

# 第三次作业答案

## 金融经济学-2025 年秋

### Answer 1

设效用为 CRRA，风险厌恶系数  $\gamma = 2$ 。则对任意确定财富  $c > 0$ ,

$$u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} = \frac{c^{-1}}{-1} = -\frac{1}{c}.$$

记初始财富为  $w$ 。参与投机时，期末财富为  $w + 1000$  与  $w - 1000$ ，各以 50% 概率发生。其期望效用为

$$\mathbb{E}[u] = \frac{1}{2}u(w + 1000) + \frac{1}{2}u(w - 1000) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{w + 1000} + \frac{1}{w - 1000}\right).$$

若支付保险费 500 完全规避风险，则确定财富为  $w - 500$ ，效用为

$$u_{\text{ins}} = u(w - 500) = -\frac{1}{w - 500}.$$

无差异条件为  $\mathbb{E}[u] = u_{\text{ins}}$ ，等价于

$$\frac{1}{w + 1000} + \frac{1}{w - 1000} = \frac{2}{w - 500}.$$

化简得：

$$\frac{(w - 1000) + (w + 1000)}{(w + 1000)(w - 1000)} = \frac{2}{w - 500} \implies \frac{w}{w^2 - 10^6} = \frac{1}{w - 500}.$$

交叉相乘得

$$w(w - 500) = w^2 - 10^6 \implies w^* = 2000.$$

因此，当初始财富为  $w^* = 2000$  元时，投机与支付 500 元保险费无差异。对应的确定性等价财富为

$$\text{CE} = w^* - 500 = 1500 \text{ 元}.$$

### Answer 2

设效用函数  $u(\cdot)$  严格递增且严格凹（严格风险厌恶）。记初始财富为  $w$ ，独立随机变量  $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2$  同分布，且

$$\tilde{g}_i = \begin{cases} +b, & \text{概率 } p, \\ -b, & \text{概率 } 1-p, \end{cases} \quad 0 < b < \frac{w}{2}.$$

(1) “公平博弃” 意味着  $\mathbb{E}[\tilde{g}_i] = 0$ , 故

$$\mathbb{E}[\tilde{g}_i] = pb + (1-p)(-b) = 0 \implies p = \frac{1}{2}.$$

(2) 由 (1) 知  $p = \frac{1}{2}$ , 所以

$$V_1 = \frac{1}{2}u(w+b) + \frac{1}{2}u(w-b).$$

由于经济人为严格风险厌恶, 效用函数  $u(\cdot)$  严格递增且严格凹, 因此

$$u\left(\frac{(w+b)+(w-b)}{2}\right) > \frac{1}{2}u(w+b) + \frac{1}{2}u(w-b).$$

即

$$u(w) > V_1,$$

从而严格风险厌恶下, 引入零均值风险会降低期望效用。

(等价表述:  $u$  凹且  $\mathbb{E}[\tilde{g}_1] = 0$ , 由 Jensen 不等式  $u(\mathbb{E}[w+\tilde{g}_1]) > \mathbb{E}[u(w+\tilde{g}_1)]$ )

(3) 由独立同分布与  $p = \frac{1}{2}$ ,  $\tilde{g}$  取值与概率为

$$\tilde{g} = \begin{cases} +b, & \text{概率 } \frac{1}{4} \left(= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right), \\ 0, & \text{概率 } \frac{1}{2} \left(= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right), \\ -b, & \text{概率 } \frac{1}{4}. \end{cases}$$

于是

$$V_2 = \frac{1}{4}u(w+b) + \frac{1}{2}u(w) + \frac{1}{4}u(w-b).$$

与  $V_1 = \frac{1}{2}u(w+b) + \frac{1}{2}u(w-b)$  比较得

$$V_2 - V_1 = \frac{1}{2}u(w) - \frac{1}{4}[u(w+b) + u(w-b)] = \frac{1}{4}[2u(w) - u(w+b) - u(w-b)].$$

由  $u$  的严格凹性 (中点不等式  $u(w) > \frac{1}{2}[u(w+b) + u(w-b)]$ ), 得

$$V_2 - V_1 > 0.$$

### Answer 3

给定三种证券的价格向量与期末支付矩阵

$$S = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 4 & \frac{3}{2} & 5 \\ 2 & \frac{7}{3} & 2 \\ 1 & \frac{4}{3} & 3 \end{bmatrix}.$$

按题意，矩阵  $X$  的列对应证券、行对应状态：第一个证券在三种状态下的支付为  $(4, 2, 1)^\top$ ，其价格为 6。

(1) 设状态价格向量为  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^\top$ 。无套利充要条件之一为存在  $\phi \geq 0$  使

$$X^\top \phi = S,$$

即逐资产价格满足

$$\begin{cases} 4\phi_1 + 2\phi_2 + \phi_3 = 6, \\ \frac{3}{2}\phi_1 + \frac{7}{3}\phi_2 + \frac{4}{3}\phi_3 = 4, \\ 5\phi_1 + 2\phi_2 + 3\phi_3 = 10. \end{cases}$$

联立求解，得

$$\phi_1 = \frac{40}{39}, \quad \phi_2 = \frac{8}{39}, \quad \phi_3 = \frac{58}{39}.$$

因  $\phi_s > 0$  ( $s = 1, 2, 3$ )，故市场无套利。

(2) 由(1)可得唯一的状态价格向量（市场完备）：

$$\phi = \begin{bmatrix} \frac{40}{39} \\ \frac{8}{39} \\ \frac{58}{39} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.0256 \\ 0.2051 \\ 1.4872 \end{bmatrix},$$

(3) 无套利价格为

$$\pi(c) = \phi^\top c = \phi_1 \cdot 1 + \phi_2 \cdot 0 + \phi_3 \cdot 3 = \frac{40}{39} + 3 \cdot \frac{58}{39} = \frac{214}{39} \approx 5.4872.$$

(4) 以第一个证券为标的、执行价  $K = 2$  的看涨期权。

标的在三状态的期末支付向量为  $x_1 = (4, 2, 1)^\top$ ，期权到期支付为

$$(\max\{4 - 2, 0\}, \max\{2 - 2, 0\}, \max\{1 - 2, 0\})^\top = (2, 0, 0)^\top.$$

因此其无套利价格为

$$\Pi_{\text{call}} = \phi^\top (2, 0, 0)^\top = 2\phi_1 = \frac{80}{39} \approx 2.0513.$$

#### Answer 4

记无风险总回报为  $R \equiv 1 + r_F$ 。设经济人在  $t = 0$  期选择最优储蓄  $x$  ( $x > 0$  表示储蓄/买入无风险资产,  $x < 0$  表示借入)。给定禀赋  $(e_0, e_1) = (100, 1)$ , 两期消费由

$$c_0 = e_0 - x = 100 - x, \quad c_1 = e_1 + Rx = 1 + Rx$$

决定。优化问题为

$$\max_x \ln(100 - x) + \rho \ln(1 + Rx), \quad \text{s.t. } -\frac{1}{R} < x < 100.$$

一阶条件 (内点解):

$$-\frac{1}{100 - x} + \rho \frac{R}{1 + Rx} = 0 \implies x^*(\rho, R) = \frac{\rho e_0 - \frac{e_1}{R}}{1 + \rho} = \frac{100\rho - \frac{1}{R}}{1 + \rho}.$$

相应最优消费:

$$c_0^* = 100 - x^*, \quad c_1^* = 1 + Rx^*.$$

(1)  $\rho = 0.5$  时的投资 (储蓄) 需求

$$x^* = \frac{100}{3} - \frac{2}{3R} = \frac{100}{3} - \frac{2}{3(1 + r_F)}.$$

(2) 仅经济人 1 参与时的市场出清条件

此时无风险资产零净供给, 故

$$x^* = 0 \iff c_0 = e_0, c_1 = e_1.$$

(3) 均衡利率

由  $x^* = 0$  得

$$\rho e_0 = \frac{e_1}{R} \implies R^* = \frac{e_1}{\rho e_0} = \frac{1}{100\rho},$$

即

$$r_F^* = R^* - 1 = \frac{1}{100\rho} - 1.$$

(4) 均衡利率与  $\rho$  的关系

$$\frac{\partial r_F^*}{\partial \rho} = \frac{\partial R^*}{\partial \rho} = -\frac{e_1}{e_0} \frac{1}{\rho^2} < 0.$$

即均衡利率与时间偏好权重  $\rho$  反比。 $\rho$  越大（越“看重”未来），单人且零净供给的经济中越想把资源从  $t = 0$  转到  $t = 1$ ，为抑制这种储蓄动机、实现出清，均衡  $r_F^*$  必须下降。

### Answer 5

经济人 2 的禀赋为  $(\tilde{e}_0, \tilde{e}_1) = (1, 100)$ ，效用同为  $\ln c_0 + \rho \ln c_1$ 。令其最优储蓄为  $x_2$ ，则

$$c_{0,2} = 1 - x_2, \quad c_{1,2} = 100 + Rx_2,$$

优化问题

$$\max_{x_2} \ln(1 - x_2) + \rho \ln(100 + Rx_2),$$

F.O.C. 给出

$$-\frac{1}{1 - x_2} + \rho \frac{R}{100 + Rx_2} = 0 \implies x_2^*(\rho, R) = \frac{\rho \tilde{e}_0 - \frac{\tilde{e}_1}{R}}{1 + \rho} = \frac{\rho - \frac{100}{R}}{1 + \rho}.$$

同理，经济人 1 的最优储蓄为

$$x_1^*(\rho, R) = \frac{\rho e_0 - \frac{e_1}{R}}{1 + \rho} = \frac{100\rho - \frac{1}{R}}{1 + \rho}.$$

(1) 经济人 2 的最优消费—投资策略

见上式  $x_2^*(\rho, R)$ ，并有

$$c_{0,2}^* = 1 - x_2^*, \quad c_{1,2}^* = 100 + Rx_2^*.$$

(2) 两人经济的均衡利率与单人情形比较

零净供给出清条件： $x_1^* + x_2^* = 0$ 。代入上式得

$$\rho(e_0 + \tilde{e}_0) = \frac{e_1 + \tilde{e}_1}{R}$$

有

$$R^{**} = \frac{e_1 + \tilde{e}_1}{\rho(e_0 + \tilde{e}_0)} = \frac{101}{\rho \cdot 101} = \frac{1}{\rho}, \quad r_F^{**} = \frac{1}{\rho} - 1.$$

与单人经济的  $R^* = \frac{1}{100\rho}$  比较：

$$R^{**} = 100 R^* \quad (\text{同一 } \rho).$$

即两人互补的禀赋结构使跨期交换变得可行且充足，从而把均衡总回报从极低水平提高到  $R^{**} = \frac{1}{\rho}$ 。

在均衡  $R^{**} = \frac{1}{\rho}$  下，最优储蓄与消费为

$$x_1^* = \frac{99\rho}{1+\rho} > 0, \quad x_2^* = -\frac{99\rho}{1+\rho} < 0, \quad x_1^* + x_2^* = 0,$$

$$c_{0,1}^* = c_{1,1}^* = \frac{100+\rho}{1+\rho}, \quad c_{0,2}^* = c_{1,2}^* = \frac{1+100\rho}{1+\rho},$$

即每个个体都在两期间实现完全平滑。