一般均衡中的两步法示例

初始条件设定

- 两个时期：期初 (0) 与期末 (1)。
- 期末有两种状态：好 G、坏 B，概率 $\pi_G = \pi_B = 0.5$。
- 两个投资者 A, B，效用：

$$U_k = \ln c_{k0} + \sum_{\omega \in \{G,B\}} \pi_\omega \ln c_{k\omega}.$$

- 期初禀赋：$e_{A,0} = e_{B,0} = 1 \quad \Rightarrow \quad E_0 = 2$。
- 期末禀赋：

$$e_{A,G} = 0.2,\ e_{A,B} = 0.8; \qquad e_{B,G} = 1.8,\ e_{B,B} = 0.2.$$

总资源：

$$D_G = 2, \quad D_B = 1.$$

- Arrow 证券：
  - Q_G：在 G 支付 1，在 B 支付 0，价格 q_G。
  - Q_B：在 B 支付 1，在 G 支付 0，价格 q_B。

推导

- 预算约束：

$$c_{k0} = e_{k0} - q_G\theta_{k,G} - q_B\theta_{k,B}, \quad c_{k\omega} = e_{k\omega} + \theta_{k,\omega}, \omega \in \{G, B\}$$

- 对 $\theta_{k,\omega}$ 求一阶条件：

$$e_{k\omega} + \theta_{k,\omega} = \frac{\pi_\omega}{q_\omega} c_{k0}.$$

- 代回预算：

$$c_{k0} = e_{k0} - q_G\left(\frac{\pi_G}{q_G} c_{k0} - e_{kG}\right) - q_B\left(\frac{\pi_B}{q_B} c_{k0} - e_{kB}\right).$$

- 化简：

$$c_{k0} = e_{k0} - (\pi_G + \pi_B)c_{k0} + q_G e_{kG} + q_B e_{kB}.$$

- 因为 $\pi_G + \pi_B = 1$，所以：

$$2c_{k0} = e_{k0} + q_G e_{kG} + q_B e_{kB}.$$

$$c_{k0} = \frac{e_{k0} + q_G e_{kG} + q_B e_{kB}}{2}$$

第一步：个体最优问题

- 由一阶条件得到：

$$e_{k\omega} + \theta_{k,\omega} = \frac{\pi_\omega}{q_\omega} c_{k0}.$$

- 因此个体最优需求函数：

$$\theta_{k,\omega}(S) = \frac{\pi_\omega}{q_\omega} c_{k0}(S) - e_{k\omega}.$$

第二步：市场出清条件

- 证券市场出清：

$$\sum_k \theta_{k,\omega}(S) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\pi_\omega}{q_\omega} C_0 = D_\omega.$$

- 其中，聚合期初预算约束：

$$c_{k0} = e_{k0} - q_G\theta_{k,G} - q_B\theta_{k,B} \Longrightarrow$$
$$C_0 = \sum_k c_{k0} = E_0 - q_G \sum_k \theta_{k,G} - q_B \sum_k \theta_{k,B}.$$

- Arrow 证券净供给为零，市场出清：

$$\sum_k \theta_{k,\omega} = 0 \quad \Longrightarrow \quad C_0 = E_0.$$

- 以此求得均衡价格：

$$q_G = 0.5, \quad q_B = 1.$$

数值结果（详细计算）

- **期初消费**:

$$c_{A0} = \frac{1+0.5\cdot 0.2+1\cdot 0.8}{2} = 0.95, \qquad c_{B0} = \frac{1+0.5\cdot 1.8+1\cdot 0.2}{2} = 1.05.$$

- **最优投资份额（由一阶条件反推）**:

$$\theta_{A,G} = \frac{0.5}{0.5}\cdot 0.95-0.2 = 0.75, \quad \theta_{A,B} = \frac{0.5}{1}\cdot 0.95-0.8 = -0.325;$$

$$\theta_{B,G} = \frac{0.5}{0.5}\cdot 1.05-1.8 = -0.75, \quad \theta_{B,B} = \frac{0.5}{1}\cdot 1.05-0.2 = 0.325.$$

- **期末消费**:

$$c_{A,G} = e_{A,G} + \theta_{A,G} = 1, \qquad c_{A,B} = e_{A,B} + \theta_{A,B} = 0.475;$$

$$c_{B,G} = e_{B,G} + \theta_{B,G} = 1, \qquad c_{B,B} = e_{B,B} + \theta_{B,B} = 0.525.$$

- **检验市场出清**:

$$\theta_{A,G} + \theta_{B,G} = 0, \quad \theta_{A,B} + \theta_{B,B} = 0,$$

且总消费满足:

$$C_G = 2, \quad C_B = 1.$$

小结

- 两步法：
  1. 个体根据价格 S 求最优需求 $\theta_k(S)$。
  2. 再代入市场出清条件，解得均衡价格 S。
- 本例得到：

$$q_G = 0.5, \quad q_B = 1.$$

- 消费分配满足：总消费 $=$ 总资源。