第十章：因子模型与套利定价理论

熊和平
武汉大学经济与管理学院

0、引言

◆CAPM 用简洁的定价公式给出了证券市场在均衡条件下每个证券或资产的定价公式。定价公式表明每个证券的收益由市场投资组合的收益唯一确定。

◆无论是经济直觉还是实证结果都表明这一结论似乎过于简单，在此基础上，人们提出了因子模型，从单因子模型到多因子模型，并试图从更多的角度来解释确定证券收益的要素。

◆罗斯（ROSS）在多因子模型基础上提出了套利定价理论（APT）。

第一节 单因子模型

◆因子（factor）也称为因素或要素，是指对证券市场上众多证券同时产生作用的经济变量。

◆因子模型是用来解释证券或股票（在没有特殊说明的情况下我们不加区别地使用“风险证券”或“股票”指相同的研究对象）收益产生过程（return-generating process）的一种假说，即通过该假说来解释证券收益是由哪些因素决定的，以及如何决定。

一、市场模型

- SML直线：

$$E[\tilde{r}_i] = r_f + \beta_i(E[\tilde{r}_m] - r_f) \quad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

- 直线的变形：

$$E[\tilde{r}_i] = (1 - \beta_i) r_f + \beta_i E[\tilde{r}_m]$$

- 由此构造**市场模型**：

假设

$$\tilde{r}_i = \alpha_i + \beta_{im}\tilde{r}_m + \tilde{\varepsilon}_i \tag{10.3a}$$

或

$$\tilde{r}_i = \alpha_i + \beta_{iI}\tilde{r}_I + \tilde{\varepsilon}_i \tag{10.3b}$$

其中 r_m 为市场投资组合的收益率，通常用特定的市场指数收益率 r_I 来代替 r_m。α_i 是截距项，β_{im} 为证券 i 对市场投资组合的敏感性，而且 α_i 和 β_{im} 均为常数；ε_i 为随机项，它是用市场投资组合收益率解释证券收益率的残差项。并且满足：

（1）误差项 ε_{it} 和市场投资组合收益率（或指数收益率）都有有限的期望值和方差；

（2）$\mathrm{cov}(\tilde{r}_m, \tilde{\varepsilon}_i) = 0$ 或 $\mathrm{cov}(\tilde{r}_I, \tilde{\varepsilon}_i) = 0$，即所有证券的随机项与市场投资组合（或指数）收益率相互独立；

（3）$\mathrm{cov}(\tilde{\varepsilon}_i, \tilde{\varepsilon}_j) = 0 \ (i \neq j)$，即不同证券的误差项彼此独立。

- 由于市场投资组合收益的计算比较复杂，一个简单的方法是由市场指数来替代市场投资组合，因此该模型被称为**市场模型**，r_m 或 r_I称为**市场因子**。

- 利用市场因子模型能够比较容易地计算证券的期望收益和风险

例 10.1：某股票 A 的贝塔系数为 0.8，市场指数收益率的期望收益率为 6%，标准差为 12.5%，无风险利率为 3%，则股票 A 的收益和风险分别为：

$E[\tilde{r}_A]=r_f+\beta_{AI}(E[\tilde{r}_I]-r_f)=3\%+0.8(6\%-3\%)=5.4\%$ ；

$\sigma_A^2=\text{var}[\tilde{r}_A]=\beta_{AI}^2\sigma_I^2+\sigma_{A\varepsilon}^2=0.8^2\times(12.5\%)^2+\sigma_{A\varepsilon}^2=1\%+\sigma_{A\varepsilon}^2$

进一步，若股票 A 的标准差为 32%，则其特质风险为：

$\sigma_{A\varepsilon}^2=\sigma_A^2-1\%=(32\%)^2-1\%=9.24\%$ 。

二、单因子模型

- **单因子模型**：

  将市场模型推广，决定股票收益的可能是GDP增长率，也可能是其他的更一般的因素，由此可以构造单因子模型

• 单因子模型：

假设：

$$\tilde{r}_{it} = \alpha_i + b_i \tilde{F}_t + \tilde{\varepsilon}_{it} \quad (i = 1, 2, \ldots, N) \qquad (10.5)$$

其中，F_t为决定证券收益的唯一**因子**（factor），b_i为证券对因子的敏感性，也称为**因子暴露**（factor exposure）或**因子载荷**（factor loading）。对给定的时期 t，截距项 α_i和因子载荷 b_i是常数，当市场处于平稳状态时，通常假设截距项和因子载荷不因时间的变化而变化，因此两者的角标中没有时间角标 t，从严格意义上讲它们也是随时间变化而变化的。ε_{it}为随机项或误差项，是指用 $\alpha_i + b_i \tilde{F}_t$ 确定证券 i 的收益时产生的误差。同时假设满足：

（1）误差项 ε_{it}和因子 F_t都有有限的期望值和方差，而且 $E[\tilde{\varepsilon}_{it}] = 0$；

（2）$\mathrm{cov}(\tilde{F}_t, \tilde{\varepsilon}_{it}) = 0$，即所有证券的随机项与因子相互独立；

（3）$\mathrm{cov}(\tilde{\varepsilon}_{it}, \tilde{\varepsilon}_{jt}) = 0 \ (i \neq j)$，即不同证券的误差项彼此独立。

- 单因子模型下单个股票的收益和风险的计算

$$\bar{r}_{it} = \alpha_i + b_i \bar{F}_t \quad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

$$\sigma_i^2 = b_i^2 \sigma_F^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2 \quad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

$$\sigma_{ij} = b_i b_j \sigma_F^2 \quad (i \neq j, \; i, j = 1, 2, \ldots, N)$$

因子风险 非因子风险

系统风险 特质风险

非系统风险

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(r_i, r_j) &= \mathrm{Cov}(\alpha_i + b_i F + \varepsilon_i, \; \alpha_j + b_j F + \varepsilon_j) \\
&= \mathrm{Cov}(b_i F + \varepsilon_i, \; b_j F + \varepsilon_j) \qquad (\text{常数与协方差无关}) \\
&= b_i b_j \ \mathrm{Var}(F) + b_i \ \mathrm{Cov}(F, \varepsilon_j) + b_j \ \mathrm{Cov}(\varepsilon_i, F) + \mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \\
&= b_i b_j \, \sigma_F^2 .
\end{aligned}$$

- 单因子模型下组合的收益和风险的计算

$$\tilde{r}_{pt} = \alpha_p + b_p \tilde{F}_t + \tilde{\varepsilon}_{pt}$$

其中，$\alpha_p \equiv \sum^{N} \omega_i \alpha_{it}$，$b_p \equiv \sum^{N} \omega_i b_i$ 和 $\varepsilon_{pt} \equiv \sum^{N} \omega_i \varepsilon_{it}$

$$\bar{r}_{pt} = \alpha_p + b_p \bar{F}_t$$

$$\sigma_p^2 = b_p^2 \sigma_F^2 + \sigma_{\varepsilon p}^2$$

因子风险
系统风险

非因子风险
特质风险
非系统风险

- 分散投资的结果

$$\bar{r}_{pt} = \alpha_p + b_p \bar{F}_t$$

$$\sigma_p^2 = b_p^2 \sigma_F^2 + \sigma_{\varepsilon p}^2$$

$$\lim_{N \to \infty} \sigma_{p\varepsilon}^2 = 0; \lim_{N \to \infty} \sigma_p^2 = \bar{b}^2 \sigma_F^2 \qquad (10.16)$$

（10.16）的含义是：当市场上存在足够多的证券时，由这些证券形成的足够分散的投资组合只剩下系统性风险，非系统性风险则几乎被全部分散掉。

组合的特质风险方差为:

$$\sigma_{\varepsilon_p}^2 = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \frac{1}{N^2}N\bar{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\bar{\sigma}_\varepsilon^2}{N}.$$

第二节 多因子模型

- 单因子模型可能不成立，即，决定股票收益的因子可能有多个，我们从两因子推广到多因子模型

一、两因子模型

假设决定证券收益的因子有 F_1 和 F_2 两个，并且满足：

$$\tilde{r}_{it} = \alpha_i + b_{i1}\tilde{F}_{1t} + b_{i2}\tilde{F}_{2t} + \tilde{\varepsilon}_{it} \quad (i = 1, 2, \ldots, N) \qquad (10.17)$$

其中，F_{1t} 和 F_{2t} 是决定证券收益的因子， b_{i1} 和 b_{i2} 是因子载荷。对给定的 t，截距项 α_i 和因子载荷 b_{i1} 和 b_{i2} 是常数。ε_{it} 为随机项或误差项，所有的随机项都有有限的期望和方差且 $E[\tilde{\varepsilon}_{it}] = 0$，同时还满足：

（1） $\mathrm{cov}(\tilde{F}_{1t}, \tilde{F}_{2t}) = 0$：两因子互不相关或相互正交；

（4） $\mathrm{cov}(\tilde{F}_{1t}, \tilde{\varepsilon}_{it}) = 0$，$\mathrm{cov}(\tilde{F}_{2t}, \tilde{\varepsilon}_{it}) = 0$：所有的随机项与因子相互独立；

（5） $\mathrm{cov}(\tilde{\varepsilon}_{it}, \tilde{\varepsilon}_{jt}) = 0 \ (i \neq j)$：不同证券的误差项彼此独立。

为什么两个因子要不相关？

- 两因子模型下单个股票的收益和风险的计算

$$\bar{r}_{it} = \alpha_i + b_{i1}\bar{F}_{1t} + b_{i2}\bar{F}_{2t} \quad (i = 1,2,\ldots,N)$$

$$\sigma_i^2 = \boxed{b_{i1}^2\sigma_{F_1}^2 + b_{i2}^2\sigma_{F_2}^2} + \sigma_{\varepsilon i}^2 \quad (i = 1,2,\ldots,N)$$

$$\sigma_{ij} = b_{i1}b_{j1}\sigma_{F_1}^2 + b_{i2}b_{j2}\sigma_{F_2}^2 \quad (i \neq j,\ \ i, j = 1,2,\ldots,N)$$

因子风险
系统风险

非因子风险
特质风险
非系统风险

- 两因子模型下组合的收益和风险的计算

$$\tilde{r}_{pt} = \alpha_p + b_{p1}\tilde{F}_{1t} + b_{p2}\tilde{F}_{2t} + \tilde{\varepsilon}_{pt}$$

$$\bar{r}_{pt} = \alpha_p + b_{p1}\bar{F}_{1t} + b_{p2}\bar{F}_{2t}$$

$$\sigma_p^2 = \boxed{b_{p1}^2\sigma_{1F}^2 + b_{p2}^2\sigma_{2F}^2} + \sigma_{\varepsilon p}^2$$

因子风险
系统风险

非因子风险
特质风险
非系统风险

类似的方法可以证明足够分散时可以将非系统化风险分散掉

二、多因子模型

假设确定证券收益的因子有 K 个（$K>2$），而且对于每个证券 i 满足：

$$\tilde{r}_{it}=\alpha_i+b_{i1}\tilde{F}_{1t}+b_{i2}\tilde{F}_{2t}+\ldots+b_{iK}\tilde{F}_{Kt}+\tilde{\varepsilon}_{it} \qquad (10.24)$$

其中，F_{kt} ($k=1,2,..K$) 是决定证券收益的 K 个因子，b_{ik} ($k=1,2,..K$) 是因子载荷。对给定的 t，截距项 α_i 和因子载荷 b_{ik} 是常数。ε_{it} 为随机项或误差项，所有的随机项都有有限的期望和方差且 $E[\tilde{\varepsilon}_{it}]=0$，同时还满足：

（1）$\mathrm{cov}(\tilde{F}_{jt},\tilde{F}_{kt})=0,(j\neq k)$：任何两个不同的因子互不相关；

（2）$\mathrm{cov}(\tilde{F}_{kt},\tilde{\varepsilon}_{it})=0$，（$k=1,2,..K$, $i=1,2,\ldots,N$）：所有的随机项与因子相互独立；

（3）$\mathrm{cov}(\tilde{\varepsilon}_{it},\tilde{\varepsilon}_{jt})=0$ $(i\neq j)$：不同证券的误差项彼此独立。

- 多因子模型下单个股票的收益和风险的计算

$$
\begin{cases}
\bar{r}_{it} = \alpha_i + b_{i1}\bar{F}_{1t} + b_{i2}\bar{F}_{2t} + \ldots + b_{iK}\bar{F}_{Kt} \quad (i = 1, 2, \ldots, N) \\
\sigma_i^2 = \boxed{b_{i1}^2\sigma_{F_1}^2 + b_{i2}^2\sigma_{F_2}^2 + \ldots + b_{iK}^2\sigma_{F_K}^2} + \sigma_{\varepsilon i}^2 \quad (i = 1, 2, \ldots, N) \\
\sigma_{ij} = b_{i1}b_{j1}\sigma_{F_1}^2 + \ldots + b_{iK}b_{jK}\sigma_{F_K}^2 \quad (i \neq j,\ \ i, j = 1, 2, \ldots, N)
\end{cases}
$$

- 因子风险
  系统风险

  非因子风险
  特质风险
  非系统风险

- 多因子模型下单个股票的收益和风险的计算

$$\tilde{r}_{pt} = \alpha_p + b_{p1}\tilde{F}_{1t} + b_{p2}\tilde{F}_{2t} + \ldots + b_{pK}\tilde{F}_{Kt} + \tilde{\varepsilon}_{pt}$$

$$\bar{r}_{pt} = \alpha_p + b_{p1}\bar{F}_{1t} + b_{p2}\bar{F}_{2t} + \ldots + b_{pK}\bar{F}_{Kt}$$

$$\sigma_p^2 = \boxed{b_{p1}^2\sigma_{1F}^2 + \ldots + b_{pK}^2\sigma_{KF}^2} + \sigma_{\varepsilon p}^2$$

因子风险
系统风险

非因子风险
特质风险
非系统风险

类似的方法可以证明足够分散时可以将非系统化风险分散掉

第三节 套利定价理论

- 罗斯（Ross，1976)在多因子模型基础上给出了无套利条件下确定证券收益的公式，它形成了套利定价理论（arbitrage pricing theory，简称 APT）的核心结论。
- 与一般均衡定价的 CAPM 相比，APT 以更少的假设得出了定价公式，而且定价结论易于实证检验

一、APT的假设

- 假设 1：均衡市场上不存在套利机会。
- 假设 2：投资者具有不满足性，而且市场无摩擦。
- 假设 3：多因子模型成立，即任何证券的收益率满足下列方程：

$$\tilde{r}_{it} = \alpha_i + b_{i1}\tilde{F}_{1t} + b_{i2}\tilde{F}_{2t} + \ldots + b_{iK}\tilde{F}_{Kt} + \tilde{\varepsilon}_{it}$$

- 假设 4：证券数量远大于因子的数量，即 N >> K 。

当 N 足够大时，投资者可以构造**几乎完全消除特质风险的投资组合**，即

$$\lim_{N\to\infty} \sigma^2_{\varepsilon_p} = 0.$$

这个组合称为 **近似无风险套利组合**（arbitrage portfolio）。

- 预处理

$$\tilde{r}_{it}-\overline{r}_{it}=b_{i1}(\tilde{F}_{1t}-\overline{F}_{1t})+b_{i2}(\tilde{F}_{2t}-\overline{F}_{2t})+\ldots+b_{iK}(\tilde{F}_{Kt}-\overline{F}_{Kt})+\tilde{\varepsilon}_{it}$$

显然，$E[\tilde{F}_{kt}-\overline{F}_{kt}]=0, k=1,2,\ldots,K$，故可令：

$$\tilde{F}'_{kt}\equiv\tilde{F}_{kt}-\overline{F}_{kt}, k=1,2,\ldots,K \qquad (10.26)$$

则有：

$$\tilde{r}_{it}=\alpha'_i+b_{i1}\tilde{F}'_{1t}+b_{i2}\tilde{F}'_{2t}+\ldots+b_{iK}\tilde{F}'_{Kt}+\tilde{\varepsilon}_{it} \qquad (10.27)$$

满足：$E[\tilde{F}'_{kt}]=0, \mathrm{var}[\tilde{F}'_{kt}]=\mathrm{var}[\tilde{F}_{kt}], k=1,2,\ldots,K$。为了表述的方便，我们去掉“′”，得到标准化的多因子模型：

$$\tilde{r}_{it}=\alpha_i+b_{i1}\tilde{F}_{1t}+b_{i2}\tilde{F}_{2t}+\ldots+b_{iK}\tilde{F}_{Kt}+\tilde{\varepsilon}_{it}$$

处理前因子期望值通常非零，处理后所有因子期望值为零，由无套利原则可知，处理后的截距项α等于股票的期望收益。

二、特殊情形 —精确因子模型

- 精确因子（exact factor）

$$\tilde{r}_{it} = E[\tilde{r}_{it}] + b_{i1}\tilde{F}_{1t} + b_{i2}\tilde{F}_{2t} + \ldots + b_{iK}\tilde{F}_{Kt} \qquad (10.29)$$

没有随机项，“精确”等于

- **1、单因子精确因子模型**

假设： $\tilde{r}_{it} = E[\tilde{r}_{it}] + b_i\tilde{F}$

推导定价公式：

step1：构造投资组合(ω_i ,ω_j)

$$\tilde{r}_p = \omega_i\tilde{r}_{it} + \omega_j\tilde{r}_{jt}$$

$$= [\omega_i\bar{r}_{it} + \omega_j\bar{r}_{jt}] + [\omega_i b_i + \omega_j b_j]\tilde{F} \qquad （10.31）$$

选择(ω_i, ω_j)使$[\omega_i b_i + \omega_j b_j] = 0$

故

$$\tilde{r}_p = \omega_i\bar{r}_{it} + \omega_j\bar{r}_{jt} \qquad （10.32）$$

- step2 由无套利条件解得

$$\begin{cases} \omega_i b_i + \omega_j b_j = 0 \\ \omega_i + \omega_j = 1 \end{cases}$$

解得：$\omega_i = b_j / (b_j - b_i)$ 并代入（10.32）得：

$$\frac{b_j}{b_j - b_i}\bar{r}_i - \frac{b_i}{b_j - b_i}\bar{r}_j = r_F \qquad (10.33)$$

化简得到该模型的结论：

$$\frac{\bar{r}_i - r_F}{b_i} = \frac{\bar{r}_j - r_F}{b_j} \qquad (10.34)$$

当组合对因子风险完全对冲后（即没有系统性风险），
该组合的风险就应该**只剩特质风险或接近无风险**。
因此，在无套利均衡（no-arbitrage）条件下：
这个“无因子风险组合”的收益率，应该等于市场上的无风险收益率。

$$\bar{r}_p = r_F$$

- 含义：任何两个单因子因子载荷或因子敏感性不同的证券，其超额收益率与其因子载荷之比为常数。记该常数为λ，则有

$$\bar{r}_i = r_F + b_i\lambda,\ (i = 1, 2, \ldots, N) \qquad （10.35）$$

◎常数λ为单位因子载荷或风险暴露所要求的超额收益率，因此我们称它为**风险价格**。

◎因子载荷可以理解为风险暴露，是特定证券暴露给公共因子的风险，也是特定证券对公共因子的敏感性。

- 为了进一步理解定价公式的含义，再次取投资组合，使得这个组合的系统性风险暴露（factor loading）刚好等于 1

$\omega_i' b_i + \omega_j' b_j = 1$，结合 $\omega_i' + \omega_j' = 1$ 解得 $\omega_i' = (1-b_j)/(b_i - b_j)$，将其代入（10.31）得：

$$\tilde{r}_p = [r_F + \lambda] + \tilde{F} \qquad (10.36)$$

这里的投资组合 (ω_i', ω_j') 具有单位因子风险，称之为**因子组合**，它的风险溢价为 $E[\tilde{r}_p] - r_F = \lambda$，因此$\lambda$也叫**因子溢价**，也就是风险因子的风险价格，即单位风险（b=1 时）的风险溢价。我们强调（10.35）的含义：

b 是因子载荷；λ 是风险因子的风险价格，即单位风险的风险溢价，也叫因子溢价。

- **2、多因子精确因子模型：**

假设：

$$\tilde{r}_{it} = E[\tilde{r}_{it}] + b_{i1}\tilde{F}_{1t} + b_{i2}\tilde{F}_{2t} + \ldots + b_{iK}\tilde{F}_{Kt}$$

- **推导：** idea---- 复制无风险证券

风险证券构造投资组合 $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$，此时该投资组合的收益率为：

$$\tilde{r}_{pt} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \bar{r}_i + (\sum_{i=1}^{n} \omega_i b_{i1})\tilde{F}_{1t} + (\sum_{i=1}^{n} \omega_i b_{i2})\tilde{F}_{2t} + \ldots + (\sum_{i=1}^{n} \omega_i b_{iK})\tilde{F}_{Kt}$$

- step1：构造组合

选择组合 $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ 满足：

$$\boxed{\omega_1 + \omega_2 +, \ldots, +\omega_n} = 0$$

称：套利组合

自融资组合

同时满足：

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \omega_i b_{i1} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \omega_i b_{i2} = 0 \\ \cdots \\ \sum_{i=1}^{n} \omega_i b_{iK} = 0 \end{cases}$$

1. $\sum_i \omega_i = 0 \to$ **无资金净投入**（零成本组合）；
2. $\sum_i \omega_i b_{ik} = 0$ 对所有 $k \to$ **对所有风险因子暴露为零**（零系统性风险）。

也就是说，这个组合是一个**无因子风险的套利组合**。

线性代数中，齐次线性方程组

$$A\omega = 0$$

有非零解的充要条件是：

$$\operatorname{rank}(A) < \text{number of unknowns}.$$

在这里：

$$\operatorname{rank}(A) \le K + 1 < n,$$

所以系统一定存在**非零解。**

- 改写为矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ b_{11} & b_{21} & b_{31} & \dots & b_{n,1} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} & \dots & b_{n,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1K} & b_{2K} & b_{3K} & \dots & b_{n,K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \dots \\ \omega_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (10.40)$$

K+1个方程，n个未知数，矩阵(K+1)Xn矩阵
假设要求 n>>k,必有非零解！

- step2：确定定价方程

无套利原理得到：

$$\tilde{r}_p = \sum^{n} \omega_i \overline{r_i} = 0 \qquad (10.41)$$

换言之，方程组（10.40）的解必为方程（10.41）的解，或者说方程组（10.40）必为下列方程组（10.42）的解：

$$\begin{bmatrix} \overline{r_1} & \overline{r_2} & \overline{r_3} & \cdots & \overline{r_n} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_{11} & b_{21} & b_{31} & \cdots & b_{n,1} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} & \cdots & b_{n,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{1K} & b_{2K} & b_{3K} & \cdots & b_{n,K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \cdots \\ \\ \omega_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (10.42)$$

如果市场无套利，那么：

> 能让前面 $K+1$ 个条件（资金平衡 + K 个因子暴露为零）成立的那组 ω，
> 也必须能使组合收益为 0。

- # 结论

我们前面知道:

- 矩阵维度是 $(K+1)\times n$，其中 $n \gg K$;
- 所以 rank(A) ≤ K+1 < n;
- 因此系统存在**非零解** $\omega \neq 0$。

数学上:

如果一个齐次方程组 $A\omega = 0$ 有非零解,

说明 A 的行（或列）**不是线性无关的。**

即至少有一行可以表示为其他行的线性组合。

由此可以断定，齐次线性方程组（10.42）的系数矩阵中，第一行必定可以表示为其它行的线性组合，即存在 K+1 个常数 $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_K$，使得下式成立:

$$\overline{r_i} = \lambda_0 + b_{i1}\lambda_1 + b_{i2}\lambda_2 + \ldots + b_{iK}\lambda_K, (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (10.43)$$

或者改写为:

$$\overline{r_i} = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{K} b_{ik}\lambda_k, (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (10.43a)$$

λ_0的原因？

数学上：**第二行**是常数项 1（代表资金平衡条件）
经济上：无风险收益率

- 向量语言表示

（说明： 若n个证券中任何两个不相同，则n =N,此后都设N个不同证券）

$$\begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \cdots \\ \bar{r}_i \\ \cdots \\ \bar{r}_N \end{bmatrix} = \lambda_0 \begin{bmatrix} 1 \\ \cdots \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1K} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & b_{i3} & & b_{iK} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{N1} & b_{N2} & b_{N3} & & b_{NK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \cdots \\ \lambda_K \end{bmatrix} \qquad (10.43b)$$

或简单地记为：

$$\bar{r} = \lambda_0 1^T + B^T \lambda \qquad (10.43b)$$

其中，$\bar{r}$ 为向量$(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_N)^T$，$B$ 为向量因子载荷矩阵，λ 为向量$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_K)^T$。

由方程（10.43a）可以进一步分析定价方程的经济含义：

若存在某投资组合使得某特定的 k 满足 $b_{ik}=1$，而且 $b_{ik'}=0$，$k'\neq k$，则:

$$\bar{r}_i=\lambda_0+b_{ik}\lambda_k=r_F+\lambda_k\equiv\delta_k$$

- 同样的分析可以得到定价方程

$$\lambda_k=\delta_k-r_F$$

$$\bar{r}_i-r_F=(\delta_1-r_F)b_{i1}+(\delta_2-r_F)b_{i2}+\ldots+(\delta_K-r_F)b_{iK},(i=1,2,\ldots,N) \qquad (10.46)$$

该定价方程的含义是：

证券的风险溢价等于证券在各因子上的风险（因子载荷）与相应风险的风险溢价乘积的和，或者在各因子上的风险与相应风险的风险价格乘积的和。

b_{ik} 是 k 因子载荷；λ_k 是风险因子 k 的风险价格，也称因子 k 的风险溢价，或 k 因子溢价，δ_k 为只对第 k 个因子有单位敏感性的投资组合的期望收益率。

三、极限套利与APT

- 假设：

$$\tilde{r}_{it} = E[\tilde{r}_{it}] + b_{i1}\tilde{F}_{1t} + b_{i2}\tilde{F}_{2t} + \ldots + b_{iK}\tilde{F}_{Kt} + \tilde{\varepsilon}_{it} \qquad (10.28)$$

- 推导——推导方法十分类似，精确因子模型下的推导已经演示过，唯一差别在与随机干扰项

- step1 组合的选择

在（10.28）下，取投资组合$(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_N)$满足：

1）自融资：$\sum_{i=1}^{N}\omega_i=0$；

2）足够分散：$\lim\limits_{N\to\infty}\bar{\omega}=0$ 其中 $\bar{\omega}\equiv\max\{|\omega_1|,|\omega_2|,\ldots,|\omega_N|\}$；

3）对冲风险：$\sum_{i}^{N}\omega_i b_{ik}=0,(k=1,2,\ldots,K)$。

$\Downarrow$

$$\tilde{r}_{pt}=\sum_{i=1}^{N}\omega_i\bar{r}_i+(\sum_{i=1}^{N}\omega_i b_{i1})\tilde{F}_{1t}+(\sum_{i=1}^{N}\omega_i b_{i2})\tilde{F}_{2t}+\ldots+(\sum_{i=1}^{N}\omega_i b_{iK})\tilde{F}_{Kt}+\sum_{i=1}^{N}\omega_i\varepsilon_{it}$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\omega_i\bar{r}_i+\sum_{i=1}^{N}\omega_i\varepsilon_{it}=0$$

- 分析

随机项服从正态分布，即 $\tilde{\varepsilon}_{it} \sim N(0,\sigma_i^2)$，若所有随机项的方差有上界，则有：

$E[\sum_{i=1}^{N}\omega_i\varepsilon_{it}]=0$，且 $\lim_{N\to\infty} Var[\sum_{i=1}^{N}\omega_i\varepsilon_{it}]=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\omega_i^2\sigma_i^2=0$

因此 $$\lim_{N\to\infty}[\sum_{i=1}^{N}\omega_i\varepsilon_{it}]=0$$

所以当 $N\to\infty$时必有： $$\tilde{r}_p=\sum_{i=1}^{N}\omega_i\overline{r_i}$$

无套利条件下必有： $$\sum_{i=1}^{N}\omega_i\overline{r_i}=0$$

- 剩下的分析基本相同

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_{11} & b_{21} & b_{31} & \cdots & b_{N,1} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} & \cdots & b_{N,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdot & \cdots & \cdots \\ b_{1K} & b_{2K} & b_{3K} & \cdots & b_{N,K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \cdots \\ \omega_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{（10.40a）}$$

而且方程组(10.40a)的解必为下列方程组(10.42a)的解：

$$\begin{bmatrix} \overline{r}_1 & \overline{r}_2 & \overline{r}_3 & \cdots & \overline{r}_N \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_{11} & b_{21} & b_{31} & \cdots & b_{N,1} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} & \cdots & b_{N,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdot & \cdots & \cdots \\ b_{1K} & b_{2K} & b_{3K} & \cdots & b_{N,K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \cdots \\ \\ \omega_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(10.42a)}$$

因此方程组(10.42a)的系数矩阵的第一行必然可以表示为其它行的线性组合，即必定存在 K+1 个常数 $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_K$，使得下式成立：

$$\bar{r}_i=\lambda_0+b_{i1}\lambda_1+b_{i2}\lambda_2+\ldots+b_{iK}\lambda_K,(i=1,2,\ldots,N) \qquad （10.43）$$

$$\begin{bmatrix}\bar{r}_1\\ \cdots\\ \bar{r}_i\\ \cdots\\ \bar{r}_N\end{bmatrix}=\lambda_0\begin{bmatrix}1\\ \cdots\\ 1\\ \cdots\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1K}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{i1} & b_{i2} & b_{i3} & & b_{iK}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{N1} & b_{N2} & b_{N3} & \cdots & b_{NK}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \cdots\\ \lambda_K\end{bmatrix} \qquad (10.43b)$$

或简单地记为：

$$\bar{r}=\lambda_0 1^T+B^T\lambda \qquad (10.43b)$$

其中，$\bar{r}$ 和 B 以及 λ 与精确因子情形下的含义相同。此时的定价方程同样表示为：

$$\bar{r}_i-r_F=(\delta_1-r_F)b_{i1}+(\delta_2-r_F)b_{i2}+\ldots+(\delta_K-r_F)b_{iK},(i=1,2,\ldots,N) \qquad （10.46）$$

四 、ATP与CAPM

- APT 和 CAPM 分别在不同的假设下得到了定价结果，下面讨论如果 APT 和 CAPM 的假设同时成立，其结果如何？

- 1、单因子模型情形

◆**假设**：

（1） APT 和 CAPM 成立；

（2）单因子模型成立

◆分析：

情形一：单因子是市场投资组合，即$F = r_M$，则：

$$b_i=\beta_{iM} \quad ; \quad \delta=E[F]=E[r_m]$$

1. **单因素模型（公式 10.47）：**

$$\tilde{r}_i = \alpha_i + b_i\tilde{F} + \tilde{\varepsilon}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, N) \quad (10.47)$$

2. **预期收益率方程（公式 10.48）：**

$$\bar{r}_i = r_F + b_i\lambda = r_F + b_i(\delta - r_F) \quad (10.48)$$

3. **β 值的计算与关系（公式 10.49）：**

$$\beta_{iM} = \frac{\mathrm{cov}(\tilde{r}_i, \tilde{r}_M)}{\sigma_M^2} = \frac{\mathrm{cov}(\alpha_i + b_i\tilde{F} + \tilde{\varepsilon}_i, \tilde{r}_M)}{\sigma_M^2} = \frac{\mathrm{cov}(\tilde{r}_i, \tilde{r}_M)}{\sigma_M^2} = b_i \quad (10.49)$$

情形二：单因子不是市场投资组合，则：

$$\beta_{iM} = \frac{\text{cov}(\tilde{r}_i, \tilde{r}_M)}{\sigma_M^2} = \frac{\text{cov}(\alpha_i + b_i\tilde{F} + \tilde{\varepsilon}_i, \tilde{r}_M)}{\sigma_M^2} = b_i\frac{\text{cov}(\tilde{F}, \tilde{r}_M)}{\sigma_M^2} \quad (10.51)$$

若 APT 和 CAPM 同时成立，把 (10.51) 代入 (10.50) 得：

$$\bar{r}_i = r_F + \left[(\bar{r}_M - r_F)\frac{\text{cov}(\tilde{F}, \tilde{r}_M)}{\sigma_M^2}\right] b_i \quad (10.52)$$

比较 (10.48) 可得风险价格：

$$\lambda = \left[(\bar{r}_M - r_F)\frac{\text{cov}(\tilde{F}, \tilde{r}_M)}{\sigma_M^2}\right] \equiv (\bar{r}_M - r_F)\beta_{FM} \quad (10.53)$$

因此，$\text{cov}(\tilde{F}, \tilde{r}_M) > 0$ 时风险价格为正，因子载荷 b_i 越高，证券的期望收益越高；

$\text{cov}(\tilde{F}, \tilde{r}_M) < 0$ 时风险价格为负，因子载荷 b_i 越高，证券的期望收益越低。

推导过程： 将 CAPM 公式 (10.50) $\bar{r}_i = r_F + \beta_{iM}(\bar{r}_M - r_F)$ 中的 β_{iM} 替换为 (10.51) 的右侧部分。

- 2、两因子模型情形

◆**假设**：

（1） APT 和 CAPM 成立；

（2）单因子模型成立

◆分析：两方程同时成立课计算贝塔值和风险价格：

$$\beta_{iM} = b_{i1}\frac{\mathrm{cov}(\tilde{F}_1,\tilde{r}_M)}{\sigma_M^2} + b_{i2}\frac{\mathrm{cov}(\tilde{F}_2,\tilde{r}_M)}{\sigma_M^2} \equiv b_{i1}\beta_{F_1M} + b_{i2}\beta_{F_2M} \qquad (10.56)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = [(\bar{r}_M - r_F)\dfrac{\mathrm{cov}(\tilde{F}_1,\tilde{r}_M)}{\sigma_M^2}] \equiv (\bar{r}_M - r_F)\beta_{F_1M} \\ \lambda_2 = [(\bar{r}_M - r_F)\dfrac{\mathrm{cov}(\tilde{F}_2,\tilde{r}_M)}{\sigma_M^2}] \equiv (\bar{r}_M - r_F)\beta_{F_2M} \end{cases} \qquad (10.57)$$

第四节、因子模型的实证分析

- 因子模型的实证与 CAPM、APT 的实证紧密相关，著名的因子模型包括三因子、四因子和五因子模型。从某种角度来说，因子模型的实证主要源自 CAPM 的实证分析，它是 CAPM 实证分析的一种拓展。

Fama-French 三因子模型

- Fama-French 三因子模型是具有开创性的因子模型，该模型源自 Fama 和French（1992）与 Fama 和French（1993）。因子模型是当前最热门的研究领域之一。华人中很多人做出了非常不错的工作，如：

  Zhou Guofu（周国富）,Hou Kewei(侯恪伟)；

  Zhang Lu（张橹）

- 1、因子的确定

Fama 和 French（1992）首先介绍了与 Sharpe-Lintber-Black(SLB) 模型相违背的实证工作并从中总结出具有代表性的异象，包括：

（1）Banz(1981)的规模效应，指出反映**规模的股权市场价值**(ME)有助于解释截面收益，对于给定的β值，低 ME 的股票或股票组合将获得高于理论预测的收益，高 ME 的则相反；

（2）Bhandari(1988)的杠杆效应，指出杠杆与风险和收益相关，但 SLB 模型中杠杆风险被市场β所涵盖，即卖空无风险资产意味着杠杆，但含 ME 和含β的模型中杠杆有助于解释截面收益；

（3）Stattman(1980)、Rosenberg 等(1985)发现美国股票的平均收益与公司的股权账面价值 BE 除以市场价值 ME 所得到的比值（BE/ME）正相关，BE/ME（即book-to-market equity）通常称为账市比；

（4）Basu (1983)的实证表明盈利-价格比（E/P）连同规模(size，ME)和贝塔值（β）有助于解释美国股票市场的截面平均收益，Ball(1978)则认为 E/P 可以“捕捉”预期收益中所有其他无名因子的代理变量——那些高风险和高预期收益的股票，其 E/P 可能会更高（价格相对于盈利较低）。

- 总之，在 1963-1990 年期间，规模（ME）和账市比（BE/ME）“捕捉”了规模（ME）、市盈率（E/P）、账市比（BE/ME）和杠杆等因素相关的平均股票收益的截面变化。因此可以筛选出三个因子：

贝塔（β）；规模（ME）；账市比（BE/ME）

- 2、因子模型的构建
- 在上述结论的基础上，Fama 和 French（1993）构造了三因子模型。文章最初构造了五个共同因子（common factors)，三个股票共同因子和两个债券共同因子。因此包含两个实证模型，一个是债券的实证模型，一个是股票的实证模型：

$$\tilde{r}_{i,t} - r_{F,t} = \alpha_i + m_i TERM_t + d_i DEF_t + \tilde{\varepsilon}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

$$\tilde{r}_{i,t} - r_{F,t} = \alpha_i + b_i(\tilde{r}_{Mt} - r_{Ft}) + s_i SMB_t + +h_i HML_t + \tilde{\varepsilon}_{i,t} \quad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

- TERM 是期限因子，由长期国债收益与 1 个月短期国债（T-bill）收益的差；
- DEF 是违约因子，由长期公司债券收益与长期国债组合收益之差；
- SMB 是规模因子；
- HML 是帐市比因子。市场因子有市场投资组合的收益与无风险利率因子之差构成。

- step1依规模（即市值 ME）的中位数将股票分成两组：大规模组合B和小规模组S；
- step2将各组依据账面价值 BE 与市值 ME 之比将每一组分为三组：低比值L（最低的 30%）、中比值M（中间的 40%）和高比值H（最高的 30%）
- step3两者结合共计六个组，并记为 S/L，S/M，S/H，B/L，B/M，B/H 。六个组合的等权收益分别用上述字母的角标表示，由此组成 SMB 和 HML 因子：

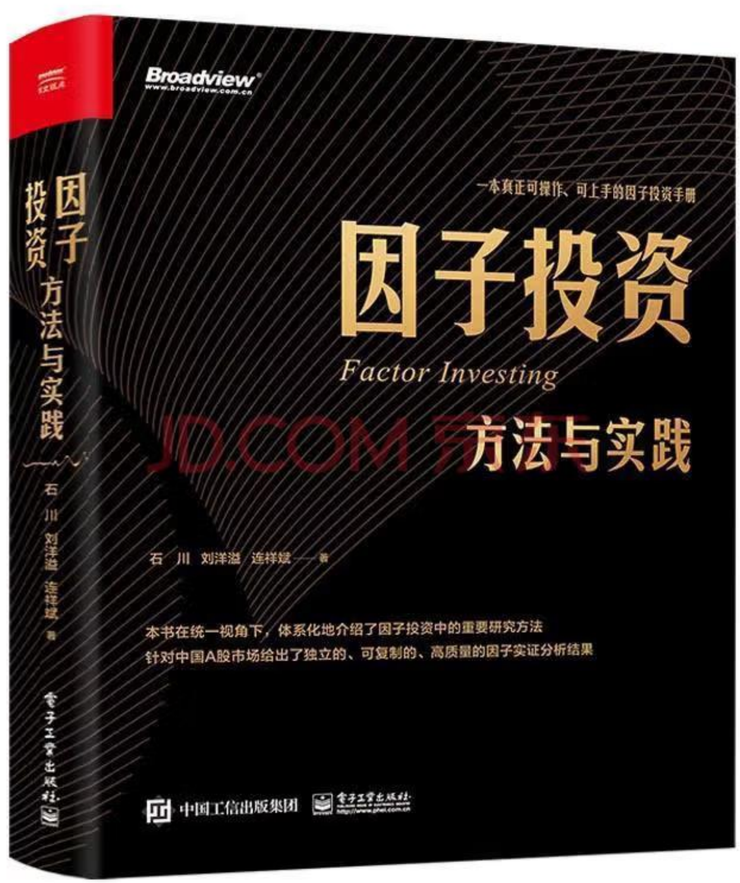
$$SMB = \frac{r_{S/L} + r_{S/M} + r_{S/H}}{3} - \frac{r_{B/L} + r_{B/M} + r_{B/H}}{3}$$

$$SMB = \frac{r_{S/H} + r_{B/H}}{2} - \frac{r_{S/L} + r_{B/L}}{2}$$

- 以上是经典的三因子模型，基于该思想 Carhart(1997)和 Novy-Marx(2013)分别推出了四因子模型，Fama 和 French(2015)推出了五因子模型。Hou、Xue 和Zhang(2015)则基于托宾 Q 理论推出了 Q 因子

- 3、实证分析
- Fama 和 French(1993)的实证表明，在股票市场和债券市场存在五个共同因子；股票市场上的三个因子在政府债券和公司债券市场上的作用比较小。Fama和 French(1992,1993)从时间序列回归和截面回归两个维度对资产定价模型展开实证分析，并开创了近几十年资产定价实证分析的基准模式。无论是建立在三因子模型上的四因子模型、五因子模型还是其他更多因子模型，都采用基本相似的方法展开实证。同时，针对因子构建方法、时间序列和截面回归孰优孰劣等问题展开了讨论，并推动了资产定价实证分析的发展。

因子投资


Broadview
www.broadview.com.cn
一本真正可操作、可上手的因子投资手册
因子投资
Factor Investing
方法与实践
石 川 刘洋溢 连祥斌 著
本书在统一视角下，体系化地介绍了因子投资中的重要研究方法
针对中国A股市场给出了独立的、可复制的、高质量的因子实证分析结果
中国工信出版集团
电子工业出版社
因子投资 方法与实践
石 川 刘洋溢 连祥斌 著
电子工业出版社