings ([F]). On trouvera dans la suite de ce séminaire une démonstration de ce dernier cas.

Beaucoup d'arguments, dans ce qui suit, ne dépendent pas de manière spécifique

de la nature du corps K . On suppose donc seulement K de type fini sur son corps premier et il est explicitement indiqué là où l'hypothèse K , corps de nombres, est essentielle.

Notations : Si K est un corps, \bar{K} sa clôture algébrique, $G = \text{Gal}(\bar{K}:K)$ et si A est une variété abélienne définie sur K , $\bar{A} = A \times_{\bar{K}} \bar{K}$ et A^* désigne la variété abélienne duale de A . Pour tous entiers $m \geq 1$, ℓ premier à la caractéristique de K , on pose :

$$\begin{aligned} A_m &= \text{Ker}(\bar{A} \xrightarrow{m} \bar{A}) = \text{noyau de la multiplication par } m \\ T_\ell(A) &= \varprojlim_n A_{\ell n} = \mathbb{Z}_\ell\text{-module libre de rang } 2 \dim A \\ V_\ell(A) &= T_\ell(A) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell . \end{aligned}$$

1.- FINITUDE DES CLASSES D'ISOMORPHIES DANS UNE CLASSE D'ISOGENIES

Nous allons voir que dans (R_1) , l'hypothèse sur le degré des polarisations n'est pas nécessaire.

PROPOSITION 1.- (Zarhin) : Si A est une variété abélienne définie sur un corps K , $B = A^4 \times (A^*)^4$ est une variété abélienne principalement polarisée.

La démonstration esquissée ici est une copie presque fidèle de celle donnée par L. Moret-Bailly dans [M.B], lui-même inspiré de notes de P. Deligne.

Soit $\psi : A \longrightarrow A^*$ une polarisation de A , i.e. ψ est un homomorphisme tel que si $\bar{A} = A \times_{\bar{K}} \bar{K}$, $\bar{\psi} = \psi \times 1_{\bar{K}} : \bar{A} \longrightarrow \bar{A}^*$ est défini par un faisceau inversible ample L sur \bar{A} , i.e. $\bar{\psi} = \phi_L$ (si $x \in \bar{A}$, T_x la translation par x , $\phi_L(x) = \text{classe de } T_x^* L \otimes L^{-1} \text{ dans } \bar{A}^*$).

Soit T un \mathbb{Z} -module libre de rang r , $A \otimes_{\mathbb{Z}} T$ est une K -variété abélienne isomorphe à A^r et on a un isomorphisme canonique :

$$(A \otimes_{\mathbb{Z}} T)^* \simeq A^* \otimes_{\mathbb{Z}} T^*$$

où $T^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(T, \mathbb{Z})$, $(A \otimes_{\mathbb{Z}} T)^*$ = duale de $A \otimes_{\mathbb{Z}} T$.

Soit $B : T \times T \longrightarrow \mathbb{Z}$ une forme bilinéaire non dégénérée, $b : T \longrightarrow T^*$ l'homomorphisme correspondant. On lui associe de manière naturelle

$$\psi_b = \psi \otimes b : A \otimes_{\mathbb{Z}} T \longrightarrow (A \otimes_{\mathbb{Z}} T)^*$$

Clairement ψ_b est une isogénie, de plus ψ_b est une polarisation si et seulement si B est symétrique, définie positive. (En effet, ψ_b est de la forme ϕ_L ,

L faisceau inversible sur $\bar{A} \times_{\mathbb{Z}} T$ si et seulement si la forme de Riemann définie sur $T_\ell(A \otimes_{\mathbb{Z}} T)$

$$(x \otimes t, y \otimes t') \longrightarrow e_\ell(x \otimes t, \bar{\psi}_b(y \otimes t')) = B(t, t') e_\ell(x, \bar{\psi}(y))$$

est alternée (cf. [M] page 188, théorème 2) et est une polarisation si B est symétrique définie positive).

On suppose désormais B symétrique définie positive. Posons

$$K = \text{Ker } \psi \text{ et } A/K \xrightarrow{\psi} A^*.$$

Prenons T de la forme $N \otimes N$, où N est un \mathbb{Z} -module libre. On a les identifications suivantes :

$$A \otimes_{\mathbb{Z}} T \xrightarrow{\text{can}} (A \otimes_{\mathbb{Z}} N) \times (A \otimes_{\mathbb{Z}} N) \xrightarrow{\text{can}} (A \times A) \otimes_{\mathbb{Z}} N$$

$$\{0\} \times (K \otimes_{\mathbb{Z}} N) \xleftarrow{\sim} (A \otimes_{\mathbb{Z}} N) \times (A \otimes_{\mathbb{Z}} N)$$

$$\text{et } (A \otimes_{\mathbb{Z}} N) \times (A \otimes_{\mathbb{Z}} N) / \{0\} \times (K \otimes_{\mathbb{Z}} N) \simeq (A \otimes_{\mathbb{Z}} N) \times (A^* \otimes_{\mathbb{Z}} N)$$

\mathcal{R}

$$(A \times A^*) \otimes_{\mathbb{Z}} N .$$

Posons $\Theta : (A \times A) \otimes_{\mathbb{Z}} N \longrightarrow (A \times A^*) \otimes_{\mathbb{Z}} N$ l'isogénie de noyau $\{0\} \times (K \otimes_{\mathbb{Z}} N)$.

La polarisation ψ_b définie sur $(A \times A) \otimes_{\mathbb{Z}} N$ provient d'une polarisation Φ sur $(A \times A^*) \otimes_{\mathbb{Z}} N$ si et seulement si ([M] corollaire du théorème 2 §23, p. 231) :

a) $\text{Ker } \Theta \subset \text{Ker } \psi_b$ (il en est ainsi : $\text{Ker } \Theta \subset K \otimes_{\mathbb{Z}} T \subset \text{Ker } \psi_b$)

b) si e^{ψ_b} est la forme alternée $\text{Ker } \psi_b \times \text{Ker } \psi_b \longrightarrow \mathbb{G}_m$ associée à ψ_b , $e^{\psi_b}|_{\text{Ker } \Theta \times \text{Ker } \Theta} \equiv 1$.

Si $d = \deg \psi$, supposons que la forme bilinéaire induite par B sur $\{0\} \times N$ soit divisible par d^2 , alors on a effectivement

$$e^{\psi_b}|_{\text{Ker } \Theta \times \text{Ker } \Theta} \equiv 1 .$$

Vérifions : si $x \otimes n \in K \otimes_{\mathbb{Z}} N$, $y \otimes m \in K \otimes_{\mathbb{Z}} N$

$$e^{\psi_b}((0, x \otimes n), (0, y \otimes m)) = B((0, n), (0, m)) e^{\psi}(x, y) \in d^2 e^{\psi}(x, y) \mathbb{Z} .$$

Comme $x \in K$, $d^2 x = 0$ et $d^2 e^{\psi}(x, y) = e^{\psi}(d^2 x, y) = 0$.

Calculons $\deg \Phi$:

$$\deg \Phi = \deg \psi_b / \text{card}(\text{Ker } \Theta) = \frac{(\deg \psi)^{2r} \text{card}(\text{coker } B)^{2g}}{d^{2r}} = \frac{d^{2r} \times (\det B)^{2g}}{d^{2r}} = (\det B)^{2g}$$

Résumons : pour prouver la proposition, il suffit de trouver une forme bilinéaire symétrique définie positive B sur un \mathbb{Z} -module libre $T = N \oplus N$ dont la restriction à $\{0\} \times N$ est divisible par d^2 et dont le déterminant est égal à 1.

Voici une solution particulière :

$$T = H \oplus H, \quad H = \text{algèbre des quaternaires } a + bi + cj + dk \\ (a, b, c, d \in \mathbb{Z})$$

B = partie réelle d'une H -forme hermitienne positive \propto sur $H \times H$ à valeur dans \mathbb{Z} (en particulier la matrice de \propto est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix}$,

$a > 0, c > 0, d$ divise c , $b \in H$, \bar{b} = conjugué de b), dont le déterminant vérifie

$$\det B = (ac - b\bar{b})^4 = 1.$$

Il s'agit donc de résoudre l'équation

$$1 = ac - (x^2 + y^2 + z^2 + t^2) \quad (\text{si } b = x + iy + jz + kt)$$

avec $a > 0, c > 0, d$ divise c , c^e qui admet une solution puisque tout entier naturel est somme de 4 carrés.

PROPOSITION 2. - Si B est une variété abélienne définie sur un corps K , il n'existe, à K -isomorphisme près, qu'un nombre fini de K -variétés abéliennes facteur direct de B .

Démonstration :

Posons $E = \text{End}_K B$ et $\text{Idem}(E) = \{e \in E, e^2 = e\}$ et E^* l'ensemble des éléments inversibles de E . Rappelons que :

a) les décompositions $B = \bigoplus_{i=1}^n A_i$ (A_i = sous K -variété abélienne de B)

correspondent à :

b) des décompositions $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$

ou encore

c) des décompositions $1 = \sum_{i=1}^n e_i$, $e_i \in \text{Idem}(E)$ tels que pour $i \in \{1, \dots, n\}$, $e_i : B \xrightarrow{\text{proj}} A_i$, $A_i = e_i(B)$, $E_i = Ee_i$. De plus si $e, e' \in \text{Idem}(E)$ $e(B) \simeq e'(B) \iff Ee \simeq Ee'$.

Comme $E_{\mathbb{Q}} = E \otimes \mathbb{Q}$ est une \mathbb{Q} -algèbre semi-simple, il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes de $E_{\mathbb{Q}}$ -modules de rang 1. Le théorème de Jordan-Zassenhaus ([C.R] p.534) montre qu'il existe seulement un nombre fini de classes d'isomorphismes de E -réseaux de rang 1, en particulier du type Ee pour $e \in \text{Idem}(E)$.

Des propositions 1 et 2 et des résultats R_1 et R_2 , on en déduit les théorèmes suivants :

THÉORÈME 1. - Si K est un corps de nombres, g et h des entiers, il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphies de variétés abéliennes définies sur K de dimension g et de hauteur $h(A) \leq h$.

THÉORÈME 2. - Si K est un corps de nombres, une classe de K -isogénies de variétés abéliennes est constituée d'un nombre fini de classes d'isomorphies.

Démonstration : Soit \mathcal{C} une classe d'isogénie de K -variétés abéliennes. Pour tout élément A de \mathcal{C} , on note $B(A) = A^4 \times (A^*)^4$, c'est une K -variété abélienne principalement polarisée (utiliser la proposition 1). Compte tenu de la proposition 2, il nous suffit de voir que les $B(A)$, pour $A \in \mathcal{C}$, ne constituent qu'un nombre fini de classes de K -isomorphies. Il suffit donc de montrer la finitude des classes de K -isomorphies pour une classe d'isogénies $\tilde{\mathcal{C}}$ de variétés abéliennes principalement polarisées. Deux cas sont à envisager :

- a) un élément (et donc tous) de $\tilde{\mathcal{C}}$ est à réduction semi-stable. On peut alors appliquer (R_2) et (R_1) .
 - b) Dans le cas contraire, soit (A_0) un élément de \mathcal{C} . Il existe une extension finie K' de K telle que $A'_0 = A_0 \times_{K'} K'$ est à réduction semi-stable. Les variétés abéliennes $A' = A \times K'$, pour $A \in \tilde{\mathcal{C}}$, ne fournissent qu'un nombre fini de classes de K' -isomorphies. De plus, si B' est un élément de $\tilde{\mathcal{C}}$, on a :
- $$\begin{aligned} & \#\{ \text{classes de } K\text{-isomorphies de variétés abéliennes } B \text{ telles que } B' \simeq B \times_{K'} K' \} \\ &= \#\text{H}^1(\text{Gal}(K':K), \text{Aut}_{K'}(B')) . \end{aligned}$$

Comme B' est principalement polarisée, $\text{Aut}_{K'}(B')$ est fini et il en est de même de $\text{H}^1(\text{Gal}(K':K), \text{Aut}_{K'}(B'))$. Il s'ensuit que les éléments $A \in \tilde{\mathcal{C}}$ ne fournissent qu'un nombre fini de classes de K -isomorphies.

2.- ÉNONCÉS DES CONJECTURES

2.1.- Soit A une variété abélienne définie sur un corps K . Le groupe de Galois $G = \text{Gal}(\bar{K}:K)$ opère sur A_{ℓ^n} pour tout ℓ premier et tout $n \geq 1$ et en

passant à la limite, G opère sur $T_\ell(A)$.

Si A et B sont deux variétés abéliennes définies sur K et si $f: A \rightarrow B$ est un K -homomorphisme, f définit par restriction un G -homomorphisme

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \ell^n & & \ell^n \end{array} \quad \text{pour } n \geq 1$$

et aussi, un $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -homomorphisme :

$$T_\ell(f) : T_\ell(A) \longrightarrow T_\ell(B).$$

On a construit ainsi un homomorphisme de groupes

$$\varphi_{A,B} : \text{Hom}_K(A, B) \otimes \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell[G]}(T_\ell(A), T_\ell(B)).$$

Cette application est toujours injective ([M] par. 19 th. 3). Le problème posé par J. Tate ([T.2]) et que nous désignerons par "Conjecture de Tate" :

$C_1(K)$: Montrer que $\varphi_{A,B}$ est bijectif pour tout couple de variétés abéliennes (A, B) définies sur K .

Cette conjecture peut se réduire de la manière suivante :

1) $\varphi_{A,B}$ est bijectif si et seulement si $\varphi_{A,B} \otimes \mathbb{Q}_\ell$ l'est (cf. [T.2]).

2) $\varphi_{A,B}$ est bijectif pour tout couple (A, B) si et seulement si $\varphi_{A,A}$ l'est pour toute variété abélienne A (définie sur K).

En résumé, $C_1(K)$ est équivalente à la conjecture suivante que nous désignerons encore par $C_1(K)$:

$C_1(K)$: Montrer que $\text{End}_K(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell \simeq \text{End}_G(T_\ell(A))$ pour toute variété abélienne A définie sur K .

2.2.- Si X est une variété projective lisse sur K et si $\bar{X} = X \times_K \bar{K}$, le groupe G opère sur les groupes de cohomologie étale :

$$H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell) = (\varprojlim_n H^i(\bar{X}_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z})) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell, \quad i \in \mathbb{N}.$$

D'où une représentation $\rho_i : G \longrightarrow \text{Aut}(H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell))$. J-P Serre, J.Tate (et A. Grothendieck) posent la conjecture suivante :

$C_2(K, X)$: Montrer que les représentations φ_i sont semi-simples.

Si A est une variété abélienne définie sur K , pour $n \geq 1$, la suite de Kummer :

$$0 \longrightarrow \mu_{\ell^n} \longrightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{\ell^n} \mathbb{G}_m \longrightarrow 0 \quad (\mu_{\ell^n} = \ell^n\text{-ièmes racines de 1})$$

est exacte pour la topologie étale. Il en est de même de la suite exacte longue

de cohomologie

$$H^0(\bar{A}, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\ell^n} H^0(\bar{A}, \mathbb{G}_m) \longrightarrow H^1(\bar{A}, \mu_{\ell^n}) \longrightarrow H^1(\bar{A}, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\ell^n} H^1(\bar{A}, \mathbb{G}_m)$$

Comme la multiplication par ℓ^n est surjective dans $H^0(\bar{A}, \mathbb{G}_m)$, $H^1(\bar{A}, \mu_{\ell^n})$ s'identifie aux points d'ordre ℓ^n de $\text{Pic}^\circ(\bar{A})$. Si A^* est la variété abélienne duale de A , on a :

$$H^1(\bar{A}, \mathbb{Q}_\ell)(1) = \varprojlim_n H^1(\bar{A}, \mu_{\ell^n}) \simeq V_\ell(A^*) .$$

De sorte que si on désigne par $C_2(K)$ la conjecture suivante :

$C_2(K)$: Montrer que $V_\ell(A)$ est un $\mathbb{Q}_\ell[G]$ -module semi-simple pour toute variété abélienne A définie sur K .

Remarque : $C_2(K) \Rightarrow C_2(K, A)$, pour toute K -variété abélienne A .

En effet, si $V_\ell(A)$ est un $\mathbb{Q}_\ell[G]$ -module semi-simple, le \mathbb{Q}_ℓ -groupe algébrique engendré par l'image de G dans $\text{Aut } V_\ell(A)$ est réductif et comme on est en caractéristique zéro, toutes ses représentations sont semi-simples, en particulier $\Lambda^i H^1(\bar{A}, \mathbb{Q}_\ell) = H^i(\bar{A}, \mathbb{Q}_\ell)$.

Nous allons voir maintenant que dans une certaine mesure, $C_2(K)$ implique $C_1(K)$. Plus précisément :

PROPOSITION 3. - Soit A une variété abélienne définie sur K . Si pour tout sous $\mathbb{Q}_\ell[G]$ -module W de $V_\ell(A)$, il existe $u \in \text{End}_K A \otimes \mathbb{Q}_\ell$ tel que $u(V_\ell(A)) = W$, alors :

- 1) $V_\ell(A)$ est un $\mathbb{Q}_\ell[G]$ -module semi-simple
- 2) Si $E_\ell = \text{image de } (\mathbb{Q}_\ell[G] \longrightarrow \text{End } V_\ell(A))$, E_ℓ est le commutant de $\text{End}_K(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ dans $\text{End } V_\ell(A)$
- 3) $\text{End}_K(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell = \text{End}_G(V_\ell)$.

Démonstration : Posons $V_\ell = V_\ell(A)$ et rappelons que $\text{End}_K(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ est une \mathbb{Q}_ℓ -algèbre semi-simple.

Montrons 1) : soit W un sous $\mathbb{Q}_\ell[G]$ -module de V_ℓ , il existe u dans $\text{End}_K(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ tel que $u(V_\ell) = W$. L'idéal à droite $u(\text{End}_K(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell)$ est engendré par un idempotent v , i.e. est un projecteur tel que $v(V_\ell) = W$.

Montrons que 1) et 2) entraînent 3) : Comme V_ℓ est semi-simple, E_ℓ est un anneau semi-simple et dans ces conditions l'égalité :

$$\text{End}_K(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell = \text{End}_G(V_\ell)$$

est équivalente, par le théorème de bicommutation, à :

$$E_\ell = \text{commutant de } \text{End}_K A \otimes \mathbb{Q}_\ell \text{ dans } \text{End } V_\ell$$

Montrons finalement 2) (l'argument est dû à Tate [T.2]).

Soit D le commutant de $\text{End}_K A \otimes \mathbb{Q}_\ell$ dans $\text{End } V_\ell$, on a $E_\ell \subset D$. Si $d \in D$, pour tout sous $\mathbb{Q}_\ell[G]$ -module W de V_ℓ , il existe $u \in \text{End}_K(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ tel que $u(V_\ell) = W$. Par suite, $dW = du(V_\ell) = u(d(V_\ell))W$, autrement dit d laisse stable tout sous $\mathbb{Q}_\ell[G]$ -module de V_ℓ . Par exemple si $x \in V_\ell$ il existe $a \in \mathbb{Q}_\ell[G]$ tel que $d(x) = ax$. Soit V un facteur simple de V_ℓ correspondant à un facteur simple E de E_ℓ , $d(V) \subset V$ et pour tout $x \in V$, il existe $a \in E$ tel que $d(x) = ax$. En particulier d commute avec les éléments de $\text{End}_E(V)$, i.e $d|_V$ est une homothétie. Comme V_ℓ est un \mathbb{Q}_ℓ -espace vectoriel de dimension finie, d est une homothétie.

3.- DÉMONSTRATION DE I \implies II et III

Grâce à la proposition 3 ci-dessus, il suffit de démontrer le théorème suivant dû à J. Tate ([T.2]).

THÉORÈME 3.- Soit A une variété abélienne définie sur un corps K . Si la classe d'isogénie de A est composée d'un nombre fini de classes d'isomorphismes, pour tout sous $\mathbb{Q}_\ell[G]$ -module W de $V_\ell(A)$, il existe $u \in \text{End}_K A \otimes \mathbb{Q}_\ell$ tel que $u(V_\ell(A)) = W$.

Démonstration : Soit W un sous $\mathbb{Q}_\ell[G]$ -module de V_ℓ . Posons $T_\ell = T_\ell(A)$,

$$V_\ell = V_\ell(A) \text{ et}$$

$$W^\circ = W \cap T_\ell$$

$$\text{pour } n > 0 \quad W_n^\circ = W^\circ + \ell^n T_\ell \subset T_\ell$$

$$W_n = \psi_n(W_n^\circ) \quad \text{si } \psi_n : T_\ell \xrightarrow{\text{can}} T_\ell / \ell^n T_\ell .$$

On a $W_n \subset A_{\ell^n}$. Les variétés $B_n = A/W_n$ sont des variétés abéliennes définies sur K et K -isogènes à A . De plus le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\pi_n} & B_n \\ & \searrow \ell_A^n & \swarrow \lambda_n \\ & A & \end{array}$$

où π_n est le morphisme quotient, λ_n et π_n sont définis sur K , λ_n est étale.

LEMME : $\lambda_n(T_\ell(B_n)) = W_n^\circ$

Il suffit pour voir cela de montrer que les deux membres de cette égalité ont même trace dans A_{ℓ^n} et que tous deux contiennent $\ell^{nT_\ell}(A)$.

Comme $\pi_n \circ \lambda_n \circ \pi_n = \ell_A^n \circ \pi_n$, on a $\pi_n \circ \lambda_n = \ell_B^n$ et par suite :

$$W_n = \text{Ker } \pi_n = \lambda_n((B_n)_{\ell^n}) .$$

D'autre part, $\lambda_n((B_n)_{\ell^n}) \geq \lambda_n \circ \pi_n(A_{\ell^m}) = \ell^n A_{\ell^m} = A_{\ell^{m-n}}$ pour tout $m \geq n$.

D'où $\lambda_n(T_\ell(B_n)) \supset \ell^n T_\ell(A)$ et le lemme s'ensuit.

Les variétés abéliennes B_n , pour $n \in \mathbb{N}^+$, ne fournissent qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes. Soit $I \subset \mathbb{N}^+$ un ensemble infini pour lequel $B_i \simeq B_j$ pour $i, j \in I$. Soient n le plus petit élément de I et $v_i : B_n \xrightarrow{\sim} B_i$ un K -isomorphisme. Dans $\text{End}_K A \otimes \mathbb{Q}$, $\ell_A^n : A \longrightarrow A$ est inversible et il en est de même de $\lambda_n : B_n \longrightarrow A$:

$$\lambda_n^{-1} = 1/\ell^n \circ \pi_n .$$

Pour $i \in I$, définissons $u_i = \lambda_i \circ v_i \circ \lambda_n^{-1}$, c'est un élément de $\text{End}_K A \otimes \mathbb{Q}$.

On a :

$$u_i(W_n^\circ) = \lambda_i \circ v_i \circ \lambda_n^{-1}(W_n^\circ)$$

et comme $W_n^\circ = \lambda_n(T_\ell(B_n))$ par le lemme 1, que $\pi_n \circ \lambda_n = \ell^n$

$$u_i(W_n^\circ) = \lambda_i \circ v_i(T_\ell(B_n)) = \lambda_i(T_\ell(B_i)) = W_i^\circ \subset W_n^\circ .$$

Comme $\text{End} W_n^\circ$ est compact, on peut extraire de la suite $(u_i)_{i \in I}$ une sous-suite convergente $(u_j)_{j \in J}$ qui converge vers une limite u et comme $\text{End}_K A \otimes \mathbb{Q}_\ell$ est fermé dans $\text{End} W_n^\circ$, u est aussi dans $\text{End}_K A \otimes \mathbb{Q}_\ell$. Comme W_n° est compact tout élément x de $u(W_n^\circ)$ est de la forme $x = \lim_{j \in J} x_j$, où $x_j \in u_j(W_n^\circ) = W_j^\circ$.

Par suite : $u(W_n^\circ) = \bigcap_{j \in J} W_j^\circ = T_\ell \cap W$.

COROLLAIRE 1.- Si K est un corps tel que toute classe d'isogénies de K -variétés abéliennes est constituée d'un nombre fini de classes d'isomorphismes, alors $C_i(K)$ est vrai pour $i = 1, 2$. En particulier, si K est un corps de nombres, $C_i(K)$ est vrai pour $i = 1, 2$.

4.- CONSEQUENCES DE $C_1(K)$ ET $C_2(K)$

THÉORÈME 4.- Soit K un corps pour lequel $C_1(K)$ est vrai. Soient A et B deux variétés abéliennes définies sur K . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) A est K-isogène à une sous-variété abélienne de B définie sur K .
- 2) Il existe un nombre premier ℓ , $\ell \neq \text{car}(K)$ et un $\mathbb{Q}_\ell[G]$ -monomorphisme $V_\ell(A) \hookrightarrow V_\ell(B)$.

Démonstration :

Si $\varphi : A \rightarrow B$ est un K-homomorphisme, $2 \dim(\text{Ker } \varphi) = \dim \text{Ker } V_\ell(\varphi)$. En particulier, φ a un noyau fini si et seulement si $V_\ell(\varphi)$ est injectif. Il est clair que 1) \Rightarrow 2).

Inversement, soit $\psi : V_\ell(A) \rightarrow V_\ell(B)$ un $\mathbb{Q}_\ell[G]$ -monomorphisme, $\psi \in \text{Hom}_K(A, B) \otimes \mathbb{Q}_\ell$. Dans tout voisinage U de ψ dans $\text{Hom}_K(A, B) \otimes \mathbb{Q}_\ell$, il existe un élément $u \in \text{Hom}_K(A, B) \otimes \mathbb{Q}$. Comme $\dim V_\ell(A) < +\infty$, si U est suffisamment petit, l'image de u dans $\text{Hom}_K(A, B) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ est injective et il en est de même de u . Un multiple de u est dans $\text{Hom}_K(A, B)$ et a un noyau fini. Donc 2) \Rightarrow 1).

COROLLAIRE : (mêmes hypothèses que dans le théorème) A est K-isogène à B si et seulement si $V_\ell(A) \simeq V_\ell(B)$.

THÉORÈME 5.- Soit A et B deux variétés abéliennes définies sur un corps K , A et B sont K-isogènes si et seulement si

- 1) Si K est fini, $\zeta_A = \zeta_B$ (ζ_A (resp. ζ_B) fonction zéta de A (resp.B)).
- 2) Si K est un corps de nombres et si pour presque toute place v de K , les fonctions suivantes sont égales :

$$L_v(A, s) = \frac{1}{\det(1 - N(v)^{-s} F_v | H^1(\bar{A}, \mathbb{Q}_\ell)^{I_v(1)})}$$

$$L_v(B, s) = \frac{1}{\det(1 - N(v)^{-s} F_v | H^1(\bar{B}, \mathbb{Q}_\ell)^{I_v(1)})}$$

où F_v est le morphisme de Frobenius de K_v , $N(v)$ la norme de v , I_v l'inertie en la place v , $H^1(\bar{A}, \mathbb{Q}_\ell)^{I_v(1)}$ (resp. $H^1(\bar{B}, \mathbb{Q}_\ell)^{I_v(1)}$) les invariants sous l'action de I_v .

Démonstration :

Montrons 1) : d'après le théorème 1, A et B sont K-isogènes si et seulement si $V_\ell(A) \simeq V_\ell(B)$, ou encore, si F_A (resp. F_B) est l'endomorphisme de Frobenius de A (resp. B), agissant semi-simplement sur $V_\ell(A)$ (resp. $V_\ell(B)$) et P_A (resp. P_B)

son polynôme caractéristique, si et seulement si $P_A = P_B$, ou encore si et seulement si $\zeta_A = \zeta_B$.

L'assertion 2) se démontre de la même manière en remarquant que

$$H^1(\bar{A}_V, \mathbb{Q}_\ell)(1) = H^1(\bar{A}, \mathbb{Q}_\ell)(1) = V_\ell(A^*) \quad (A^* = \text{duale de } A)$$

$$\text{et } H^1(\bar{B}_V, \mathbb{Q}_\ell)(1) = H^1(\bar{B}, \mathbb{Q}_\ell)(1) = V_\ell(B^*) \quad (B^* = \text{duale de } B).$$

G opérant sur $H^1(\bar{A}_V, \mathbb{Q}_\ell)^{I_V(1)}$ (resp. $H^1(\bar{B}_V, \mathbb{Q}_\ell)^{I_V(1)}$) à travers le quotient $G(\overline{k(V)})/k(V)$.

5.- ENDOMORPHISMES DES POINTS DE ℓ -TORSION

Les résultats que nous allons exposer dans ce paragraphe sont encore des conséquences de la finitude des classes d'isomorphismes dans toute classe d'isogénies de variétés abéliennes sur les corps K envisagés.

THÉORÈME 6. - Soient K un corps tel que toute classe d'isogénies de variétés abéliennes définies sur K est constituée d'un nombre fini de classes d'isomorphismes, A une variété abélienne définie sur K , ℓ un nombre premier, $\ell \neq \text{car}(K)$. Si ℓ est suffisamment grand, l'homomorphisme canonique :

$$\text{End}_K A \otimes \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \longrightarrow \text{End}_G(A_\ell)$$

est un isomorphisme.

Démonstration : Le plan de la démonstration est essentiellement celui utilisé pour démontrer $C_1(K)$:

1) Pour tout ℓ , $\text{End}_K A \otimes \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ s'injecte dans $\text{End}_G A_\ell$. En effet, si $u : A \rightarrow A$ s'annule sur A_ℓ , $u = \ell v$, $v \in \text{End}_K A$. De plus, pour $\ell \gg 0$, $\text{End}_K A \otimes \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ est une algèbre semi-simple.

2) Si pour tout $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ [G]-sous-module W de A_ℓ , il existe $u \in \text{End}_K A \otimes \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ tel que $u(A_\ell) = W$,

$$\text{End}_K A \otimes \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \simeq \text{End}_G A_\ell$$

En effet comme pour la proposition 3 (§2), ceci entraîne que A_ℓ est un $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ [G]-module semi-simple et que tout endomorphisme de A_ℓ qui commute avec $\text{End}_K A \otimes \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ est une homothétie. On conclut grâce au théorème de bicommutation.

3. - LEMME. - Soit W un sous $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ [G]-module de A_ℓ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) il existe $u \in \text{End}_K A \otimes \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ tel que $u(A_\ell) = W$
- a') il existe $u' \in \text{End}_K A \otimes \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ tel que $(u')^2 = u'$, $u'(A_\ell) = W$.
- b) il existe $v \in \text{End}_K A \otimes \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ tel que $(\text{Ker } v) \cap A_\ell = W$
- b') il existe $v' \in \text{End}_K A \otimes \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ tel que $(v')^2 = v'$, $\text{Ker } v' \cap A_\ell = W$.

Comme $\text{End}_K A \otimes \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ est une algèbre semi-simple, tout idéal à droite (resp. à gauche) est engendré par un idempotent. Ceci montre l'équivalence de a) et a') (resp. celle de b) et b')). Soit u' comme dans a'), si $v' = 1 - u'$, v' satisfait b') et réciproquement.

- 4) Montrons que : "pour tout sous $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}[G]$ -module W de A_ℓ , il existe $u \in \text{End}_K A \otimes \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ tel que $u(A_\ell) = W$ ".

Pour tout nombre premier ℓ' , distinct de $\text{car}(K)$, et tout sous $\mathbb{Z}/\ell'\mathbb{Z}[G]$ -module W' de A_ℓ , les variétés abéliennes A/W' sont des variétés abéliennes définies sur K et K -isogènes à A . Elles se répartissent donc dans les différentes classes d'isomorphismes de telles variétés, qui sont en nombre fini.

Pour $\ell \gg 0$ et pour un tel $W \subset A_\ell$, il existe $\ell' \neq \ell$, un $\mathbb{Z}/\ell'\mathbb{Z}[G]$ -module $W' \subset A_\ell$, et un K -isomorphisme

$$r : A/W \simeq A/W' .$$

L'homomorphisme composé :

$$v : A \xrightarrow{\text{can}} A/W \xrightarrow{\sim} A/W' \xrightarrow{\text{can}} A/A_\ell \xrightarrow{\sim} A$$

vérifie $\text{Ker } v \cap A_\ell = W$. On conclut grâce au lemme précédent.

COROLLAIRE : Soient K et A comme dans le théorème 6. Pour tout ℓ premier distinct de $p = \text{car}(K)$, soit $\rho_\ell : \mathbb{Z}_\ell[G] \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}_\ell} T_\ell(A)$ la représentation naturelle. D'autre part posons $\tilde{\mathbb{Z}} = \prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell$, $T(A) = \prod_{\ell \neq p} T_\ell(A)$, et soit $\rho : \tilde{\mathbb{Z}}[G] \longrightarrow \text{End}_{\tilde{\mathbb{Z}}} T(A)$ la représentation naturelle. Alors :

- a) Pour presque tout ℓ , $(\text{Im } \rho_\ell)$ est le commutant de $\text{End}_K A \otimes \mathbb{Z}_\ell$ dans $\text{End}_{\mathbb{Z}_\ell} T_\ell(A)$.
- b) $\text{Im}(\rho)$ est d'indice fini dans le commutant de $\text{End}_K A$ dans $\text{End}_{\tilde{\mathbb{Z}}} T(A)$.

Démonstration : Posons $E_\ell = \text{End}_K A \otimes \mathbb{Z}_\ell$, $\bar{E}_\ell = \text{End}_K A \otimes \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$
 $\bar{\rho}_\ell : \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}[G] \longrightarrow \text{End}(A_\ell)$ déduite de manière naturelle de ρ_ℓ .

- a) le théorème 6 affirme que pour presque tout ℓ :

$$\overline{E}_\ell = \mathrm{End}_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}[G]}(A_\ell)$$

le théorème de bicommutation que $\mathrm{Im} \overline{\rho}_\ell = \mathrm{End}_{\overline{E}_\ell}(A_\ell)$ et le théorème de Nakayama que $\mathrm{Im} \rho_\ell = \mathrm{End}_{E_\ell}(T_\ell(A))$

b) c'est une conséquence de a) et de $C_1(K)$.

Note : G. Faltings a aussi démontré que les "conjectures de Tate" impliquent le résultat suivant : soit K un corps de type fini sur \mathbb{Q} , \bar{K} sa clôture algébrique, $G = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ et A et B deux variétés abéliennes définies sur K . Alors l'application canonique $\mathrm{Hom}_K(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(A(\bar{K}), B(\bar{K}))$ est un isomorphisme. Une démonstration a été présentée oralement par G. Faltings durant le séminaire. Une démonstration simplifiée a été rédigée par O. Gabber. Ce dernier n'a pas soumis son manuscrit à la publication.

B I B L I O G R A P H I E

- [C.R] C.W CURTIS, I. REINER - *Methods of representation theory*, Vol.I
Pure and applied Math., Wiley-Interscience.(1981).
- [F] G. FALTINGS - *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*, Inv. Math. Vol.73, Fasc.3 (1983), 349-366.
- [M] D. MUMFORD - *Abelian Varieties*, Oxford University Press 1970.
- [Mo] S. MORI - *On Tate conjecture concerning endomorphisms of abelian varieties*, Int'l. Symp. of Alg. Geometry, Kyoto 1977, pp. 219-230.
- [M.B] L. MORET-BAILLY - *Familles de Variétés abéliennes*, Astérisque,
(à paraître).
- [SGA] SGA 7 - Lecture Notes n°288, n°340.
- [T] J.T.TATE - [T.1] - *Algebraic cycles and Poles of Zeta functions*.
Arithmetical Algebraic Geometry, Harper & Row,
(1963), 93-111.
- *Endomorphisms of Abelian Varieties over finite fields*, Invent. Math.2 - (134-144), 1966.
- [Z] J.ZARHIN - *Endomorphisms of Abelian varieties over fields of finite characteristic*, Math. USSR Izvestija, Vol. 9 (1975)
n°2, pp.255-260.

Marguerite FLEXOR
Université PARIS XI - Bat.425
Département de Mathématiques
91405 ORSAY CEDEX

Astérisque

PIERRE DELIGNE
Représentations ℓ -adiques

Astérisque, tome 127 (1985), p. 249-255

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__127__249_0>

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » ([http://smf4.emath.fr/
Publications/Asterisque/](http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/)) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

Exposé IX

REPRÉSENTATIONS ℓ -ADIQUES

Pierre DELIGNE

L'exposé contient la démonstration du théorème suivant de G. Faltings, et quelques commentaires.

1.- THÉORÈME : Soient k un corps de nombres, \bar{k} une clôture algébrique de k , S un ensemble fini de places finies de k , ℓ un nombre premier et d un entier. Il existe un ensemble fini T de places finies de k , disjoint de S , tel qu'une représentation ℓ -adique semi-simple de dimension d , $\rho : \text{Gal}(\bar{k}/k) \rightarrow \text{GL}(d, \mathbb{Q}_\ell)$, non ramifiée en dehors de S , soit uniquement déterminée (à isomorphisme de représentations près) par les traces $\text{Tr}(\rho(F_v))$, pour $v \in T$.

On sait (Hermite) qu'il n'existe qu'un nombre fini d'extensions galoisiennes k' de k , non ramifiées en dehors de S et de degré borné. D'après Čebotarev, il existe donc un ensemble fini T de places de k , disjoint de S , tel que les classes de conjugaison des Frobenius géométriques F_v ($v \in T$) remplissent tout $\text{Gal}(k'/k)$, pour toute extension galoisienne k' de k , non ramifiée en dehors de S , de degré $\leq \ell^{2d^2}$. Prouvons que T convient.

Soient donc ρ_1, ρ_2 deux représentations ℓ -adiques du type dit, avec $\text{Tr } \rho_1(F_v) = \text{Tr } \rho_2(F_v)$ pour $v \in T$. Nous voulons montrer que ρ_1 et ρ_2 ont même caractère, donc, étant semi-simples, sont isomorphes. Soit M l'image de l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[\text{Gal}(\bar{k}/k)]$ par

$$\rho_1 \times \rho_2 : \mathbb{Z}_\ell[\text{Gal}(\bar{k}/k)] \longrightarrow M_d(\mathbb{Q}_\ell) \times M_d(\mathbb{Q}_\ell).$$

Il s'agit de vérifier que, sur M , la forme linéaire $\delta(m_1, m_2) := \text{Tr}(m_1) - \text{Tr}(m_2)$ est identiquement nulle. L'algèbre M est un \mathbb{Z}_ℓ -module de rang $\leq 2d^2$. L'image de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ dans le quotient $(M/\ell M)^*$ a donc moins de ℓ^{2d^2} éléments et, par hypothèse, chaque élément de cette image est un $(\rho_1 \times \rho_2)(F_v)$, $v \in T$. Par Nakayama, les $(\rho_1 \times \rho_2)(F_v)$ ($v \in T$) engendrent \mathbb{Z}_ℓ -linéairement M . Sur eux, la forme linéaire δ s'annule par hypothèse, d'où $\delta = 0$ sur M .

COROLLAIRE 1.- Soient k, \bar{k}, S, ℓ et d comme dans le théorème, et w un entier ≥ 0 . Il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphie de représentations ℓ -adiques semi-simples de dimension d , $\rho : \text{Gal}(\bar{k}/k) \rightarrow \text{GL}(d, \mathbb{Q}_\ell)$, non ramifiées en dehors

de S et entières de poids w , i.e. telle que pour toute place $v \notin S$, notant q_v le nombre d'éléments du corps résiduel, on ait

- a) le polynôme caractéristique de $\rho(F_v)$ est à coefficients entiers ;
- b) ses racines inverses, i.e. les conjugués complexes des valeurs propres de Frobenius, sont de valeur absolue complexe $q_v^{w/2}$.

Soit T un ensemble fini de places, tel que garanti par le théorème. Pour chaque place $v \notin S$, la trace $\text{Tr}(F_v)$ est un entier de valeur absolue $\leq dq_v^{w/2}$.

Il n'y a donc qu'un nombre fini de possibilités pour le système des $(\text{Tr}(F_v))_{v \in T}$, et on applique le théorème.

Une fois acquise la conjecture de Tate sur les homomorphismes de schémas abéliens, on en déduit :

COROLLAIRE 2. - Soient k un corps de nombres et S un ensemble fini de places de k . Il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isogénie de variétés abéliennes de dimension g sur k , à bonne réduction en dehors de S .

On fixe un nombre premier ℓ et on applique le corollaire 1 à $S_\ell := S \cup \{\text{places divisant } \ell\}$, $d = 2g$ et $w = 1$. Pour chaque variété abélienne A du type considéré, la représentation ℓ -adique $V_\ell(A) := T_\ell(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ est semi-simple (ceci est inclus dans la conjecture de Tate) de dimension d , non ramifiée en dehors de S_ℓ et d'après A. Weil, sa dualité est entière de poids 1. On conclut par le corollaire 1 et la conjecture de Tate.

2.- VARIANTES

A. Soient k, \bar{k}, S, ℓ et d comme dans le théorème, et f un entier ≥ 1 . Il existe T comme dans le théorème, tel que pour toute extension E_λ de \mathbb{Q}_ℓ , de corps résiduel à ℓ^f éléments, une représentation λ -adique semi-simple de dimension d :

$\rho : \text{Gal}(\bar{k}/k) \rightarrow \text{GL}(d, E_\lambda)$, non ramifiée en dehors de S , soit uniquement déterminée par les $\text{Tr } \rho(F_v)$ ($v \in T$).

La preuve est la même, avec ℓ^{2d^2} remplacé par $(\ell^f)^{2d^2}$, \mathbb{Z}_ℓ par l'anneau de valuation \mathfrak{O}_λ de E_λ et la réduction mod ℓ par la réduction mod λ .

A'. Soient k, \bar{k}, S, ℓ, d et w comme dans le corollaire 1, n un entier ≥ 1 , et E_λ une extension finie de \mathbb{Q}_ℓ . Il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphie de représentations λ -adiques semi-simples de dimension d ,
 $\rho : \text{Gal}(\bar{k}/k) \rightarrow \text{GL}(d, E_\lambda)$, non ramifiées en dehors de S , et telle que pour $v \notin S$, les valeurs propres de $\rho(F_v)$ soient des entiers algébriques de degré $\leq n$, dont tous les conjugués complexes soient de valeur absolue $q_v^{w/2}$.

On procède comme pour le corollaire 1 : on utilise qu'il n'y a qu'un nombre fini d'entiers algébriques de degré et de valeurs absolues archimédien-nes bornés, et on invoque A au lieu du théorème.

B. Des résultats analogues valent pour k un corps de fonctions d'une variable sur un corps fini, à cela près qu'il ne suffit plus de fixer S , il faut en plus préciser quelle ramification on permet en chaque $v \in S$: on suppose donné des nombres $(a_v)_{v \in S}$, et on ne considère que les représentations dont la restriction au groupe de décomposition en v est triviale sur le groupe de ramification d'indice a_v , en numérotation supérieure.

3.- RENDRE QUANTITATIF

Les versions effectives du théorème de Čebotarev pour $\text{Gal}(k'/k)$ ne font intervenir k et k' que via $[k' : \mathbb{Q}]$ et le discriminant absolu de k' . Pour rendre effectif le théorème, il n'est donc pas nécessaire d'utiliser une version effective du théorème d'Hermite (voir toutefois 8). Le lecteur trouvera dans J-P. Serre [3] des énoncés effectifs. Ces énoncés présentent toutefois le défaut qu'on y suppose que S est exactement l'ensemble des places de k ramifiées dans k' . Les mêmes énoncés devraient valoir pour S quelconque si on y remplace le discriminant absolu $D(k')$ de k' par son produit $D_S(k')$ avec le produit des $N_v^{[k':k]}$ étendu aux places $v \in S$ non ramifiées dans k' . Nous noterons avec une étoile des références à des énoncés ainsi modifiés.

Si on admet ces variantes des énoncés de [3], on a, sous l'hypothèse de Riemann généralisée, que toute classe de conjugaison dans $\text{Gal}(k'/k)$ est un Frobenius F_v , avec $v \notin S$ de norme $Nv \leq 70(\log D_S(k'))^2$ ([3] 2.5)*. Par ailleurs pour k'/k comme dans la preuve du théorème et pour P l'ensemble des caractéristiques résiduelles des places $v \in S$, on déduit de [3] 1.3 que

$$\log D_S(k') \leq \ell^{2d^2} (\log D(k) + [k : \mathbb{Q}] (\sum_{p \in P} \log p + \log(\ell^{2d^2}))).$$

Sans hypothèse de Riemann, on n'est sûr d'avoir rencontré toutes les classes de conjugaison que pour $v \notin S$ de norme allant jusqu'à $2D_S(k')^c$, pour une constante absolue c ([3] 2.5)*.

Nous nous proposons maintenant de passer en revue des résultats connus analogues au théorème de Faltings. Tout d'abord, une remarque de J-P. Serre.

4.- PROPOSITION : Soient E_1 et E_2 deux courbes elliptiques sur \mathbb{Q} , et supposons qu'elles soient de Weil, i.e. correspondent à des formes modulaires. Supposons que leur conducteur divise N . Alors, si les facteurs locaux L_p des fonctions L de E_1 et E_2 coïncident pour $p \leq \frac{N}{6} \cdot \prod_{p|N} (1 + \frac{1}{p})$, ils coïncident pour tout p .

Posons $q = \exp(2\pi iz)$. Si $\sum a_i(n)n^{-s}$ est la fonction L attachée à E_i , on sait que $f_i := \sum a_i(n)q^n$ est une forme modulaire de poids 2 pour $\Gamma_0(N)$. Une telle forme s'interprète comme une section d'un faisceau inversible de degré $d \leq \frac{1}{6} [\text{SL}(2, \mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)]$ sur le quotient compactifié du demi-plan de Poincaré par $\Gamma_0(N)$. On a $[\text{SL}(2, \mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)] = \prod_{p|N} (1 + \frac{1}{p}) N$, et l'hypothèse assure que $f_1 - f_2$ a un zéro d'ordre au moins $(d+1)$ à l'infini, donc s'annule.

5.- VARIANTES

A. Le même argument s'applique aux fonctions L attachées à des formes modulaires de poids k sur $\Gamma_0(N)$, de nebentypus donné. Il suffit de remplacer

$\frac{N}{6} \prod_{p|N} (1 + \frac{1}{p})$ par $\frac{kN}{12} \cdot \prod_{p|N} (1 + \frac{1}{p})$. Le cas du poids 1 est traité explicitement dans J-P. Serre [2] 5.3 .

B. Dans la preuve de la proposition, nous n'avons fait usage que de la pointe "évidente". Supposons que E_1 et E_2 aient même conducteur N et que pour chaque $p|N$, les restrictions au groupe de décomposition en p des représentations ℓ -adiques attachées à E_1 et E_2 soient isomorphes. D'après Carayol [1] (que nous avons d'ailleurs déjà utilisé pour identifier les conducteurs géométriques et analytiques), les p -facteurs $(p|N)$ des représentations automorphes correspondant à E_1 et E_2 sont alors isomorphes.

On en déduit que les p -composantes des fonctions de Whittaker des "new form" f_i attachées aux E_i coïncident. La connaissance des facteurs locaux L_p pour $p \leq A$, pour un entier A , permet alors le calcul des $(A+1)$ premiers coefficients du développement de f_i en n'importe quelle pointe. Puisqu'il y a $\sum_{f|N} \inf(f, N/f)$ pointes, on montre comme en 4 que tous les facteurs L_p coïncident pour E_1 et E_2 dès qu'il coïncident pour

$$p \leq \frac{1}{6} \cdot \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \cdot N \cdot \left(1 / \sum_{f|N} \inf(f, N/f)\right).$$

Exemple : Supposons N premier. Dans ce cas, E_i admet un modèle sur \mathbb{Z}_p de réduction mod p une cubique nodale. Ici, connaître la représentation du groupe de décomposition revient à connaître le facteur local L_p . Cela revient aussi à savoir si les tangentes au point singulier de la cubique nodale sont définies sur \mathbb{F}_p , ou conjuguées sur \mathbb{F}_{p^2} .

Ceci détermine le comportement de la nouvelle forme sous l'involution d'Atkin - Lehner w_N , qui échange les deux pointes. De là le gain d'un facteur 2 par rapport au n° 4.

C. Soit S un ensemble fini de nombres premiers et, pour $p \in S$, soit $d_i(p)$ le degré du facteur enlérien L_p pour E_i . Soit N_i le conducteur de E_i et posons

$$N_i(S) = N_i \cdot \prod_{p \in S} p^{d_i(p)}.$$

La fonction $f_i^S = \sum a_i(n)q^n$, où la somme est étendue aux n premiers aux $p \in S$, peut s'écrire, pour des λ_a convenables

$$f_i^S(z) = \sum a f_i(az),$$

où a parcourt les diviseurs de $\prod_{p \in S} p^{d_i(p)}$. Si $N_i(S)$ divise N , f_i^S est donc une forme modulaire sous $\Gamma_0(N)$. Raisonnant comme en 4. et utilisant que la coïncidence des facteurs L_p pour $p \notin S$ l'implique pour tout p , on obtient le résultat suivant.

Pour E_1 et E_2 de Weil, si $N_i(S) | N$ ($i = 1, 2$) et que les facteurs locaux L_p coïncident pour $p \notin S$, $p \leq \frac{N}{6} \cdot \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$, ils coïncident pour tout p .

6.- Dans [3], J-P. Serre introduit la méthode suivante pour comparer deux représentations ℓ -adiques. On suppose qu'elles appartiennent l'une et l'autre à un système compatible de représentations ℓ -adiques de dimension d , que les traces des Frobenius sont des entiers, et que les représentations sont pures d'un poids w . Supposons que les polynômes caractéristiques des Frobenius coïncident pour $p \leq A$. Soit ℓ' premier, et considérons les réductions mod ℓ' des représentations. On déduit de Čebotarev que pour $\ell' < B(A)$, ces représentations mod ℓ' ont des semi-simplifiées isomorphes. Les traces des F_p^i sont donc des entiers congrus mod ℓ' . Pour $2^d \cdot p^{dw/2} < \frac{1}{2} \prod_{\ell' < B(A)} \ell'$, les polynômes caractéristiques de F_p^i coïncident donc dans les deux représentations. Si $A' := \left[\frac{1}{2^{d+1}} \cdot \prod_{\ell' < B(A)} \ell' \right]^{2/dw}$ est $> A$, on peut recommencer, avec A remplacé par A', \dots . Pour que cette méthode marche, il faut disposer d'une forme de Čebotarev suffisamment précise pour pouvoir prendre $B(A)$ grand par rapport à $\log A$. Serre n'a pu y arriver que modulo l'hypothèse de Riemann généralisée (GRH).

7.- Serre me signale que la méthode suivie par Faltings permet d'améliorer certains résultats de [3].

Soient S un ensemble fini de nombres premiers et $N = \prod_{\ell \in S} \ell$. Si deux courbes elliptiques sur \mathbb{Q} , E et E' , ont bonne réduction en dehors de S et si les traces de Frobenius sont les mêmes pour E et E' pour tout $p \notin S$ vérifiant

$$p \leq c_{37} (\log N)^2 \quad (\text{sous GRH}),$$

$$\text{resp. } p \leq N^{c_{38}} \quad (\text{inconditionnellement}),$$

alors ces traces coïncident pour tout p et, d'après la conjecture de Tate prouvée par Faltings, les courbes sont isogènes. Cf [3] 8.3 Th. 21. Si E a bonne réduction en dehors de S et est sans multiplication complexe, $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ s'envoie sur $\text{GL}(T_\ell(E))$ pour tout

$$\ell \geq c_{39} \log N \quad (\text{sous GRH}), \quad \text{resp.}$$

$$\ell \geq N^{c_{40}} \quad (\text{inconditionnellement}).$$

Cf [3] 8.4 Th. 22. Les c_i ($i = 37$ à 40) sont des constantes absolues, en principe explicables. Ces résultats seront racontés par Serre dans son cours au Collège de France 1984/85.

8.- Je dis au n° 3 que rendre effectif le théorème de Faltings ne requiert pas une version effective du théorème d'Hermite. Pour obtenir un algorithme utilisable, il peut toutefois être préférable de dresser la liste des extensions galoisiennes k'/k à considérer et, pour chacune d'elles, de calculer explicitement jusqu'où il faut aller pour que les Frobenius F_p remplissent $\text{Gal}(k'/k)$: en pratique, beaucoup moins loin que ce qui est garanti par les Čebotarev effectifs. Cette méthode, suggérée par Serre, a été utilisée par Mestre pour prouver l'isogénie de deux courbes elliptiques sur \mathbb{Q} à bonne réduction en dehors de 5077 (l'une d'équation explicite, l'autre de Weil).

Je remercie J-P. Serre d'une lecture critique d'une première version de ce texte.

B I B L I O G R A P H I E

- [1] H. CARAYOL.- *Sur les représentations ℓ -adiques associées aux formes modulaires de Hilbert.* (2^{ème} partie de sa thèse).
- [2] J-P. SERRE.- *Modular forms of weight one and Galois representations.*
In : *algebraic number fields*. Edited by A. Fröhlich. Acad. Press 1977.
- [3] J-P. SERRE.- *Quelques applications du théorème de densité de Čebotarev.*
Publ. Math. IHES 54 (1981) p. 123-202.

P. DELIGNE
I.H.E.S
35 route de Chartres
Le Bois Marie
91440 BURES SUR YVETTE

Astérisque

MIREILLE MARTIN-DESCHAMPS

**Conjecture de Shafarevich pour les corps de fonctions
sur \mathbb{Q} [Appendice à l'exposé IX]**

Astérisque, tome 127 (1985), p. 256-259

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985_127_256_0>

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » ([http://smf4.emath.fr/
Publications/Asterisque/](http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/)) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

Appendice à l'exposé IX

CONJECTURE DE SHAFAREVICH POUR LES CORPS DE FONCTIONS SUR \mathbb{Q}

M. MARTIN-DESCHAMPS

On se propose d'étendre au cas d'un corps de type fini sur \mathbb{Q} la conjecture de Shafarevich pour les variétés abéliennes sur les corps de nombres, c'est-à-dire de montrer le résultat suivant :

THÉORÈME : Soient L une extension de type fini de \mathbb{Q} , g un entier positif, et X un schéma normal de type fini sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$, de corps de fractions L . L'ensemble des classes de L -isomorphismes de L -variétés abéliennes de dimension g , principalement polarisées, qui ont bonne réduction en tout point de codimension 1 de X , est fini.

Démonstration : Elle se fait par récurrence sur l'entier d , degré de transcendance de L sur \mathbb{Q} .

- $d = 0$: c'est la conjecture de Shafarevich pour un corps de nombres
- $d \neq 0$: quitte à restreindre X , on peut supposer que c'est un schéma affine $X = \text{Spec } R$, où R est une \mathbb{Z} -algèbre de type fini : $R = \mathbb{Z}[\alpha_1, \dots, \alpha_r]$.

Pour tout $i = 1, \dots, r$:

$$0 \leq \deg \text{tr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\alpha_1, \dots, \alpha_{i+1}] - \deg \text{tr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\alpha_1, \dots, \alpha_i] \leq 1$$

donc il existe $s \leq r-1$ tel que l'anneau $R' = \mathbb{Z}[\alpha_1, \dots, \alpha_s]$ définit un schéma X' de type fini sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$, tel que la fibre générique de la projection canonique $f : X \longrightarrow X'$ induite par l'homomorphisme $\mathbb{Z}[\alpha_1, \dots, \alpha_s] \subset \mathbb{Z}[\alpha_1, \dots, \alpha_r]$, soit une courbe.

Soit Y un sous-schéma fermé intègre de codimension 1 de X , qui domine X' :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{j} & X \\ & \downarrow f & \\ & & X' \end{array}$$

et Y^0 l'ouvert des points normaux de Y , qui est donc un schéma normal de type fini sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$, dont le corps de fractions M est de degré de transcendance $d-1$ sur K .

LEMME 1. - Soit A une L -variété abélienne qui a bonne réduction aux points de codimension 1 de Y , et B la M -variété abélienne qu'elle définit par restriction. Alors B a bonne réduction en tout point de codimension 1 de X qui est un point régulier de X .

Démonstration : La variété abélienne A se prolonge en un schéma abélien \mathcal{A} au-dessus d'un ouvert U de X contenant tous les points de codimension 1. Soit ℓ un nombre premier. Par pureté \mathcal{A} qui est un revêtement étale de $U \otimes \mathbb{Z}[1/\ell]$ se prolonge en tous les points réguliers de X dont la caractéristique résiduelle est première à ℓ , donc le module de Tate $T_\ell(\mathcal{A})$ se prolonge en un schéma \mathcal{T}_ℓ au-dessus d'un voisinage U_ℓ de tous ces points.

Soit y un point de codimension 1 de Y , qui est un point de codimension 2 régulier de X . Soit ℓ un entier premier à la caractéristique résiduelle de y . D'après ce qui précède, y appartient à U_ℓ et on a des isomorphismes :

$$T_\ell(B) \approx T_\ell(\mathcal{A}) \times_U \text{Spec } M \approx \mathcal{T}_\ell \times_{U_\ell} \text{Spec } M$$

ce qui prouve que $T_\ell(B)$ se prolonge sur l'ouvert $U_\ell \cap Y^0$ en un schéma pro-étale $\mathcal{E}_\ell|_{U_\ell \cap Y^0}$. D'après le critère de Serre - Tate, appliqué à l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{Y,y}$, on en déduit que B a bonne réduction en y .

Fin de la démonstration du théorème

Le lieu singulier de X est de codimension au moins 2, donc il existe un ouvert non vide Y^1 de Y^0 dont tous les points de codimension 1 sont des points réguliers de X .

L'hypothèse de récurrence s'applique à Y^1 et il suffit par prouver le théorème de montrer que l'ensemble des classes de L -isomorphismes de L -variétés abéliennes A , principalement polarisées, ayant bonne réduction aux points de codimension 1 de X , dont les restrictions au point $\text{Spec } M$ sont isomorphes à une M -variété abélienne donnée B , est fini.

Soit S la fibre générique de $f : X \longrightarrow X'$. Les points fermés de S sont des points de codimension 1 de X , donc une variété abélienne A ayant les propriétés annoncées se prolonge en un S -schéma abélien, et on est ramené à montrer le résultat suivant :

LEMME 2. - Soit S un schéma de type fini sur un corps k de caractéristique 0. Soit s un point fermé de S , A_0 une $k(s)$ -variété abélienne. L'ensemble \mathcal{E} des classes d'isomorphismes de S -schéma abéliens de dimension g , principalement polarisés, munis d'un isomorphisme $\lambda : \mathcal{A}_0 \times_S \text{Spec } k(s) \approx A_0$ est fini.

Démonstration : Des arguments standard (utilisant le fait que $\pi_1(S \otimes_k \mathbb{C})$ est de type fini) permettent de mettre sur tous ces schémas abéliens une structure de niveau. D'après les résultats de [F], la famille considérée est une famille limitée : il existe un k -schéma de type fini T , un schéma abélien \mathcal{A}_T sur $S \times T$ et pour tout élément A de \mathcal{E} un point rationnel t de T tel que A soit isomorphe (en tant que S -schéma abélien principalement polarisé) à la fibre de \mathcal{A}_T en t :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathcal{A}_T \\ \downarrow & & \downarrow \\ S \times k(t) & \hookrightarrow & S \times T \end{array}$$

Soit $\mathcal{A}'_T = \mathcal{A}_T \times_S \text{Spec } k(s)$. C'est une famille de $k(s)$ -variétés abéliennes, principalement polarisées et munies d'une structure de niveau, paramétrisée par T . Il existe un plus grand sous-schéma fermé T' de T tel que $\mathcal{A}'_{T|T'}$ soit isomorphe à $A_0 \times T'$. Soit T'' une composante irréductible de T' .

$$\begin{array}{ccc} A_0 \times T'' & \hookrightarrow & \mathcal{A}_{T|T'} = \mathcal{A}_{T''} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } k(s) \times T'' & \hookrightarrow & S \times T'' \end{array}$$

Soit t un point rationnel de T'' et $A = \mathcal{A}_T \times_T \text{Spec } k(t)$. Nous allons montrer que $\mathcal{A}_{T''}$ et $A \times T''$ sont isomorphes :

soient ℓ un nombre premier et n un entier. On obtient deux revêtements étalés de $S \times T''$ en considérant les deux schémas $\mathcal{A}_{T''}$ et $(\mathcal{A}_T \times_T \text{Spec } k(t))^\ell$, qui sont isomorphes d'une part sur $\text{Spec } k(s) \times T''$ et d'autre part sur $S \times \text{Spec } k(t)$ (les deux isomorphismes coïncidant sur $\text{Spec } k(s) \times k(t)$).

Or, comme nous sommes en caractéristique nulle, $\pi_1(S \times T'')$ s'identifie à $\pi_1(S) \times \pi_1(T'')$ par les homomorphismes naturels ; par suite les deux revêtements considérés sont isomorphes.

On en déduit un isomorphisme des modules de Tate $T_\ell(\mathcal{A}_{T''}) \approx T_\ell(A) \times T''$. Par construction, cet isomorphisme provient au point (s, t) d'un isomorphisme de variétés abéliennes. On conclut, d'après [G], qu'il provient d'un isomorphisme des $S \times T''$ -schémas abéliens $\mathcal{A}_{T''}$ et $A \times T''$.

B I B L I O G R A P H I E

- [F] G. FALTINGS.- *Arakelov Theorem for Abelian Varieties*. Inv. Math. 73
1983, pp.337-347.
- [G] A. GROTHENDIECK.- *Un théorème sur les homomorphismes de schémas
abéliens*. Inv. Math. 2. 1966, pp. 59-78.

Mireille MARTIN-DESCHAMPS
Ecole Normale Supérieure
Centre de Mathématiques
45 rue d'Ulm
75230 PARIS CEDEX 05

Astérisque

MIREILLE MARTIN-DESCHAMPS
La construction de Kodaira-Parshin

Astérisque, tome 127 (1985), p. 261-273

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985_127_261_0>

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » ([http://smf4.emath.fr/
Publications/Asterisque/](http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/)) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

Exp.X LA CONSTRUCTION DE KODAIRA-PARSHIN

Mireille MARTIN-DESCHAMPS

0.- INTRODUCTION

Le théorème 2 de l'exposé VIII montre que dans une classe d'isogénies de variétés abéliennes sur un corps de nombres, il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes. Dans l'exposé IX (Corollaire 2 du Théorème 1), on prouve que, sur un corps de nombres, l'ensemble des classes d'isogénies de variétés abéliennes de dimension et mauvaise réduction données, est fini.

On déduit de ces deux résultats la conjecture de Shafarevich pour les variétés abéliennes :

THÉORÈME 0.- Soit K un corps de nombres, S un ensemble fini de places de K , g un entier au moins égal à 1. L'ensemble des classes de K -isomorphismes de variétés abéliennes de dimension g , ayant bonne réduction en-dehors de S , est fini.

Par le théorème de Torelli [1], on obtient la conjecture originale de Shafarevich:

THÉORÈME 0'.- Soit K un corps de nombres, S un ensemble fini de places de K , g un entier au moins égal à 1. L'ensemble des classes de K -isomorphismes de courbes propres et lisses sur K de genre g , ayant bonne réduction en dehors de S , est fini.

Deux constructions géométriques, l'une due à Kodaira, l'autre à Parshin, permettent d'en déduire la conjecture de Mordell :

"Une courbe C propre, lisse et géométriquement connexe, de genre g au moins égal à 2, sur un corps de nombres K , n'a qu'un nombre fini de points rationnels".

L'idée des deux constructions est essentiellement la même, à savoir associer à chaque point rationnel P d'une telle courbe C une courbe C_P de genre γ - où γ est un entier ne dépendant que de g , au moins égal à 2 - montrer que ces courbes ont bonne réduction en-dehors d'un ensemble fini de places de K , indépendant de P , et que chaque classe d'isomorphismes d'une telle courbe C_P ne contient qu'un nombre fini de courbes $C_{P'}$, pour $P' \neq P$.

La construction de Kodaira est "uniforme en P ", c'est-à-dire qu'on obtient une famille algébrique de courbes, mais on est obligé de faire une extension (contrôlée) du corps de nombres. Nous ferons la construction de Parshin point par point, mais sans extension de corps. Chaque méthode a donc ses avantages et ses inconvénients, c'est pourquoi nous les développons toutes les deux ici.

Dans chaque cas, nous commencerons par faire la construction "générique" sur K - ou sur une extension finie de K -. Ensuite nous préciserons sur quel ouvert de l'anneau d'entiers on peut la prolonger.

1.- CONSTRUCTION DE KODAIRA [8]

PROPOSITION 1.- Soit K un corps de nombres, C une courbe propre et lisse, géométriquement connexe sur K , de genre $g \geq 2$. Il existe une extension finie L de K , un revêtement étale $\alpha: C_1 \rightarrow C \times_K L$, et une fibration non isotriviale $\pi: X \rightarrow C_1$ à fibres propres et lisses, géométriquement connexes, de genre $\gamma = 4g - 2$.

Remarque 1 : Rappelons [15] qu'un morphisme propre de L -schémas $X \rightarrow C_1$ à fibres géométriquement connexes est une fibration isotriviale s'il existe un morphisme fini $\tau: C_2 \rightarrow C_1$, une courbe F sur L , et un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X \times_{C_1} C_2 & \xrightarrow{\lambda} & F \times_L C_2 \\ q \searrow & & \swarrow q' \\ & C_2 & \end{array}$$

où λ est une application birationnelle, et q et q' sont les deux projections.

Remarque 2 : Si S est un ensemble fini de places de K , et n un entier fixé, le Théorème d'Hermite montre que l'ensemble des extensions K' de K , de degré $\leq n$, non ramifiées en-dehors de S , est fini, donc il existe une extension finie de K qui les contient toutes. Dans la démonstration qui suit, nous utiliserons souvent ce résultat, en laissant parfois au lecteur le soin de vérifier les hypothèses.

Démonstration de la proposition 1 : Soit S un ensemble fini de places de K contenant les places divisibles par 2, tel que C ait bonne réduction en-dehors de S . Soit $J = \underline{\text{Pic}}^0 C/K$ la jacobienne de C . Quitte à remplacer K par une extension finie, on peut supposer que C a un point rationnel P , et que J a un point rationnel d'ordre 2. Il existe donc un revêtement étale connexe de degré 2 $v: A \rightarrow J$.

Soit $\varphi: C \rightarrow J$ le morphisme défini par $\varphi(Q) = Q - P$, et le diagramme obtenu par produit fibré :

$$\begin{array}{ccc} C' = C \times_J A & \xrightarrow{\varphi'} & A \\ u \downarrow & & \downarrow v \\ C & \xrightarrow{\varphi} & J \end{array}$$

Puisque u est un revêtement étale de degré 2, C' est une courbe propre, lisse géométriquement connexe, de genre g' avec :

$$2g' - 2 = 2(2g - 2).$$

La fibre $u^{-1}(P)$ est formée de points à valeur dans une extension de K de degré ≤ 2 , étale en-dehors de S , donc quitte à remplacer K par une extension finie, on peut supposer que $u^{-1}(P)$ est formée de deux points rationnels P' et P'' .

Soient $\Gamma = C' \times_C' C'$, et Δ la diagonale du produit $C' \times C'$, qui sont deux diviseurs lisses de $C' \times C'$.

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma = C' \times_C' C' & \longleftrightarrow & C' \times C' & \xrightarrow{p'_2} & C' \\ & & & \downarrow p'_1 & \\ & & & C' & \end{array}$$

Sur $C' \times C'$ le faisceau $\mathcal{O}_{C' \times C'}(\Gamma - 2\Delta)$ est de degré 0 sur les fibres de p'_2 , donc il existe un morphisme :

$$\psi' : C' \longrightarrow \underline{\text{Pic}}^0 C'/K = J'$$

$$\text{tel que } \mathcal{O}_{C' \times C'}(\Gamma - 2\Delta) \simeq (1 \times \psi')^* \mathcal{P}' \otimes p'^*_2 L'$$

où \mathcal{P}' est le faisceau de Poincaré sur $C' \times J'$ et L' un faisceau inversible sur C' .

En restreignant cette égalité à $p'^{-1}_1(P') = \{P'\} \times C'$ on obtient :

$$L' \simeq \mathcal{O}_{C'}(P'' - P') \otimes \psi'^*(\mathcal{P}'_{P'})^{-1}$$

où $\mathcal{P}'_{P'}$ est l'image réciproque de \mathcal{P}' par le plongement :

$$J' \hookrightarrow \{P'\} \times J' \hookrightarrow C' \times J'.$$

Soit C_1 une composante connexe du produit fibré par C' de la multiplication par 2 dans J' , et Γ_1 l'image réciproque de Γ dans $C' \times C_1$, de sorte qu'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} \Gamma_1 & \hookrightarrow & C' \times C_1 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & J' \\ \downarrow & & \downarrow 1 \times r & & \downarrow r & & \downarrow \times 2 \\ \Gamma & \hookrightarrow & C' \times C' & \xrightarrow{\alpha} & C' & \longrightarrow & J' \\ & & & \curvearrowright u & & & \end{array}$$

où r est fini étale, de degré divisant $2^{2g'}$, et C_1 est une courbe lisse de genre g_1 avec

$$2g_1 - 2 = \deg r (2g' - 2) \leq 2^{2g'} (2g' - 2)$$

alors :

$$(1 \times r)^* \mathcal{O}_{C' \times C_1}(\Gamma - 2\Delta) \simeq \mathcal{O}_{C' \times C_1}(\Gamma_1) \otimes (1 \times r)^* \mathcal{O}_{C' \times C_1}(-2\Delta)$$

$$\simeq (1 \times \psi_1)^* \mathcal{P}_1^2 \otimes (1 \times r)^* p_2^* L'$$

et : ou bien $\deg r > 1$, alors $\deg r$ est pair, et $\deg r^* L'$ est pair
 ou bien $\deg r = 1$, alors ψ' est de degré pair
 et $L' \simeq \mathcal{O}_{C'}(P'' - P') \otimes \psi'^* \mathcal{P}_1^2$ est de degré pair.

Dans tous les cas, $r^* L'$ est un faisceau inversible sur C_1 de degré pair.

Notons $L_1 = r^* L'$, et $d_1 = \deg L_1$.

Quitte à faire une extension finie de K , on peut supposer que C_1 à un point rationnel P_1 . Soit $\tau : K \longrightarrow \underline{\text{Pic}}^0_{C_1/K} = J_1$ le point rationnel de J_1 correspondant au faisceau inversible de degré $0 : L_1 \otimes \mathcal{O}_{C_1}(-d_1 P_1)$. Quitte à faire une extension finie de K , on peut supposer que l'image réciproque de ce point par la multiplication par 2 dans J_1 est encore un point rationnel ; donc on peut supposer que $\mathcal{O}_{C' \times C_1}(\Gamma_1)$ est un double, c'est-à-dire qu'il existe un faisceau inversible \mathcal{L} sur $C' \times C_1$ tel que $\mathcal{O}_{C' \times C_1}(\Gamma_1) \simeq \mathcal{L}^{\otimes 2}$.

Soit $\rho : X \longrightarrow C' \times C_1$ le revêtement de $C' \times C_1$ de degré 2, ramifié le long de Γ_1 , tel que $\rho_* \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_{C' \times C_1} \otimes \mathcal{L}$

et soit $\pi : X \longrightarrow C_1$ obtenu en composant ρ avec la deuxième projection.

Puisque Γ_1 est étale sur C_1 , X est lisse sur C_1 . La fibre $\pi^{-1}(Q_1)$ d'un point Q_1 de C_1 est un revêtement double de C' , ramifié le long de $\Gamma_1 \times_{C_1} k(Q_1) = u^{-1}(\alpha(Q_1))$, donc un revêtement de C ramifié exactement au point $\alpha(Q_1)$. C'est une courbe lisse de genre γ avec :

$$2\gamma - 2 = 2(2g' - 2) + \deg \Gamma_1/C_1$$

$$= 4(2g - 2) + 2$$

$$\gamma = 4g - 2 .$$

Si les fibres géométriques de π sont isomorphes à une même courbe C_0 , il existe une infinité de morphismes dominants et séparables, distincts - puisque ramifiés en des points différents - de C_0 dans C , ce qui est impossible puisque g est ≥ 2 [12]. Donc la fibration π n'est pas isotriviale.

THEOREME 1. - La conjecture de Shafarevich pour les courbes entraîne la conjecture de Mordell.

Démonstration : Soit K un corps de nombres, C une courbe propre, lisse, géométriquement connexe sur K , de genre $g \geq 2$. D'après ce qui précède, il existe une extension finie L de K , un revêtement étale $\alpha : C_1 \longrightarrow C_K$, et

une fibration lisse et non isotriviale $\pi : X \longrightarrow C_1$ en courbes de genre $\gamma = 4g - 2$.

Soit \mathcal{O} l'anneau des entiers de L . Il existe un ouvert B de $\text{Spec } \mathcal{O}$ tel que $C \times_K L$, C_1 et X (resp. α et π) se prolongent en des schémas V , V_1 et \mathcal{X} lisses sur B (resp. en des morphismes $\tilde{\alpha}$ étale et $\tilde{\pi}$ lisse).

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \pi \downarrow & & \tilde{\pi} \downarrow \\ C_1 & \longrightarrow & V_1 \\ \alpha \downarrow & & \tilde{\alpha} \downarrow \\ C \times_L K & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } K & \longrightarrow & B \end{array}.$$

Soit L' une extension finie de L , \mathcal{O}' l'anneau des entiers de L' , B' l'image réciproque de B dans $\text{Spec } \mathcal{O}'$, et S' le complémentaire de B' . Tout point Q_1 de $C_1(L')$ se prolonge en un B' -morphisme : $B' \longrightarrow V_1$, et $\mathcal{X}_{V_1} \times_{B'} B'$ est lisse sur B' , donc $\pi^{-1}(Q_1)$ a bonne réduction en-dehors de S' .

Si $C_1(L')$ est infini, puisque la fibration π n'est pas isotriviale, il existe une infinité de classes d'isomorphismes de L' -courbes de genre γ , ayant bonne réduction en-dehors de S' , ce qui contredit Shafarevich.

On conclut grâce au lemme :

LEMME 1. Soit $\alpha : C_1 \longrightarrow C$ un morphisme de L -courbes, étale en dehors de S . Alors $C(L')$ est fini pour toute extension finie L' de L si et seulement si il en est de même de C_1 .

Démonstration : Soient d le degré de α et Q un point de $C(L')$. Son image réciproque dans C_1 est formée de points à valeur dans une extension de L' de degré au plus égal à d , et étale en-dehors de S . Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de telles extensions, et si C_1 n'a qu'un nombre fini de points dans une extension finie L'' de L , il n'y a qu'un nombre fini de points dans C_1 au-dessus de $C(L')$, donc $C(L')$ est fini.

Remarque 3 : Soit M_γ le module des courbes lisses de genre γ , A_γ le module des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension γ et

$F : M_\gamma \longrightarrow A_\gamma$ le morphisme canonique [10]. La fibration π définit une application rationnelle $\varphi : C_1 \dashrightarrow M_\gamma$ à fibres finies. Si l'application rationnelle composée : $C_1 \dashrightarrow M_\gamma \xrightarrow{F} A_\gamma$ est constante, il en est de même de

l'application rationnelle obtenue en étendant les scalaires de K à \mathbb{C} , ce qui contredit le théorème de Torelli sur \mathbb{C} [1]. On peut donc, par un raisonnement analogue à celui du théorème, en utilisant seulement le théorème de Torelli "classique", déduire la conjecture de Mordell de la conjecture de Shafarevich pour les variétés abéliennes.

COROLLAIRE. - (Conjecture de Mordell pour les corps de fonctions sur \mathbb{Q}).

Soit K un corps de type fini sur \mathbb{Q} , C une courbe sur K de genre $g \geq 2$. Alors l'ensemble des points rationnels de C est fini.

Démonstration : Si la fibration n'est pas isotriviale sur $\bar{\mathbb{Q}}$, c'est "Mordell pour les corps de fonctions", qui a été démontré par Manin puis Grauert en caractéristique 0 [9,4], et par Samuel puis Szpiro en caractéristique positive [13,15].

Si la fibration est isotriviale sur $\bar{\mathbb{Q}}$, il existe une extension finie L de \mathbb{Q} , une courbe C_0 sur L , une extension finie K' de K contenant L , et un K' -isomorphisme $\lambda : C \times_{K'} K' \xrightarrow{\sim} C_0 \times_K L'$.

On peut toujours supposer que L est algébriquement clos dans K' , qui est alors le corps de fonctions d'une L -variété V' (géométriquement irréductible).

Tout point de $C_0 \times_L K'(K')$ correspond bijectivement à une L -application rationnelle de V' dans C_0 , et puisque le genre de C_0 est supérieur ou égal à 2, il n'y a qu'un nombre fini de telles applications rationnelles dominantes [3,7]. Donc si $C(K)$ est infini, on obtient une infinité de L -applications rationnelles non dominantes de V' dans C_0 , donc de points de $C_0(L)$, ce qui contredit Mordell pour C_0 .

La manière dont nous avons fait la construction de Kodaira - d'abord sur la fibre générique, puis sur le complémentaire d'un ensemble fini de places - a suffi pour démontrer la conjecture de Mordell à partir de celle de Shafarevich pour les courbes. Mais on peut être plus précis, et indiquer exactement où les courbes construites ont bonne réduction. C'est l'objet de la proposition suivante :

PROPOSITION 2. - Soit K un corps de nombres, S un ensemble fini de places de K , contenant les places divisibles par 2, C une courbe propre et lisse géométriquement connexe sur K , de genre $g \geq 2$, ayant bonne réduction en-dehors de S , et telle que $C(K)$ soit non vide. Alors il existe une extension finie L de K , ne dépendant que de g et de S , un revêtement $\alpha : C_1 \rightarrow C \times_K L$ étale en-dehors de S , et une famille lisse non isotriviale de courbes $\pi : X \rightarrow C_1$, de genre $\gamma = 4g - 2$, telle que pour toute extension L' de L et

pour tout point Q de $C_1(L')$, la fibre $\pi^{-1}(Q_1)$ ait bonne réduction en-dehors de S' , image réciproque de S dans l'ensemble des places de L' .

Démonstration : Nous allons reprendre la démonstration de la proposition 1 pour la prolonger en-dehors de S .

Puisque les points d'ordre 2 de $\underline{\text{Pic}}^0_{C/K}$ sont à valeur dans une extension de K de degré au plus 2^{2g} , étale en-dehors de S , l'extension de K qui permet de supposer que J a un point d'ordre 2 ne dépend que de S et de g .

Soient \mathcal{O} l'anneau d'entiers de K , $B = \text{Spec } \mathcal{O} - S$, et $f: V \rightarrow B$ le modèle lisse de C .

On vérifie qu'avec les notations de la proposition 1, C' a bonne réduction en-dehors de S , et $u: C' \rightarrow C$ se prolonge en un morphisme étale de degré 2, $\tilde{u}: V' \rightarrow V$ (V' étant le modèle lisse de C'). De plus, l'extension de K qui permet de supposer que $u^{-1}(P) = P' + P''$ ne dépend que de S .

On vérifie ensuite que si $\tilde{r} = V' \times_B V'$, ψ se prolonge en $\tilde{\psi}: V' \rightarrow \underline{\text{Pic}}^0_{V'/B}$, que C_1 et r se prolongent en V_1 et $\tilde{r}: V_1 \rightarrow V'$ (\tilde{r} étale), et que si \tilde{r}_1 est l'image réciproque de \tilde{r} dans $V' \times_{B_1} V_1$, le faisceau $\mathcal{O}_{V' \times_{B_1} V_1}(\tilde{r}_1)$ est le produit d'un carré par l'image réciproque d'un faisceau M_1 sur V_1 , de degré pair (sur la fibre générique C_1 de V_1).

LEMME 2. - Quitte à faire une extension finie de K , ne dépendant que de S et de g , on peut supposer que M_1 est un carré.

Démonstration : Soit $f_1: V_1 \rightarrow B$ la projection canonique et soit d_1 le degré de M_1 sur les fibres de f_1 , qui est pair.

Rappelons que $r: C_1 \rightarrow C'$ est de degré inférieur ou égal à $2^{2g'}$, et que C' a un point rationnel P' . Quitte à faire une extension finie de K ne dépendant que de S et de g' (donc de g) on peut supposer que C_1 a un point rationnel P_1 , qui se prolonge en une section E_1 de f_1 . Soit alors

$\tau: B \rightarrow \underline{\text{Pic}}^0_{V_1/B}$ le morphisme correspondant au fibré inversible

$M_1 \otimes \mathcal{O}_{V_1}(-d_1 E_1)$. Soit B' une composante connexe du produit fibré de B par la multiplication par 2 dans $\underline{\text{Pic}}^0_{V_1/B}$

$$\begin{array}{ccccc}
 V'_1 & \xrightarrow{f'_1} & B' & \xrightarrow{\tau'} & \underline{\text{Pic}}^0_{V_1/B} \\
 \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma & & \downarrow \times 2 \\
 V_1 & \xrightarrow{f_1} & B & \xrightarrow{\tau} & \underline{\text{Pic}}^0_{V_1/B}
 \end{array}$$

σ est un morphisme étale de degré $\leq 2^{2g_1}$ (avec $2g_1 - 2 \leq 2^{2g'}(2g-2)$).

Par construction :

$$M_1 \otimes \mathcal{O}_{V_1}(-d_1 E_1) \simeq (1 \times \tau)^* \mathcal{P}_1 \otimes f_1^* L$$

où \mathcal{P}_1 est le fibré de Poincaré sur $V_1 \times_B \underline{\text{Pic}}_{V_1/B}^\circ$, et L un faisceau inversible sur B . On en déduit :

$$M_2 = \theta^*(M_1) \simeq \theta^*(\mathcal{O}_{V_2}(d_1 E_1)) \otimes (1 \times \tau')^* \mathcal{P}_1^2 \otimes f_1^* \sigma^* L.$$

Sur B' , tout faisceau inversible est d'ordre fini, qui divise l'ordre du groupe de classes de B' . Soit $(2n+1) \cdot 2^m$ l'ordre de $L' = \sigma^* L$. On construit un revêtement B'' de B' , étale, de degré 2^m , sur lequel L'^{2n+1} est trivial. (B'' est défini par : $\mathcal{O}_{B''} = \mathcal{O}_B \oplus L'^{2n+1} \oplus L'^{2(2n+1)} \oplus \dots \oplus L'^{(2^m-1)(2n+1)}$).

Le degré de B'' sur B' est borné par la plus grande puissance de 2 qui divise l'ordre du groupe de classes de B' , et sur B'' l'image réciproque L'' de L' vérifie :

$$L''^{2n+1} \simeq \mathcal{O}_{B''} \quad \text{donc} \quad L'' \simeq (L')^{-2n}$$

donc après changement de base de B à B'' , l'image réciproque de M_1 est un carré.

Fin de la démonstration de la Proposition 2

Soit alors $\tilde{\rho}: \mathcal{X} \longrightarrow V_1 \times_B V'$ le revêtement de degré 2 de $V_1 \times_B V'$, ramifié le long de $\tilde{\Gamma}_1$, qui prolonge ρ . On vérifie que \mathcal{X} est lisse sur V_1 , et on en déduit que pour toute extension K' de K , pour tout point Q de $C_1(K')$, la fibre $\pi^{-1}(Q_1)$ a bonne réduction en-dehors de S' , image réciproque de S dans l'ensemble des places de L' .

2.- CONSTRUCTION DE PARSHIN [11]

PROPOSITION 3.- Soit K un corps de nombres, S un ensemble fini de places de K contenant les places divisibles par 2, C une courbe propre et lisse, géométriquement connexe, de genre $g \geq 2$, ayant bonne réduction en-dehors de S . Il existe un entier g' ne dépendant que de g , et pour tout point rationnel P de $C(K)$ un revêtement $\theta_P: C_P \longrightarrow C$, ramifié exactement en P , par une courbe C_P de genre g' sur K , qui a bonne réduction en-dehors de S .

Démonstration : Soit P un point rationnel de C . Il permet de construire un morphisme $\varphi: C \longrightarrow \underline{\text{Pic}}_{C/K}^\circ = J$ tel que $\varphi(Q) = Q - P$.

Par image réciproque de la multiplication par 2 dans J , on obtient un revêtement étale connexe de C de degré 2^{2g} :

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & J \\ u \downarrow & & \downarrow x_2 \\ C & \xrightarrow{\varphi} & J \end{array}$$

C_1 est une courbe de genre g_1 avec

$$2g_1 - 2 = 2^{2g}(2g-2)$$

et C_1 a un point rationnel P' tel que $u(P') = P$ et $\varphi(P') = 0$, donc en termes de diviseurs :

$$u^*P = D + P'$$

où D est un diviseur étale sur K , ne contenant pas P' , de degré $d = 2^{2g} - 1 \geq 15$.

Soit J' la jacobienne généralisée de C_1 associée à D - qui est aussi la jacobienne de la courbe obtenue à partir de C_1 en contractant D en un seul point - et soit $\psi : C_1 - D \rightarrow J'$ le morphisme qui envoie P' sur 0, origine de J' .

Rappels. - [2,14]. Dans le cas où $d \geq 1$, J' représente le foncteur des classes d'isomorphismes de faisceaux inversibles \mathcal{L} sur C_1 , rigidifiés sur D par un isomorphisme $\mathcal{L}|_D \simeq \mathcal{O}_D$. On a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow J' \xrightarrow{\pi} \underline{\text{Pic}}_{C_1/K}^\circ = J \longrightarrow 0 \quad (1)$$

où π est le morphisme "d'oubli de la rigidification", et G est un tore de dimension $d-1$.

De plus, tout revêtement abélien de $C_1 - D$ est induit par un revêtement de J' .

Par image réciproque de la multiplication par 2 dans J' , on obtient un revêtement galoisien étale connexe $\theta' : C' \rightarrow C_1 - D$ de degré 2^{2g_1+d-1} . Soit C_2 une complétion projective lisse de C' , et $\theta : C_2 \rightarrow C_1$ le revêtement de C_1 qui prolonge θ' :

$$\begin{array}{ccccc} C_1 & \longleftrightarrow & C' & \longrightarrow & J' \\ \theta \downarrow & & \theta' \downarrow & & \downarrow x_2 \\ C_1 & \longleftrightarrow & C_1 - D & \xrightarrow{\psi} & J' \end{array}$$

LEMME 3. - θ est un revêtement galoisien, de groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2g_1+d-1}$, non ra-

mifié en $C_1 - D$ et ramifié en tout point de D . De plus, le genre g' de C_2 vérifie :

$$2g' - 2 = 2^{2g_1+d-1}(2g_1 - 2) + d \cdot 2^{2g_1+d-2}$$

$$\text{où : } 2g_1 - 2 = 2^{2g} (2g-2)$$

$$\text{et } d = 2^{2g-1}$$

Démonstration : Toutes ces assertions étant géométriques, on peut raisonner sur un corps algébriquement clos. Le diviseur D est alors formé de d points distincts. Si θ n'est pas ramifié en un point de D , il existe un diviseur D' contenu dans D , de degré $d-1 \geq 1$, tel que θ induise un revêtement galoisien étale connexe

$$\theta'': \theta^{-1}(C_1 - D') \longrightarrow C_1 - D'$$

de degré 2^{2g_1+d-1} .

Si J'' est la jacobienne généralisée de C_1 associée à D'' , θ'' est induit par un revêtement abélien de J'' . Or tout revêtement abélien de J'' annulé par 2 est un quotient de la multiplication par 2 dans J'' , donc est de degré majoré par 2^{2g_1+d-2} , d'où une contradiction.

D'autre part, pour tout point Q de D , le sous-groupe d'inertie d'un point Q' de la fibre $\theta^{-1}(Q)$ est un sous-groupe cyclique de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2g_1+d-1}$, donc il est d'ordre 1 ou 2, égal à la multiplicité de Q' dans la fibre. La multiplicité étant la même en tous les points de la fibre, et θ étant ramifié en Q , cette multiplicité est égale à 2.

On en déduit alors la valeur annoncée pour g' en utilisant la formule de Hurwitz.

Pour terminer la démonstration, il nous faut démontrer le :

LEMME 4.- C_2 a bonne réduction en-dehors de S .

Démonstration : Soit \mathcal{O} l'anneau d'entiers de K , $B = \text{Spec } \mathcal{O}-S$, et V le modèle lisse de C . On vérifie facilement que C_1 a bonne réduction en-dehors de S , que son modèle lisse V_1 possède un diviseur \tilde{D} étale de degré d sur B , qui prolonge D .

Il existe un B -schéma en groupes \mathcal{J}' qui prolonge J' : en effet, si \mathcal{J}' est le foncteur sur B des familles de faisceaux inversibles rigidifiés sur \tilde{D} , le morphisme π de la suite exacte (1) se prolonge en un morphisme surjectif : $\pi: \mathcal{J}' \longrightarrow \text{Pic}^0 V/B$, dont le noyau est le foncteur des automorphismes de \tilde{D} , donc est représentable. Le foncteur \mathcal{J}' est donc aussi représentable par

un schéma qui prolonge J' [2].

Le revêtement θ' se prolonge alors en un revêtement galoisien étale $\theta' : V' \longrightarrow V_1 - \tilde{D}$, de groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2g_1+d-1}$.

Soit alors W la clôture intégrale de V_1 dans $k(V')$, qui est un schéma normal dans lequel se plonge V' , et $\tilde{\theta}$ le morphisme canonique : $W \longrightarrow V_1$:

$$\begin{array}{ccc} V' = \tilde{\theta}^{-1}(V_1 - \tilde{D}) & \xhookrightarrow{\quad} & W \\ \downarrow \theta' & & \downarrow \theta' \\ V_1 - D' & \xhookrightarrow{\quad} & V_1 \end{array} .$$

En tout point où $\tilde{\theta}$ est ramifié, l'indice de ramification est égal à 2, donc premier à la caractéristique résiduelle. Ceci, ajouté au fait que V_1 est lisse et D lisse, implique grâce au lemme d'Abhyankar [5,6], que W est lisse.

D'autre part, l'ouvert de W sur lequel W est lisse sur B contient V' et un voisinage de la fibre générique de W , donc son complémentaire est un fermé de codimension 2, ce qui implique puisque W est lisse, que ce fermé est vide. D'où le résultat.

B I B L I O G R A P H I E

- [1] A. ANDREOTTI - *On Torelli's Theorem*, Amer. J. Math. Vol. 80 (1958).
- [2] P. DELIGNE - SGA 4, Exposé XVIII §1.
SGA 4 1/2 Arcata VI §2.
- [3] M. DESCHAMPS et R. MÉNÉGAUX - *Applications rationnelles séparables dominantes sur une variété de type général*, Bull. Soc. Math. de France N°106, 1978. pp.279-287.
- [4] H. GRAUERT - *Mordells Vermutung über rationale Punkte auf algebraischen Kurven und Funktionenkörper*, Publ. Math. IHES 25 (1965).
- [5] A. GROTHENDIECK - SGA 1, Exposé XIII §1.
- [6] A. GROTHENDIECK et J.P MURRE- *Tame Fundamental group ...*, Springer Lecture Notes n°208, (1971).
- [7] S. KOBAYASHI et T. OCHIAI - *Meromorphic mappings onto complex spaces of general type*. Invent. Math. t.31, (1975) pp 7-76.
- [8] K. KODAIRA - *A certain type of irregular algebraic surface*. Journal d'Analyse Mathématique, vol. 19 (1967).
- [9] Ju. I. MANIN - *Rational Points of algebraic curves over function fields* Amer. Math. Soc. Trans. (2) 50 (1966), 189-234.
- [10] D. MUMFORD - *Geometric Invariant Theory*. Springer Verlag (1965).
- [11] A.N PARSHIN - *Algebraic Curves over function fields*, Math. USSR. Izvestija 2 (1968) n°5, 1145-1171.
- [12] P. SAMUEL - *On old and new results on algebraic curves*. Tata Institute of Fundamental Research. Bombay (1966).
- [13] P. SAMUEL - *Compléments à un article de H. Grauert sur la conjecture de Mordell*. Publ. Math. IHES 29 (1966).

- [14] J-P.SERRE - *Groupes algébriques et corps de classes.* Hermann (1959).
- [15] L. SZPIRO - *Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins 2.*
Astérisque n°86 (1981).

Mireille MARTIN-DESCHAMPS
Ecole Normale Supérieure
Centre de Mathématiques
45 rue d'Ulm
75230 PARIS CEDEX 05

Astérisque

LUCIEN SZPIRO

Un peu d'effectivité

Astérisque, tome 127 (1985), p. 275-287

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__127__275_0>

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » ([http://smf4.emath.fr/
Publications/Asterisque/](http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/)) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

Exposé XI

UN PEU D'EFFECTIVITÉ

Lucien SZPIRO

- 1.- La constante de Mumford.
- 2.- Compter le nombre de points (d'après Parshin).
- 3.- Petits points et points de torsion.

Dans cet exposé nous introduisons un nouvel objet : la constante de Mumford (§1 - 2). Comme l'a indiqué Parshin, on peut, grâce à une proposition de D. Mumford, réinterpréter la démonstration de G. Faltings pour donner une borne "explicite" de nombre de points rationnels d'une courbe de genre au moins deux, sur un corps de nombres (§2). Dans cette borne les termes "à distance finie" sont effectivement bornés. Par contre les termes "à l'infini" ne le sont pas. Un de ces deux derniers termes (la constante de Mumford) devrait pouvoir être effectivement borné de l'avantage de l'auteur de ces lignes. Au §3 nous montrons deux manières de borner la self-intersection du dualisant relatif d'une surface arithmétique. La première mène à ma conjecture des petits points. La seconde permet de montrer que la constante de Mumford est souvent négative et, qu'en conséquence, on peut construire beaucoup de courbes sur $\overline{\mathbb{Q}}$ dont la différence de deux points distincts sur $\overline{\mathbb{Q}}$ n'est jamais de torsion.

1.- LA CONSTANTE DE MUMFORD1.1.- Un calcul d'angle

G. Faltings et P. Hriljac ont mis en évidence la relation qui existe entre l'intersection d'Arakelov (notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$) et la hauteur de Néron - Tate associée à la polarisation θ sur la Jacobienne (dont la forme bilinéaire associée est notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$) (cf l'exposé II de ce séminaire) : soit C_K une courbe projective, lisse, géométriquement connexe de genre $g \geq 1$, sur un corps de nombres K et soient L_1 et L_2 deux éléments de $\text{Pic}(C) \otimes \mathbb{Q}$ sur le modèle propre régulier C de C_K sur $\text{Spec } \mathcal{O}_K$, qui soient de degré zéro sur chacune des composantes des fibres de $C \xrightarrow{f} \text{Spec } \mathcal{O}_K$. Soient x_i le point de la Jacobienne tensorisée par \mathbb{Q} correspondant à L_i , alors on a :

$$\langle L_1, L_2 \rangle = - [K : \mathbb{Q}] \langle x_1, x_2 \rangle.$$

Soit E une section de f nous lui associons un élément de $\text{Pic}(C) \otimes \mathbb{Q}$ du type précédent de la façon suivante :

$$L_E = \omega_{C/\mathbb{Q}}^{-(2g-2)E} \otimes \mathcal{O}_C(\Phi(E))$$

où $\Phi(E)$ est le diviseur à coefficients rationnels, vertical, satisfaisant aux conditions suivantes :

a) $(L_E \cdot \mathcal{O}_C(D)) = 0$ pour tout D vertical

b) si $v \in \text{Spec } \mathcal{O}_K$ est un point fermé,

si $F_v = \sum_i D_i$ est la fibre de v et i_0 l'entier tel que

$$(D_{i_j} \cdot E) = \delta_{0,j} \log N(v), \text{ alors la composante de } \Phi(E) \text{ selon } D_{i_0} \text{ est nulle.}$$

Remarquons que $\Phi(E)$ est déterminé à l'addition de fibres entières près par la condition a). La condition b) est une manière de normaliser. Soient maintenant E_1 et E_2 deux sections distinctes de f et soient x_i le point de la Jacobienne tensorisée par \mathbb{Q} correspondant à L_{E_i} . On a :

$$[K : \mathbb{Q}] (-\langle x_i \rangle^2) = \omega^2 + 2g(2g-2)E_i^2 - \Phi(E_i)^2$$

$$[K : \mathbb{Q}] (-\langle x_1, x_2 \rangle) = \omega^2 + (2g-2)(E_1^2 + E_2^2) + (2g-2)^2(E_1 \cdot E_2) - (\Phi(E_1) \cdot \Phi(E_2)).$$

Où l'on a écrit $\omega^2 = (\omega_{X/\mathbb{Q}} \cdot \omega_{X/\mathbb{Q}})$, et utilisé la formule d'adjonction

$(\omega_{X/\mathbb{Q}} \cdot E_1) = -E_1^2$. La forme quadratique de Néron - Tate étant définie positive sur $J(C) \otimes \mathbb{R}$, notant $|x_i|$ la longueur de x_i pour cette forme et θ l'angle entre x_1 et x_2 on a :

$$(*) |x_1||x_2| \cos \theta = \frac{|x_1|^2 + |x_2|^2}{2g} + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \left[\omega^2 \left(\frac{1}{g} - 1 \right) - (2g-2)^2 (E_1 \cdot E_2) - \frac{\Phi(E_1)^2 + \Phi(E_2)^2}{2g} + (\Phi(E_1) \cdot \Phi(E_2)) \right].$$

1.2.- La constante de Mumford

Pour simplifier nous supposerons dorénavant que $f : C \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_K$ est semi-stable. Si P_1 et P_2 sont des points rationnels de C sur K et E_1, E_2 les sections de f correspondantes posons :

$$M(C, K, P_1, P_2) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \left(-\omega^2 \left(1 - \frac{1}{g} \right) - (2g-2)^2 (E_1 \cdot E_2) - \frac{\Phi(E_1)^2 + \Phi(E_2)^2}{2g} + (\Phi(E_1) \cdot \Phi(E_2)) \right).$$

Comme nous avons supposé que C est semi-stable, si $K' \supset K$

$$M(C, K', P_1, P_2) = M(C, K, P_1, P_2). \text{ Nous noterons ce nombre } M(C, P_1, P_2).$$

PROPOSITION 1.1. - Avec les hypothèses et notations ci-dessus, soit Δ la diagonale de $C \times C$, alors la fonction $M(C, \cdot, \cdot) : C(\bar{K}) \times C(\bar{K}) - \Delta(\bar{K}) \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée supérieurement.

Nous allons borner les trois termes de $M(C, \cdot, \cdot)$

a) C étant semi-stable $\omega = \omega_{C/\mathcal{O}_K}$ commute au changement de base donc

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \omega^2 \left(\frac{1}{g} - 1 \right)$$

est constant. Remarquons que comme $\omega^2 \geq 0$ ce terme est négatif !!

b) $\frac{-(2g-2)^2}{[K:\mathbb{Q}]} (E_1 \cdot E_2) \leq \frac{1}{[K:\mathbb{Q}_\sigma]} \sum \epsilon_\sigma \log G_\sigma(P_1, P_2)$

où G_σ est la fonction de Green égale à $|s(P_2)|_\sigma$ avec les notations de l'exposé I.

G_σ étant continue elle est bornée supérieurement sur $C_\sigma \times C_\sigma$ (et vaut zéro sur la diagonale).

D'autre part si $K' \supset K$ et ρ est une place à l'infini de K' dominant σ place à l'infini de K , on a $G_\rho = G_\sigma$. Le facteur $\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}$ assure donc que ce second terme est borné supérieurement sur \bar{K} .

c) La forme d'intersection étant négative sur les fibres, pour borner le troisième terme il suffit de borner sur \bar{K} les nombres de la forme :

$$\frac{-\Phi(E)^2}{[K(E):\mathbb{Q}]}.$$

(i) Considérons d'abord le cas d'une fibre réduite qui n'a que des points doubles ordinaires et pas de \mathbb{P}^1 de self-intersection -2. Le nombre de composantes est au plus $2g-2$ (intersecter avec ω).

Soit D un diviseur horizontal de degré $d^o D$ sur la base, on cherche Φ contenu dans la fibre tel que $(d^o D \omega - (2g-2)D \cdot F_i) = -(\Phi \cdot F_i)$ pour chaque composante

F_i de la fibre. Les coefficients de la matrice $(F_i \cdot F_j)$ et de $(\omega \cdot F_i)$ étant bornés en fonctions de g , il existe une constante $\alpha(g)$ telle que si

$\Phi = \sum \alpha_i F_i \quad \alpha_i \in \mathbb{Q} \text{ et } \alpha_{i_0} = 0$ (i_0 choisit à l'avance) alors

$$|\alpha_i| \leq d^o(D) \alpha(g)$$

(appliquer la règle de Cramer à un système de $(r-1)$ équations $r = \#$ composantes de la fibre).

(ii) Le cas général qui nous intéresse est celui de $D = E$ une section, mais après un changement de base de degré n et résolution des singularités depuis la situation (i). On a donc un certain nombre (au plus $(2g-1)$) de chaînes de longueur $(n-1)$ de \mathbb{P}^1 de self-intersection -2.

En projetant E sur la situation (i) on trouve un diviseur D de $d^o n$. Soit π la projection et Φ la solution trouvée en (i). On va chercher une solution Φ' au problème $((\omega' - (2g-2)E + \Phi') \cdot F'_i) = 0$ pour chaque composante F'_i de la fibre. (Notons que $\omega' = \pi^*\omega$). On va montrer qu'on peut prendre

$$\Phi' = \frac{1}{n} \pi^* \Phi + \sum \alpha_i \cdot D_i$$

où les D_i sont des \mathbb{P}^1 de self-intersections -2 arrangées en au plus $(2g-1)$ chaînes de longueur $(n-1)$.

Sur une de ces chaînes la matrice d'intersection est de la forme :

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = A_{n-1}$$

$\pi_*(\omega' - (2g-2)E) = n\omega - (2g-2)E$ par la formule de projection

$$(\omega' - (2g-2)E + \frac{1}{n} \pi^* \Phi \cdot \pi^* F_i) = (n\omega - (2g-2)E + \Phi \cdot F_i) = 0.$$

D'autre part si $(D_i \cdot E) = 0$, comme $(D_i \cdot \omega') = 0$ il nous suffit de résoudre

$$\text{i.e. } (\sum \alpha_j (D_j \cdot D_i)) = \begin{cases} 0 & \text{si } (D_i \cdot E) = 0 \\ 2g-2 & \text{si } (D_i \cdot E) = 1 \end{cases}$$

Déjà sur les chaînes de \mathbb{P}^1 qui ne rencontrent pas E on peut prendre les $\alpha = 0$.

Comme $\det(A_{n-1}) = (-1)^{n-1} n \neq 0$ les α_j existent et sont uniques.

Le coefficient a_{ij} de l'adjointe de A_{n-1} vaut $(-1)^n i(n-j)$. (Ces calculs se font simplement en notant qu'une relation de la forme $b_{j-1} - 2b_j + b_{j+1} = 0$ indique que les b_j sont en progression arithmétique). On voit ainsi que

$$|\alpha_j| \leq (2g-2)n.$$

D'autre part $-\Phi'^2 = (\Phi' \cdot (\omega' - (2g-2)E))$. Donc la contribution de $\sum_j \alpha_j \cdot D_j$ est seulement $-\alpha_j (2g-2)$, donc est bornée en valeur absolue par $(2g-2)^2 n$. La contribution de $\frac{1}{n} \pi^* \Phi$ est bornée en valeur absolue par $n^2 \alpha(g) (2g-2)^2$ en vertu de ce qu'on a vu en (i). Donc $|\Phi'^2|$ est un $O([K : \mathbb{Q}])$. C.Q.F.D.

Nous noterons $M(C)$, le nombre réel dont la proposition 1.1 assure l'existence. C'est la constante de Mumford. Notons la conséquence suivante de la démonstration de la proposition 1.1.

COROLLAIRES : Soit $f : X \rightarrow C$ un morphisme lisse et projectif d'une surface projective X sur K , dans une courbe lisse et projective sur K . Supposons que les fibres soient de genre $g \geq 2$ et telles, qu'il existe un ensemble fini de places S de K , tel que pour tout $K' \supset K$ et tout $P \in C(K')$, la fibre X_P ait bonne réduction en dehors de l'image réciproque de S sur K' . Alors

$$M(f) = \sup_{P \in C(\bar{K})} (M(X_P))$$

est fini.

PROPOSITION 1.2.- (D. Mumford) Avec les hypothèses et notations ci-dessus soient E une section de $f : C \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_K$. Supposons que le point x de la Jacobienne J correspondant comme en 1.1, satisfasse à

$$M(C) \leq |x|^2$$

alors le nombre de sections F de f , distinctes de E et dont le point y de J correspondant satisfasse à $|x| \leq |y| \leq 2|x|$, est inférieur à 5^ρ où ρ est le rang du groupe de Mordell - Weil $J(C)(K)$.

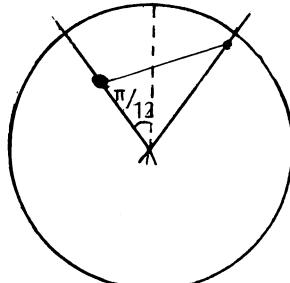
Le calcul d'angle (*) fournit

$$\cos \theta \leq 0,85$$

$$\text{donc } \theta \leq \frac{\pi}{6}.$$

Il reste à vérifier que dans un espace vectoriel réel de dimension ρ , l'ensemble des points de distance à l'origine $\leq 2|x|$ et dont les angles sont au moins $\frac{\pi}{6}$ est de cardinal au plus 5^ρ .

Par homothétie on se ramène dans la boule unité.



La distance de deux tels points est alors au plus $2 \sin \frac{\pi}{12} \leq \frac{1}{2}$. On a donc, si N est le nombre de points cherchés et v le volume de la boule unité dans \mathbb{R}^p ,

$$N v \left(\frac{1}{4}\right)^p \leq \left(\frac{5}{4}\right)^p v.$$

D'où le résultat.

2.- COMPTER LE NOMBRE DE POINTS

Parshin a indiqué comment borner le nombre de points rationnels d'une courbe de genre au moins deux en réinterprétant la démonstration de Faltings (améliorée par Raynaud) et en "injectant" la proposition ci-dessus de D. Mumford. Nous obtenons ainsi la réponse la plus précise, à l'heure actuelle (et à la connaissance de l'auteur de ces lignes) à la question de Mordell. Pour expliquer ce décompte il nous faut introduire certains nombres réels que nous appellerons "constantes" bien que nous indiquions entre parenthèse de quoi ils dépendent. Par exemple une notation comme $N(K,g)$ signifie un nombre réel qui dépend du corps K et de l'entier g !

a) La constante de Faltings : c'est celle mise en évidence dans l'exposé IX de ce séminaire (P. Deligne) : $F(K,S,g)$ est le nombre de classes d'isogénies de K variétés abéliennes de dimension g ayant bonne réduction en dehors de S . Une borne effective de $F(K,S,g)$ est calculée dans l'exposé 9.

b) La constante de Raynaud : $R(K,S,g)$ est la variation maximale de la hauteur modulaire dans une classe d'isogénies de K -variétés abéliennes de dimension g , ayant bonne réduction en dehors de S . Une borne effective de R est calculée dans l'exposé VII de ce séminaire (M. Raynaud).

c) La constante de Mumford : $M(K, C)$ décrite au §1 de cet exposé.

d) La constante d'Arakelov : $A(C)$, elle mesure essentiellement la différence entre la hauteur de Néron - Tate d'un point et la hauteur modulaire de la Jacobienne du revêtement ramifié de Kodaira - Parshin correspondant à ce point. (cf exposé X de M. Deschamps). Explicitons : soit C une courbe projective géométriquement connexe de genre $g \geq 2$ sur K . Soit C' le revêtement étale de C sur lequel la fibration que Kodaira $f : X \rightarrow C'$ est définie. On veut comparer la "hauteur d'Arakelov" $-E_P^2/[K:\mathbb{Q}]$ d'un point P de $C'(\bar{K})$ et la hauteur modulaire $h(J_P)$ de la Jacobienne J_P de la fibre X_P de X en P .

Cette dernière, comme la fibration de Kodaira est lisse, est une "bonne hauteur" sans singularités (logarithmiques), définie à partir de métriques sur :

$$\max_{(\Lambda f_* \omega_{X/C'})_\sigma}.$$

Par le théorème de Riemann - Roch - Grothendieck pour f , il est facile, en suivant la construction de Kodaira, de montrer qu'il existe un nombre rationnel positif $s(g, S)$ - S étant le lieu de mauvaise réduction de C' - tel que

$$\max_{(\Lambda f_* \omega_{X/C'})_K} s(g, S) \simeq \omega_{C'/K} \text{ modulo torsion.}$$

Il existe donc une constante $A_1(C)$ telle que

$$|h(J_P) + E_P^2/[K:\mathbb{Q}]s(g, S)| < A_1(C) \quad \text{sur } C'(\bar{K}).$$

Par le §1 de cet exposé $|-E_P^2/[K:\mathbb{Q}] - |x_P|^2| < A_2(C)$ sur $C'(\bar{K})$. On trouve donc la constante que j'appelle d'Arakelov telle que

$$|s(g, S)h(J_P) - |x_P|^2| < A(C) \quad \text{sur } C'(\bar{K})$$

où $|x_P|^2$ est la hauteur de Néron - Tate définie au §1.

c) g' est le genre de C' .

f) $\rho(C, K)$ est le rang du groupe de Mordell - Weil de C sur K .

THEOREME : Soit C une courbe projective, lisse, géométriquement connexe de genre g sur un corps de nombres K . Soit S l'ensemble des places de mauvaise réduction de C auquel on a éventuellement rajouté les places divisant 2.

Soit K' l'extension de K qui coiffe toutes les extensions de K de degré au plus 2^{2g} étales en dehors de S . Alors, avec les notations introduites ci-dessus, le cardinal de $C(K)$ est majoré par

$$\#\{P \in C'(K') \mid |x_P|^{2 < M(K', C')} \} + F(K', S, g') 5^{\rho(K', C')} (1 + [\log_2(s(g', S) R(K', S, g') + 2A(C))]).$$

Le résultat est clair à partir des définitions ci-dessus et des exposés I à X de ce séminaire, quand on a remarqué que, pour les points de C' de hauteur de Néron - Tate plus grande que $M(K', C')$ et qui ont des fibres dont les Jacobiniennes sont isogènes, on peut appliquer la proposition 1.2 un nombre de fois égal à

$$1 + [\log_2(s(g', S) R(K', S, g') + 2A(C))].$$

Remarque : A part les constantes M et A , on a montré dans ce séminaire que les nombres entrant dans le théorème ci-dessus sont effectivement bornables. Le lecteur curieux pourra s'amuser (?) à calculer la nature de la variation du nombre de points de $C(K)$ avec K . La raison qui empêche d'être plus précis sur M et A est dans les "termes à l'infini" qui ne sont bornés que pour des raisons de continuité et compacité. J'apporte au §3 ci-dessous quelques précisions sur la "constante" M . Notons tout de suite que dans un cadre géométrique (i.e. K corps de fonctions) la partie $\omega^2(\frac{1}{g} - 1) - (2g-2)^2(E_1 \cdot E_2)$ de M est négative !! La

troisième partie de M est bornée en termes de S et g comme on l'a vu plus haut.

3.- PETITS POINTS ET POINTS DE TORSION

3.1.- La conjecture des petits points :

J'ai montré dans le cadre géométrique l'énoncé suivant ([S]) que j'aimerais soumettre à la réflexion de mes collègues.

CONJECTURE : Soit C une courbe, lisse, projective, géométriquement connexe de genre $g \geq 2$ définie sur un corps de nombre K , alors il existe une fonction effectivement calculable $f(K, g, S)$ ne dépendant que de K , g et S (réunion des places à l'infini et du lieu de mauvaise réduction de C sur K), telle qu'il existe un point $P \in C(\bar{K})$, dont la section E_P de $C \rightarrow \text{Spec } \Omega_{K(P)}$ satisfait à :

$$-E_P^2 \leq [K(P):\mathbb{Q}] f(K, g, S).$$

Dans le cas géométrique $f(K, g, S)$ vaut $2\text{genre}(C) - 2 + \# S + 1$ dans [S].

Elle dépend bien simplement du corps et pas du genre !

Outre l'analogie avec les corps de fonctions, qui s'est révélée pour le moins fructueuse, l'intérêt de cette conjecture est qu'elle implique un "Mordell effectif" de la façon suivante :

PROPOSITION 3.1. - Soit C une courbe sur un corps de nombre K comme précédemment. Alors il existe un nombre réel $T(C)$ tel que si $P \in C(\bar{K})$ et E_P est la section correspondante de $f : C \rightarrow \text{Spec } \Omega_{K(P)}$

$$\frac{-E_P^2}{[K(P):\mathbb{Q}]} \leq T(C) + \frac{4}{3 \cdot 2^{2g}} \inf\{Q \in X_P(\bar{K}) \mid -E_Q^2 \frac{2g'(2g'-2)}{[K(Q):\mathbb{Q}]}\}$$

où X_P est le revêtement de C de genre g' dû à Kodaira-Parshin et qui n'est ramifié qu'en P .

Nous avons essentiellement montré cette proposition dans [S] dans le cadre géométrique, l'argument s'applique à la perfection au cas arithmétique, il faut juste rajouter le terme $T(C)$ qui provient de changement de métriques.

Explicitons brièvement :

Par le théorème de l'index (Faltings - Hriljac cf exposé II) on montre mon lemme favori

$$\omega_{X_P}^2 \leq -E^2 2g'(2g'-2) \quad (\text{cf. exposé II, proposition 6.17}).$$

pour toute section de X_P , le terme en "inf" dans la proposition 3.1 est donc une borne pour $\omega_{X_P}^2 / [K(P):\mathbb{Q}]$.

Maintenant en suivant pas à pas la construction de Kodaira - Parshin on voit qu'on a :

$$\text{"} \omega_{X_P} = \pi^* \omega_C (\frac{1}{2} E_P) \text{"} \quad \text{où} \quad \pi : X_P \longrightarrow C$$

aux métriques à l'infini près. Donc on a

$$\frac{\omega_{X_P}^2}{[K(P):Q]} + T(C) \geq 2^2 g(\omega_C^2 - \frac{3}{4} E_P^2) \quad (\omega_C^2 \geq 0 : \text{Faltings})$$

où on peut prendre $T(C)$ le même pour tout P (comparaison des métriques permises sur C et X_P pour tout P dans un espace compact !) Ceci montre la proposition.

On voit que la conjecture des petits points est une manière d'espérer avoir une borne pour $\omega_{X_P}^2$. Nous analysons plus bas comment des estimations de la constante de Mumford permettent aussi de borner $\omega_{X_P}^2$.

3.2.- Points de torsion et constante de Mumford

Ce paragraphe est basé sur le fait que le coefficient $(\frac{1}{g} - 1)$ de ω^2 dans la constante de Mumford est négatif !

LEMME : Soit C une courbe lisse projective, géométriquement connexe sur un corps de nombres K . Alors pour tout faisceau inversible ample métrisé L_K sur C_K , pour tout modèle entier (L, C) de (L_K, C_K) et tout nombre réel A il existe $P \in C(\bar{K})$ tel que :

$$h_L(P) > A.$$

J'avais une démonstration, dont le moins qu'on puisse dire est qu'elle était contournée, pour ce fait. L. Moret - Bailly m'a communiqué celle qui suit : On peut trouver un modèle entier de C sur $\text{Spec } \underline{O}_K$ que nous noterons encore C , et un morphisme génériquement fini

$$\pi : C \longrightarrow \mathbb{P}_{\underline{O}_K}^1$$

$$\text{tel que } \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{(1)}_K = L_K.$$

Donc (cf exposé I) il existe un réel B tel que $|h_L(P) - h_{\text{naïve}}(\pi(P))| < B$ pour tout $P \in C(\bar{K})$. Le lemme étant évident pour \mathbb{P}^1 , cette inégalité le prouve.

PROPOSITION 3.2. - Soit C une courbe de genre $g \geq 2$ définie sur un corps de nombres comme plus haut, $X \xrightarrow{f} C'$ la fibration de Kodaira associée. Alors pour tout nombre réel positif ou négatif a , il existe une infinité de $P \in C'(\bar{K})$ tel que la constante de Mumford $M(X_P)$ soit plus petite que a .

En effet, sinon, les constantes de Mumford $M(X_P)$ seraient bornées inférieurement pour tout $P \in C'(\bar{K})$

$$M(X_P) = \sup_{P_1, P_2} \left\{ \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \left(\omega^2 \left(\frac{1}{g} - 1 \right) - (2g-2)^2 (E_1 \cdot E_2) - \frac{\Phi_1^2 + \Phi_2^2}{2g} + (\Phi_1 \cdot \Phi_2) \right) \right\}.$$

Comme nous l'avons vu précédemment :

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \left(-(2g-2)^2 (E_1 \cdot E_2) - \frac{\Phi_1^2 + \Phi_2^2}{2g} + (\Phi_1 \cdot \Phi_2) \right)$$

est borné pour tout triplet (P, P_1, P_2) $P \in C'(\bar{K})$, $P_1, P_2 \in X_P(\bar{K})$ $P_1 \neq P_2$.

Si pour tout $P \in C'(\bar{K})$ on a $M(X_P) \geq a$, alors il existe une constante A telle que $\frac{1}{[K(P):\mathbb{Q}]} \omega_{X_P}^2 \leq A$ pour tout $P \in C'(\bar{K})$.

Ceci contredit le lemme précédent en vertu de la démonstration de la proposition 3.1.

La conséquence suivante nous a semblé mériter attention :

COROLLAIRE : Soit C une courbe de genre au moins deux sur \bar{Q} . Alors une infinité de fibres de la fibration de Kodaira associée à C n'ont pas, sur \bar{Q} , de couples de points distincts dont la différence est de torsion.

D'après la formule d'angle (*) du §1 de cet exposé si $P_1 - P_2$ est de torsion $M(C, P_1, P_2)$ est positif ou nul. En effet $x_1 = x_2$. Ceci donne le corollaire en prenant $a = 0$ dans la proposition 3.2.

Notons que l'existence même de courbes sur $\overline{\mathbb{Q}}$ dont la différence de deux points distincts n'est jamais de torsion n'est pas évidente à priori. Par exemple pour montrer qu'on a de telles courbes sur le corps des complexes, on utilise qu'une intersection dénombrable d'ouvert denses du module des courbes est non vide. Un tel argument est évidemment sans espoir sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

B I B L I O G R A P H I E

- [F] G. FALTINGS.- *Calculus on arithmetic surfaces*, Ann. of Math. 119 (1984), 387-424.
- [H] P. HRILJAC.- *Thesis M.I.T.* 1981.
- [M] D. MUMFORD.- "A remark on Mordell's conjecture".
American Journ. of Math. 87 (1965) 1007-1016.
- [S] L. SZPIRO.- "Propriétés numériques du faisceau dualisant relatif"
exposé n° 3 in "Pinceaux de courbes de genre au moins deux".
Astérisque (1981) n° 86.

Lucien SZPIRO
Ecole Normale Supérieure
Centre de Mathématiques
45, rue d'Ulm
75230 PARIS CEDEX