第六次作业答案

金融经济学-2025 年秋

Answer 1

设将初始财富 W_0 中的比例 α 投入风险资产（其余 $1-\alpha$ 投入无风险资产），即

$$\alpha \;=\; \frac{A}{W_0}, \qquad A = \alpha W_0.$$

无风险利率为 r_F，风险资产收益率以等概率 $\frac{1}{2}$ 取 $4r_F$ 与 $-r_F$。一期末两种状态下的财富为

$$\begin{aligned} W_1^{\text{up}} &= W_0\Big[\alpha(1+4r_F)+(1-\alpha)(1+r_F)\Big] = W_0\Big((1+r_F)+3\alpha r_F\Big), \\ W_1^{\text{down}} &= W_0\Big[\alpha(1-r_F)+(1-\alpha)(1+r_F)\Big] = W_0\Big((1+r_F)-2\alpha r_F\Big). \end{aligned}$$

对数效用下的目标函数为期望效用

$$\max_{\alpha}\ \mathbb{E}[\ln W_1] = \tfrac{1}{2}\ln W_1^{\text{up}} + \tfrac{1}{2}\ln W_1^{\text{down}} = \ln W_0 + \tfrac{1}{2}\ln\Big((1+r_F)+3\alpha r_F\Big) + \tfrac{1}{2}\ln\Big((1+r_F)-2\alpha r_F\Big).$$

对 α 求一阶导并令其为零（FOC）：

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\mathbb{E}[\ln W_1] = \frac{1}{2}\left(\frac{3r_F}{(1+r_F)+3\alpha r_F} - \frac{2r_F}{(1+r_F)-2\alpha r_F}\right) = 0.$$

整理可得

$$3\big((1+r_F)-2\alpha r_F\big) \;=\; 2\big((1+r_F)+3\alpha r_F\big) \;\Longrightarrow\; (1+r_F) \;=\; 12\,\alpha r_F.$$

因此最优投资比例为

$$\alpha^* \;=\; \frac{A}{W_0} \;=\; \frac{1+r_F}{12\,r_F}$$

且

$$W_1^{\text{down}}(\alpha^*) \;=\; W_0\Big((1+r_F)-2\alpha^* r_F\Big) = W_0\Big((1+r_F)-\tfrac{2}{12}(1+r_F)\Big) = \tfrac{5}{6}\,W_0(1+r_F) \;>\; 0,$$

满足对数效用对正财富的要求。目标函数关于 α 为严格凹函数，故该一阶条件给出唯一全局最优解。

Answer 2

令投资者将金额 A 投入风险资产，其余 W_0-A 投入无风险资产。定义超额收益的期望

$$x \;\equiv\; \bar{r} - r_F, \qquad Var(\tilde{r}) = \sigma^2.$$

一期末财富为

$$\widetilde{W}_1 \;=\; (W_0 - A)(1 + r_F) + A(1 + \tilde{r}) \;=\; W_0(1 + r_F) + A(\tilde{r} - r_F).$$

于是

$$\mathbb{E}[\widetilde{W}_1] = W_0(1 + r_F) + Ax, \qquad Var(\widetilde{W}_1) = A^2\sigma^2.$$

(1) 二次效用. 效用

$$U = \mathbb{E}\Big[\widetilde{W}_1 - \frac{a}{2}\,\widetilde{W}_1^2\Big] = \mathbb{E}[\widetilde{W}_1] - \frac{a}{2}\Big(Var(\widetilde{W}_1) + (\mathbb{E}[\widetilde{W}_1])^2\Big).$$

一阶条件（FOC）$\partial U/\partial A = 0$ 给出最优持仓

$$\frac{\partial U}{\partial A} = x - a\Big(A\sigma^2 + x\,\mathbb{E}[\widetilde{W}_1]\Big) = x - a\Big(A\sigma^2 + x(W_0(1 + r_F) + Ax)\Big).$$

$$A^*(\text{quad}) = \frac{x/a - x\,W_0(1 + r_F)}{\sigma^2 + x^2}, \qquad \alpha^*(\text{quad}) \equiv \frac{A^*}{W_0} = \frac{x\Big(\frac{1}{aW_0} - (1 + r_F)\Big)}{\sigma^2 + x^2}.$$

由于 U 关于 $\widetilde{W}_1$ 为严格凹函数，且 $\widetilde{W}_1$ 关于 A 为线性，U 关于 A 亦严格凹，故该解唯一且为全局最优。

比较静态与经济学解释：

- 对风险溢价：$\partial A^*/\partial x > 0$。超额期望收益越高，最优风险头寸越大。
- 对风险：$\partial A^*/\partial \sigma^2 < 0$。波动（方差）越大，因风险惩罚更强而降低配置。
- 对风险厌恶：$\partial A^*/\partial a < 0$。越厌恶风险（$a$ 越大），最优风险持仓越小。
- 对无风险利率：在 $\bar{r}$ 给定下，r_F 上升使 $x = \bar{r} - r_F$ 下降，且分子项 $-xW_0(1 + r_F)$ 也趋于减持，故总体降低 A^*——安全资产更具吸引力。
- 对财富：$\partial A^*/\partial W_0 < 0$，且 α^* 亦随 W_0 上升而下降。二次效用具有递增的绝对风险厌恶（IARA），因此财富越高，最优风险敞口反而更小。

(2) 指数（CARA）效用与正态收益. 题设效用

$$U = \mathbb{E}\Big[-e^{-a\widetilde{W}_1}\Big] \quad (\text{CARA 指数效用}),$$

且若 $\tilde{r} \sim \mathcal{N}(\bar{r}, \sigma^2)$，则 $\widetilde{W}_1 \sim \mathcal{N}\big(W_0(1+r_F) + Ax,\ A^2\sigma^2\big)$。利用正态—指数的闭式性质，

$$\mathbb{E}\Big[-e^{-a\widetilde{W}_1}\Big] = -\exp\bigg(-a\,\mathbb{E}[\widetilde{W}_1] + \frac{a^2}{2}Var(\widetilde{W}_1)\bigg).$$

最大化上式等价于最大化

$$\mathbb{E}[\widetilde{W}_1] - \frac{a}{2}Var(\widetilde{W}_1) = \big(W_0(1+r_F) + Ax\big) - \frac{a}{2}A^2\sigma^2.$$

对 A 求导并令零：

$$x - aA\sigma^2 = 0 \implies A^*\big(\text{CARA}\big) = \frac{x}{a\sigma^2}, \qquad \alpha^*\big(\text{CARA}\big) = \frac{A^*}{W_0} = \frac{x}{a\sigma^2\,W_0}.$$

比较静态与经济学解释：

- A^* 随 x 单调增加，随 σ^2 与 a 单调减少；
- A^* 与 W_0、r_F 本身无关，仅通过 $x = \bar{r} - r_F$ 体现 r_F 的影响——即 CARA 的“恒定绝对风险厌恶”特征：最优风险敞口不随财富改变；因此风险资产在初始财富中的比例 α^* 会随 W_0 增大而下降。