第八次作业答案

金融经济学-2025 年秋

Answer 1

已知无风险利率

$$r_f = 5\% = 0.05,$$

市场投资组合的期望收益率与标准差分别为

$$E[r_M] = 15\% = 0.15, \qquad \sigma_M = 20\% = 0.20.$$

(1) 期望收益率为 20% 的证券的贝塔系数与相关系数

设该证券为资产 i，其期望收益率为

$$E[r_i] = 20\% = 0.20.$$

(a) 贝塔系数

根据 CAPM 下的证券市场线（SML）:

$$E[r_i] = r_f + \beta_i \big(E[r_M] - r_f \big).$$

代入数值:

$$0.20 = 0.05 + \beta_i(0.15 - 0.05) = 0.05 + 0.10\,\beta_i.$$

解得

$$0.20 - 0.05 = 0.10\,\beta_i \quad \Longrightarrow \quad \beta_i = \frac{0.15}{0.10} = 1.5.$$

因此

$$\beta_i = 1.5.$$

(b) 与市场投资组合的相关系数

根据贝塔的定义与协方差、相关系数的关系:

$$\beta_i = \frac{\mathrm{cov}(r_i, r_M)}{\mathrm{var}(r_M)} = \frac{\rho_{iM}\,\sigma_i \sigma_M}{\sigma_M^2} = \rho_{iM}\,\frac{\sigma_i}{\sigma_M}.$$

于是

$$\rho_{iM} = \beta_i\,\frac{\sigma_M}{\sigma_i}.$$

代入 $\beta_i = 1.5$, $\sigma_M = 0.20$, $\sigma_i = 0.40$：

$$\rho_{iM} = 1.5 \cdot \frac{0.20}{0.40} = 1.5 \cdot 0.5 = 0.75.$$

(2) 期望收益率为 25%、方差为 52% 的股票的系统性风险与非系统性风险

设另一只股票为资产 j，给定

$$E[r_j] = 25\% = 0.25, \qquad \operatorname{var}(r_j) = 0.52.$$

(a) 先求该股票的贝塔系数

仍用 CAPM：

$$E[r_j] = r_f + \beta_j\big(E[r_M] - r_f\big),$$

代入数值：

$$0.25 = 0.05 + \beta_j(0.15 - 0.05) = 0.05 + 0.10\,\beta_j.$$

解得

$$0.25 - 0.05 = 0.10\,\beta_j \quad\Longrightarrow\quad \beta_j = \frac{0.20}{0.10} = 2.$$

(b) 系统性风险与非系统性风险的分解

在单指数（CAPM）模型中，

$$\operatorname{var}(r_j) = \underbrace{\beta_j^2 \operatorname{var}(r_M)}_{\text{系统性风险}} + \underbrace{\sigma_{\varepsilon j}^2}_{\text{非系统性风险}},$$

其中 $\sigma_{\varepsilon j}^2$ 为该股票特有（残差）方差。

已知

$$\operatorname{var}(r_M) = \sigma_M^2 = 0.20^2 = 0.04, \qquad \beta_j = 2.$$

故系统性风险（按方差计）为

$$\operatorname{var}_{\text{sys}} = \beta_j^2 \operatorname{var}(r_M) = 2^2 \cdot 0.04 = 4 \cdot 0.04 = 0.16.$$

非系统性风险（方差）为

$$\operatorname{var}_{\text{unsys}} = \operatorname{var}(r_j) - \operatorname{var}_{\text{sys}} = 0.52 - 0.16 = 0.36.$$

Answer 2

记两资产 X, Y 的收益率为 r_X, r_Y，则

$$\mathbb{E}[r_X] = 0.2, \quad \mathbb{E}[r_Y] = 0.1,$$

$$V = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.0064 \end{pmatrix}, \quad \sigma_X^2 = 0.01,\ \sigma_Y^2 = 0.0064,\ \mathrm{cov}(r_X, r_Y) = 0.$$

设权重向量为 $w = (w_X, w_Y)^\top$，则组合收益率

$$r_p = w_X r_X + w_Y r_Y, \quad \mathbb{E}[r_p] = w_X \mathbb{E}[r_X] + w_Y \mathbb{E}[r_Y], \quad \mathrm{var}(r_p) = w^\top V w.$$

(1) **零贝塔组合的期望收益率**

设给定的市场组合权重为

$$w_M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad r_M = \tfrac{1}{2} r_X + \tfrac{1}{2} r_Y.$$

设零贝塔组合 Z 的权重为

$$w_Z = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{pmatrix}, \quad r_Z = \alpha r_X + (1-\alpha) r_Y.$$

零贝塔条件是

$$\mathrm{cov}(r_Z, r_M) = 0.$$

由于 $\mathrm{cov}(r_X, r_Y) = 0$，有

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(r_Z, r_M) &= \mathrm{cov}\big(\alpha r_X + (1-\alpha) r_Y,\ \tfrac{1}{2} r_X + \tfrac{1}{2} r_Y\big) \\ &= \tfrac{1}{2}\alpha\, \sigma_X^2 + \tfrac{1}{2}(1-\alpha)\, \sigma_Y^2 \\ &= \frac{1}{2}\big(\alpha \sigma_X^2 + (1-\alpha)\sigma_Y^2\big). \end{aligned}$$

令其为零：

$$\alpha \sigma_X^2 + (1-\alpha)\sigma_Y^2 = 0.$$

代入 $\sigma_X^2 = 0.01,\ \sigma_Y^2 = 0.0064$：

$$0.01\alpha + 0.0064(1-\alpha) = 0 \implies 0.0036\,\alpha = -0.0064 \implies \alpha = -\frac{0.0064}{0.0036} = -\frac{16}{9}.$$

因此

$$w_Z = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} \\ \frac{25}{9} \end{pmatrix}.$$

零贝塔组合的期望收益率为

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[r_Z] &= \alpha\mathbb{E}[r_X] + (1-\alpha)\mathbb{E}[r_Y] \\ &= \alpha \cdot 0.2 + (1-\alpha)\cdot 0.1 = 0.1\alpha + 0.1 \\ &= 0.1\Big(-\frac{16}{9}+1\Big) = 0.1\cdot\Big(-\frac{7}{9}\Big) = -\frac{7}{90} \approx -0.0778.\end{aligned}$$

即

$$\mathbb{E}[r_Z] = -\frac{7}{90} \approx -7.78\%.$$

(2) **全局最小方差组合的权重**

设全局最小方差组合 G 的权重为 $w_G = (w_X, w_Y)^\top$，且 $w_X + w_Y = 1$。

在只有两资产、无约束的情形下，全局最小方差组合的解析式为

$$w_X^* = \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}, \qquad w_Y^* = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}.$$

代入 $\sigma_X^2 = 0.01$, $\sigma_Y^2 = 0.0064$：

$$w_X^* = \frac{0.0064}{0.01+0.0064} = \frac{0.0064}{0.0164} = \frac{16}{41}, \qquad w_Y^* = \frac{0.01}{0.0164} = \frac{25}{41}.$$

因此

$$\mathrm{w}_G = \begin{pmatrix} \frac{16}{41} \\ \frac{25}{41} \end{pmatrix}.$$

(3) **全局最小方差组合与零贝塔组合的协方差**

利用

$$\operatorname{cov}(r_G, r_Z) = w_G^\top V\, w_Z,$$

且 V 为对角阵，有

$$\operatorname{cov}(r_G, r_Z) = \sigma_X^2\, w_{G,X} w_{Z,X} + \sigma_Y^2\, w_{G,Y} w_{Z,Y}.$$

代入

$$w_G = \begin{pmatrix} \frac{16}{41} \\ \frac{25}{41} \end{pmatrix}, \quad w_Z = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} \\ \frac{25}{9} \end{pmatrix}, \quad \sigma_X^2 = 0.01,\ \sigma_Y^2 = 0.0064,$$

得

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(r_G, r_Z) &= 0.01 \cdot \frac{16}{41} \cdot \left(-\frac{16}{9}\right) + 0.0064 \cdot \frac{25}{41} \cdot \frac{25}{9} \\ &= -\frac{256}{36900} + \frac{2500}{57625} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{1025} \approx 0.00390. \end{aligned}$$

即

$$\operatorname{cov}(r_G, r_Z) = \frac{4}{1025} \approx 0.0039.$$

(4) **有无风险资产（标准 CAPM）下的证券市场线**

现在假设市场上存在无风险资产，收益率为

$$r_f = 5\% = 0.05,$$

且仍以 $w_M = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^\top$ 为市场投资组合。其期望收益率为

$$\mathbb{E}[r_M] = \tfrac{1}{2} \cdot 0.2 + \tfrac{1}{2} \cdot 0.1 = 0.15.$$

标准 CAPM 下，证券市场线（SML）的方程为

$$\mathbb{E}[r_i] = r_f + \big(\mathbb{E}[r_M] - r_f\big)\, \beta_i = 0.05 + 0.10\, \beta_i.$$

(5) **无无风险资产（Black 零贝塔 CAPM）下的证券市场线**

在 Black（零贝塔）CAPM 框架中，无无风险资产，截距由零贝塔组合的期望收益给出：

$$\mathbb{E}[r_i] = \mathbb{E}[r_Z] + \big(\mathbb{E}[r_M] - \mathbb{E}[r_Z]\big)\, \beta_i,$$

其中 Z 为相对市场组合 M 的零贝塔组合。

由前面计算得

$$\mathbb{E}[r_Z] = -\frac{7}{90}, \qquad \mathbb{E}[r_M] = 0.15 = \frac{3}{20}.$$

故

$$\mathbb{E}[r_M] - \mathbb{E}[r_Z] = \frac{3}{20} - \left(-\frac{7}{90}\right) = \frac{3}{20} + \frac{7}{90} = \frac{41}{180}.$$

因此，在零贝塔 CAPM 下的证券市场线为

$$\mathbb{E}[r_i] = -\frac{7}{90} + \frac{41}{180}\beta_i \;\approx\; -0.0778 + 0.2278\,\beta_i.$$

Answer 3

设两资产为 A, B，收益率分别为 r_A, r_B。已知

$$ER = \begin{bmatrix} 0.30 \\ 0.20 \end{bmatrix}, \qquad V = \begin{bmatrix} 0.0081 & 0 \\ 0 & 0.0025 \end{bmatrix},$$

因此

$$\sigma_A^2 = 0.0081, \quad \sigma_B^2 = 0.0025, \quad \mathrm{cov}(r_A, r_B) = 0.$$

记投资者 I, J 所选的“市场投资组合”为

$$w_M^{(I)} = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.25 \end{bmatrix}, \qquad w_M^{(J)} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}.$$

相应的市场投资组合收益率为

$$r_M^{(I)} = 0.75\,r_A + 0.25\,r_B, \qquad r_M^{(J)} = 0.5\,r_A + 0.5\,r_B.$$

(1) **各自计算的 A 的贝塔值**

对任意给定的“市场投资组合”M，A 相对于 M 的贝塔定义为

$$\beta_A = \frac{\mathrm{cov}(r_A, r_M)}{\mathrm{var}(r_M)}.$$

<u>投资者 I：</u>

$$r_M^{(I)} = 0.75\,r_A + 0.25\,r_B.$$

由于 $\mathrm{cov}(r_A, r_B) = 0$，

$$\mathrm{cov}(r_A, r_M^{(I)}) = 0.75\,\mathrm{var}(r_A) = 0.75\,\sigma_A^2 = 0.75 \times 0.0081 = 0.006075.$$

市场组合的方差为

$$\mathrm{var}(r_M^{(I)}) = 0.75^2\sigma_A^2 + 0.25^2\sigma_B^2 = 0.75^2 \times 0.0081 + 0.25^2 \times 0.0025 = 0.0047125.$$

因此

$$\beta_A^{(I)} = \frac{0.006075}{0.0047125} = \frac{486}{377} \approx 1.289.$$

<u>投资者 J：</u>

$$r_M^{(J)} = 0.5\, r_A + 0.5\, r_B,$$

从而

$$\operatorname{cov}(r_A, r_M^{(J)}) = 0.5\,\operatorname{var}(r_A) = 0.5 \times 0.0081 = 0.00405,$$

$$\operatorname{var}(r_M^{(J)}) = 0.5^2\sigma_A^2 + 0.5^2\sigma_B^2 = 0.25(0.0081 + 0.0025) = 0.00265.$$

于是

$$\beta_A^{(J)} = \frac{0.00405}{0.00265} = \frac{81}{53} \approx 1.528.$$

(2) **各自的零贝塔组合与证券市场线方程**

一般地，设投资者 k 的市场组合权重为

$$w_M^{(k)} = \begin{bmatrix} m_A^{(k)} \\ m_B^{(k)} \end{bmatrix}, \qquad m_A^{(k)} + m_B^{(k)} = 1,$$

零贝塔组合 $Z^{(k)}$ 的权重为

$$w_Z^{(k)} = \begin{bmatrix} z_A^{(k)} \\ z_B^{(k)} \end{bmatrix}, \qquad z_A^{(k)} + z_B^{(k)} = 1.$$

零贝塔条件为

$$\operatorname{cov}(r_Z^{(k)}, r_M^{(k)}) = 0.$$

由于协方差矩阵为对角阵，得到

$$\operatorname{cov}(r_Z^{(k)}, r_M^{(k)}) = z_A^{(k)} m_A^{(k)} \sigma_A^2 + z_B^{(k)} m_B^{(k)} \sigma_B^2 = 0.$$

利用 $z_B^{(k)} = 1 - z_A^{(k)}$ 得到

$$z_A^{(k)} m_A^{(k)} \sigma_A^2 + (1 - z_A^{(k)}) m_B^{(k)} \sigma_B^2 = 0,$$

解得

$$z_A^{(k)} = -\frac{m_B^{(k)}\sigma_B^2}{m_A^{(k)}\sigma_A^2 - m_B^{(k)}\sigma_B^2}, \qquad z_B^{(k)} = 1 - z_A^{(k)}.$$

投资者 I:

此时

$$m_A^{(I)} = 0.75, \quad m_B^{(I)} = 0.25.$$

代入上式,

$$z_A^{(I)} = -\frac{0.25 \cdot 0.0025}{0.75 \cdot 0.0081 - 0.25 \cdot 0.0025} = -\frac{25}{218} \approx -0.115,$$

$$z_B^{(I)} = 1 - z_A^{(I)} = \frac{243}{218} \approx 1.115.$$

所以零贝塔组合权重为

$$w_Z^{(I)} = \begin{bmatrix} -\frac{25}{218} \\ \frac{243}{218} \end{bmatrix}.$$

零贝塔组合的期望收益率为

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[r_Z^{(I)}] &= z_A^{(I)}\mathbb{E}[r_A] + z_B^{(I)}\mathbb{E}[r_B] \\ &= -\frac{25}{218} \cdot 0.30 + \frac{243}{218} \cdot 0.20 \\ &= -\frac{75}{2180} + \frac{486}{2180} = \frac{411}{2180} \approx 0.1885. \end{aligned}$$

市场组合 $M^{(I)}$ 的期望收益率为

$$\mathbb{E}[r_M^{(I)}] = 0.75 \cdot 0.30 + 0.25 \cdot 0.20 = 0.275 = \frac{11}{40}.$$

Black–CAPM 下，该投资者的证券市场线（SML）为

$$\mathbb{E}[r_i] = \mathbb{E}[r_Z^{(I)}] + \left(\mathbb{E}[r_M^{(I)}] - \mathbb{E}[r_Z^{(I)}]\right) \beta_i^{(I)}.$$

代入

$$\mathbb{E}[r_Z^{(I)}] = \frac{411}{2180}, \qquad \mathbb{E}[r_M^{(I)}] - \mathbb{E}[r_Z^{(I)}] = \frac{11}{40} - \frac{411}{2180} = \frac{377}{4360},$$

得到

$$\boxed{\mathbb{E}[r_i] = \frac{411}{2180} + \frac{377}{4360} \beta_i^{(I)} \approx 0.1885 + 0.0865 \beta_i^{(I)}.}$$

对于资产 A，其贝塔为 $\beta_A^{(I)} = \frac{486}{377}$，故其在 I 看来的要求收益率为

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\text{req}}^{(I)}[r_A] &= \mathbb{E}[r_Z^{(I)}] + \left(\mathbb{E}[r_M^{(I)}] - \mathbb{E}[r_Z^{(I)}]\right) \beta_A^{(I)} \\
&= \frac{411}{2180} + \frac{377}{4360} \cdot \frac{486}{377} \\
&= \frac{411}{2180} + \frac{486}{4360} = \frac{3}{10} = 0.30.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}_{\text{req}}^{(I)}[r_A] = 30\%.}$$

投资者 J：

此时

$$m_A^{(J)} = 0.5, \quad m_B^{(J)} = 0.5.$$

同理可得

$$z_A^{(J)} = -\frac{0.5 \cdot 0.0025}{0.5 \cdot 0.0081 - 0.5 \cdot 0.0025} = -\frac{25}{56} \approx -0.446,$$

$$z_B^{(J)} = 1 - z_A^{(J)} = \frac{81}{56} \approx 1.446.$$

因此零贝塔组合权重为

$$w_Z^{(J)} = \begin{bmatrix} -\frac{25}{56} \\ \frac{81}{56} \end{bmatrix}.$$

其期望收益率为

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[r_Z^{(J)}] &= -\frac{25}{56} \cdot 0.30 + \frac{81}{56} \cdot 0.20 \\
&= -\frac{75}{560} + \frac{162}{560} = \frac{87}{560} \approx 0.1554.
\end{aligned}$$

市场组合 $M^{(J)}$ 的期望收益率为

$$\mathbb{E}[r_M^{(J)}] = 0.5 \cdot 0.30 + 0.5 \cdot 0.20 = 0.25 = \frac{1}{4}.$$

J 的证券市场线为

$$\mathbb{E}[r_i] = \mathbb{E}[r_Z^{(J)}] + \left(\mathbb{E}[r_M^{(J)}] - \mathbb{E}[r_Z^{(J)}]\right) \beta_i^{(J)}.$$

代入

$$\mathbb{E}[r_Z^{(J)}] = \frac{87}{560}, \qquad \mathbb{E}[r_M^{(J)}] - \mathbb{E}[r_Z^{(J)}] = \frac{1}{4} - \frac{87}{560} = \frac{53}{560},$$

得到

$$\boxed{\mathbb{E}[r_i] = \frac{87}{560} + \frac{53}{560}\,\beta_i^{(J)} \approx 0.1554 + 0.0946\,\beta_i^{(J)}.}$$

资产 A 的贝塔为 $\beta_A^{(J)} = \dfrac{81}{53}$，故 J 对 A 的要求收益率为

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\text{req}}^{(J)}[r_A] &= \mathbb{E}[r_Z^{(J)}] + \left(\mathbb{E}[r_M^{(J)}] - \mathbb{E}[r_Z^{(J)}]\right)\beta_A^{(J)} \\
&= \frac{87}{560} + \frac{53}{560}\cdot\frac{81}{53} \\
&= \frac{87}{560} + \frac{81}{560} = \frac{168}{560} = \frac{3}{10} = 0.30.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}_{\text{req}}^{(J)}[r_A] = 30\%.}$$

综上，在不同“市场投资组合”假定下，两位投资者得到的贝塔值与 SML 截距、斜率都不同，但对资产 A 的要求收益率恰好都为 30%。