第三章：风险厌恶及典型的效用函数

武汉大学经济与管理学院

主要内容

- 风险态度及分类
- 风险厌恶的度量
- 基于风险厌恶分类的效用函数

第一节：风险厌恶的定义

- 当投资者面临风险时，有的乐于冒险、有的极力回避、有的则无所谓。经济人的这种面对风险的表现，我们称之为**风险态度**。

- 严格地，所谓**风险态度**就是经济人面对风险时主观上所采取的应对方式，一般分为**风险厌恶**（risk aversion）、**风险喜好**（risk loving 或 risk seeker）和**风险中性**（risk neutral）。

一、风险厌恶的定义

- 一般采用两种方法定义风险厌恶：
  ◇其一是引进公平博弈来定义
  ◇其二是直接利用效用函数来定义

- 通过公平博弈的定义：

◇**定义3.1**：称一个期望值为零的不确定性为**公平博弈**（fair gamble），即：g为不确定性支付，若E[g]=0，则称g为**公平博弈**。

◇**定义3.2**：称经济人为**风险厌恶**的，如果在任何财富水平下，经济人都不愿参与公平博弈。

- w是初始财富水平，g 为公平博弈。不参与博弈财富不变，参与则财富变为w+g
- 则通过公平博弈的定义可以用两种“语言”来描述：

☞偏好语言：

$$w \succ w+\tilde{g} \quad , \quad E[\tilde{g}]=0 \qquad (3.1)$$

☞效用函数语言：

$$u(w) \geq E[u(w+\tilde{g})] \quad , \quad E[\tilde{g}]=0 \qquad (3.2)$$

（3.1）中取严格偏好或（3.2）中取严格大于号时称为**严格风险厌恶**

- 类似地，若在任何财富水平下，经济人都愿参与意参与公平博弈，则称经济人为**风险喜好的**。

☞此时类似于（3.1）的偏好表示为：

$$w \prec w+\tilde{g} \quad , \quad E[\tilde{g}]=0 \qquad (3.3a)$$

☞用效用函数表示为：

$$u(w) \leq E[u(w+\tilde{g})], E[\tilde{g}]=0 \qquad (3.3b)$$

上述方程中取严格偏好或严格不等式时为**严格风险喜好**。

- 若在任何财富水平下，经济人都对是否参与公平博弈表现为无差异，或者对两者的偏好相同，则称经济人为**风险中性**的。

☞此时用偏好表示为：

$$w \sim w+\tilde{g} \quad , \quad E[\tilde{g}]=0 \qquad (3.4a)$$

☞用效用函数表示为：

$$u(w)=E[u(w+\tilde{g})], E[\tilde{g}]=0 \qquad (3.4b)$$

例 3.1：
一项无成本地抛一枚均匀的硬币的游戏。硬币正面朝上时经济学家 A 会获得 100 元，否则输掉100。

如果 A 愿意在游戏前支付一定的补偿以参与该游戏，那么他是风险喜好者；如果必须别人给他补偿才愿意参与该游戏，那么他是风险厌恶者；如果他对是否参与无所谓，则是风险中性者。

例如，若 A 事先得到 5 元钱才愿意参与，则 A 是风险厌恶者。

- 上述的定义是基于公平博弈来展开的，其显著特点是无论是否参与博弈，期末财富的期望值相同，而现实中的很多不确定性无法满足这一特征，为此我们可以推广到更一般的情形：

◆ 假设经济人期初拥有财富为 W_0，某博弈（或风险投资）的不确定性结果使得期末的结果为 W_1，相应的期望值为 $E[W_1]$，该期望值不一定等于W_0。

☞让投资者在确定性期望结果 $E[W_1]$和博弈本身之间进行选择，如果投资者偏好于期望结果，则称为风险厌恶者；如果偏好于博弈本身，则为风险喜好者，如果对两者无差异，则称为风险中性者。

- 该思想概括为：

定义 3.3：称投资者为**风险厌恶者**，如果满足：

$$E[u(\widetilde{W}_1)] \leqslant u(E[\widetilde{W}_1]) \tag{3.5}$$

称投资为**风险喜好者**，如果满足：

$$E[u(\widetilde{W}_1)] \geqslant u(E[\widetilde{W}_1]) \tag{3.6}$$

称投资者为**风险中性者**，如果满足：

$$E[u(\widetilde{W}_1)] = u(E[\widetilde{W}_1]) \tag{3.7}$$

或者

若 $\widetilde{W}_1 \leqslant E[\widetilde{W}_1]$，则为风险厌恶；

若 $\widetilde{W}_1 \geqslant E[\widetilde{W}_1]$，则为风险喜好；

若 $\widetilde{W}_1 \sim E[\widetilde{W}_1]$，则为风险中性。

这里的选择不是“是否参加博弈”而是在确定性结果$E[W_1]$和博弈之间的选择

通过一个抛骰子的赌博游戏，描述了三种不同的人对待风险的态度：

赌博规则：抛骰子得点数，对应获得不同金额的奖励。这个赌博的平均期望收益是350元。两种选择： 1. 参加这个期望收益为350元的赌博。2. 直接领取350元的确定收益。

经济人A（风险偏好者）： 他选择参加赌博。

经济人B（风险厌恶者）： 他选择直接领取350元。

经济人C（风险中性者）： 他认为两种选择都一样。他只关心平均收益，对风险本身无所谓。

二、风险态度与效用函数的凸凹性

- 由前面的定义可知，效用函数的性质决定风险态度：若效用函数为凹函数（或上凸函数），则投资者表现为风险厌恶；若效用函数为凸函数（或下凸函数），则投资者表现为风险喜好；若效用函数为线性函数，则投资者表现为风险中性。

- 请注意凸凹函数的定义，它与我们的直觉相反！所以数学中干脆称上凸、下凸；上凹、下凹

- **假设3.1**：（风险厌恶假设）所有投资者都是风险厌恶的！

并非所有人都是风险厌恶，比如有人花钱买保险，也花钱买彩票。
心理账户：投资者将财富“放进”不同的心理账户，在使用某些账户里的财富保险严格的风险厌恶，在使用另外某些账户保险为风险喜好。

- 回顾凹函数的定义：

定义 3.4：函数 f(**x**)，对任意的 **x**, **y**$\in R^n$，和常数$\alpha \in [0,1]$，如果满足：

$$f(\alpha \boldsymbol{x}+(1-\alpha)\boldsymbol{y}) \geq \alpha f(\boldsymbol{x})+(1-\alpha) f(\boldsymbol{y}) \tag{3.8}$$

则称函数 f (**x**) 为凹函数或上凸函数；不等号反向则为凸函数或上凸函数；若取等号则为线性函数。

- 凸凹性的几何意义是比较直观的：

◆如果函数对应的曲面上任何两点的连线都在曲面的下方（即函数值小于曲面上相应点的函数值），则称该函数为上凸的或凹函数；

◆反之，若在曲面的上方（函数值大于曲面上相应点的函数值）则称该函数为下凸的或凸函数；

◆如果任意两点的联系均在曲面上（函数值与曲面上相应函数值相等）则该函数是线性的。

• 凹函数等价与风险厌恶的数学依据：

詹森不等式：对任意的随机变量 **z**，当且仅当函数 $f(\mathbf{x})$ 为凹函数时，有：

$$E[f(\mathbf{z})] \leq f(\mathrm{E}[\mathbf{z}]) \tag{3.9}$$

定义 3.3：称投资者为**风险厌恶者**，如果满足：

$$E[u(\widetilde{W}_1)] \leqslant u(E[\widetilde{W}_1]) \tag{3.5}$$

1. **唐森不等式**指出：如果一个函数 $f(x)$ 是**凹函数**，那么 $E[f(Z)] \leq f(E[Z])$ 成立。
2. **风险厌恶**的定义是：投资者的效用函数 $u(\cdot)$ 满足 $E[u(\tilde{W}_1)] \leq u(E[\tilde{W}_1])$。
3. 将两者对比发现，风险厌恶的定义形式**完全符合**唐森不等式对凹函数的描述。

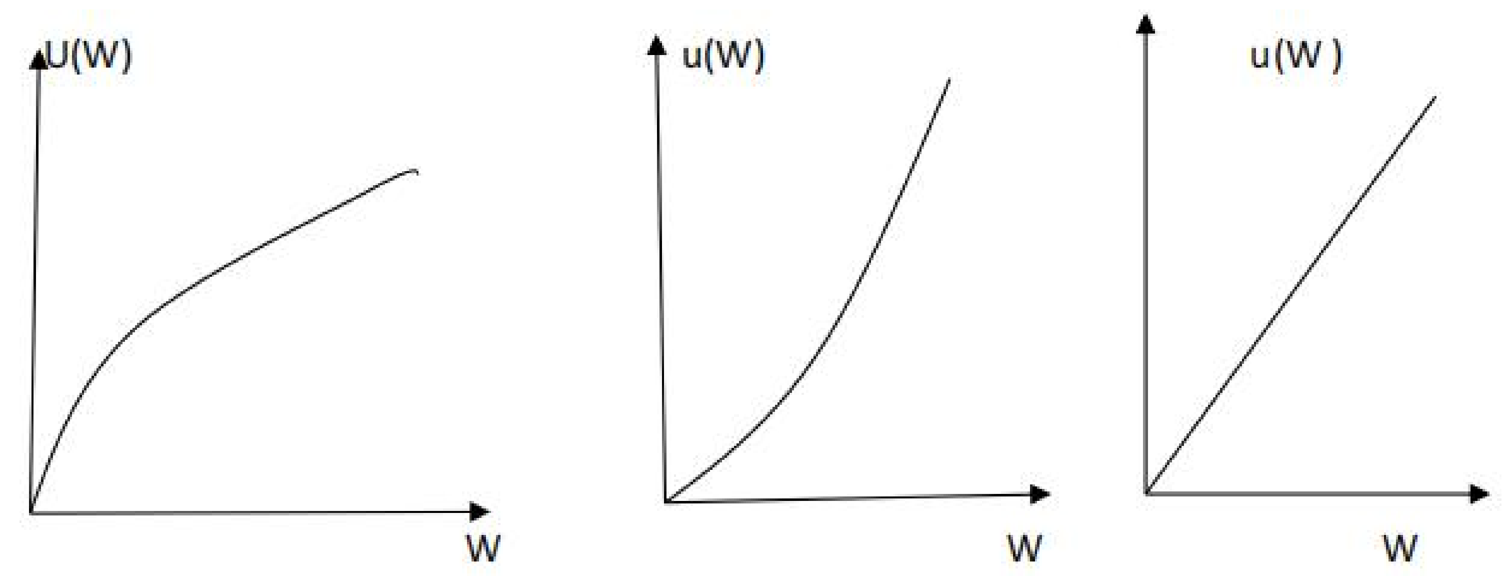
- 风险厌恶的经济学含义：

$$u'(.)\geq 0; u''(.)\leq 0 \qquad (3.10)$$

不满足性公理

边际效用递减

- 一维情形下的图像



A、凹的效用函数（风险厌恶）　B、凸的效用函数（风险喜好）　C、线性效用函数（风险中性）

图 3-1　风险态度与效用函数的凸凹性

第二节、风险厌恶的度量

- 通常我们假设所有经济人为风险厌恶者，接下来我们希望知道如何量化风险厌恶，从而能够比较不同参与者或同一参与者在不同情况时的风险厌恶程度。

- 般地，量化风险厌恶有两种方法：

☞直接法

☞近似法

一、 风险厌恶量化的直接方法

- 风险厌恶的直接量化方法也称为定义法，也叫马科维茨（Markowitz）法。
- 该方法分为两步：

  第一步：定义**确定性等价**（certainty equivalence）

  第二步：定义**风险溢价**（risk premium）

风险溢价是用来度量风险厌恶的指标，直接由定义来计算的称为直接法，用近似方法来计算的称为近似法。

- 记号与框架：

0 期（财富 W_0）　　T 期（财富 W_1）

图 3-2　投资的时间分布

定义 3.5：经济人的效用函数为 $u(W)$，如果存在某一财富水平 W^* 使得：

$$E[u(W_1)]=u(W^*) \tag{3.11}$$

则称 **W^*** 为偏好 $u(.)$ 下的**确定性等价**（certainty equivalence）。进一步定义

$$\pi=E[W_1]-W^* \tag{3.12}$$

称为**风险溢价**（risk premium）。

- 风险溢价的含义在图3-3中直观地表示出来：

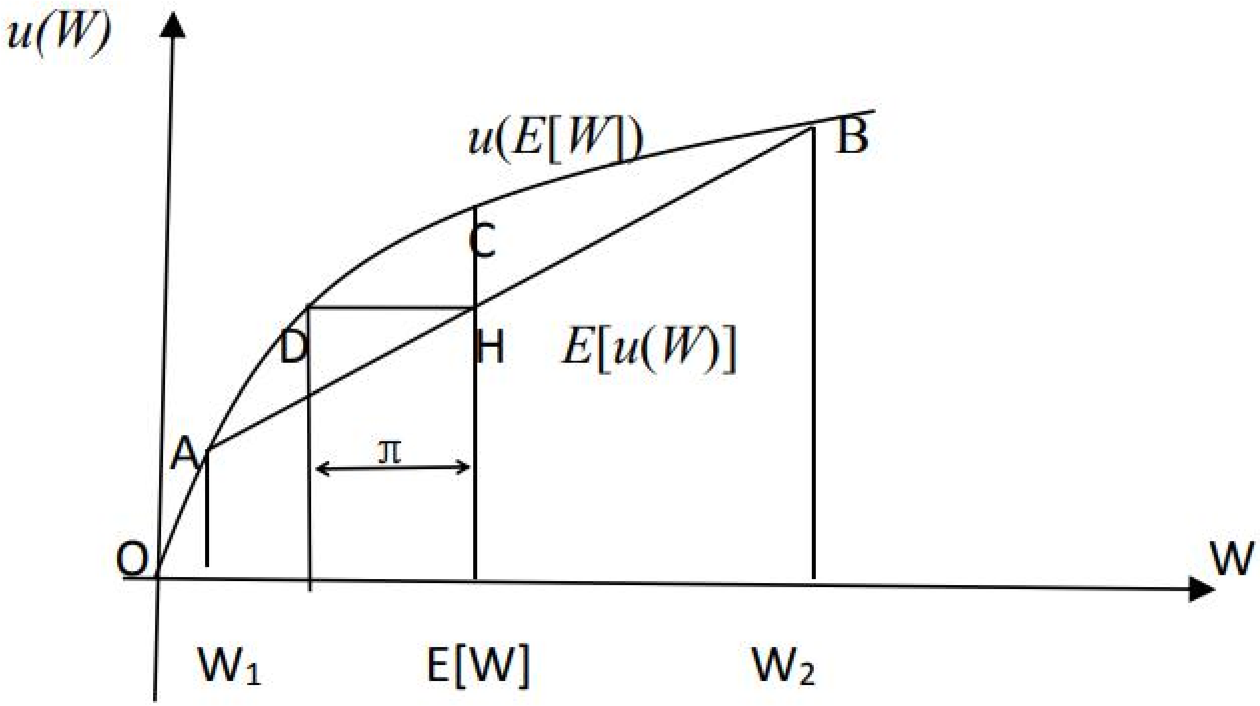


图 3-3 风险厌恶与效用函数的形状

- 以上的定义是在一般情形下的定义，哥利亚（Gollier,2001）等在面对公平博弈的基础上给出相应的定义，事实上两者是等价的：

定义 3.6：经济人的效用函数为 u(W)，其初始财富水平为 W_0，风险资产或风险组合的期末支付为 $\tilde{y}=\mu+\tilde{g}$，且 $E[\tilde{g}]=0$，则风险 $\tilde{y}$ 的确定性等价为 C^e，满足：

$$E[u(\tilde{W}_1)]=E[u(W_0+\tilde{y})]=u(W_0+C^e) \qquad (3.11a)$$

- 相应的风险溢价定义为：

$$\pi(W_0,u,\tilde{y})=\mu-C^e(W_0,u,\tilde{y}) \qquad (3.12a)$$

风险补偿：期望收益和不确定投资之间的选择，除非给与补偿才愿意选择不确定投资。

风险溢价大于0，等于0，小于0意味着什么呢？

例3.3 经济人 A 给例 3.2 中的游戏定价为 320 元，经济人 B 给游戏的定价为 350 元，经济人 C 给游戏的定价为 355 元。
那么对同样一个不确定性游戏，三人的确定性等价分别为 320 元、350 元和 355 元。
因为该不确定性游戏的期望结果的期望值为 350 元，所以三人的风险溢价分别为 30 元、0 元和 -5 元。
A 为风险厌恶者，B 为风险中性者，C 为风险喜好者。

一般地假设投资者面临的风险**均值为零**，此时风险溢价依赖于风险本身的特征，这个特征通常指博弈g的方差；同时风险溢价也依赖于效用函数以及初始财富水平。

$$\pi = \pi(W_0, g, u) = -C^e(W_0, g, u) \tag{3.14}$$

马科维兹两步法给出风险厌恶的定义：
1 定义了确定性等价
2 定义风险溢价，由风险溢价衡量经济人的风险厌恶水平

二、风险厌恶度量的近似法

- 定义法直观性强，但计算比较复杂：首先要解方程（3.11）或（3.11a），然后再利用（3.12）或（3.12a）求风险溢价。阿罗和普瑞特（Arrow-Pratt）（1964）给出了一种适合于小风险情形下的近似，并由此引出了金融经济学里的两个重要概念：绝对风险厌恶（或绝对风险厌恶系数）和相对风险厌恶（或相对风险厌恶系数）。

- 近似法也称为Arrow-Pratt 度量

- 泰勒展开：

☞预备——小风险假设

小风险博弈下，可以对风险溢价给出一个近似。我们先给出一般情形：

$$\overline{W} \equiv E[W_1] \;\; ;g \equiv \widetilde{W}_1 - W_0$$

由公式（3.12）有 $W^*=\pi - E[W_1]$，代入公式（3.11）：

$$E[u(W_1)]=u(\overline{W}-\pi) \qquad (3.11a)$$

定义 3.5：经济人的效用函数为 u(W)，如果存在某一财富水平 W*使得：

$$E[u(W_1)]=u(W^*) \qquad (3.11)$$

则称 W*为偏好 u(.)下的**确定性等价**（certainty equivalence）。进一步定义

$$\pi=E[W_1]-W^* \qquad (3.12)$$

称为**风险溢价**（risk premium）。

一般的泰勒展开

如果函数 $f(x)$ 在点 a 处二阶可导，那么在 a 附近可以展开为：

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + h.o.t$$

其中 $h.o.t$ 指高阶项（higher order terms）。

- ☞**泰勒**展开 $E[u(W_1)] = u(\overline{W} - \pi)$

两边对 $E[W_1]$或$\overline{W}$进行泰勒展开：

因为：$u(\tilde{W}_1) = u(\overline{W}) + u'(\overline{W})(\tilde{W} - \overline{W}) + \frac{1}{2}u''(\overline{W})(\tilde{W} - \overline{W}) + h.o.t$

$\therefore$ 左边$= u(\overline{W}) + \frac{1}{2}u''(\overline{W})E[\tilde{W} - \overline{W}]^2 + h.o.t$

右边$= u(\overline{W}) + u'(\overline{W})(-\pi) + h.o.t$

$$\therefore \quad \pi \approx -\frac{1}{2} \times \frac{u''(\overline{W})}{u'(\overline{W})} \times var(\tilde{W}_1) \qquad (3.15)$$

式中h.o.t 是高阶项（higher order terms）的缩写

☞近似公式

$$\pi \approx -\frac{1}{2} \times \frac{u''(\bar{W})}{u'(\bar{W})} \times var(\tilde{W}_1) \qquad (3.15)$$

该公式由三个部分组成：数值、效用函数导数之比和期末财富的方差。其中数值和方差都是客观的，唯有效用函数导数比刻画了经济人的主观态度，阿罗和普瑞特将其命名为绝对风险厌恶（系数）（absolute risk aversion）

$$A(W) = -\frac{u''(\bar{W})}{u'(\bar{W})} \qquad (3.16)$$

小风险博弈下，可以对风险溢价给出一个近似。我们先给出一般情形：

$$\overline{W} \equiv E[W_1] \;\; ;g \equiv \widetilde{W}_1 - W_0$$

由公式（3.12）有 $W^*=\pi - E[W_1]$，代入公式（3.11）：

$$E[u(W_1)]=u(\overline{W}-\pi) \qquad (3.11a)$$

$$A(W)=-\frac{u''(\overline{W})}{u'(\overline{W})} \qquad (3.16)$$

特殊情形下，若 $E[\tilde{g}]=0$，则 $E[\widetilde{W}_1]=E[W_0+\tilde{g}]=W_0$ 此时 $E[u(\widetilde{W}_1)]=E[u(W_0+g)]$，（3.11）变为：

$$E[u(W_0+g)]=u(W_0-\pi) \qquad (3.11b)$$

泰勒展开后可得到 Arrow-Pratt 绝对风险厌恶：

$$A(W)=-\frac{u''(W_0)}{u'(W_0)} \qquad (3.17)$$

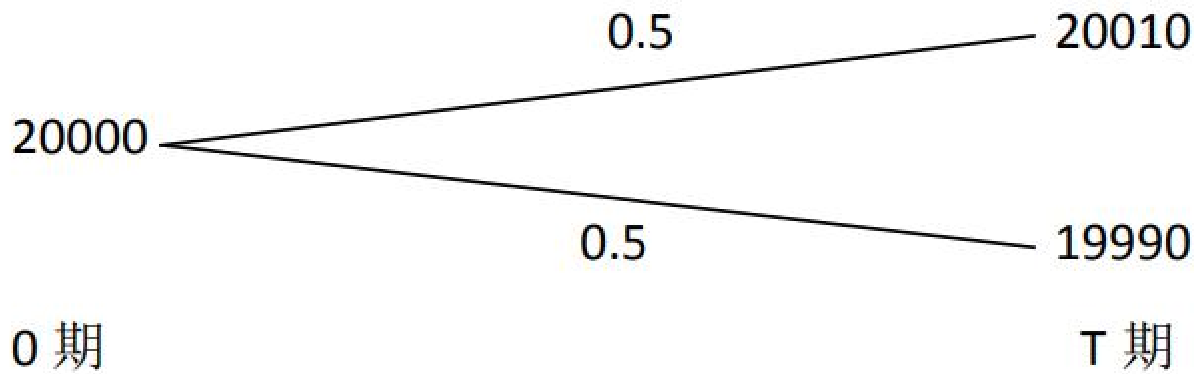
绝对风险厌恶的倒数称为**风险容忍**（risk tolerance）系数：

$$T(W)=\frac{1}{A(W)}=-\frac{u'(W_0)}{u''(W_0)} \qquad (3.18)$$

- 例子

例 3.3（该例子引自 Copeland 教材）：某投资者具有对数效用函数，其初始财富为 20000 美元，该投资者面临两项不确定性投资：项目 A 以相同的概率盈利 10 美元和亏损 10 美元；项目 B 以 0.8 的概率亏损 1000 美元，以 0.2 的概率亏损 10000 美元，请分别用马科维茨法和 Arrow-Pratt 法分别计算两个项目的风险溢价，并对结果进行比较。

解：项目 A 的盈亏树形图为：



马科维茨法：若投资者的确定性等价记为 W*，则：

$$0.5\ln 20010+0.5\ln 19990=\ln W^*$$

$$W^*=\sqrt{20010\times 19990}\approx 19999.9974998$$

$$\pi_{A,M}=E[W]-W^*$$

$$=20000-1999.99749998=0.0025002 \text{ 美元}$$

Arrow-Pratt 法：

$$u'=\frac{1}{W}\ ,\ u''=-\frac{1}{W^2},\ \frac{u''}{u'}=-\frac{1}{W}$$

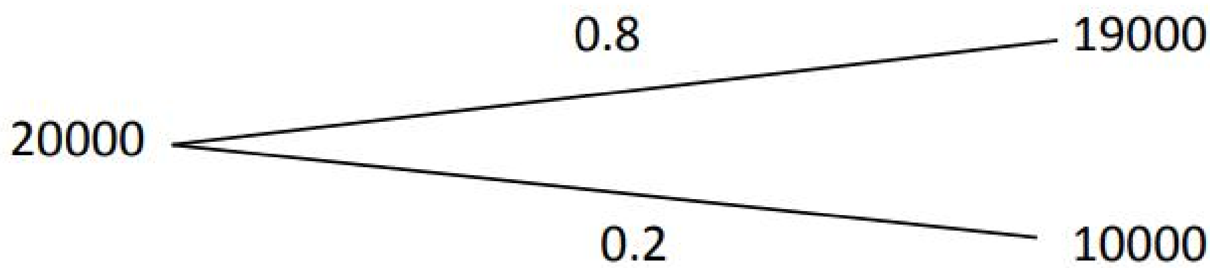
$$\overline{W}=0.5\times 20010+0.5\times 19990=20000$$

$$Var(W)=0.5\times(20010-20000)^2+0.5\times(19990-20000)^2=100$$

$$\pi_{A,AP}\approx 0.0025 \text{ 美元}$$

比较两者相差 0.0000002，因此可近似地认为两种相同。

项目 B 的损益树形图：



用相同的方法计算，马科维茨法的风险溢价为： $\pi_{B,M} = 489$ 美元;

Arrow-Pratt 法的风险溢价为：$\pi_{B,AP} = 324$ 美元

思考：两个项目有什么特点？为什么两个项目的计算风险溢价相差如此之大？

项目特点

- **项目 A**：风险很小。它的波动只是 ±10 美元，相对于投资者的初始财富 20000 美元来说几乎可以忽略。
- **项目 B**：风险很大。可能损失 1000 或者 10000 美元，这在投资者总财富里已经是一个相当显著的波动。

方法差异

1. **马科维茨法**（基于确定性等价）：
   - 直接通过效用函数算确定性等价，再和期望财富比较。
   - 它没有依赖"小风险近似"，可以适用在大风险的情形。
2. **Arrow-Pratt 法**（基于局部近似）：
   - 使用风险溢价近似公式

$$\pi \approx -\frac{1}{2}\frac{u''(\overline{W})}{u'(\overline{W})}\operatorname{Var}(\tilde{W}_1)$$

   - 这是一个二阶泰勒展开得到的近似，只在"小风险"（收益分布离均值不远，方差小）的情况下比较精确。
   - 当风险很大时，高阶项被忽略会导致偏差很大。

为什么结果差异大

- **项目 A**：风险极小，两种方法结果几乎一致（差了 2×10^{-6} 美元）。
- **项目 B**：风险巨大，马科维茨法给出的风险溢价是 489 美元，而 Arrow-Pratt 近似只有 324 美元，差异超过 160 美元。
- 这是因为 Arrow-Pratt 的近似忽略了高阶效用项，而这些在大风险情境下影响很大。

- 前面近似公式导出了绝对风险厌恶系数，类似地可以导出相对风险厌恶系数。

☞预备

记$\tilde{W}_1=W_0(1+\tilde{g})$，则 g 表示随机收益率，同时我们定义风险溢价为收益率之差：

$$\pi_R=\frac{\overline{W_1}}{W_0}-\frac{W^*}{W_0} \tag{3.19}$$

代入(3.11)得：

$$E[u(\tilde{W}_1)=u(\overline{W}_1-W_0\pi_R) \tag{3.20}$$

定义 3.5：经济人的效用函数为 u(W)，如果存在某一财富水平 W*使得：

$$E[u(W_1)]=u(W^*) \tag{3.11}$$

则称 W*为偏好 u(.)下的**确定性等价**（certainty equivalence）。进一步定义

$$\pi=E[W_1]-W^* \tag{3.12}$$

称为**风险溢价**（risk premium）。

- ☞展开

$$E[u(\tilde{W}_1)=u(\bar{W}_1-W_0\pi_R) \tag{3.20}$$

两边在$\bar{W}_1$处进行泰勒展开：

$$左边=E[u(\bar{W}_1)+u'(\bar{W}_1)(\tilde{W}_1-\bar{W}_1)+0.5u''(W_1)(W_1-W_1)+h.o.t]$$

$$=u(W_1)+0.5u''(W_1)var(W_1)+h.o.t$$

$$=u(W_1)+0.5u''(W_1)var(\tilde{g})W_0^2+h.o.t$$

$$右边=u(W_1)+u'(W_1)(-W_0\pi_R)+h.o.t$$

所以：

$$\pi_R = \frac{1}{2}[-\frac{u''(\bar{W})W_0}{u'(\bar{W})}]var(\tilde{g}) \tag{3.21}$$

- ☞近似公式

$$\pi_R = \frac{1}{2}\left[-\frac{u''(\bar{W})W_0}{u'(\bar{W})}\right]var(\tilde{g}) \qquad (3.21)$$

我们将中括号里的部分定义为经济人的相对风险厌恶（relative risk aversion）或相对风险厌恶系数，记为 $RRA(W_0)$ 或 $R(W_0)$。

$$R(W_0) = -\frac{u''(\bar{W})W_0}{u'(\bar{W})} \qquad (3.22)$$

显然有： $R(W_0)=A(W_0)W_0$

都是小风险情形下的风险厌恶，大风险不太适用。

三、效用函数与风险厌恶系数

- 由风险厌恶的定义很容易计算各类效用函数所对应的风险厌恶系数。

线性效用函数或风险中性效用函数：

风险中性下的效用函数为线性函数：$u(W)=aW+b$,其中 $a>0,a,b$ 为常数。容易得到：

$$A(W)=R(W)=0$$

平方效用函数：

早期文献中常用到一类二次效用函数，其效用等于财富的二次函数而被称之为**二次效用函数**（Quadratic utility function），也叫**平方效用函数**：$u(W)=W-0.5aW^2$,

$$A(W)=\frac{a}{1-aW};\ R(W)=\frac{aW}{1-aW}$$

这个效用函数有什么缺陷？

平方效用函数：

早期文献中常用到一类二次效用函数，其效用等于财富的二次函数而被称之为**二次效用函数**（Quadratic utility function），也叫**平方效用函数**：$u(W)=W-0.5aW^2$,

$$A(W)=\frac{a}{1-aW};\ R(W)=\frac{aW}{1-aW}$$

在顶点前一阶导大于0二阶导小于0但是顶点后一阶导小于0

指数效用函数：

指数效用函数是另一个典型的、十分常用的效用函数，因其效用等于财富的指数形式而被称为**指数效用函数(Exponential utility function)**，结合效用函数的性质取：

$$u(W) = -e^{-aW}, a>0 \qquad (3.25)$$

该函数的另一表示为：$u(W) = -\exp\{-aW\}, a > 0$ 。利用公式易得：

$$A(W)=a,\ R(W)=aW$$

绝对风险厌恶系数为常数，称之为定常的绝对风险厌恶偏好CARA

财富的多少对个人的绝对风险厌恶没有影响

这有什么潜在问题呢？

、幂效用函数：

幂效用函数是一类典型的效用函数，也是十分常用的效用函数，其效用值等于财富的一定次方的幂而被称为**幂效用函数(Power utility function)**。结合效用函数的性质我们取：

$$u(W) = \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad \text{其中 常数}\ \gamma>0,\text{且}\gamma \neq 1 \qquad (3.24)$$

利用公式容易得到：

$$R(W) = \gamma;\ A(W)=\frac{\gamma}{W}$$

相对风险厌恶系数为常数，称之为定常的相对风险厌恶偏好CRRA

这意味着什么？

、**幂效用函数**：

幂效用函数是一类典型的效用函数，也是十分常用的效用函数，其效用值等于财富的一定次方的幂而被称为**幂效用函数(Power utility function)**。结合效用函数的性质我们取：

$$u(W) = \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad \text{其中 常数}\ \gamma > 0, \text{且}\ \gamma \neq 1 \qquad (3.24)$$

利用公式容易得到：

$$R(W) = \gamma;\ A(W) = \frac{\gamma}{W}$$

相对风险厌恶系数为常数，称之为定常的相对风险厌恶偏好CRRA

相对风险厌恶不会因为财富变化而变化，而绝对风险厌恶是自身财富的函数，财富越高，厌恶程度越低

. 双曲绝对风险厌恶效用函数：

双曲绝对风险厌恶效用函数也是一类比较常见的函数，它是一类比较复杂的效用函数：

$$u(W) = \zeta(\eta + \frac{W}{\gamma})^{1-\gamma} \qquad (3.26)$$

其中， ζ，η，γ 均为常数， γ >0。利用绝对风险厌恶和相对风险厌恶公式可得：

$$A(W) = \frac{\gamma}{\eta\gamma + W}; R(W) = \frac{\gamma W}{\eta\gamma + W} \qquad （3.27）$$

绝对风险厌恶系数是财富的双曲线。双曲的绝对风险厌恶HARA

当$\eta = 0$，$\gamma \to \infty$以及$\gamma = -1$，HARA有什么变化？

第三节：风险厌恶的比较

- 本节的主要目标是证明风险溢价或绝对风险厌恶系数是能用来比较不同经济人的风险厌恶程度，相应的证明比较难，可以作为选学内容。

- 假设有两个不同的经济人，他们具有相同的当前财富水平 W_0，他们的效用函数分别为 $u_1(W)$和 $u_2(W)$，两人均具有不满足性和凹的偏好。相应地两人的绝对风险厌恶系数分别为：$A_1(W)$和 $A_2(W)$。为了论述的方便，我们分别称之为 u_1和 u_2。

- 定义风险厌恶的比较：

定义 3.6：称 u_1 比 u_2 **更加厌恶风险**，若在任意财富水平下，u_2 不喜欢(dislike)的彩票，u_1 也厌恶，即：

$$\forall W_0, \tilde{x}, \text{ 若 } E[u_2(W_0+\tilde{x})] \leqslant u_2(W_0), \text{ 则必有 } E[u_1(W_0+\tilde{x})] \leqslant u_1(W_0)$$

- 主要的结论：

定理 3.1：下列命题是等价的：

1) u_1 比 u_2 更加厌恶风险；

2) 在任意初始财富水平下，u_1 是 u_2 的凹变换，即存在凹函数 ϕ 使得 $u_1(z)=\phi(u_2(z))$；

3) 在任意初始财富水平下，$A_1 \geqslant A_2$；

4) 对任意财富水平和公平博弈，两者的风险溢价均满足：$\pi_1 \geqslant \pi_2$；

5) 在任意初始财富水平下，$C_1^e \leqslant C_2^e$。

- 证明结论使用的主要工具：

  定义函数：

$$\phi(x) = u_1(u_2^{-1}(x)) \qquad (3.29)$$

则该函数具有下列三个性质：

（1）两个效用函数之间满足 $u_1(z) = \phi(u_2(z))$，它将 u_2 变成 u_1；

（2）两边对 z 求导得：$u_1'(z) = \phi'(u_2(z))u_2'(z), \phi' = u_1' / u_2' > 0$；

（3）进一步两边对 z 求导得：$u_1''(z) = \phi'(u_2(z))u_2''(z) + \phi''(u_2(z))[u_2'(z)]^2$，于是有：

$$\phi'' = \frac{u_1'' - \phi' u_2''}{[u_2']^2} = \frac{u_1'}{[u_2']^2}(A_2 - A_1) \qquad (3.30)$$

第四节：基于风险厌恶分类的效用函数

- Arrow-Pratt 是近似度量方法，对小风险情形适用而对大风险情形可能误差比较大，但是由此而定义的两种风险厌恶系数以及风险容忍系数在金融经济学中十分重要

- 结合风险厌恶系数的特性，可以确定一些经典的效用函数

A、CARA 偏好

假定经济人的偏好满足如下性质：

$$A(W)=a \tag{3.31}$$

$$-\frac{u''}{u'}=a$$

为便于理解，按习惯函数用 y 代替 u，则上式可化简为：

$$-\frac{y''}{y'}=a，则 y''+ay'=0 \tag{3.32}$$

解上述二阶齐次常微分方程可得：

$$y=k_1e^{-ax}+k_2 \tag{3.33}$$

将上式中的 y 依然用 u 替换，结合效用函数的性质，容易得到：

$$u(w)=-ke^{-aw}$$

B、CRRA 偏好

假设经济人的偏好满足假设：

$$R(w)=\gamma \tag{3.34}$$

$$-\frac{y''}{y'}x=\gamma,\text{则 } xy''+\gamma y'=0 \tag{3.35}$$

解常微分方程（3.35）并结合效用函数的性质，可以解得 CRRA 效用函数：

$$u(w)=\begin{cases}\frac{w^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}, & \gamma>0,\gamma\neq 1\\ \ln w, & \gamma=1\end{cases} \tag{3.19}$$

C、HARA 偏好

假定经济人的效用函数满足如下假设：

$$A(w) = \frac{\gamma}{\gamma\eta + w} \qquad (3.36)$$

可化简得到常微分方程：

$$(\gamma\eta + x)y'' + \gamma y' = 0 \qquad (3.37)$$

$$u(W) = \zeta\left(\eta + \frac{W}{\gamma}\right)^{1-\gamma} \qquad (3.26)$$

D、其他效用函数

定义 3.7: A(w) 和 R(w) 分别为财富水平 w 下的绝对风险厌恶和相对风险厌恶，它们对应的效用函数为 u, 则:

1） 称效用函数为绝对风险厌恶递增（increasing absolute risk aversion）的效用函数，若 A'(w)>0。简称 IARA 效用；

2） 称效用函数为绝对风险厌恶递减（decreasing absolute risk aversion）的效用函数，若 A'(w)<0。简称 DARA 效用；

3） 称效用函数为相对风险厌恶递增（increasing relative risk aversion）的效用函数，若 R'(w)>0。简称 IRRA 效用；

4） 称效用函数为相对风险厌恶递减（decreasing relative aversion）的效用函数，若 R'(w)<0。简称 DRRA 效用。