第四次作业答案

金融经济学-2025 年秋

Answer 1

给定两状态、三证券的支付矩阵

$$X = \begin{bmatrix} 30 & 20 & 10 \\ 20 & 15 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \; x_2 \; x_3 \end{bmatrix}, \qquad x_1 = \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \end{bmatrix}, \; x_2 = \begin{bmatrix} 20 \\ 15 \end{bmatrix}, \; x_3 = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(1) 在两状态世界中，支付向量所张成的空间维数至多为 2。若三只证券的列向量线性相关，则存在冗余证券（其支付可由其他证券线性组合复制）。

求常数 a, b 使 $x_3 = ax_1 + bx_2$：

$$\begin{cases} 30a + 20b = 10, \\ 20a + 15b = 0. \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad a = 3, \; b = -4.$$

因此

$$x_3 = 3x_1 - 4x_2 \,,$$

第三只证券的支付完全可由前两只复制，故第 3 只证券是冗余证券。

(2) 无套利要求“价格遵循复制关系”：若 $x_3 = 3x_1 - 4x_2$，则价格应满足

$$S_3 = 3S_1 - 4S_2.$$

代入 $S_1 = 25$, $S_2 = 17$ 得复制成本 $3S_1 - 4S_2 = 75 - 68 = 7$，而 $S_3 = 8$。由于

$$S_3 - (3S_1 - 4S_2) = 8 - 7 = 1 > 0,$$

第 3 只证券高估，存在套利。可以买入 3 单位证券 1，卖空 4 单位证券 2，卖空 1 单位证券 3，对应持仓向量为

$$\theta = (3, \, -4, \, -1)^\top$$

其期初成本为

$$\theta^\top S = 3 \cdot 25 - 4 \cdot 17 - 1 \cdot 8 = 75 - 68 - 8 = -1 < 0,$$

即净流入 1。期末各状态的净支付为 0

$$X\theta = 3x_1 - 4x_2 - x_3 = (x_3) - x_3 = 0,$$

因此，在给定价格下存在无风险套利；策略如上。

Answer 2

给定三状态、三证券的支付矩阵

$$X = \begin{bmatrix} 110 & 100 & 48 \\ 110 & 50 & 40 \\ 110 & 40 & 36 \end{bmatrix} = [x_1\ x_2\ x_3],$$

其中列向量为各证券在三状态下的支付；可见第 1 只证券为无风险（各状态均为 110）。

(1) 检验 X 的秩：

$$\det(X) = 13200 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{rank}(X) = 3.$$

状态数为 3，且 $\operatorname{rank}(X) = 3$，故三列线性无关，市场完备：任意三状态支付向量均可由三只证券复制。

(2) 以状态价格向量 $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^\top$ 表示 A–D 证券价格，无套利 ⇔ 存在 $\phi \geq 0$ 使

$$X^\top \phi = S.$$

联立得唯一解

$$\phi = \left(\tfrac{17}{33},\ \tfrac{3}{11},\ \tfrac{4}{33}\right)^\top \quad (\geq 0),$$

故无套利成立。

（i） 无风险利率：第 1 资产的回报 $R_f = \dfrac{110}{100} = 1.1$，因此

$$r_f = 10\%\,.$$

亦可由 $\sum_s \phi_s = \dfrac{1}{R_f}$ 得到：$\sum \phi_s = \frac{17+9+4}{33} = \frac{10}{11} = 1/R_f$。

（ii） A–D 证券价格：即上式 ϕ。

（iii） 等价鞅测度（风险中性概率）q 满足 $\phi_s = q_s / R_f$，故

$$q = R_f\, \phi = \left(\tfrac{17}{30},\ \tfrac{3}{10},\ \tfrac{2}{15}\right)^\top, \qquad q_s \geq 0,\ \sum_s q_s = 1.$$

校验：用 $S_j = \sum_s \phi_s X_{sj}$ 可得

$$S_2 = \tfrac{17}{33} \cdot 100 + \tfrac{3}{11} \cdot 50 + \tfrac{4}{33} \cdot 40 = 70, \quad S_3 = \tfrac{17}{33} \cdot 48 + \tfrac{3}{11} \cdot 40 + \tfrac{4}{33} \cdot 36 = 40.$$

(3) 仍解 $X^\top\phi = S$ 得到唯一 ϕ：

$$\phi = \left(-\tfrac{197}{66}, \tfrac{201}{11}, -\tfrac{949}{66}\right)^\top,$$

其中 $\phi_1, \phi_3 < 0$，不可能为 A–D 价格，故存在套利。

(4) 每只资产的支付向量就是 A–D 证券的线性组合，即
证券 1 分别是由 110 个状态 1 证券、状态 2 证券和状态 3 证券复合而成；
证券 2 是由 100 状态 1 证券、50 个状态 2 证券和 40 个状态 3 证券复合而成；
证券 3 是由 48 个状态 1 证券、40 个状态 2 证券和 36 个状态 3 证券复合而成.