第三次作业

清华园自行车流量与食堂人数稳态之探讨

姓 名 学 号：计算机系 周恩贤 2018011438

姓 名 学 号：计算机系 郑凯文 2018011314

姓 名 学 号：水利系　 韩家乐 2018010277

完 成 日 期：2018.12.31

摘要

中午刚下课时段的清华园内自行车车流量大，食堂人数多，道路的拥挤与食堂的队伍长度都是从教学楼出来的学生选择路线去食堂时需要考虑的因素。为此，针对该时间段提出了将道路自行车流量与食堂人数作为一个系统考虑的分析方案，期望建立每个学生从离开教学楼到排队完毕用时基本相同的稳态。在现有交通流模型的基础上结合实际情况，引入了拥挤系数，建立了线性修正下的交通流模型；归结出了长期平均效果下的排队模型。之后编写计算机程序将采集的数据代入已抽象化的系统进行计算，得出了稳态下的人均耗时以及人流分配等结果，并对特定参数的改动对结果的影响进行了考察，为现实中平常与非常状况下如何引导学生以舒缓道路与食堂的拥挤提供了可供参考的建议。

【关键词】交通流模型；稳态；约束方程；计算机求近似解

1 问题背景与提出

来到清华两个月了，想必大家都有见证过学堂路、新民路的＂堵车盛况＂，也面临过在食堂大排长龙的情形，尤其是 12：15，也就是中午第二大节课下课的时候。常常，我们会因为食堂选择的问题而感到烦恼：清芬园距离近，但排队的人也多；丁香园排队的人会少一些，但距离较为远；桃李、紫荆园离宿舍最近，但需要穿越更长的堵车风暴……。同时，如果从不同教室楼出发，也可能走不同的路线。

也因此，我们萌生了几个问题：从教室楼到食堂再回宿舍，选择哪个食堂最为便捷？同时，面对堵车和排队风暴，如何规划路线并选择食堂才能使得各道路与食堂保持畅通而不拥堵？针对这些问题，是否有一个稳定状态存在？

自然地，我们想展开研究分析以上问题。同时，我们也不愿意看到前往各个食堂所需时间差异过大。因此，如何找到自行车流量与各个食堂人数达到的稳定状态，并由此得出能引导学生的优化措施，正是我们想解决的问题与此次研究之目的。

2 假设与定义

2.1 基本假设

① 从下课开始有一段时间的人流高峰期，认为在此段时间内人流量相对稳定，只对这段时间进行研究

② 为简化模型，减小计算难度，将教学楼和食堂分为三组，只研究人流量较大的主干道，在道路上只研究单向的行进方式；在宿舍区附近，对道路进行简化处理，并认为人流量较小，道路畅通

③ 认为每条道路的人流分配以及每个食堂的人流量保持不变，在此基础上研究使不同人从离开教学楼到吃上饭所需时间尽量一致的稳定状态

④ 食堂每个窗口服务一个人的时间相同

⑤ 一教二教以及新水的人流与三到六教的人流同时到达学堂路与至善路交叉口处

⑥ 丁香园以北道路不拥堵，其余道路拥堵

⑦ 在学期的较长时间内，每个同学出教学楼并到达食堂的先后顺序是随机均匀分布的

2.2 定义与符号说明

T_0：下课后教学楼高峰流量的持续时间（此问题讨论的时间范围）

c_i： 第 i 组教学楼

r_i： 第 i 个食堂

l_i： 第 i 条道路

q_{c_i}： 离开第 i 组教学楼的人流量

q_{r_i}： 进入第 i 个食堂的人流量

q_{l_i}： 骑行在第 i 条道路的人流量

v_i： 第 i 条道路的骑行速度

k_i： 第 i 条道路的交通流密度

$d_{ij}(l_{k_1}, l_{k_2} \ldots)$： i 教学楼到 j 食堂通过路径 $(l_{k_1}, l_{k_2} \ldots)$ 的路程

n_i： 第 i 个食堂的窗口数

t_0： 食堂每个窗口服务一个人的时间

t_i： 第 i 条路的通行时间

$\bar{t}_i$： 到第 i 个食堂吃饭的同学的平均排队时间

μ： 拥挤系数

t： 每个同学从离开教学楼到吃上饭所需的时间

以上量的单位设置：

时间：min

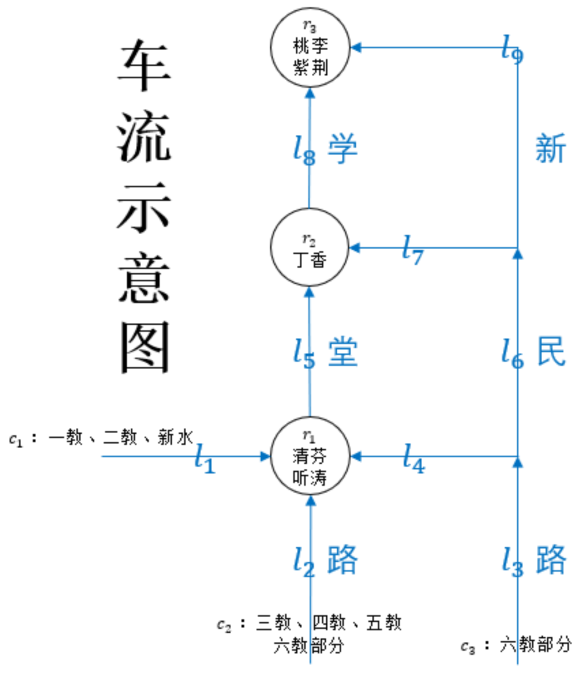
路程：m

流量：辆/min

密度：辆/m

速度：m/min

教学楼、食堂、道路的分组简化及编号如右图:



3 模型的建立与求解

3.1 线性修正下的交通流模型[1][2]

交通流可用流量、速度、密度三个基本特性描述。

在某条路 l_i 上

流量 q_{l_i} 指某时刻单位时间内通过道路指定断面的车辆数，通常以辆 / h 为单位

速度 v_i 指某时刻通过道路指定断面的车辆速度，通常以 km / h 为单位

密度k_i指某时刻通过道路指定断面单位长度内的车辆数，通常以辆／km 为单位

依照物理定律，流量q_{l_i}、速度v_i、密度k_i满足

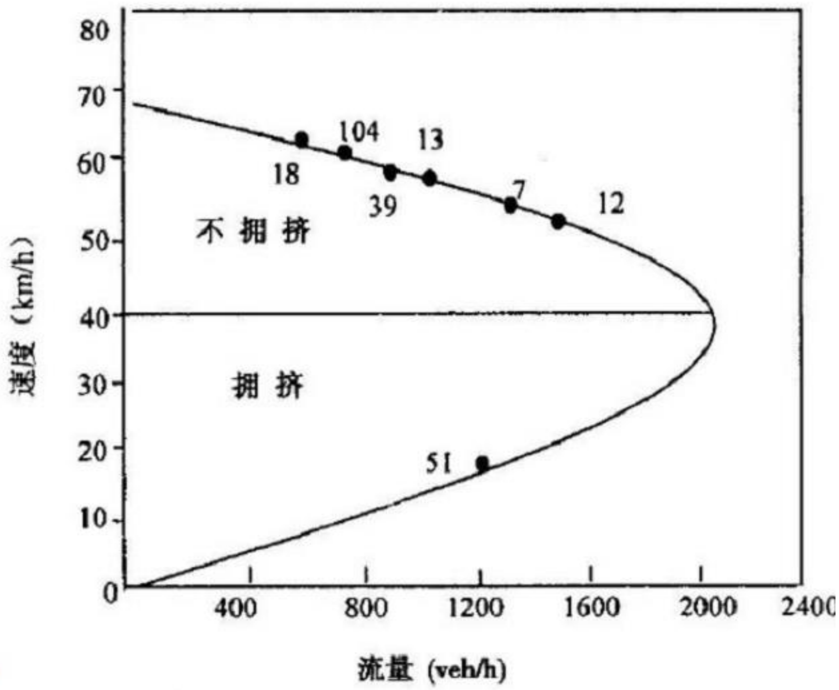
$$q_{l_i} = v_i k_i$$

理想情况下，车速与密度符合一个线性模型，其中v_0为最高车速，$k_{\max}$为阻塞密度

$$v_i = v_0 (1 - \frac{k_i}{k_{\max}})$$

由模型假设可知，某条路上三个量均为定值，将k_i消去，解得$v_i = \frac{v_0}{2} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{4} - \frac{q_{l_i} v_0}{k_{\max}}}$

速度与流量的关系示例如下，二者成抛物线的关系



根据此图，在拥挤的路段上式应取减号，不拥挤的路段取加号

然而拥挤条件下正相关的关系，是由于交通的滞涩不通被迫造成了流量减小，如高速公路上“大堵车”的情形，这种情景显然与本模型的假设不符。因此，清华园内的堵车尚未达到上图中“拥堵”的程度，上式仍取加号。

此时，为了再次计入流量对速度的负面作用，使用线性拟合的方法，引入拥挤系数μ，修正后$t_i = \frac{d_i}{v_i} + \mu q_{l_i}$

于是线性修正下某路段通行时间的表达式为

$$t_i = \frac{d_i}{\frac{v_0}{2}+\sqrt{\frac{v_0^2}{4}-\frac{q_{l_i}v_0}{k_{\max}}}}+\mu q_{l_i} \cdots\cdots ①$$

3.2 长期平均效果下的排队模型

第 i 个食堂的等效人流量为 $\frac{q_{r_i}}{n_i}$

由于进入某个食堂的人流量恒定，所以排队人数随时间线性增加，排队时间随时间线性增加。故单次平均排队时间等于首先到达的同学的排队时间和最后到达的同学的排队时间的平均值，即

$$\bar{t_i} = \frac{t_0+(\frac{q_{r_i}}{n_i}T_0-\frac{T_0}{t_0})t_0}{2} \cdots\cdots ②$$

且假设了每个同学到达的先后顺序随机且均匀，先到和后到的机会是一样多的，因此长期的平均效果下，每位同学整个学期的平均排队时间可等效为单次的平均排队时间。

3.3 模型的求解

假设处在稳定状态。

第 1，2，3 条道路上的人流量分别仅来自第 1，2，3 组教学楼。

$$\begin{cases} q_{c_1}=q_{l_1} \\ q_{c_2}=q_{l_2} \\ q_{c_3}=q_{l_3} \end{cases} \cdots\cdots ③$$

对于任一路口，汇入的人流量等于流出的人流量与进入食堂的人流量之和。

$$\begin{cases} q_{l_1}+q_{l_2}+q_{l_4}=q_{l_5}+q_{r_1} \\ q_{l_5}+q_{l_7}=q_{l_8}+q_{r_2} \\ q_{l_8}+q_{l_9}=q_{r_3} \\ q_{l_3}=q_{l_4}+q_{l_6} \\ q_{l_6}=q_{l_7}+q_{l_9} \end{cases} \cdots\cdots ④$$

假设从六教出发到第 2，3 条道路的起点所需时间相同。那么从六教出发到某一组食堂所需的时间与路径选择无关：

$$\begin{cases} t_2 = t_3 + t_4 \\ t_2 + t_5 = t_3 + t_6 + t_7 \\ t_2 + t_5 + t_8 = t_3 + t_6 + t_9 \end{cases} \qquad \cdots\cdots⑤$$

从三教出发到达各个食堂并排队用餐的所需时间相同：

$$t = t_2 + \overline{t_1} = t_2 + t_5 + \overline{t_2} = t_2 + t_5 + t_8 + \overline{t_3} \cdots\cdots⑥$$

本模型的求解目标即为：在给定 $q_{c_i}, d_i, \mu, k_{\max}, v_0, T_0, n_i, t_0$ 具体数值的条件下，通过联立以上方程和方程组（约束方程），求出 q_{l_1}（每条道路上的人流量分配），并预测每位同学从离开教学楼到能吃上饭的理想时间 t。

4 数值实验及结论

4.1 数据的收集

1. 道路长度

利用高德地图的测距功能求出九条路线的长度：

$$\begin{cases} d_1 = 404 \\ d_2 = 437 \\ d_3 = 472 \\ d_4 = 254 \\ d_5 = 214 \\ d_6 = 164 \\ d_7 = 293 \\ d_8 = 313 \\ d_9 = 469 \end{cases}$$

2. 车流量/最大车密度/最高车速/高峰时间

利用下课时间实拍并计算得出：

$$\begin{cases} q_{l_1} = 120 \\ q_{l_2} = 180 \\ q_{l_3} = 90 \\ k_{\max} = 10 \\ v_0 = 333 \\ T_0 = 5 \end{cases}$$

3. 食堂窗口数/服务时间

通过实际调查并结合经验，得到各个食堂的近似窗口数和服务时间：

$$\begin{cases} n_1 = 22 \\ n_2 = 8 \\ n_3 = 30 \\ t_0 = 0.5 \end{cases}$$

4.2　数据处理方法

由于原制约条件为无理多元方程组，为降低求解难度，约定道路流量均为整数，此时可以遍历各个道路的流量值，并对于某种流量分配计算出不同路线下从离开教学楼到在食堂排队完成所需的总时间$t_i^{'}$。规定可能路线：

$t_1^{'}: l_1 \to r_1$
$t_2^{'}: l_2 \to r_1$
$t_3^{'}: l_3 \to l_4 \to r_1$
$t_4^{'}: l_1 \to l_5 \to r_2$
$t_5^{'}: l_2 \to l_5 \to r_2$
$t_6^{'}: l_3 \to l_6 \to l_7 \to r_2$
$t_7^{'}: l_1 \to l_5 \to l_8 \to r_3$
$t_8^{'}: l_2 \to l_5 \to l_8 \to r_3$
$t_9^{'}: l_3 \to l_6 \to l_9 \to r_3$

此时为衡量每个近似解的优劣，设$\bar{t} = \dfrac{\sum_{i=1}^{9} t_i^{'}}{9}$，引入离差和$\sum_{i=1}^{9} | t_i^{'} - \bar{t} |$，取离差和最小的解组为最优解。

这个过程将通过 C++编程实现。（代码、数据等见附件）

4.3　数值测试样例及结论

4.3.1　$\mu = 0.01$ 下原模型的结果和结论

```
                清华园自行车流量与食堂人数稳态之探讨
========================================================================
    Date : 2018.11.24
  Author : Zhou EnXian, Zheng KaiWen, Han JiaLe
========================================================================
Please enter q of three groups respectively:
120 180 90
The best distribution of q is method: 24688
q of each road :
        1: 120   2: 180   3: 90
        4: 1     5: 132   6: 89
        7: 29    8: 112   9: 60
q of each restaurant :
        1: 169   2: 49    3: 172
time of each group :
        1: 9.81267      2: 10.5444      3: 10.4832
        4: 9.85701      5: 10.5888      6: 10.3383
        7: 10.3413      8: 11.073       9: 10.1058
average time: 10.3494    error: 2.58377
```

从运行结果分析得出：

理想时的车流分配：

- Group 3 : 走新民路的人第一个路口不拐弯，1/3 的人拐弯至丁香，剩下的 2/3 去紫荆桃李
- Group 1&2：走学堂路的约 1/2 的人至听涛清芬用餐，1/3 的人至丁香用餐，剩下的去紫荆桃李

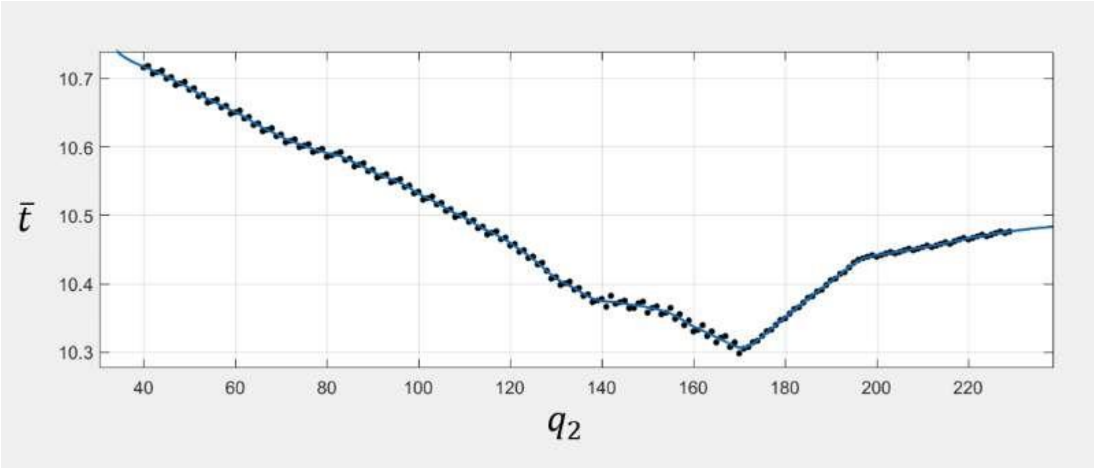
理想状态的特征：

- 稳定状态时，新民路比学堂路稍快
- 走学堂路的组别就近用餐是最快选择
- 走新民路的组别不拐弯是最快选择
- 此状态下，平均 10 分半钟能到达食堂并排队完毕

4.3.2　保持 $\mu = 0.01$ 不变，考虑六教人流的分配后的结果和结论

六教地处新民路学堂路之间，得益于其独特的构造和地理位置，四通八达，于是很自然地想到六教下课的学生可以有两种选择：走学堂路和走新民路。

因此保证 $q_{l_2} + q_{l_3} = 270$ 的条件下，二者的具体值可以适当分配，使 q 以 1 为单位变化，用程序解得与每个 q 值相对应的 $\bar{t}$，用 MATLAB 作图并用曲线拟合如下：



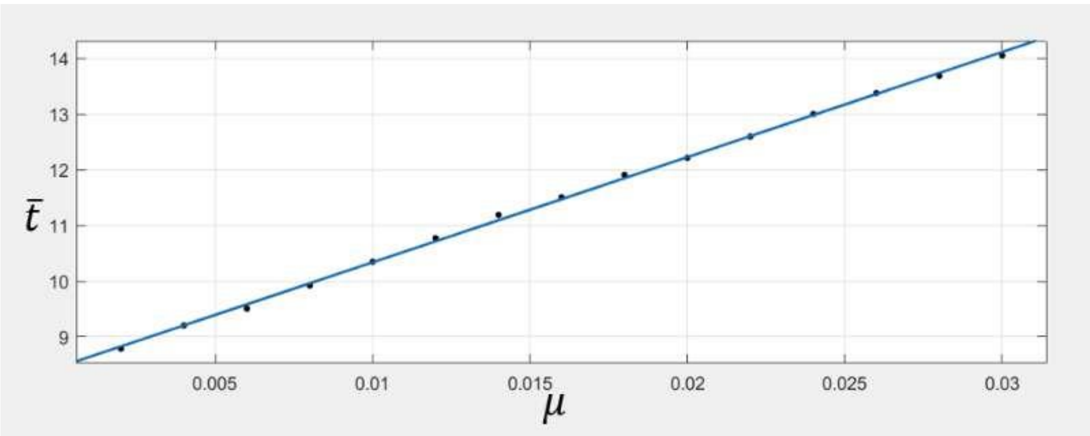
从图像和数据中可以看出，当q_{l_2}, q_{l_3}中一个过小而另一个过大时，平均时间较大；当$q_{l_2} = 169$，二者比例接近 17：10 时，平均时间取得最小值。但无论开始时学堂路和新民路的流量分配如何，通过路口的合理流量调整，最后得到的平均时间的极差在半分钟以内，相差并不是很大。可见相对于从教室出来的人流无法改变的客观事实，进行恰当的规划更占据主导地位，能够最大限度地缩减同学们吃上饭的时间。

同时可以注意到，观测到的流量分配$q_{l_2} = 180, q_{l_3} = 90$处的$\bar{t}$十分接近最小值，二者的差距可以忽略。

4.3.3 不考虑六教人流分配，当μ作为变量时的结果和结论

基本数值实验中对$\mu = 0.01$的设定，是结合实际情况进行理想化模拟得出的。但即使在实际生活中，拥堵系数也会随环境变化，如近日的低温使道路两旁发生结冰现象，对车流的前行造成了阻碍。等效地看，这相当于拥挤系数发生了些许增加。于是有必要研究$\bar{t}$和各道路的车流量分配情况随拥挤系数μ的变化情况。

使μ以 0.01 为单位变化，用程序求解并用 MATLAB 做出$\bar{t}$与μ的关系图象如下：



二者呈较为明确的线性关系，回归直线$\bar{t}=188.9\mu+8.449$，拟合精度可高达 95%。从此式中也能看出交通流模型部分和使用拥挤系数的线性修正部分分别对总时间的贡献。同时，经过对不同μ值下流量分配情况的观察比较，发现此分配并未发生较大的改变。在拥挤系数略微变化时，仍可暂时维持分配方案的稳定性，并保证接近最优解，这样便省去了更多分类讨论的必要。

5 对模型的更多讨论

5.1 模型的结论对于指导实际的意义

由于模型依照清华园的进行简化，且透过实测求出各路段的长度、人流量，故模型具有一定的拟真性。目前仍会拥堵的原因仍在于信息不对称、人流不平均而无法达到最优稳态。而搭配着相关的配套措施，让学生实时了解当前流量可将减换拥堵情型。

例如，在路口安装显示流量的跑马灯，进而提醒学生该路口是否拥堵、是否要改道等能让学生避开拥挤路段；另一方面，在食堂内也可以依照座位人数、排队人数等设置告示牌以供学生做出最佳选择。

5.2 模型的缺点

1、由于模型建立在考虑的人流高峰期内人流量相对稳定的假设之上，所以该模型针对的时间段较窄，没有办法对于其他时间段进行分析，也没有办法反映车流量、食堂排队人数等数值关于时间的变化情况。因此，该模型仅仅适用于中午时段的高峰期，适用范围较小。

2、由于该模型考虑的是大规模的学生群体，学生个体的情况由于不满足模型假设而不能通过简单的方式进行计算，因而，该模型无法给某个特定的同学提出建议，而只能引导整个学生群体的大致人流分配。

5.3 模型的可能拓展方向

1、在该模型中，我们着眼于清华园内的自行车流量与食堂人数的稳态探讨，并把问题最终归结为一个网格状系统的数值计算。事实上，生活中的其他地方也有道路网络的各条道路交通流流量与多个性质相同位置不同的目的地人数相关联的稳态问题存在，可以将该模型先抽象为更具有普遍性的网格状系统，将道路的特性表达成边的参数，而将目的地的特性表达成结点的参数。由此可以编写具有泛用性的计算机程序，再根据实际情况输入数据进行运算。

2、针对模型考虑的时间段窄，对个体不适用的缺陷，我们可以利用微分方程建立动态的模型，利用性能更好的计算机与进一步优化的算法进行求解，从而得到各道路车流量，各个食堂人数随着时间的变化情况，随后将学生个体放在整体的状态中考虑，设定学生个体的参数以满足不同的情况。这样的拓展可能能使模型对学生个体更有实际意义。

参 考 文 献

[1] 姜启源、谢金星、叶俊．数学模型（第五版）．第二章
[2] 高速公路速度_流量模型研究
https://wenku.baidu.com/view/073bb721192e45361066f525.html