第十二章：基于消费的资产定价模型

0、引言

- CAPM：单个股票或者股票组合与市场投资组合之间期望收益的线性关系
- Merton 将 CAPM 推广到 ICAPM，单个股票或者股票组合与若干个特定的股票组合之间期望收益的线性关系

- 这些模型的结果有一个共同的特点：均衡条件下每个资产或每个资产组合的期望收益率与若干个特定资产组合的收益率成线性关系。我们可以称之为“**基于组合的资产定价模型**”，因为它建立了资产与特定组合之间的关系。当市场环境比较复杂时，需要较多的未知的组合来解释资产的收益，这使得实证困难

第一节、基于消费的定价模型

- Cochrane 的模型——SDF
- SDF也是基于消费的资产定价模型

一、随机贴现因子与定价公式

- 理论模型：

◆Cochrane 的一个简单的模型：

  ○一人一资产

  ○单期静态

  ○纯交换经济

◆基本框架：

☛两时点分别记为 t 和 $t+1$ 时

☛经济中只有一个资产，它可以是风险资产也可以是无风险资产，该资产在 t 时的价格为 p_t，$t+1$ 时的支付为 x_{t+1}，

☛该支付等于价格与红利之和，即：

$$x_{t+1}=p_{t+1}+d_{t+1}$$

其中 p_{t+1}为资产在期末的价格，d_{t+1}为资产在期末支付的红利

- 投资者的优化问题为：

$$\max_{\{\theta_{t+1}\}} u(c_t) + E_t[\beta u(\tilde{c}_{t+1})]$$

$$s.t \quad c_t = e_t - \theta_t p_t \qquad (12.P1)$$

$$c_{t+1} = \tilde{e}_{t+1} + \theta_t \tilde{x}_{t+1}$$

- 问题（12.P1）的一阶条件为：

$$u'(c_t)(-p_t)+E_t[u'_{t+1}(c_{t+1})\times\tilde{x}_{t+1}]=0 \tag{12.1}$$

化简为：

$$p_t=E_t[\beta\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}x_{t+1}] \tag{12.2}$$

记：

$$m_{t+1}=\beta\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \tag{12.3}$$

- 称（12.3）式中的 m_{t+1}为**随机贴现因子**（stochastic discount factor），也叫**资产定价的核**（asset pricing kernel），**资产定价密度**（asset pricing density）。这里的m_{t+1}与上一章的随机贴现因子 $M_\omega = \phi_\omega / \pi_\omega$相同。从表面来看，他是两期边际效用之比，所以也称为**边际替代率**。定价公式（12.2）可以改写为：

$$p_t = E_t[m_{t+1} x_{t+1}] \qquad (12.4)$$

简记为：

$$\boxed{p_t = E_t[mx]}$$

含义：**任何一个资产其期末的支付经随机因子贴现后的期望值等于该资产的期初价格。**

☛对于无风险资产，期末面值 1 元的零息债券，期初的价格为 B，故：

$$B=E_t[m_{t+1}\times 1]=E_t[m_{t+1}]=\frac{1}{1+r_f} \tag{12.5a}$$

$$1=E_t[m_{t+1}\times(1+r_f)]=E_t[m_{t+1}]\times(1+r_f) \tag{12.5b}$$

（12.5）式的含义为：

随机贴现因子的期望值等于无风险贴现因子。

二、资产价格与消费的关系

概率论中协方差的定义：

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E[\tilde{X}-E(\tilde{X})][\tilde{Y}-E(\tilde{Y})]=E[\tilde{X}\tilde{Y}]-E(\tilde{X})E(\tilde{Y})$$

可知：

$$E_t[m_{t+1}x_{t+1}]=E_t(m_{t+1})E(x_{t+1})+\operatorname{cov}(m_{t+1},x_{t+1}) \tag{12.6}$$

结合（12.3）和（12.5）有：

$$\begin{aligned}p_t&=\frac{E_t(x_{t+1})}{1+r_f}+\operatorname{cov}_t(m_{t+1},x_{t+1})\\&=\frac{E_t(x_{t+1})}{1+r_f}+\frac{\beta\operatorname{cov}_t(u'(c_{t+1}),x_{t+1})}{u'(c_t)}\end{aligned} \tag{12.7}$$

$$p_t = \frac{E_t(x_{t+1})}{1+r_f} + \mathrm{cov}_t(m_{t+1}, x_{t+1})$$

$$= \frac{E_t(x_{t+1})}{1+r_f} + \frac{\beta \mathrm{cov}_t(u'(c_{t+1}), x_{t+1})}{u'(c_t)} \qquad (12.7)$$

下面分析定价公式（12.7）的经济含义：

公式（12.7）中第一项是期末支付用无风险利率贴现，类似与“风险中性定价”，第二项则是风险调节项。由于标准的效用函数是凹函数，即$u''(.)<0$，因此，$u'(.)>0$而且为单调递减函数，从而有： $c_{t+1}\uparrow \;\Rightarrow\; u'(c_{t+1})\downarrow$.

1）若$\mathrm{cov}(c_{t+1}, x_{t+1})>0$，则$\mathrm{cov}(u'(c_{t+1}), x_{t+1})<0$，则$p_t < \frac{E_t(x_{t+1})}{1+r_f}$；

2）若$\mathrm{cov}(c_{t+1}, x_{t+1})=0$，则$\mathrm{cov}(u'(c_{t+1}), x_{t+1})=0$，则$p_t = \frac{E_t(x_{t+1})}{1+r_f}$；

3）若$\mathrm{cov}(c_{t+1}, x_{t+1})<0$，则$\mathrm{cov}(u'(c_{t+1}), x_{t+1})>0$，则$p_t > \frac{E_t(x_{t+1})}{1+r_f}$。

- 当资产在期末的支付与期末的消费正相关时，该资产的价格小于风险中性定价；
- 当资产在期末的支付与期末的消费负相关时，该资产的价格大于风险中性定价；
- 当资产在期末的支付与期末的消费无关时，该资产的价格等于风险中性价格。

总之，基于以上分析，本章的定价模型常称为“**SDF 定价模型**”，或者“**基于消费的资产定价模型**”，有时简称 **CCAPM**（Consumption-based Asset Pricing Models）。

三、定价公式的普适性

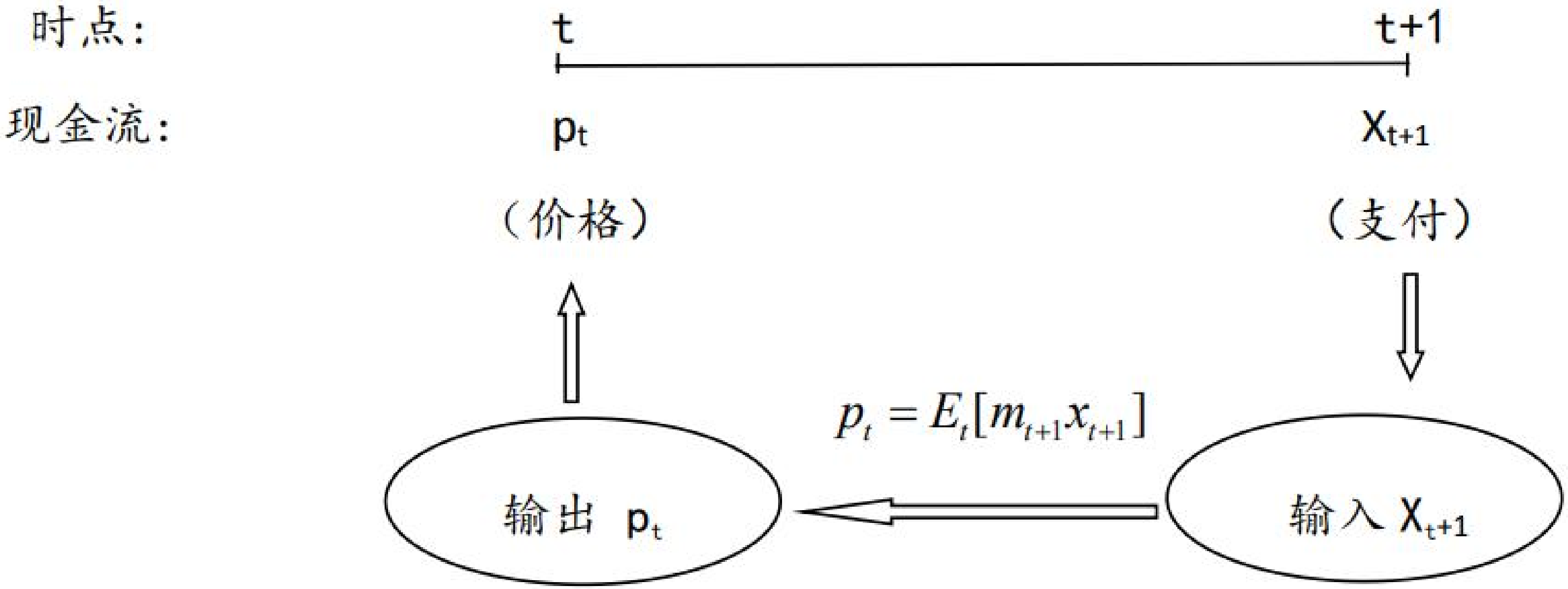

图 12.1　　单期的现金流量图

表 12.1 不同资产的价格-支付

	价格 p_t	支付 X_{t+1}
股票	S_t	X_{t+1}
收益	1	R_{t+1}
价格红利比	p_t / d_t	$(p_{t+1} / d_{t+1} + 1)\dfrac{d_{t+1}}{d_t}$
超额收益	0	$R^e_{t+1} = R^a_{t+1} - R^b_{t+1}$
管理的组合	z_t	$z_t R_{t+1}$
矩条件	$E[p_t z_t]$	$x_{t+1} z_t$
单期债券	B_t	1
无风险利率	1	R_f
期权	c	$Max[S_T\text{-}K,0]$

第五行"管理组合"：若某管理的投资组合的收益为 R_{pt}，则在 t 时投资金额为 z_t 的该 项投资，在 $t+1$ 时产生的支付为 $z_t R_{\mathrm{pt}}$。形式上可以通过在第二行的两边乘常数 z_t 得到。

第六行"矩条件"：在基本定价方程 (12.4) 两边同乘 z_t，再取无条件期望可以得到该 行所对应的方程。

第七行"单期债券"和第八行"无风险利率"：这两行与第一行和第二行对应，当期 末支付为固定数额时即为无风险债券或无风险利率。不同的是记号的变化以及习惯于将 债券的期末支付 (即面值) 约定为 1，对应期初的价格 B 也就是无风险贴现因子，无风险 收益用角标 f 表示 (risk "free")。

第一行“股票”：股票的价格一支付是公式 (12.4) 的直接体现。将 (12.4) 中资产价 格用 S_t 表示即为第一行的“股票”。

第二行“收益”：该关系是将公式 (12.4) 两边同除股票价格而得到的。

第三行“价格红利比”：是在 (12.4) 两边同除红利并简化简化得到的。具体地：

$$\frac{P_t}{d_t}=\mathrm{E}_t\left[m_{t+1}\frac{X_{t+1}}{d_t}\right]=\mathrm{E}_t\left[m_{t+1}\frac{P_{t+1}+d_{t+1}}{d_t}\right]$$

$$=\mathrm{E}_t\left[m_{t+1}\left(\frac{P_{t+1}}{d_{t+1}}+1\right)\frac{d_{t+1}}{d_t}\right] \quad (12.8)$$

第四行“超额收益”：首先将 (12.4) 得到的“收益”形式的公式同时用于两种不同的 风险资产 a 和 b：

$$1=\mathrm{E}_t[m_{t+1}R_{t+1}^a]$$

$$1=\mathrm{E}_t[m_{t+1}R_{t+1}^b]$$

两者相减即可得到“超额收益”。

四、简单模型的一般化

单期—多资产模型

在简单模型框架下假设有 N 个资产，在 t 时的价格为 p_{it}，i=1,2,...,N。在 t+1 时资产的支付为 $X_{i,t+1}$，i=1,2,...,N。同样这些支付等于价格与红利之和，即：$X_{i,t+1}=p_{i,t+1}+d_{i,t+1}$，他们的含义与前面的相同。投资者的优化问题为：

$$
\begin{aligned}
&\max_{\{\theta_{t+1}\}} u(c_t)+E_t[\beta u(\tilde{c}_{t+1})] \\
&s.t \quad c_t = e_t - \sum_{i=1}^{N}\theta_{it}p_{it} \qquad\qquad (12.P2) \\
&\qquad\; c_{t+1} = \tilde{e}_{t+1} + \sum_{i=1}^{N}\theta_{it}X_{i,t+1}
\end{aligned}
$$

应的θ值，优化问题由单变量极值变为多变量极值。相应的一阶条件为：

$$u'(c_t)(-p_{it})+E[\beta u'(c_{t+1})\times\tilde{x}_{i,t+1}]=0$$

化简为：

$$\begin{aligned}p_{it}&=\frac{E[\rho u'_{t+1}(c_{t+1})\times\tilde{x}_{i,t+1}]}{u'(c_t)}\\&=E[m_{t+1}\tilde{x}_{i,t+1}]\end{aligned}\qquad(12.11)$$

(12.11)中的 m_{t+1} 与（12.4）中的 m_{t+1} 完全相同，均为随机贴现因子，定价公式（12.11）为（12.4）的自然推广 ，即上述过程论证了下述命题：

多资产情形下，每个资产期初的价格与其期末支付都适用于 SDF 定价公式。

多期—单资产模型

为了方便我们仍然假设只有一个资产，在简单模型框架下假设有 T 期，在 t+j 时的价格为 p_{t+j}，j=1,2,...,T。在 t+j 时资产的价格和支付分别为 p_{t+j} 和 X_{t+j}，j=1,2,...,T。同样这些支付等于价格与红利之和，即：X_{t+j}=p_{t+j}+d_{t+j}，他们的含义与前面的相同。投资者的优化问题为：

$$
\begin{aligned}
&\max_{\{\theta_{t+j},j=0,1,2,\dots T\}} E_t[\sum_{j=0}^{T} \beta^j u(\tilde{c}_{t+j})] \\
&s.t \quad c_t = e_t - \theta_t p_t \\
&\qquad c_{t+j} = \tilde{e}_{t+j} + \theta_{t+j-1} X_{t+j} - \theta_{t+j} p_{t+j} \quad j = 1,\dots,T-1 \\
&\qquad c_{t+T} = \tilde{e}_{t+T} + \theta_{t+T-1} X_{t+T}
\end{aligned}
\tag{12.P3}
$$

件为：

$$u'(c_t)(-p_t)+E[\rho u'(c_{t+1})\times\tilde{x}_{t+1}]=0$$

$$E[\beta^j u'(c_{t+j})(-p_{t+j})+\beta^{j+1}u'(c_{t+j+1})\times\tilde{x}_{t+j+1}]=0$$

化简为：

$$
\begin{aligned}
p_t &= E_t[\beta\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}\times\tilde{x}_{t+1}]=E_t[\beta\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}\times d_{i,t+1}]+\beta\frac{E_t[u'(c_{t+1})p_{t+1}]}{u'(c_t)} \\
&= E_t[m_{t+1}d_{t+1}]+\beta\frac{E[\beta u'(c_{t+2})(d_{t+2}+p_{t+2})]}{u'(c_t)} \\
&= E_t[m_{t+1}d_{t+1}]+E_t[\beta^2\frac{u'(c_{t+2})}{u'(c_t)}d_{t+2}]+\ldots+E_t[\beta^j\frac{u'(c_{t+j})}{u'(c_t)}d_{t+j}]+\ldots+E_t[\beta^T\frac{u'(c_{t+T})}{u'(c_t)}X_{t+T}] \\
&\equiv E_t[\sum_{j=1}^{T}m_{t+j}d_{t+j}]+E_t[m_{t+T}p_{t+T}]
\end{aligned}
$$

上述运算的结果概括为：

$$p_t = E_t[\sum_{j=1}^{T} m_{t+j} d_{t+j}] + E_t[m_{t+T} p_{t+T}] \tag{12.12}$$

其中，定义：

$$m_{t+j} = \beta^j \frac{u'(c_{t+j})}{u'(c_t)} \tag{12.13}$$

m_{t+j} 是 t+j 期到 t 期的随机贴现因子。当 T 趋于无穷大而且收敛时，（12.12）改写为我们熟悉的估值公式：

$$p_t = E_t[\sum_{j=1}^{\infty} m_{t+j} d_{t+j}] \tag{12.14}$$

多期单资产情形下，资产期初的价格与其期末支付都适用于 SDF 定价公式，经过递归可以表示为红利折现和的形式。

第二节、基于消费的定价模型与经典的金融问题

- 无风险利率的确定
- 风险资产价格的确定

一、无风险利率的确定

在 SDF 模型下有：

$$B = E_t[m_{t+1}] = \frac{1}{R_f} \tag{12.5}$$

为了得到更具体的信息，我们假设代表性经济人的效用函数为幂函数，即具有 CRRA 偏好，此时：$u(c_{t+1}) = c_{t+1}^{1-\gamma}/(1-\gamma)$，$u'(c_{t+1}) = c_{t+1}^{-\gamma}$，因此：

$$m_{t+1} = \beta\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} = \beta(\frac{c_{t+1}}{c_t})^{-\gamma} \tag{12.15}$$

为了直观，先假定没有不确定性，即 c_{t+1} 取值是确定的，此时：

$$R_f \equiv e^{r_f} = \frac{1}{m_{t+1}} = \frac{1}{\beta}(\frac{c_{t+1}}{c_t})^{\gamma} \tag{12.16}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = e^r.$$

（1）利率 R_f 与时间偏好率β成反比例，时间偏好率表征人的耐性，这种反比例关系表明：β越低，人们缺乏耐性，无风险利率越高。因为人们更看重当前的消费，只有更高的利率才能“驱使”他们通过当期储蓄并增加投资而延迟消费；反之，β越高，人们耐性越高，无风险利率越低。

（2）利率 R_f 与消费增长 c_{t+1}/c_t 成正比例， c_{t+1}/c_t 越大即消费的相对增长越高意味着利率越高。因为利率高时 ，投资者即期减少消费，从而增加即期投资，使未来的消费增加。高利率降低了即期的消费水平并提高了消费的增长水平。

（3）利率 R_f 与γ的关系不太直观，在 CRRA 偏好下风险厌恶系数γ是跨时替代率的倒数，γ越大，利率对消费增长的变化越敏感。

当模型中存在不确定性时，为了更好地确定利率的影响因素。我们假设消费增长呈对数正态分布，因此利用第七章的引理 7.1 可以计算 E[m]并得到显示解，在（12.5）并在两边取对数得：

$$r_f = \ln E_t[m_{t+1}] = E_t[\ln m_{t+1}] + \frac{1}{2}\mathrm{var}_t(\ln m_{t+1})$$

（12.15）代入并化简得：

$$r_f = \delta + \gamma E_t[\Delta \ln c_{t+1}] - \frac{\gamma^2}{2}\sigma_t^2(\Delta \ln c_{t+1}) \qquad (12.17)$$

其中 $r_f = \ln R_f, \delta = -\ln\beta$，$\Delta \ln c_{t+1} = \ln c_{t+1} - \ln c_t$，$\sigma_t^2(\Delta \ln c_{t+1}) = \mathrm{var}_t(\Delta \ln c_{t+1})$。由公式（12.17）揭示的利率决定因素与（12.16）基本类似：

首先，利率与时间偏好β负相关，时间偏好率越低，利率越高，反之则越低；

第二，消费增长的预期值与利率正相关，消费增长的期望值越高，利率越高；

最后，风险厌恶系数 γ 一方面决定了利率对消费增长的期望值的敏感性，γ 越大，利率对消费的增长越敏感，另一方面（12.17）中多了一项 $\sigma_t^2(\Delta\ln c_{t+1})$，它反映了预防性储蓄。

这项的经济含义非常重要：

- 当未来消费增长 $\Delta\ln c_{t+1}$ **越不确定（方差越大）**，
  消费者面临的风险也越高。
- 在风险厌恶（$\gamma > 0$）的情况下，人们为了防备未来收入或消费可能下降，
  会**倾向于今天多储蓄、少消费**——这就是**预防性储蓄动机。**
- 数学上表现为：
  $\sigma_t^2(\Delta\ln c_{t+1})$ 增大 → 消费者更谨慎 → 边际效用上升 → 要求更高的贴现因子 → 实际上**降低当前无风险利率**（或等价地，提高储蓄意愿）。

mt+1 越大 → 说明投资者更重视未来的一块钱（愿意用更多今天的消费去换未来消费）；

二、风险资产价格的确定

- **基于风险调整的定价公式**

从定价公式（12.4）出发，我们可以得到“价格型”的和“期望收益型”的定价公式。首先，由协方差公式可以得到“价格型”的定价方程（12.18）：

$$p_t = \frac{E_t(x_{t+1})}{1+r_f} + \mathrm{cov}_t(m_{t+1}, x_{t+1}) \tag{12.18a}$$

进一步由随机贴现因子 SDF 的定义并代入定价公式，得：

$$p_t = \frac{E_t(x_{t+1})}{1+r_f} + \frac{\beta \,\mathrm{cov}_t(u'(c_{t+1}), x_{t+1})}{u'(c_t)} \tag{12.18b}$$

定价公式（12.7）属于“价格型”公式，（12.8a）表明风险资产的价格等于其期

$$E_t[m_{t+1}R^i_{t+1}] = E_t[m_{t+1}]E_t[R^i_{t+1}] + \mathrm{cov}_t(m_{t+1}, R^i_{t+1}).$$

$$1 = E_t[m_{t+1}]E_t[R^i_{t+1}] + \mathrm{cov}_t(m_{t+1}, R^i_{t+1}).$$

在定价公式（12.4）两边同除期初价格得收益型的定价公式：

$$1 = E_t[m_{t+1}R^i_{t+1}] \qquad （12.19）$$

其中上标 i 表示第 i 个资产，$R^i_{t+1} = x^i_{t+1} / p^i_t$，同样利用协方差的定义将等式右边化简并整理得“期望收益率型”的定价公式：

$$E[R^i_{t+1}] = R_f - R_f \,\mathrm{cov}_t(m_{t+1}, R^i_{t+1}) \qquad （12.20a）$$

进一步由随机贴现因子 SDF 的定义并代入定价公式，得：

$$E[R^i_{t+1}] = R_f - \frac{\mathrm{cov}_t(u'(c_{t+1}), R^i_{t+1})}{E[u'(c_{t+1})]} \qquad (12.20b)$$

对无风险资产有：

$$1 = E_t[m_{t+1}]R_f = \beta\frac{E_t[u'(c_{t+1})]}{u'(c_t)}R_f.$$

整理得：

$$\frac{\beta}{u'(c_t)} = \frac{1}{R_f E_t[u'(c_{t+1})]}. \qquad E_t[R^i_{t+1}] = R_f - R_f \cdot \frac{1}{R_f E_t[u'(c_{t+1})]}\mathrm{cov}_t(u'(c_{t+1}), R^i_{t+1}).$$

基于贝塔形式的定价公式

从定价的基本公式出发我们得到了风险调整的定价公式，进一步还可以得到类似与 CAPM 中的证券市场线（SML）。由（12.20a）得：

$$E[R_{t+1}^i]=R_f-\frac{\operatorname{cov}_t(m_{t+1},R_{t+1}^i)}{E[m_{t+1}]}$$

$$=R_f+\frac{\operatorname{cov}_t(m_{t+1},R_{t+1}^i)}{\operatorname{var}[m_{t+1}]}\times(-\frac{\operatorname{var}[m_{t+1}]}{E[m_{t+1}]})$$

$$\equiv R_f+\beta_{im}\lambda_m$$

概括为：

$$E[R_{t+1}^i]=R_f+\beta_{im}\lambda_m \qquad (12.21)$$

这就是贝塔形式的定价模型，其中：

$$\beta_{im}=\frac{\operatorname{cov}_t(m_{t+1},R_{t+1}^i)}{\operatorname{var}[m_{t+1}]};\ \ \lambda_m=(-\frac{\operatorname{var}[m_{t+1}]}{E[m_{t+1}]}) \qquad (12.22)$$

对（12.20a）继续变形：

$$E[R_{t+1}^i]=R_f-\frac{\mathrm{cov}_t(m_{t+1},R_{t+1}^i)}{E[m_{t+1}]}$$

$$=R_f+(-1)\frac{\rho_{im}\sigma_m}{E[m_{t+1}]}\sigma_i \qquad (12.23a)$$

两边同乘组合权重并求和得：

$$E[R_{p,t+1}]=R_f-\frac{\mathrm{cov}_t(m_{t+1},R_{p,t+1})}{E[m_{t+1}]}$$

$$=R_f+(-1)\frac{\rho_{pm}\sigma_m}{E[m_{t+1}]}\sigma_p \qquad 12.23b)$$

其中，$\sigma_m=\sqrt{\mathrm{v}ar_t(m_{t+1})};\sigma_i=\sqrt{\mathrm{v}ar_t(R_{t+1}^i)};\rho_{im}=\frac{\mathrm{cov}_t(m_{t+1},R_{t+1}^i)}{\sigma_m\sigma_i}$分别为 m 的标准差、

$$\begin{aligned} E[R_{p,t+1}] &= R_f - \frac{\operatorname{cov}_t(m_{t+1}, R_{p,t+1})}{E[m_{t+1}]} \\ &= R_f + (-1)\frac{\rho_{pm}\sigma_m}{E[m_{t+1}]}\sigma_p \end{aligned} \qquad \left|E[R_{t+1}^i] - R_f\right| \le \frac{\sigma_m}{E[m_{t+1}]}\sigma_i \tag{12.24}$$

有效前沿上的资产只有系统性风险，锥形内的还含有非系统性风险

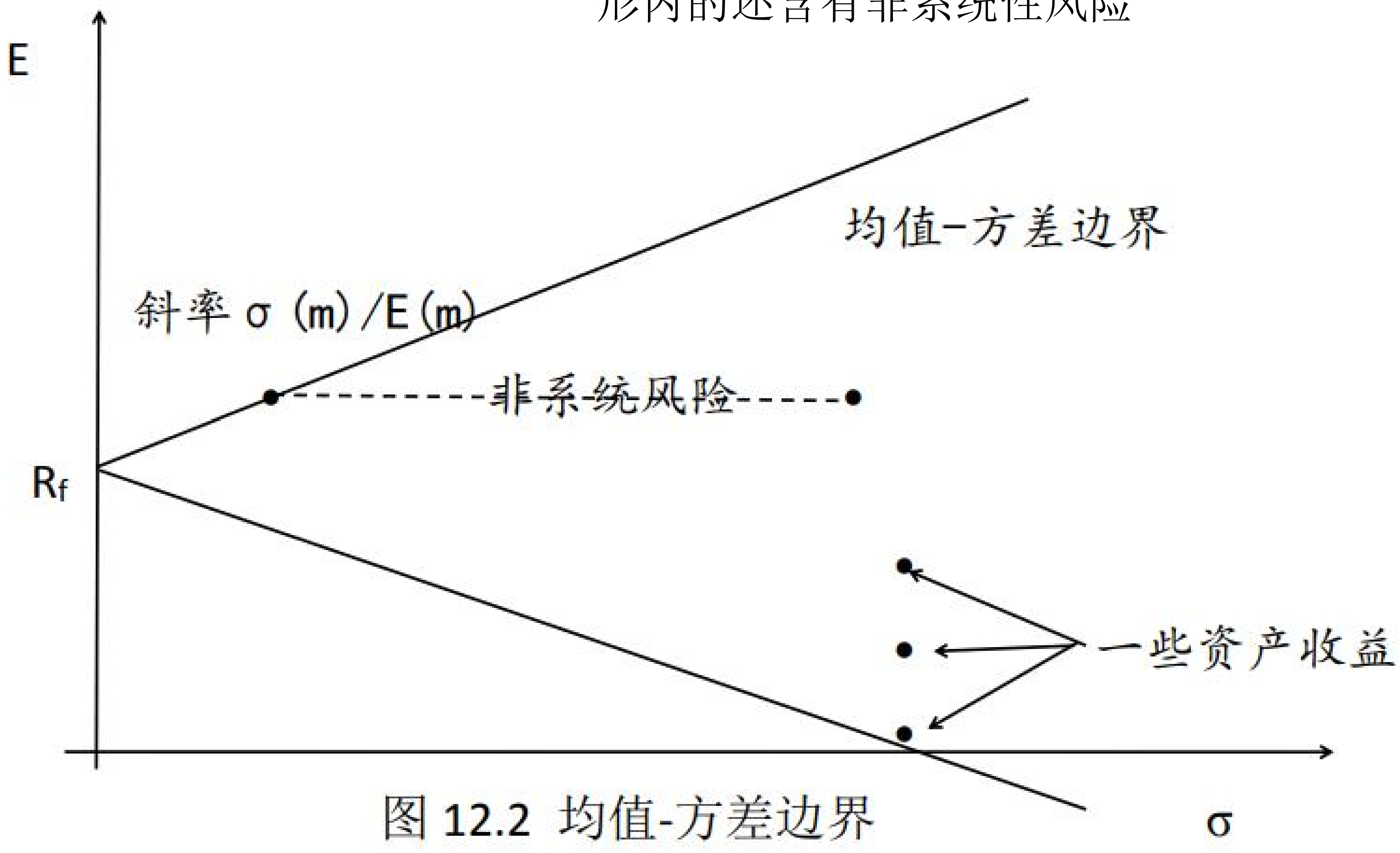

图 12.2 均值-方差边界

- 选择边界上的某一点对应的资产或组合收益记为 R^m，边界上所有点对应的资产或组合收益记为 R^{mv}，则存在常数α满足：

$$R^{mv} = \alpha R_f + (1-\alpha) R^m \tag{12.25}$$

- 同时，由于 m 与边界上的所有点完全相关，因此存在常数 a,b,c,d 使下式成立：

$$m = a + bR^{mv}\text{；}\quad R^{mv} = c + dm \qquad （12.26$$

$$\beta_{im}=\frac{\operatorname{cov}(R^i,m)}{\operatorname{var}(m)}=\frac{\operatorname{cov}(R^i,a+bR^{mv})}{\operatorname{var}(a+bR^{mv})}=\frac{\operatorname{cov}(R^i,R^{mv})}{\operatorname{bvar}(R^{mv})}=\frac{1}{b}\beta_{i,mv}$$

$$\beta_{mv,m}=\frac{\operatorname{cov}(R^{mv},m)}{\operatorname{var}(m)}=\frac{\operatorname{cov}(R^{mv},c+dm)}{\operatorname{var}(m)}=\frac{\operatorname{dvar}(m)}{\operatorname{var}(m)}=d$$

(12.26) 代入 (12.22):

$$\mathrm{E}[R^{mv}]=R_f+\beta_{mv,m}\lambda_m=R_f+d\lambda_m$$

因此，对任意的资产 i 有:

$$\mathrm{E}[R^i_{t+1}]=R_f+\beta_{i,mv}[\mathrm{E}[R^{mv}]-R_f]$$

上式中的 R 是相对收益，由于 $R=r+1$，所以可以转化为收益率形式的定价公式:

$$\mathrm{E}[r_{i,t+1}]=r_f+\beta_{i,mv}[\mathrm{E}[r^m_v]-r_f] \quad (12.27\mathrm{a})$$

- （12.27a）类似与 CAPM 中的证券市场线SML），唯一不同的是 SML 描述的是均衡条件下任何证券与市场投资组合之间收益率的关系，这里描述的是任何证券收益率与均值-标准差边界上任何特定组合之间的关系

如何得到任意证券的定价式子

$$\mathrm{E}[R^i_{t+1}] = R_f + \beta_{i,mv}[\mathrm{E}[R^{mv}] - R_f]$$

1. 资产 i 的通用线性定价模型（APT 形式）：

$$\mathrm{E}[R^i] = R_f + \beta_{im}\lambda_m \qquad (*)$$

2. 特殊资产 R^m_v 的定价：将特殊资产 R^m_v 代入通用定价公式，已推导的 $\beta_{mv,m} = d$：

$$\mathrm{E}[R^{mv}] = R_f + d\lambda_m \qquad (**)$$

3. 求解风险溢价 λ_m：将 (**) 式重排，解出因素 m 的风险溢价 λ_m：

$$\lambda_m = \frac{\mathrm{E}[R^{mv}] - R_f}{d} \qquad (***)$$

4. 关联 $\beta_{i,m}$ 与 $\beta_{i,mv}$：根据公式 (12.26) 下方的 beta 推导，我们可以建立 β_{im} 和 β_{i,m_v} 的关系：

$$\beta_{im} = \frac{1}{b}\beta_{i,mv} \qquad (\beta)$$

5. 代入并整理：将 (β) 和 $(***)$ 代入通用定价公式 $(*)$：

$$\mathrm{E}[R^i] = R_f + \left(\frac{1}{b}\beta_{i,mv}\right)\left(\frac{\mathrm{E}[R^{mv}] - R_f}{d}\right)$$

$$\mathrm{E}[R^i] = R_f + \frac{1}{bd}\beta_{i,mv}[\mathrm{E}[R^{mv}] - R_f]$$

$(bd = 1)$

第三节 基于消费的定价模型与股权溢价之谜

- 基于消费的资产定价模型的核心是随机贴现因子 SDF，但随机贴现因子 m_{t+1}高度依赖于效用函数，所以需要对效用函数做出一定的设定。我们依旧在特定的效用函数下结合 m_{t+1}来分析风险资产和无风险资产收益率，并将结果用于实证。

一、基于 CRRA 偏好的股权溢价

- 为了能够得出简洁的定价公式，我们作如下假设：

假设 12.1：投资者具有 CRRA 偏好；

假设 12.2：风险资产的收益和总禀赋或总消费 Ct+1服从对数正态分布。

- 在 CRRA 偏好下代表性经济人的优化问题得到定价公式以及相应的随机贴现因子为：

$$m_{t+1} = \beta \frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} = \beta (\frac{C_{t+1}}{C_t})^{-\gamma} \qquad （12.28）$$

两边取对数得：

$$\ln m_{t+1} = \ln \beta - \gamma \ln(\frac{C_{t+1}}{C_t}) = \delta - \gamma \Delta c_{t+1} \qquad （12.29）$$

$E_t[m_{t+1}R^i_{t+1}]$ 中，m_{t+1} 和 R^i_{t+1} 服从对数正态分布。在 (12.19) 两边取对数得：

$$0 = \ln E_t[m_{t+1}R^i_{t+1}] = E_t[\ln(m_{t+1}R^i_{t+1})] + \frac{1}{2}\mathrm{var}_t[\ln(m_{t+1}R^i_{t+1})]$$

$$= E_t[\ln m_{t+1} + \ln R^i_{t+1}] + \frac{1}{2}\mathrm{var}_t[\ln m_{t+1} + \ln R^i_{t+1}]$$

$$= E_t r_{i,t+1} + \delta + \frac{1}{2}(\sigma_i^2 + \gamma^2\sigma_c^2 - 2\gamma\sigma_{ic})$$

概括**风险资产的收益率**为：

$$E_t r_{i,t+1} + \delta + \frac{1}{2}(\sigma_i^2 + \gamma^2\sigma_c^2 - 2\gamma\sigma_{ic}) = 0 \quad (12.30)$$

其中，$r_{i,t+1} = \ln R^i_{t+1}$，$\sigma_i^2 = \mathrm{var}_t(r_{i,t+1})$，$\sigma_c^2 = \mathrm{var}_t(c_{t+1})$，$\sigma_{ic} = \mathrm{cov}_t(r_{i,t+1}, c_{t+1})$。类似地，在定价公式 (12.15) 即 $1 = E_t[m_{t+1}(1+r^f)] = E_t[m_{t+1}R^f]$ 的两边取对数并化简得**无风险资产利率**：

$$E_t r_{f,t+1} = -\delta + \gamma E_t \Delta c_{t+1} - \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_c^2 \quad (12.31)$$

其中，$r_{f,t+1} = \ln R^f_{t+1}$。联立 (12.30)、(12.31) 得**股权溢价**公式：

$$E_t[r_{i,t+1} - r_{f,t+1}] + \frac{1}{2}\sigma_i^2 = \gamma\sigma_{ic} \quad (12.32)$$

- 从公式可以看出，股权溢价由相对风险厌恶系数和协方差共同确定。
- 相对风险厌恶系数越大，投资者越厌恶风险，要求的股权溢价越高；
- 收益与总消费的协方差越大，期末支付与消费的协方差越大，表明该资产与总消费同向变化，从而具有较高的风险，资产价格低，相应的收益率越高，股权溢价越高。

•若资产收益与消费正相关（协方差大），
说明在经济好时（消费高）它收益高；
在经济差时（消费低）它收益低。

•所以它不能在“坏时”帮你平滑消费，反而加大波动。

•投资者不愿意持有这种资产，只有在提供更高预期回报（风险溢价）时才愿购买。

二、理论与实证的冲突：三大谜题

- 梅赫拉和普雷斯科特（Mehra & Prescott , 1985）首次在对（12.32）早期版本进行实证时发现，通过美国的历史数据拟合该方程需要极高的相对风险厌恶系数的值，反之，利用心理学角度认可的相对风险厌恶水平（1 到 10 之间）得到的股权溢价水平远远低于历史数据计算出来的股权溢价，而且无法从理论上解释这一差异，从而将这一现象称为股权溢价之谜（the equity premium puzzle）。

- 围绕股权溢价之谜放松若干假设后，威尔（Weil，1989)又提出了无风险利率之谜（the riskfree puzzle)。即：若承认投资者具有比我们想象更高的风险厌恶，则高的风险厌恶系数从理论上得出的无风险利率根本无法解释历史上的无风险利率水平。
- 除了上述两个谜之外，美国资本市场所表现出来的很多现象也无法解释，从而形成更多的谜，其中消费增长的波动与股权波动的巨大差异形成的谜被坎贝尔称为第三个重要的谜 ——股权波动之谜 （the equity volatility puzzle）