

圆柱螺纹塞规中径不确定度评估的蒙特卡洛模拟

孟令川¹, 朱泽熙²

(1. 北京市计量检测科学研究院, 北京 100029; 2. 天津大学, 天津 300072)

摘要: 通过蒙特卡洛模拟的方法(Monte Carlo Simulation method, MCM)对圆柱螺纹塞规中径的测量结果进行了不确定度评估,并与传统 GUM 法所获得的不确定度的评估结果进行了比较。两种方法评估出的标准不确定度是相同的,而采用 MCM 评估出的扩展不确定度 U_{95} 比 GUM 法要小 $0.2\text{ }\mu\text{m}$ 。结果表明,两种方法在给定的 $0.5\text{ }\mu\text{m}$ 允差范围内,对于圆柱螺纹塞规中径测量结果的不确定度评估均有效。经过对测量模型中的非线性项分析发现, GUM 法采用线性近似进行标准不确定度合成的做法是有效的。通过 Kolmogorov-Smirnov 测试法和 Normal probability 图式法分析, $0.2\text{ }\mu\text{m}$ 的扩展不确定度的差异是由于圆柱螺纹塞规中径测量结果的概率密度分布存在着相对于正态分布的偏离所引起的。因此,对于圆柱螺纹塞规中径测量结果的不确定评估采用 MCM 可以得到更优的评估结果。

关键词: 计量学; 蒙特卡洛模拟; 圆柱螺纹量规; 不确定度评估
中图分类号: TB921 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1158(2017)6A-0098-06

Uncertainty Estimate on Effective Diameter of Thread Plug Gauge by Monte Carlo Simulation

MENG Ling-chuan¹, ZHU Ze-xi²

(1. Beijing Institute of Metrology, Beijing 100029, China; 2. Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: Monte Carlo simulation method (MCM) was utilized for the uncertainty estimate of effective diameter of thread plug gauge. And the uncertainty estimate obtained from two different methods-MCM and traditional method according to "guide to the expression of uncertainty in measurement" (GUM) were compared. The same standard uncertainty were obtained by both of the methods and the $0.2\text{ }\mu\text{m}$ less expanded uncertainty at 95% confidence was obtained by MCM. It is confirmed that both the methods are valid for estimating the effective diameter of thread plug gauge at a certain numerical tolerance of $0.5\text{ }\mu\text{m}$. The linearly approximation which the GUM based on for estimating the combined standard uncertainty was confirmed to be available by analyzing the non-linear terms in measurement model. The $0.2\text{ }\mu\text{m}$ difference in expanded uncertainty at 95% confidence was ascribed to the deviation of the distribution of measurement result from Gaussian distribution by Kolmogorov-Smirnov test and normal probability plot analysis. So it's reliable to get better uncertainty estimate of effective diameter of thread plug gauge by MCM than by GUM.

Key words: metrology; Monte Carlo simulation; thread plug gauge; uncertainty estimate

1 引言

螺纹量规的中径值作为衡量其性能的重要参数

被列为计量校准的重要指标^[1,2]。为了准确地给出可靠的测量结果,对于影响测量结果准确程度的不确定度^[3]评估尤为重要。最常用的评估不确定度

的方法是根据 Joint Committee for Guides in Metrology (JCGM) 给出的 JCGM 100: 2008 (Guide to the expression of uncertainty in measurement^[4], GUM)法进行的。GUM 法作为一种基于不确定度传播定律 (law of propagation of uncertainty, LPU) 的评估方法一直被广泛地应用于计量领域,并很好地解决了各学科中的不确定度评估问题。但因不确定度传播定律的有效性要受到一些前提假设和近似要求的约束,所以 GUM 法的有效性也受到了一定影响。具体来说,若在某个或者某些假设不满足时,利用 GUM 方法评估出的不确定度就可能产生偏差,甚至不再适用。这些前提假设主要包括以下几方面:一是,测量模型的非线性效应。为保证合成标准不确定度的准确性,测量模型不应含有较强的非线性项。二是,中心极限定理的有效性。中心极限定理是用来保证被评估量的概率密度分布可由正态分布来表示。三是,有效自由度要通过 Welch-Satterthwaite 公式获得^[3]。四是,在某些情况下,如输出量的分布不是对称或者当被测量与其不确定度同量级^[3]时,GUM 法的应用也要受到影响。为克服上述的问题,蒙特卡洛模拟的方法 (Monte Carlo simulation method, MCM) 由 JCGM 在 JCGM 101: 2008 GUM supplement^[5] 的文件中被建议出来。MCM 是基于概率密度分布函数传播定律 (law of propagation of distribution, LPD) 的方法,在不确定度的评估过程中可将更多有效信息带入到最终的评估结果中而无需过多的近似和假设。因此,这种方法理论上可以提供更加可靠的不确定度评估结果。两种评估方法原理示意图如图 1 所示,图 1(a) 采用 MCM 进行不确定度评估,其中 $h(x_1), h(x_2), h(x_3), h(x_4), h(x_5), h(x_6)$ 表示常用的输入量的概率密度分布图,包括指数分布,正态分布,矩形分布,三角分布,梯形分布以及 U 型分布, $h(y)$ 表示被测量的分布。图 1(b) 采用 GUM 法进行不确定度评估,其中 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 是输入量, $u(x_1), n_1, u(x_2), n_2, u(x_3), n_3, u(x_4), n_4, u(x_5), n_5, u(x_6), n_6$ 分别是相应输入量的标准不确定度和自由度, $y, u(y)$ 和 n_e 是被测量及其合成标准不确定度以及有效自由度。从图 1 中可以清楚看出两种评估方法之间的差异。为弄清 MCM 法对于螺纹塞规中径不确定度的评估效果,本文引用某刊物上已通过 GUM 法评估过的样品进行 MCM 法的再评估,以保证具有较好的可比性^[1]。

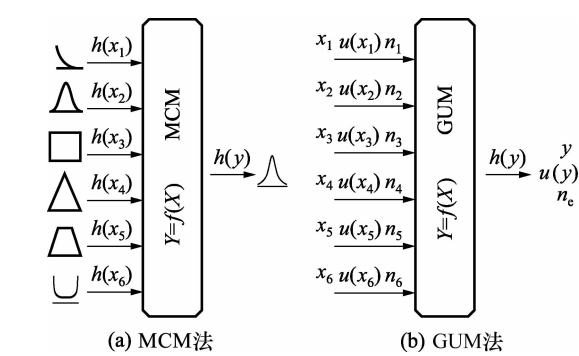


图 1 采用 MCM 法和 GUM 法进行不确定度评估示意图

2 实验方法

螺纹中径的定义是指一个假想圆柱的直径,该圆柱的母线通过螺纹牙型上沟槽和凸起宽度相等的地方,此假想圆柱称为中径圆柱^[1,2]。螺纹塞规的结构示意图见图 2,其中 d_1 代表小径, d_2 代表中径, d 代表大径, P 代表螺距, α 代表牙型角。三针法^[1,2] 是一种测量螺纹单一中径的常用方法。三针法测量螺纹塞规单一中径结构示意图见图 3,其中 L 为被测长度, d_0 为三针的直径, m 为左右两个三针中间点之间的距离。螺纹塞规的单一中径可由式(1)表示:

$$d_2 = L - \frac{d_0}{1 + \frac{1}{\sin(\alpha/2)}} + \frac{d_0}{2\cot(\alpha/2)} \tag{1}$$

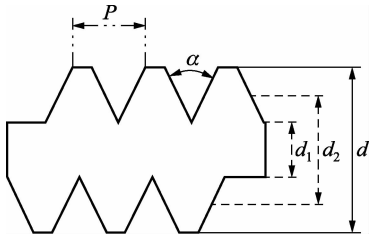


图 2 螺纹塞规的结构示意图。

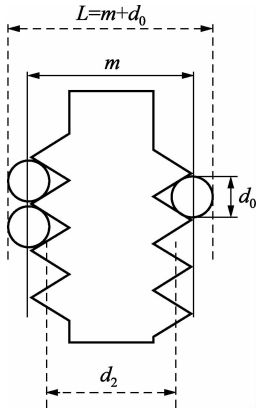


图 3 三针法测量螺纹塞规单一中径结构示意图

从式(1)中可以发现,评估待测螺纹塞规的单一中径 d_2 的不确定度,需要考虑以下 4 个输入量。

(1) 被测长度 L ,它是通过在马尔的测长机 PLM600-2 上进行 10 次测量得到的,是属于 A 类评定的不确定度,其概率密度分布为均值为 101.334 0 mm,标准差为 0.155 μm 的正态分布^[1]。

(2) 根据相关证书上的信息,三针的测量结果为 $(3.464\ 0 \pm 0.000\ 3)\text{ mm}$, $k = 2U_{95}$,所以,其概率密度函数为均值为 3.464,标准差为 0.150 μm 的正态分布。

(3) 螺距的概率密度分布函数为宽度为 $2 \times \sqrt{3} \times 0.644\mu\text{m}$ 的矩形分布。

(4) 牙型半角的概率密度分布为宽度为 $2 \times \sqrt{3} \times 5.3 \times 10^{-4}\text{ rad}$ 矩形分布。

除此之外,还有两个影响因素不可忽略:一是来自于主标准器所引入的不确定度分量,由相关资料得知标准器的最大允许误差 MPE 为 $\pm (0.15 + L/1\ 500)\mu\text{m}$ 。为了避免对被测量取值的影响,取均值为 0 mm、标准差为 0.110 μm 的正态分布来表示此输入量的概率分布函数。二是源于温度引入的不确定度分量,根据实验室的温度变化在 $(20 \pm 2)\text{ }^\circ\text{C}$ 以内,以及相关金属的膨胀系数为 $11.5 \times 10^{-6}\text{ m}/^\circ\text{C}$ 可知,其概率密度函数为宽度为 $2 \times \sqrt{3} \times 1.400\ \mu\text{m}$ 矩形分布。

因此,测量模型应改为

$$d_2 = L - \frac{d_0}{1 + \frac{1}{\sin(a/2)}} + \frac{d_0}{2\cot(a/2)} + A_1 + A_2$$

(2)

式中: A_1 、 A_2 分别为主标准器和环境温度引入的不确定度分量。各不确定度分量及其概率密度分布以及相关数字特征列于表 1,其归一化的分布图如图 4 所示。

在执行 MCM 运算之前,需要确定 MCM 的实验样本数^[8,9]。根据 JCGM 101:2008,这一实验样本数可以根据先验实验(priori trials)的方法获得,其表达式为

$$N > \frac{10^4}{p}$$

(3)

式中: N 代表模拟实验样本数; p 代表所要获得的模拟实验的置信度。根据式(3)可知:为了获得 95% 的置信度,实验样本数应大于 2×10^5 。本实验中选用 3×10^5 作为实验样本数进行依据测量模型如式(2)的 MCM 实验。

表 1 输入量的分布函数及其参数

输入量	分布函数类型	相关参数
被测长度 L	正态分布	均值: 101.334 0 mm; 标准差: 0.155 μm
三针直径 d_0	正态分布	均值: 3.464 mm; 标准差: 0.150 μm
螺距 P	矩形分布	最小值: $6 - \sqrt{3} \times 0.644 \times 10^{-3}\text{ mm}$ 最大值: $6 + \sqrt{3} \times 0.644 \times 10^{-3}\text{ mm}$
牙型半角 $\alpha/2$	矩形分布	最小值: $\pi/6 - \sqrt{3} \times 5.3 \times 10^{-4}\text{ rad}$ 最大值: $\pi/6 + \sqrt{3} \times 5.3 \times 10^{-4}\text{ rad}$
主标准器引入的不确定度 A_1	正态分布	均值: 0 mm; 标准差: 0.110 μm
环境温度引入的不确定度 A_2	矩形分布	最小值: $-\sqrt{3} \times 1.400\ \mu\text{m}$ 最大值: $\sqrt{3} \times 1.400\ \mu\text{m}$

3 结果与讨论

最终模拟出的螺纹塞规单一中径测量结果的归一化分布图如图 5 所示。从图 5 可以看出其分布是以 96.138 mm 为中心的对称分布。其不确定度的评估结果见表 2。

表 2 MCM 评估结果

评估结果	取值
均值	96.138 16 mm
标准差	1.58 μm
95% 置信区间下端点	96.135 3 mm
95% 置信区间上端点	96.141 1 mm
95% 置信区间宽度	2.90 μm

在与 GUM 法评估结果进行比较之前,需要验证本实验中 MCM 模拟的样本量是否满足获得一个稳定可靠的评估结果的要求。为此,需要衡量 MCM 评估结果(包括:均值,标准差,95% 置信置信区间上、下端点)的分散程度是否超过选择的允差(numerical tolerance)要求。允差可以通过式(4)获得:

$$\delta = 1/2 \times 10^l$$

(4)

式中: l 为整数,可通过将标准不确定度以形式 $c \times 10^l$ 改写而获得(其中 c 为整数,根据标准不确定的有效位数进行选取)。在本实验中可将标准不确定度改写为 $1 \times 10^{-3}\text{ mm}$,因此,允差为 $0.5 \times 10^{-3}\text{ mm}$ 。

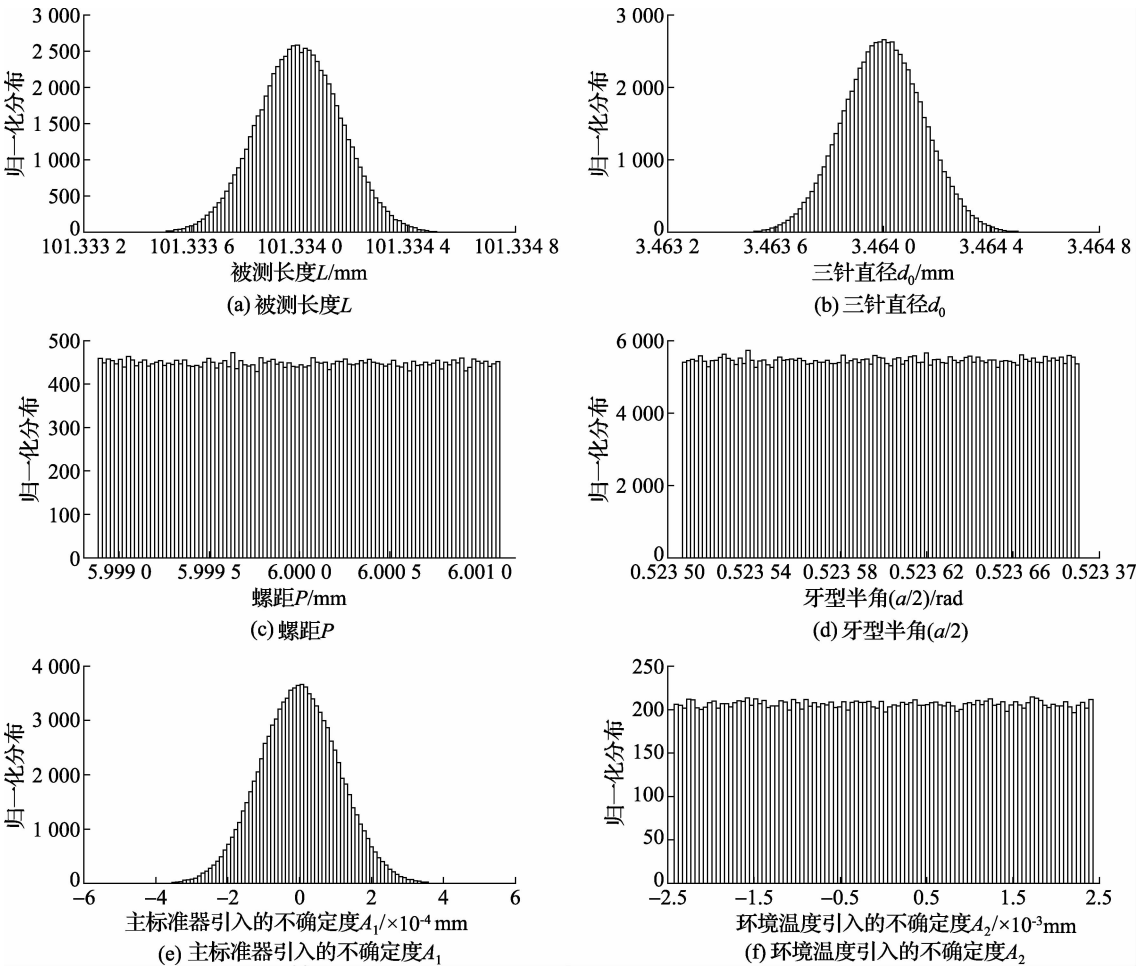


图4 输入量的归一化分布图

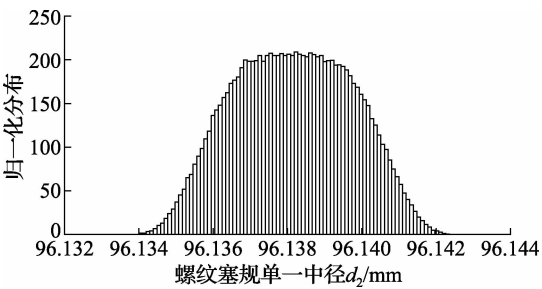


图5 螺纹塞规单一中径测量结果的归一化分布图

MCM 评估结果的标准不确定度如表3所示。

表3 蒙特卡洛法评估结果的不确定度/mm	
评估结果	评估结果的标准不确定度
均值	2.89×10^{-6}
标准差	1.62×10^{-6}
95% 置信区间下端点	4.98×10^{-6}
95% 置信区间上端点	4.98×10^{-6}

通过将表3中评估结果的标准不确定度与允差进行比较可以确认,选择 3×10^5 作为MCM实验样本数是可以得到稳定的评估结果的。

为了比较 GUM 法和 MCM 法对于评估测量结果不确定度的差别,将 GUM 法的评估结果列于表4中。

表4 GUM 法评估结果

评估参数	评估结果
被测量的测量值	96.138 2 mm
合成标准不确定度	1.58 μm
有效自由度	310
扩展因子 K_{95}	1.97
扩展不确定度 U_{95}	3.10 μm
测量结果的下端值 (95% 置信区间下端点)	96.135 1 mm
测量结果的上端值 (95% 置信区间上端点)	96.141 3 mm

通过与表4中的参数进行比较可以发现,两种方法都可以获得相同标准不确定度。而利用 MCM 法可以获得比 GUM 法要小 0.2 μm 的扩展不确定度。为了找出这一差异的原因,需要对 GUM 法所

基于的不确定度传播率的相关假设和前提进行分析。在分析之前,首先根据 JCGM 101:2008 给出的判断准则对 GUM 法的有效性进行了测试。这一准则是根据两种评估方法得出评估的测量结果区间端点间的距离(即差值的绝对值)与所选允差进行比较来做出判断的。当两个测量结果区间端点间距离小于 $1/2$ 的允差时,可以判定 GUM 法对测量结果的评估是有效的。测量结果区间端点间距离可以由式(5)和式(6)获得。

$$d_l = |y - U(y) - y_l| = |y_{e,l} - y_l| \quad (5)$$

$$d_h = |y + U(y) - y_h| = |y_{e,h} - y_h| \quad (6)$$

式中: d_l 和 d_h 分别代表两种不同评估方法所得到的测量结果区间的左端点和右端点之间距离; y 和 $U(y)$ 代表通过 GUM 法评估的被测量的测量值及给定置信度下的扩展不确定度; $y_{e,l}$ 和 $y_{e,h}$ 分别代表 GUM 法在置信度为 95% 下的评估结果区间的左、右端点值。可知, $d_l = d_h = 0.2 \mu\text{m}$,这两个值均小于允差 $0.5 \mu\text{m}$ 的 $1/2$ 。因此,本实验中用 GUM 法评定不确定度是有效的。

在确认了 GUM 法对于测量结果的有效性后,通过对 GUM 法执行的前提条件进行分析来找出 $0.2 \mu\text{m}$ 扩展不确定度差异的原因。首先,分析测量模型的非线性情况。从两种方法得到的相同的标准不确定度可以得知,GUM 法中合成标准不确定度所基于的线性近似原理是有效的,即式(7)和式(8)是有效的。

$$dy = \frac{\partial y}{\partial L}dL + \frac{\partial y}{\partial d_0}d(d_0) + \frac{\partial y}{\partial P}dP + \frac{\partial y}{\partial (a/2)}d(a/2) + \frac{\partial y}{\partial A_1}dA_1 + \frac{\partial y}{\partial A_2}dA_2 \quad (7)$$

$$U_c^2(y) = \left(\frac{\partial y}{\partial L}\right)^2 u^2 L + \left(\frac{\partial y}{\partial d_0}\right)^2 u^2 d_0 + \left(\frac{\partial y}{\partial P}\right)^2 u^2 P + \left(\frac{\partial y}{\partial (a/2)}\right)^2 u^2 (a/2) + \left(\frac{\partial y}{\partial A_1}\right)^2 u^2 A_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial A_2}\right)^2 u^2 A_2 \quad (8)$$

式中: $y=f(L, d_0, P, a/2, A_1, A_2)$ 。进一步,通过图形分析有关测量模型中的非线性项,可更直观地看到这种线性近似的有效性。在测量模型中存在两个非线性项,分别是 $d_0/\left(1 + \frac{1}{\sin(a/2)}\right)$ 和 $\frac{d_0}{2\cot(a/2)}$ 这两项在其各自输入量的概率密度分布函数的取值范围内(可从表 1 和图 4 中得到)的函数图如图 6 所示。可知这两个非线性项在给定的定义域内可以很好地被线性关系表示。因此,可知测量模型中的非线性因素并非是影响评估结果的主要因素。在排除

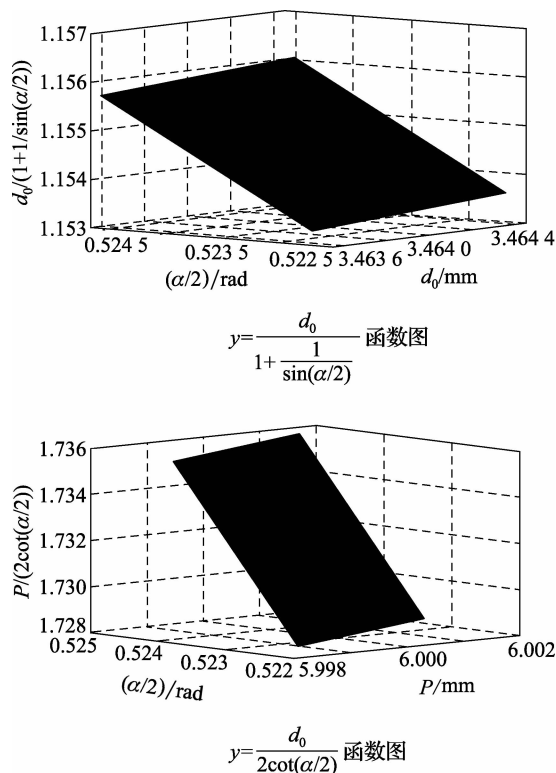


图 6 测量模型中非线性项的函数图

了非线性效应的影响后,需要研究被测量的概率密度分布函数问题。这一问题既与中心极限定理的有效性假设有关又与有效自由度有关。在 GUM 法的不确定评估中,若要进行给定置信区间的不确定度评估,需要求被测量的概率密度分布可以用正态分布表示。在此前提下,才可根据中心极限定理来利用 t 分布去估计被测量的扩展不确定度。故被测量的概率密度函数与正态分布的概率密度函数之间的符合程度,对于扩展不确定的评估具有很大的影响。利用 Kolmogorov-Smirnov test^[10]法对 MCM 模拟出的取值结果进行统计检验,其结果发现,在 95% 的置信度下,被测量的概率密度分布不能用正态分布表示。为了进一步了解被测量的概率密度分布与正态分布之间的差异,Normal probability plot 图式分析法^[11]被应用于 MCM 模拟出的取值结果上。其分析结果如图 7 所示,图 7 中两个菱形的点分别是概率为 25% 和 75% 的下分位点。从图 7 中可发现位于靠近两个分位点中间的区域(即被测量取值在 96.136 mm 到 96.140 mm 的区间时)被测量的分布与正态分布有很好的符合程度。由此可知在此区间,被测量的分布可以表示为正态分布。而在此之外的区域,被测量的分布开始偏离了正态分布且随着取值在向整个取值区间端点逼近时,偏离的程度也随之增强。这就可以很好地解释为什么两种不确

定度的评估方法可以获得相同的标准不确定度和不同的扩展不确定度。相同标准不确定度源自被测量在其取值附近 66% 的区域内的概率密度分布和正态分布,具有较好的一致性;而 0.2 μm 扩展不确定度 U_{95} 的差异是源于被测量的概率密度分布在上述区域之外的区间偏离了正态分布所造成的。且根据这一偏离程度会随取值范围扩大而增加可知,若要进行更高置信度水平下的扩展不确定度评估,这两种评估方法会产生更大的偏差。

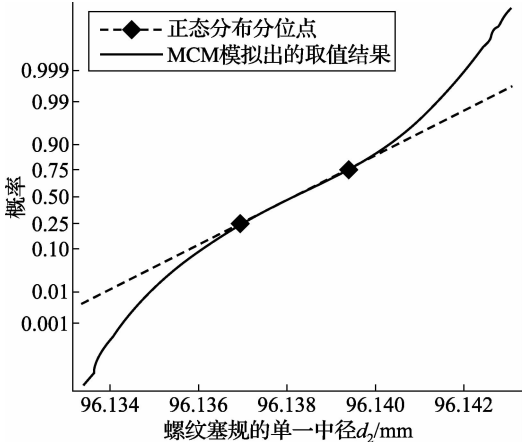


图7 螺纹塞规单一中径的 Normal probability plot 图

4 结 论

通过比较螺纹塞规单一中径的 GUM 法和 MCM 法不确定度的评估结果可以得到以下结论。首先,对于给定的 0.5 μm 允差,MCM 法和 GUM 法对于螺纹塞规单一中径的不确定度评估都是有效的。两种评估方法都可以得到相同测量值和标准不确定度。而采用 MCM 法评估的扩展不确定度 U_{95} 比 GUM 法的评估结果小 0.2 μm 。通过分析可知这一差异是源于被测量的概率密度分布与正态分布的不完全一致所致。而且,这一差异会随被测量在向其取值范围两端接近时而增大。因此,GUM 法与 MCM 法所获得的扩展不确定度的差异会随置信度的提高而增大;对于较高置信度水平要求下的不确定度评估,使用 MCM 法可得到更优的评估结果。

[参 考 文 献]

[1] 侯徐,陆晓珩. 圆柱螺纹塞规中径的测量不确定度评定 [J]. 工业计量, 2012,22 (1): 36 - 38.

[2] 竺軻. 三针法螺纹塞规中径的测量不确定度评定 [J]. 计量与测试技术, 2014,41 (12): 50 - 52.

[3] Couto P R G, Damasceno J C, Oliveira S P. Monte Carlo Simulations Applied to Uncertainty in Measurement [M]. Rijeka: InTech, 2013.

[4] BIPM I, IFCC I, ISO I, IUPAP O. JCGM 100: 2008 Evaluation of measurement data—Guide to the expression of uncertainty in measurement. Joint Committee for Guides in Metrology [S].

[5] IUPAC B, OIML I. Evaluation of Measurement Data—Supplement 1 to the ‘Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement’—Propagation of distributions using a Monte Carlo method [S]. 2008.

[6] Papadopoulos C E, Yeung H. Uncertainty estimation and Monte Carlo simulation method [J]. Flow Measurement and Instrumentation, 2001,4 (12): 291 - 298.

[7] 郭蒙蒙,李德红,王培伟. 圆柱型空腔电离室修正系数的 Monte Carlo 模拟与实验验证 [J]. 计量学报, 2016,37 (2): 214 - 218.

[8] Janssen H. Monte-Carlo based uncertainty analysis: Sampling efficiency and sampling convergence [J]. Reliability Engineering & System Safety, 2013, (109): 123 - 132.

[9] 宋明顺,王伟. Monte Carlo 方法评定测量不确定度中模拟样本数 M 的确定 [J]. 计量学报, 2010,31 (1): 91 - 96.

[10] Lopes R H C. Kolmogorov-Smirnov Test [M]. Berlin Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2011.

[11] Chambers J M, Cleveland W S, Kleiner B, et al. Graphical Methods For Data Analysis [J]. Journal of Sleep Research, 2012,21 (4): 484.