

# 第五次作业答案

## 金融经济学-2025 年秋

### Answer 1

设到期日相同、标的资产相同， $K$  给定， $\delta > 0$ 。记同到期的欧式看涨价格函数为  $c(k)$ ，其到期支付为  $(S_T - k)^+$ 。给定组合

$$\text{Butterfly}(K, \delta) = +C(K - \delta) - 2C(K) + C(K + \delta),$$

其期初价格为

$$\Pi(\delta) = c(K - \delta) - 2c(K) + c(K + \delta).$$

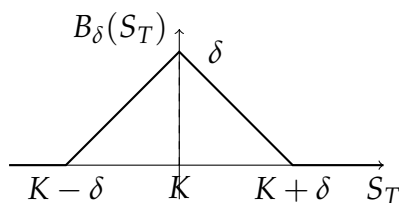
到期  $T$  的到期收益为

$$B_\delta(S_T) = (S_T - (K - \delta))^+ - 2(S_T - K)^+ + (S_T - (K + \delta))^+.$$

因此：

$$B_\delta(S_T) = \begin{cases} 0, & S_T \leq K - \delta, \\ S_T - K + \delta, & K - \delta < S_T \leq K, \\ K + \delta - S_T, & K < S_T \leq K + \delta, \\ 0, & S_T > K + \delta. \end{cases}$$

最大到期收益  $B_\delta(K) = \delta$ ，在两侧断点  $K \pm \delta$  处为 0。



给定  $K$ ，取  $0 < \delta_1 < \delta_2$ 。由上式逐段比较，任意  $s \in \mathbb{R}$  有

$$B_{\delta_2}(s) \geq B_{\delta_1}(s).$$

- 若  $s \notin [K - \delta_2, K + \delta_2]$ ，两者皆为 0；
- 若  $s \in [K - \delta_1, K]$ ，则  $B_{\delta_2}(s) - B_{\delta_1}(s) = (s - K + \delta_2) - (s - K + \delta_1) = \delta_2 - \delta_1 \geq 0$ ；
- 若  $s \in [K, K + \delta_1]$ ，则  $B_{\delta_2}(s) - B_{\delta_1}(s) = (K + \delta_2 - s) - (K + \delta_1 - s) = \delta_2 - \delta_1 \geq 0$ ；

- 若  $s \in (K - \delta_2, K - \delta_1) \cup (K + \delta_1, K + \delta_2)$ , 则  $B_{\delta_1}(s) = 0$  而  $B_{\delta_2}(s) > 0$ 。

因此  $B_{\delta_2} \geq B_{\delta_1}$  在所有状态上成立。

由无套利定价（风险中性定价），蝶形价差的期初价格是贴现后的期望：

$$\Pi(\delta) = e^{-rT} \mathbb{E}^Q[B_{\delta}(S_T)].$$

于是

$$\Pi(\delta_2) - \Pi(\delta_1) = e^{-rT} \mathbb{E}^Q[B_{\delta_2}(S_T) - B_{\delta_1}(S_T)] \geq 0,$$

只要  $S_T \in (K - \delta_2, K + \delta_2)$  的概率大于 0，则  $\delta$  越大，蝶形价差的价格越高。

## Answer 2

风险中性概率

$$p^* = \frac{R - (1 + d)}{(1 + u) - (1 + d)} = \frac{1.1 - 0.8}{1.2 - 0.8} = \frac{0.30}{0.40} = 0.75.$$

- (1) 终端股价： $S_u = 12$ ,  $S_d = 8$ 。看跌到期支付： $P_u = \max(9 - 12, 0) = 0$ ,  $P_d = \max(9 - 8, 0) = 1$ 。

风险中性定价：

$$P_0 = \frac{(1 - p^*) \cdot 1 + p^* \cdot 0}{R} = \frac{5}{22}$$

- (2) 两期末股价节点：

$$S_{uu} = 10 \cdot 1.2^2 = 14.4, \quad S_{ud} = S_{du} = 10 \cdot 1.2 \cdot 0.8 = 9.6, \quad S_{dd} = 10 \cdot 0.8^2 = 6.4.$$

看涨到期支付

$$C_{uu} = \max(14.4 - 9, 0) = 5.4, \quad C_{ud} = C_{du} = \max(9.6 - 9, 0) = 0.6, \quad C_{dd} = 0.$$

- (3)  $t = 1$  的看涨价格：当  $S_1 = 12$  或  $S_1 = 8$

$$C_1(12) = \frac{p^* \cdot 5.4 + (1 - p^*) \cdot 0.6}{R} = \frac{0.75 \cdot 5.4 + 0.25 \cdot 0.6}{1.1} = \frac{42}{11};$$

$$C_1(8) = \frac{p^* \cdot 0.6 + (1 - p^*) \cdot 0}{R} = \frac{0.75 \cdot 0.6}{1.1} = \frac{9}{22}.$$

- (4)  $t = 0$  的看涨价格

$$C_0 = \frac{p^* C_1(12) + (1 - p^*) C_1(8)}{R} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{42}{11} + \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{22}}{1.1} = \frac{1305}{484} \approx 2.70.$$

也可直接用两期公式  $C_0 = \frac{p^{*2} \cdot 5.4 + 2p^*(1 - p^*) \cdot 0.6}{R^2} = \frac{261/80}{121/100} = \frac{1305}{484}$ .

- (5) 若为美式看涨，因为没有股利，美式看涨期权不会提前执行，价格与欧式看涨相同，也为 2.70