餐厅返券卡与打折卡的比较

作者：计 82 郑凯文 2018011314
计 86 周恩贤 2018011438
水利 86 韩家乐 2018010277

摘要

本文针对餐厅推出的打折卡和返券卡两种优惠方案，主要运用不动点法研究离散问题，给出了返券卡的最小折扣数并将其和打折卡比较，最终为两种顾客提供了能得到最多优惠的选择。

对问题 1，通过对较小区间内消费额的折扣以相等权重利用数学软件 MATLAB 求平均，得出平均折扣数在 6.9 折左右。

对问题 2，通过对一次性顾客消费方式的分析，利用市场等价交换的原则，得出了返券的合理市场价 $\frac{100}{3}$ 元。

对问题 3，通过对顾客类别和消费金额的讨论，得出消费 100 元以下应使用打折卡，消费 100 元以上应使用返券卡的结论。

对问题 4，给出了三点可能的原因。

关键词：返券与打折 等价折扣 不动点法 MATLAB 软件

正文

一、问题的提出

某餐厅推出了打折卡、返券卡两种优惠措施，打折卡可以对所有消费打八折，返券卡“吃一百返五十”，但每张返券有效期为一个月，且每次使用返券支付的部分不超过总餐费一半。使用返券卡过程中，可以有补钱、卖券、借券等措施来增加优惠幅度。请作出模型假设，建立数学模型并回答以下问题：

1、你觉得从实际情况出发，使用返券卡相当于打几折？

2、你觉得 50 元的代金券能够用 50 元现金的价格卖出去吗？如果不能，什么价格比较有可能？

3、作为餐厅的顾客，究竟应该选择返券卡，还是打折卡？

4、作为餐厅，有必要提供这两种优惠卡吗？为什么不只提供其中一种卡呢？

二、问题的分析

本题是围绕打折和返券两种优惠方式的异同提出的。

此题中，打折卡的优惠方式较为简单，容易研究。而返券卡是慢 100 返 50，存在临界突变的情况，因此较为离散。且此题变量较多，返券会不会过期、顾客每次消费额如何变化等均很难把握。为研究问题方便，可做一些理想假设，忽略次要因素，如忽略返券过期的情况，忽略消费额的浮动。

三、模型假设

① 餐厅的顾客为一次性顾客或常客，一次性顾客因返券在当次消费中无法使用且有效期为一个月的限制而无法使用自己在消费中得到的返券，常客因经常来餐厅得到的返券不存在此问题

② 返券卡可以出售，且买家为餐厅的一次性顾客，买家市场足够大，一张返券在市场中的价格统一

③ 餐厅的常客每次消费金额相对稳定，不考虑借券

④ 餐厅的常客若使用返券卡，则得到的返券将全部保留或全部卖出

⑤ 餐厅的一次性顾客若使用返券卡，则将尽可能多地买入返券或不买入返券

⑥ 餐厅的一次性顾客不会补钱来多买一些食品，餐厅的常客在某些情况下可以选择补钱，但因多买的食品在需求之外，认为其对顾客无价值，因此只有从长远看平均花的钱比不补钱时少时顾客才会补钱

四、从一次性顾客说起

先来讨论一次性顾客的最优选择，并从中得出返券的价值。

设一次性顾客的消费额 $p(m,n)=50m+n(m\ge 0,0\le n<50,m,n\in\mathbf{N})$，对其而言合适的返券价格为 $q(m,n)$ 每张。

当 $m<2$ 时，$p(m,n)<100$，由返券支付的金额不超过总消费额的一半可知，此顾客既不能使用返券，也不能得到返券，因此使用打折卡为最优惠的选择。

若 $m\ge 2$，若此顾客使用返券卡，由市场的等价交换原则，此顾客尽可能多地买入返券，与不买入返券并将因现金支付而获得的返券全部卖出最终花的钱相等，即 $mq(m,n)+n=p(m,n)-[\frac{m}{2}]q(m,n)$，化简得 $q(m,n)=\dfrac{50m}{m+[\frac{m}{2}]}=\begin{cases}\dfrac{100}{3}，m为偶数\\ \dfrac{100m}{3m-1}，m为奇数\end{cases}$。

因此可知 $q(m,n)\ge\dfrac{100}{3}$，且 m 为奇数时 m 越大，$q(m,n)$ 越接近 $\dfrac{100}{3}$。因一次性顾客足够多，一定存在买入返券比打折优惠的消费额（见以下讨论），因此返券定价 $q=\dfrac{100}{3}$ 时合适且保证可以卖出。

下面讨论 $m\ge 2$ 时一次性顾客的最优惠方式。设买入返券相当于的折数为 $\alpha(m,n)$。使用打折卡的折数为 $\beta=8$。可知 $\alpha(m,n)=\dfrac{\frac{100}{3}m+n}{50m+n}*10$，于是可得 $\alpha(m,n)-\beta=\dfrac{2(n-\frac{100}{3}m)}{50m+n}$。考虑到 $m\ge 2,0\le n<50$，必有 $\alpha(m,n)-\beta<0$，即 $\alpha(m,n)<\beta$。故买入返券一定是最优惠方式。再考察买入返券打的折数 $\alpha(m,n)=\dfrac{\frac{100}{3}m+n}{50m+n}*10=\dfrac{1000\frac{m}{n}+30}{150\frac{m}{n}+3},\dfrac{m}{n}\in(\dfrac{1}{25},+\infty)\Rightarrow\alpha(m,n)\in[\dfrac{20}{3},\dfrac{70}{9})$。

五、对常客的优惠情况的讨论

讨论常客的优惠情况并表示出其使用返券卡时的等价折数。

设常客的消费为$P(M,N)=100M+N(M\geq 0,0\leq N<100,M,N\in\mathbf{N})$。

这里引入消费结构(x,y)，x,y分别表示一次消费中使用返券支付的金额和花的现金数。

当$M<1$时，与一次性顾客的对应情况相同，此顾客既不能使用返券也不能得到返券，因此应使用打折卡。

当$M\geq 1$时，若顾客使用打折卡，则折扣恒为$\beta=8$。

若顾客使用返券卡，可设置保留返券模型、卖出返券模型。保留返券模型下，顾客将把得到的返券全部保留；在卖出返券模型下，顾客将把得到的返券全部卖出。设保留返券模型下等价折数为$\lambda(M,N)$，卖出返券模型下等价折数为$\mu(M,N)$。我们先对返券全部保留的情况作出计算。因我们讨论的是长期的、平均的效果，因此可认为每次使用的返券数、现金数最终会达到一个稳定的不动点或近似稳定的情况。下面将就此不动点进行讨论。设稳定情况下，消费结构为$(50k(M,N),100k(M,N)+s(M,N)(0\leq s(M,N)<100))$，即现金中100元的整数倍部分得到了返券。因此，有关系式$P(M,N)=150k(M,N)+s(M,N)(k(M,N)\in\mathbf{N},0\leq s(M,N)<100)$。将此等式进行移项，并代入$s(M,N)$的范围，化简可得$k(M,N)\in\left(\frac{P(M,N)}{150}-\frac{2}{3},\frac{P(M,N)}{150}\right]$，$k(M,N)$取此区间中的整数（有可能取不到），则$\lambda(M,N)=\frac{100k(M,N)+s(M,N)}{P(M,N)}*10=(1-\frac{50k(M,N)}{P(M,N)})*10$。设$\lambda(M,N),\mu(M,N)$中较小者为$\varphi(M,N)$，其代表了使用返券卡的最终折扣。

下面分三种情况，每种情况分保留返券模型、卖出返券模型讨论（暂不考虑补钱）。

1. 当$K(M,N)=\frac{P(M,N)}{150}$时，即$P(M,N)$为150的整数倍时，设$P(M,N)=150v(v\in\mathbf{N}^*)$。

①保留返券模型

$\lambda(M,N)$取最小值$\frac{20}{3}$。此时折数取到理论最小值。设最小折扣数$z=\frac{20}{3}$。

②卖出返券模型

$\mu(M,N)=\left(1-\frac{qM}{P(M,N)}\right)*10$。当$v$为偶数时，$\mu(M,N)=\left(1-\frac{\frac{100}{3}*\frac{3}{2}v}{150v}\right)*10=\frac{20}{3}$。

当 v 为奇数时， $\mu(M,N)=\left(1-\dfrac{\dfrac{100}{3}*(1+\dfrac{3}{2}(v-1))}{150v}\right)*10=\dfrac{20}{3}+\dfrac{10}{9v}>\dfrac{20}{3}$。

③二者的比较

易知$\varphi(M,N)=\lambda(M,N)=\mu(M,N)(v\text{为奇数})=\dfrac{20}{3}$

2.当 $k(M,N)$ 可以取到整数，即存在稳定点时，设 $k(M,N)=t(t\in\mathbf{N}^*)$，则有

$$\frac{P(M,N)}{150}-\frac{2}{3}<t<\frac{P(M,N)}{150}\Rightarrow 150t<P(M,N)<150t+100。$$

①保留返券模型

$$\lambda(M,N)=(1-\frac{50k(M,N)}{P(M,N)})*10=(1-\frac{50t}{P(M,N)})*10\in(\frac{20}{3},\frac{20(t+1)}{3(3t+2)})$$

②卖出返券模型

$$\mu(M,N)=\left(1-\frac{qM}{P(M,N)}\right)*10=\begin{cases}\left(1-\dfrac{50t-\dfrac{50}{3}}{P(M,N)}\right)*10,150t<P(M,N)<150t+50,t\text{为奇数}\\ \left(1-\dfrac{50t+\dfrac{50}{3}}{P(M,N)}\right)*10,150t+50\le P(M,N)<150t+100,t\text{为奇数}\\ \left(1-\dfrac{50t}{P(M,N)}\right)*10,t\text{为偶数}\end{cases}$$

$$\mu(M,N)\in\begin{cases}(\dfrac{20}{3}+\dfrac{10}{9t},\dfrac{20}{3}+\dfrac{20}{9t+3}),150t<P(M,N)<150t+50,t\text{为奇数}\\ [\dfrac{20}{3},\dfrac{20}{3}+\dfrac{10}{9t+6}),150t+50\le P(M,N)<150t+100,t\text{为奇数}\\ (\dfrac{20}{3},\dfrac{20}{3}+\dfrac{20}{9t+6}),t\text{为偶数}\end{cases}$$

③二者的比较

当$150t<P(M,N)<150t+50,t$为奇数时，可以看出$\lambda(M,N)<\mu(M,N)$

当$150t+50\le P(M,N)<150t+100,t$为奇数时，可以看出$\lambda(M,N)>\mu(M,N)$

当t为偶数时，可以看出$\lambda(M,N)=\mu(M,N)$

因此 $\varphi(M,N)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{50t}{P(M,N)}\right)*10,150t<P(M,N)<150t+50,t\text{为奇数}\\ \left(1-\dfrac{50t+\dfrac{50}{3}}{P(M,N)}\right)*10,150t+50\le P(M,N)<150t+100,t\text{为奇数}\\ \left(1-\dfrac{50t}{P(M,N)}\right)*10,t\text{为偶数}\end{cases}$

3.当 $k(M,N)$ 无法取到整数，即不存在稳定点时，设 $k(M,N)$ 的取值区间在区间

$(u-1,u)(u\in\mathbf{N}^*)$ 内，则有 $\begin{cases}\dfrac{P(M,N)}{150}-\dfrac{2}{3}\ge u-1\\ \dfrac{P(M,N)}{150}<u\end{cases}\Rightarrow 150u-50\le P(M,N)<150u$ 。

①保留返券模型

虽然不存在稳定点，但若将每次的返券在下次全部用掉，则最终的花钱和用券情况一定会循环出现。由于吃的次数足够多，可将一轮循环的平均花钱当作总的平均花钱数。经计算可知，最终会陷入 $\{(50(u-1),P(M,N)-50(u-1)),(50u,P(M,N)-50u)\}$ 的循环当中。因此一轮循环只有两次，取两次花的现金的平均值作为平均的现金花费，则有

$$\lambda(M,N)=\frac{\dfrac{(P(M,N)-50(u-1))+(P(M,N)-50u)}{2}}{P(M,N)}*10=10-\frac{500u-250}{P(M,N)}\in[\frac{20}{3}+\frac{5}{9u-3},\frac{20}{3}+\frac{5}{3u})$$

②卖出返券模型

$$\mu(M,N)=\left(1-\frac{qM}{P(M,N)}\right)*10=\begin{cases}\left(1-\dfrac{50u-\dfrac{50}{3}}{P(M,N)}\right)*10,u\text{为奇数}\\ \left(1-\dfrac{50u-\dfrac{100}{3}}{P(M,N)}\right)*10,u\text{为偶数}\end{cases}\in\begin{cases}[\dfrac{20}{3},\dfrac{20}{3}+\dfrac{10}{9u}),u\text{为奇数}\\ [\dfrac{20}{3}+\dfrac{10}{9u-3},\dfrac{20}{3}+\dfrac{20}{9u}),u\text{为偶数}\end{cases}$$

③二者的比较

当 u 为奇数时，可以看出 $\lambda(M,N)>\mu(M,N)$

当 u 为偶数时，可以看出 $\lambda(M,N)<\mu(M,N)$

因此$\varphi(M,N)=\begin{cases}10-\dfrac{500u-\dfrac{500}{3}}{P(M,N)},u\text{为奇数}\\10-\dfrac{500u-250}{P(M,N)},u\text{为偶数}\end{cases}$

下面来讨论补钱的可能情况。由以上讨论可算出，能达到最小折扣数$z=\dfrac{20}{3}$的消费额$P(M,N)$为 100 或 150 的整数倍。因此如果补钱，一定是向距离自己最近的 100 或 150 的整数倍消费额上凑。下面仍根据上面的三种情况来分类，讨论每种情况下是否需要补钱以及补钱的效果。设补钱后的等价折扣为$c(M,N)$，经优化后的等价折扣为$\varphi'(M,N)$。

1.

已是最优，无需补钱。$\varphi'(M,N)=\varphi(M,N)=\dfrac{20}{3}$。

2.

当$150t<P(M,N)<150t+50,t\text{为奇数}$时，应向$150t+50$上补。

$c(M,N)=\dfrac{\frac{2}{3}(150t+50)}{P(M,N)}*10=\dfrac{100t+\frac{100}{3}}{P(M,N)}*10$。

令$c(M,N)<\varphi(M,N)$，解之得$P(M,N)>150t+\dfrac{100}{3}$。

故$\varphi'(M,N)=\begin{cases}(1-\dfrac{50t}{P(M,N)})*10,150t<P(M,N)\le 150t+\dfrac{100}{3}\\\dfrac{100t+\frac{100}{3}}{P(M,N)}*10,150t+\dfrac{100}{3}<P(M,N)<150t+50\end{cases}$

当$P(M,N)=150t+50,t\text{为奇数}$时，已是最优，$\varphi'(M,N)=\varphi(M,N)=\dfrac{20}{3}$。

当$150t+50<P(M,N)<150t+100,t\text{为奇数}$时，应向$150t+150$上补。

$c(M,N)=\dfrac{\frac{2}{3}(150t+150)}{P(M,N)}*10=\dfrac{100t+100}{P(M,N)}*10$。

令$c(M,N)<\varphi(M,N)$，在范围内无解。故$\varphi'(M,N)=\left(1-\dfrac{50t+\frac{50}{3}}{P(M,N)}\right)*10$

当$t\text{为偶数}$时，应向$150t+100$上补。

$$c(M,N)=\frac{\frac{2}{3}(150t+100)}{P(M,N)}*10=\frac{100t+\frac{200}{3}}{P(M,N)}*10$$ 。

令 $c(M,N)<\varphi(M,N)$，解之得 $P(M,N)>150t+\frac{200}{3}$ 。

$$故\varphi'(M,N)=\begin{cases}(1-\frac{50t}{P(M,N)})*10,150t<P(M,N)\le 150t+\frac{200}{3}\\ \frac{100t+\frac{200}{3}}{P(M,N)}*10,150t+\frac{200}{3}<P(M,N)<150t+100\end{cases}$$

3.

当 u 为奇数时，应向 $150u$ 上补。$c(M,N)=\frac{100u}{P(M,N)}*10$ 。

令 $c(M,N)<\varphi(M,N)$，解之得 $P(M,N)>150u-\frac{50}{3}$ 。

$$故\varphi'(M,N)=\begin{cases}(1-\frac{50u-\frac{50}{3}}{P(M,N)})*10,150u-50\le P(M,N)\le 150u-\frac{50}{3}\\ \frac{100u}{P(M,N)}*10,150u-\frac{50}{3}<P(M,N)<150u\end{cases}$$

当 u 为偶数时，应向 $150u$ 上补。$c(M,N)=\frac{100u}{P(M,N)}*10$ 。

令 $c(M,N)<\varphi(M,N)$，解之得 $P(M,N)>150u-25$ 。

$$故\varphi'(M,N)=\begin{cases}(1-\frac{50u-25}{P(M,N)})*10,150u-50\le P(M,N)\le 150u-25\\ \frac{100u}{P(M,N)}*10,150u-25<P(M,N)<150u\end{cases}$$

下面比较返券卡与打折卡在不同消费额下的优惠情况。

1.

$\varphi'(M,N)=z=\frac{20}{3}<\beta=8$，故返券卡优惠。

2.

当 $150t<P(M,N)<150t+50,t$ 为奇数时

经计算可得出 $\varphi'(M,N)_{\max}-\beta=\frac{4(1-3t)}{9t+2}<0$，故返券卡优惠。

当 $P(M,N)=150t+50,t$ 为奇数时

$\varphi'(M,N)=z=\dfrac{20}{3}<\beta=8$，故返券卡优惠。

当$150t+50<P(M,N)<150t+100,t$为奇数时

经计算可得出$\varphi'(M,N)_{\max}-\beta=\dfrac{2(1-6t)}{9t+6}<0$，故返券卡优惠。

当t为偶数时

经计算可得出$\varphi'(M,N)_{\max}-\beta=\dfrac{4(2-3t)}{9t+4}<0$，故返券卡优惠。

3.

当u为奇数时

经计算可得出$\varphi'(M,N)_{\max}-\beta=\dfrac{4(2-3u)}{9u-1}<0$，故返券卡优惠。

当u为偶数时

经计算可得出$\varphi'(M,N)_{\max}-\beta=\dfrac{8(1-u)}{6u-1}<0$，故返券卡优惠。

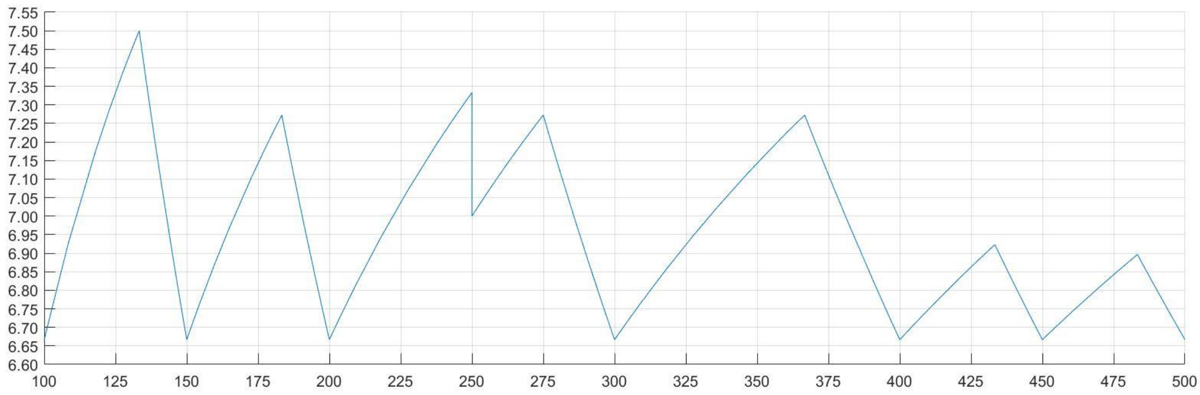
综上可知，$M\geq 1$时，理论上总可使使用返券卡比使用打折卡优惠，因此顾客应选用返券卡。

六、对常客消费额较小时使用返券卡的折扣的具体分析

一般情况下，大额消费出现的频率较低，常客日常稳定的消费额不会太高。因此下面对$P(M,N)\in[100,500]$时的$\varphi'(M,N)$进行分析。设$x=P(M,N),y=\varphi'(M,N)$，此时y可写成以下的分段函数。

$$
y=\begin{cases}
10-\dfrac{1000}{3x},100\le x\le\dfrac{400}{3}\\
\dfrac{1000}{x},\dfrac{400}{3}<x<150\\
10-\dfrac{500}{x},150\le x\le\dfrac{550}{3}\\
\dfrac{4000}{3x},\dfrac{550}{3}<x\le 200\\
10-\dfrac{2000}{3x},200<x<250\\
10-\dfrac{750}{x},250\le x\le 275\\
\dfrac{2000}{x},275<x<300\\
10-\dfrac{1000}{x},300\le x\le\dfrac{1100}{3}\\
\dfrac{8000}{3x},\dfrac{1100}{3}<p<400\\
10-\dfrac{4000}{3x},400\le x\le\dfrac{1300}{3}\\
\dfrac{3000}{x},\dfrac{1300}{3}<x\le 450\\
10-\dfrac{1500}{x},450<x\le\dfrac{1450}{3}\\
\dfrac{10000}{3x},\dfrac{1450}{3}<x\le 500
\end{cases}
$$

使用 MATLAB 画出此函数图像如下（见附录 MATLAB 代码 1）



从图像中可以看出，在消费额较小时，折数大致分布在 6.7~7.5 的范围内，符合之前对于返券卡优于打折卡的论断。为了得出其平均折扣，可以假设有大量常客，他们的消费额均匀分布于 $[x_1,x_2]$ 的范围内，用他们的平均折扣 $a(x_1,x_2)$ 来代表整体，可知

$$a(x_1,x_2)=\frac{\int_{x_1}^{x_2} ydx}{x_2-x_1}。$$

取区间[100,500]和[300,500]，可计算出 $a(100,500)=6.96$，$a(300,500)=6.885$。（见附录 MATLAB 代码 2）

七、对餐厅推出两种优惠卡原因的分析

在上述分析中，我们很容易看出当消费额多于 100 元时，返券卡优惠幅度大于打折卡。餐厅推出这两种卡，第一应该是一种营销手段，即故意抬高原价，令顾客认为打折多便是优惠；第二是给顾客提供多种选择，因为大部分人不会深入分析两种优惠卡的优劣，很可能凭自己喜好选择，即使选择了返券卡也可能不知道如何有效利用；第三是现实中可能会出现返券丢失、过期等问题，不可能如模型那般绝对。

八、模型的优缺点

优点：简化顾客分类，简化常客消费额可能存在的浮动，因而能够较为明确地计算出折扣，表达式清晰明了；使用 MATLAB 进行作图和计算，减小了可能的误差。

缺点：没有考虑返券买卖市场的存在性与可行性，没有考虑餐厅的一次性顾客少于常客的可能性；对于此类离散问题中初始数据浮动的情况缺乏有效的处理方法和数学工具，因而显得过于理想化；没有考虑借券、常客主动买券等情况。

九、模型的可能拓展方向

进一步的拓展可以在本模型的基础上继续考虑借券、常客主动买券的情况；可以加入返券的损失率，使其更贴近实际；可以加入消费额浮动的范围，或加入不同常客消费额分布的一些模型对平均折数做更加科学的计算。

参考文献

[1] 大斌侃情感，折扣效应：打折与返券，你选哪个，https://baijiahao.baidu.com/s?id=1604753328879392476

[2] 未知作者，返券促销的经济学分析，https://wenku.baidu.com/view/a4cef037f011f18583d049649b6648d7c1c70829.html

附录

一、MATLAB 代码 1

```
clc; clear all
X0 = [100 500]
fun = @(x) ((10-1000./(3.*x)).*(x>=100 & x<=400/3)...
            +(1000./x).*(x>400/3 & x<150)...
            +(10-500./x).*(x>=150 & x<=550/3)...
            +(4000./(3.*x)).*(x>550/3 & x<=200)...
            +(10-2000./(3.*x)).*(x>200 & x<250)...
            +(10-750./x).* (x>=250 & x<=275)...
            +(2000./x).*(x>275 & x<300)...
            +(10-1000./x).*(x>=300 & x<=1100/3)...
            +(8000./(3.*x)).*(x>1100/3 & x<400)...
```

```
                +(10-4000./(3.*x)).*(x>=400 & x<=1300/3)...
                +(3000./x).*(x>1300/3 & x<=450)...
                +(10-1500./x).*(x>450 & x<=1450/3)...
                +(10000/(3.*x)).*(x>1450/3 & x<=500)...
                );
grid
hold on
fplot(fun, X0)
pause
```

二、MATLAB 代码 2

```
clc; clear all;
syms x
fun1 = 10-1000./(3.*x);
fun2 = 1000/x;
fun3 = 10-500./x;
fun4 = 4000./(3.*x);
fun5 = 10-2000./(3.*x);
fun6 = 10-750./x;
fun7 = 2000./x;
fun8 = 10-1000./x;
fun9 = 8000./(3.*x);
fun10 = 10-4000./(3.*x);
fun11 = 3000./x;
fun12 = 10-1500./x;
fun13 = 10000./(3.*x);
a1=int(fun1,100,(400/3))+int(fun2,(400/3),150)+int(fun3,150,(550/3))...
     +int(fun4,(550/3),200);
a2=int(fun5,200,250)+int(fun6,250,275)+int(fun7,275,300);
a3=int(fun8,300,(1100/3))+int(fun9,(1100/3),400);
a4=int(fun10,400,(1300/3))+int(fun11,(1300/3),450)+int(fun12,450,(1450/3))+int(fun13,(1450
/3),500);
fprintf('the result is:');
a1
a2
a3
a4
sum=a1+a2+a3+a4;
sum1=a3+a4;
fprintf('the total area of 100~500 is:%f\n',sum);
fprintf('the average discount in [100,500] is about:%f\n',sum/400);
fprintf('the total area of 300~500 is:%f\n',sum1);
fprintf('the average discount in [300,500] is about:%f\n',sum1/200);
```