第五章：套利定价的理论基础

武汉大学经济与管理学院

引言

- 无套利定价方法是两种资产定价中的方法之一，是衍生证券定价的主要方法，也是金融工程的核心思想之一。
- 在有限状态下给出无套利定价法的理论基础。利用无套利思想证明无套利定价的一些基本性质和资产定价基本定理
- 有限状态下的结论直观易懂，而且相关结论可以推广到无限状态情形

第一节：套利定价的市场特征

- 套利定价法也叫比较定价法，是通过证券期末支付之间的比较来确定期初价格的。因此，该方法的使用需要满足一定的条件：被定价的证券必须能被其他证券复制。我们需要回到基本的证券市场上来，而相关的分析借助 A-D 框架更加易于理解。

A、复合证券与证券的复制

- **复合证券**：不同于A-D证券，一般市场上交易的证券通常在每个可能状态下都有一定的支付，这类证券可以看成由A-D证券复合而成的，称为复合证券。
- 此时证券市场的结构由支付矩阵给定：

$$X=\begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{2,1} & \cdots & x_{1,N} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{S,1} & x_{S,2} & \cdots & x_{S,N} \end{bmatrix}$$

（一）、复合证券

我们在前面介绍了一类特殊的证券——A-D 证券，市场上实际交易的证券通常包括股票和债券，无论哪一种证券都比 A-D 证券复杂，其特点是这些证券通常在任何状态下都有一定的支付。我们将这些在各种状态下都有一定的支付的证券称为**复合证券**，它们可以看作是由一序列的 A-D 证券复合而成。

例 5.1：假设期末有 3 种状态，4 个证券，即 S=3,N=4。四个证券的支付向量分别为：

$$X_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\quad X_2=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\quad X_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad X_4=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

则 X_1，X_2，X_4 均为复合证券，因为：

$$X_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};\quad X_3=2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};\quad X_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

- （二）证券的复制与冗余证券

证券复制的概念：

☞回顾：所谓复制是指存在一个证券组合使得其期末的支付与某证券的期末支付完全相同。用数学语言来描述：

◆证券 X 是不同于证券$\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\ldots,\mathbf{X}_N$的证券，如果存在投资组合$\boldsymbol{\theta}^T=(\theta_1，\theta_2，\ldots，\theta_N)$满足：

$$\mathbf{X}=\theta_1\mathbf{X}_1+\theta_2\mathbf{X}_2+\ldots+\theta_N\mathbf{X}_N \qquad （5.1）$$

则称证券 X 被证券$\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\ldots,\mathbf{X}_N$的复制，也称为被$\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\ldots,\mathbf{X}_N$线性表示。数学里的线性表示等价于这里的复制、合成、生成

冗余证券的概念

- 当市场上有 N 个证券时，证券的支付向量之间可能是线性相关的。由线性代数的知识可知，当证券的支付向量组成的向量组线性相关时，至少存在一个证券，其支付向量可以表示为其他证券支付向量的线性组合，或者说该证券的支付向量可以被其他证券的支付向量线性表示出来。

- N个证券中如果存在一个证券其支付向量可以被其他证券的支付向量线性表示，则称该证券为**冗余证券**（redundant securities），有时也称**冗余资产**（redundant assets）。简单地说，在N个证券中的任何一个证券，只要他能被其他证券复制，则称之为冗余证券。

- 数学语言：

用数学语言描述为：N 个证券的支付向量组成向量组{X_1,X_2，…,X_N}，其中，X_i 为证券 i 的支付向量，我们后面直接称之为证券 X_i。如果存在 N-1 个实数使得证券 X_j能够表示为其他证券的线性组合，即满足：

$$X_j = \theta_1 X_1 + \ldots + \theta_{j-1} X_1 + \theta_{j+1} X_{j+1} + \ldots + \theta_N X_N \qquad (5.3a)$$

则称证券 j 为**冗余证券**，也称证券 j 被其余的 N-1 个证券复制。

- N 个证券的市场结构表示为 $\mathbf{X}=(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2,\ldots,\mathbf{X}_N)$， 从中剔除 $\mathbf{X}_j$ 后的市场结构记为：

$$\mathbf{X}_{\backslash j}=(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_{j-1},\mathbf{X}_{j+1},\ldots,\mathbf{X}_N)$$

由 N 个证券的投资组合记为$\boldsymbol{\theta}=(\theta_1, \theta_2,\ldots,\theta_N)^T$， 从中剔除第 j 个证券后由剩下的 N-1 个证券组成的投资组合记为：

$$\boldsymbol{\theta}_{\backslash j}=(\theta_1,\ldots,\theta_{j-1},\theta_{j+1},\ldots,\theta_N)^T$$

则（5.3a）可以表示为：

$$X_j = X_{\backslash j}\theta_{\backslash j} \qquad (5.3b)$$

- 冗余证券是通过证券支付向量之间的相关性来定义的，到目前为止还没有涉及证券的价格。
- 市场无摩擦的情形下，如果存在冗余证券，要么存在套利机会，要么该证券对资源的配置不起任何作用。也就是说，市场无摩擦而且不存在套利机会的条件下，去掉冗余证券不会对市场资源配置的功能有任何影响。
- 如果市场里允许冗余证券的价格偏离它所能复制的组合的价格，就出现了套利：你可以买便宜的冗余证券，同时卖掉等价组合，零成本套利。如果冗余证券的价格正好等于它能复制的组合的价格，那么它就只是一个“替身”：投资者买它或者直接构造那个组合，结果完全一样。此时，它对资源配置没有任何新的作用。

B、证券市场的不同描述

- 当市场上存在冗余证券时，我们可以选择一组有代表性的证券来描述证券市场。如果代表性的证券有不同的选取方法，则表明证券市场有不同的描述方法。
- 实际上，即使没有冗余证券，也可以用多种不同的方法来描述该证券市场。

（一）证券市场的等价

◆如何描述证券市场呢？通常的描述方法是给出相应的市场结构，即给出证券市场的支付矩阵。假定市场上有 N 个证券，则市场结构表示为：

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_N) \qquad (5.4)$$

从整体看是支付矩阵，矩阵分块后，每一列代表一个证券的支付向量。我们不妨称之为证券市场的原始描述方式。

◆N个证券的投资组合**θ**=(θ₁, θ₂,…,θ_N)ᵀ在期末的收益为$Y=\sum_{i}^{N}\theta_i X_i = X\theta$， 由 N 个证券生成的所有支付向量形成的集合称为支付空间，记为：

$$M \equiv \{Y : Y = X\theta, \theta \in R^N\} \qquad (5.5)$$

显然 **M**就是由 **X₁,X₂**，…,**X_N**生成的向量空间，**M**完全由 **X** 决定，它是由 **X₁,X₂**，…,**X_N**的所有的线性组合而形成的支付向量的集合。

- 为了方便，我们引进等价的概念：

定义 5.1：称分别由 X 和 X’ 生成的支付空间 $M \equiv \{Y : Y = X\theta, \theta \in R^N\}$ 和 $M' \equiv \{Y' : Y' = X'\theta, \theta \in R^N\}$ 是**等价**的，如果满足：**M=M’**。

定义 5.2：称两个证券市场 $X = (X_1, X_2, ..., X_N)$ 与 $X' = (X'_1, X'_2, ..., X'_m)$ **等价**，若 $\forall X_i \in X$，$\exists \theta \in R^N$，使得 $X_i = X'\theta$；同时，$\forall X'_j \in X'$，$\exists \theta' \in R^N$，使得 $X'_j = X\theta'$。

含义：证券市场X可以生成证券市场X'，同时，证券市场X'可以生成证券市场X，则成两者等价。

- 由此我们可以证明：

定理5.1：如果证券市场 $X=(X_1,X_2,\ldots,X_N)$ 有一个冗余证券 X_j，则剔除 X_j 后所得到的证券市场 $X_{\backslash j}=(X_1,\ldots,X_{j-1},X_{j+1},\ldots,X_N)$ 与原市场等价。即 X 与 $X_{\backslash j}$ 等价。

证明: $\forall X_i \in X, i \neq j$ 时, 取 $\theta_{/j}^{\mathrm{T}}=(0,\ldots,1,\ldots,0) \in R^{N-1}$, 使得 $X_i = X_{/j}\theta_{/j}$; $i=j$ 时, 由冗余证券的定义 (5.1) 可知 $X_j = X_{/j}\theta_{/j}$。另一方面, $\forall X_i \in X_{/j}$ 有 $\theta^{\mathrm{T}}=(0,\ldots,1,\ldots,0) \in R^N$ 使 $X_i = X\theta = X_i$ 故 X 与 $X_{/j}$ 等价。证毕。

定理5.2：若证券市场的支付矩阵 X 的秩等于 r（r<N），则证券市场上存在 N-r 个冗余证券，剔除这些冗余证券后得到的市场结构为 X′，市场 X 与 X′等价。

只要存在冗余证券，就可以通过剔除冗余证券得到一个更简单的等价的证券市场结构。

（二）证券市场的不同形式：

◆所谓证券市场的不同形式是指原始证券市场结构以及与之等价的其他形式的证券市场，讨论证券市场的不同形式的目的是由原始的证券市场形式向更简单、更方便的证券市场形式的转换。

◆由定理 5.1 和 5.2，无摩擦的市场上，只要有冗余证券就可以剔除，所得的市场结构与原来的市场结构等价。

- 由上述分析可知，若含冗余证券，可以剔除之，从而可以假设 **X**含N个线性无关的证券，从而

$$rank(X) = \min\{N, S\} = N \leq S$$

如果 N>S，那肯定有冗余，因为状态空间最多只有 S个独立方向。

$$Rank(X)=min\{N,S\}=N$$

给定 N 个线性无关的支付向量，我们试图构造 N 个不同的投资组合使得他们对应的投资组合的支付也线性无关。是否能达到此目标？

我们不妨将这 N 个组合记为 $\{\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_N\}$，其中 $\theta_i \equiv (\theta_{1i},\theta_{2i},\ldots,\theta_{Ni}\}^T$，i=1,2,...,N。该组合对应的支付向量为：

$$X_{\theta_i} = X\theta_i \equiv \begin{pmatrix} x_{1,\theta_i} \\ \cdots \\ x_{\omega,\theta_i} \\ \cdots \\ x_{S,\theta_i} \end{pmatrix}$$

由此形成的新的市场结构为：

$$X_\theta \equiv (X_{\theta_1}, X_{\theta_2}, \ldots, X_{\theta_N}) = X(\theta_1, \ldots, \theta_i, \ldots, \theta_N)$$

$$= \begin{pmatrix} x_{1,\theta_1} \ \ldots\ x_{1,\theta_i} \ \ldots\ x_{1,\theta_N} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_{\omega,\theta_1} \ldots x_{\omega,\theta_i} \ldots x_{\omega,\theta_N} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_{S,\theta_i} \ldots x_{S,\theta_i} \ldots x_{S,\theta_N} \end{pmatrix} \equiv XH \qquad (5.7)$$

其中 H 为 N 阶正方形矩阵，显然，只要 H 可逆，即 rank(H)=N，则必有 rank(X_θ)=N。

说明：课件中多处由数学公式编辑器打印的向量我暂时还不会搞成黑体，请大家注意辨别。见谅！

其含义是，只要构造的 N 个组合的组合向量彼此线性无关，则由此得到的 N 个组合的支付向量也线性无关。（5.6）（5.7）式的经济含义是 N 个投资组合的支付向量$\{X_{\theta_1}, X_{\theta_2}, \dots, X_{\theta_N}\}$是由原市场结构生成的。另一方面，因为 H 可逆，所以：

$$X = X_{\theta} H^{-1} \tag{5.8}$$

（5.8）的含义是原始市场结构的 N 个证券也能由$\{X_{\theta_1}, X_{\theta_2}, \dots, X_{\theta_N}\}$生成，因此原市场结构$\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$和$\{X_{\theta_1}, X_{\theta_2}, \dots, X_{\theta_N}\}$等价。

例 5.2: 在例 5.1 中，原市场结构为:

$$X = (X_1, X_2, X_3, X_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

删除 X_4 后的市场结构为:

$$X' = (X_1, X_2, X_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

构造三个投资组合，只要组合向量线性无关就可以形成新的等价的市场结构。我们不妨取:

$$H = (\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

则等价的市场结构 X'' 为:

$$X'' = (X_1, X_2, X_3)H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 11 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

可以验证上述三个市场结构彼此等价。这里我们取的 H 比较“随意”，只是保证 H 是可逆的。通常情况下对 H 或证券投资组合的选取往往是依据最终市场结构 X'' 来确定的。

$\forall\omega$，都存在组合θ_ω使得（5.9）成立：

$$X\theta_\omega = I_\omega \tag{5.9}$$

事实上由于 X 是可逆方阵，所以：

$$\theta_\omega = X^{-1}I_\omega \tag{5.10}$$

概括为定理为：

定理 5.3：任何一个完全市场的一般市场结构都与一个 A-D 证券市场等价。此时，A-D 证券市场是该原始证券市场的另一表达形式。

（三）、市场特征与套利分析

- 由套利而衍生的无套利定价方法是金融资产定价的两大核心方法之一。
- 无套利分析法首先需要比较证券的期末支付之间的关系。**只有当市场上存在冗余证券时，证券的支付向量之间才有可能建立其一定的关系，才能结合期初价格进行比较。**因此，冗余证券的存在是无套利分析的前提条件。

第二节：套利与无套利原理

- 套利是金融中的一个重要概念，套利机会的存在意味着市场价格的不合理。

- 当市场达到均衡时，不存在套利机会，这即是无套利原理，无套利原理是市场均衡的一个重要特征。

A、套利的定义

- 由 N 个证券组成的市场，期末支付矩阵为

$$\mathbf{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_N)$$

价格向量为

$$\mathbf{S}^T=（S_1，S_2，\ldots,S_N），$$

描述为证券市场

$$(\mathbf{S}^T, \mathbf{X})$$

- 再次回到价格-支付对称图

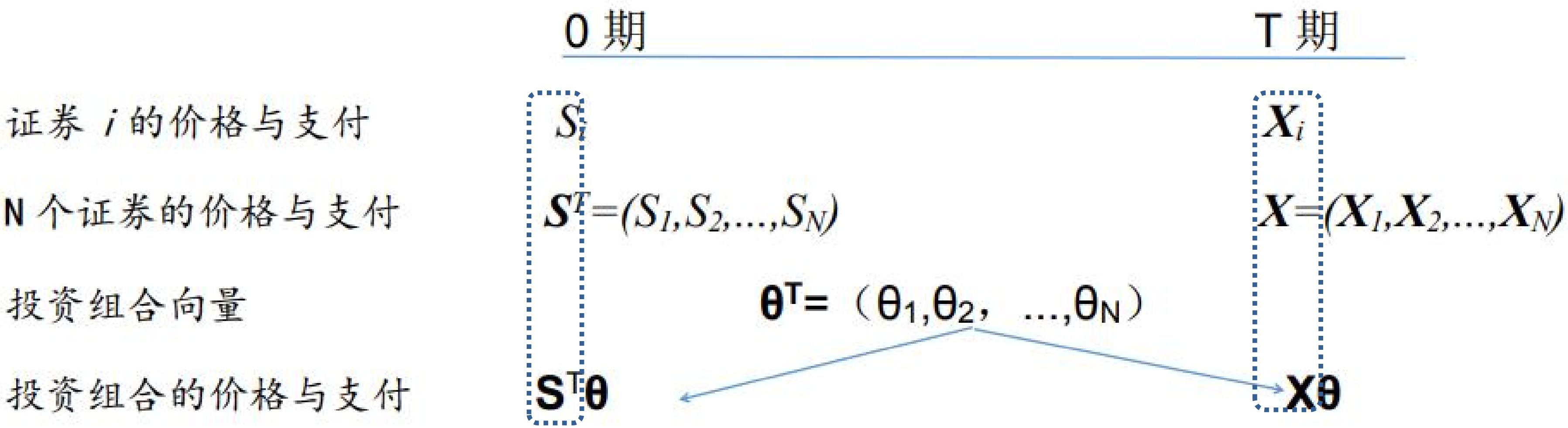

图 5.1 证券和证券组合具有对称性的价格与支付图示

套利及分类

- **定义：**

定义 5.3： 如果一个证券市场上存在满足下列条件的投资组合则称为存在**套利机会**(arbitrage opportunity) 或简称为**套利**（arbitrage）：

（1）$S^T\theta \leqslant 0$；

（2）$X\theta \geqslant 0$；

（3）至少有一个不等式严格成立。

- 分类**：**

第一类套利：$S^T\theta<0$ 且 $X\theta=0$;

第二类套利：$S^T\theta=0$ 且 $X\theta>0$;

第三类套利：$S^T\theta<0$ 且 $X\theta>0$ 。

- 说明：套利只依赖于交易证券的支付和价格，我们假设所有参与者都知道这些支付和价格，故：

☞第一：套利不依赖于任何私有信息（套利依赖于证券在每一状态下的支付，但不依赖于每一状态发生的可能性，而私有信息一般是相对于后者）

☞第二：若存在套利机会，则所有人都可以利用这些套利机会（在无摩擦的假设下）

例子

例 5.4：市场上有 3 只证券，他们的价格向量和支付矩阵分别为：

$$S=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \text{ 和 } X=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\1 & 2 & 0\\1 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

请问是否存在套利机会？如果存在套利机会请分别举例说明。

解：因为 $X_2+X_3=(2, 2, 2)^T=2X_1$, 但 $S_2+S_3>2S_1$, 故存在套利机会。

我们取$\boldsymbol{\theta}_1$=（2，−1, −1）^{T}，则有：

$$S^T\theta_1=(1\ \ 1\ 2)\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}=-1<0\text{；}\quad X\theta_1=\begin{bmatrix}1&0&2\\1&2&0\\1&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

所以$\boldsymbol{\theta}_1$为第一类套利；取$\boldsymbol{\theta}_2$=（3，−1, −1）^{T}，则有:

$$S^T\theta_2=(1\ \ 1\ 2)\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}=0\,;X\theta_2=\begin{bmatrix}1&0&2\\1&2&0\\1&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}>\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

所以$\boldsymbol{\theta}_2$为第二类套利；取$\boldsymbol{\theta}_3$=$\boldsymbol{\theta}_1$+$\boldsymbol{\theta}_2$=（5，−2, −2）^{T}，则有

$$S^T\theta_3=(1\ \ 1\ 2)\begin{pmatrix}5\\-2\\-2\end{pmatrix}=-1<0\text{；}\quad X\theta_3=\begin{bmatrix}1&0&2\\1&2&0\\1&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\-2\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}>\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

所以$\boldsymbol{\theta}_3$为第三类套利。

B、无套利原理

- 给定支付矩阵，证券价格不能是任意的，否则就有可能存在套利机会。显然，允许存在套利可能性的价格不可能是市场均衡的结果。

定理5.4：当市场处于均衡状态时不可能存在套利机会。

用反证明法证明。记市场的均衡配置为 $\{c_k,\ k=1,2,\ldots,K\}$，均衡价格向量为 $\mathbf{S}$，支付矩阵为 $\mathbf{X}$。假设市场上存在套利机会，不妨假设存在第一类套利机会，即存在投资组合 $\boldsymbol{\theta}$ 使得

$$\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}<0 \quad \text{且} \quad \mathbf{X}\boldsymbol{\theta}=0.$$

对经济人 k，其最优消费选择为 $\mathbf{c}_k=(c_{k0};\,\mathbf{c}_{k1})$。由于投资组合 $\boldsymbol{\theta}$ 的存在，经济人 k 在期初额外投资该组合，使其两期消费为

$$c_{k0}^*=c_{k0}-\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}>c_{k0}, \quad \mathbf{c}_{k1}^*=\mathbf{c}_{k1}+\mathbf{X}\boldsymbol{\theta}=\mathbf{c}_{k1}.$$

由不满足公理，$\mathbf{c}_k^*$ 比 $\mathbf{c}_k$ 更优，因此 $\mathbf{c}_k$ 不是最优选择，这与均衡的定义矛盾。

无套利原理：证券市场中不存在套利机会。

- 无套利原理的成立依赖于两个假设：
  - ◆一是（至少部分）经济人具有不满足性；
  - ◆二是市场无摩擦。

所谓**市场无摩擦**是指经济人能够迅速按市场价格依据自身的需求买卖一定数量的证券。

第三节：套利定价

- 无套利定价也常被简称为套利定价，它是金融资产定价的核心方法之一，也是金融工程中衍生证券定价的主要方法。
- 该定价方法的**基本思想**是：证券价格的确定必须使得市场不存在套利机会，即证券价格满足无套利原理。

A、资产定价基本定理

- 我们利用无套利原理分析资产定价的一些基本性质，这些性质有的已经成为衍生金融工具定价的基本方法。

- 考虑两时点单期、期末有S个状态的情形，市场上有N个证券，每个证券的支付向量表示为S维向量，由这N个证券形成一个支付集合 $\boldsymbol{X}=\{\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_N\}$ ，N个证券生成的集合称为支付空间：

$$M \equiv \{Y : Y = X\theta, \theta \in R^N\}$$

- 定价算子：

定义 5.4：称满足下列条件的一个从证券支付空间 **M** 到实数集 **R** 的映射为**定价算子**（pricing operator）或**估价算子**（valuation operator）：

$$\mathbf{V}:\quad \mathbf{M}\rightarrow\mathbf{R} \tag{5.12}$$

满足：$\forall X_i \in M$，都存在唯一的实数 $V(X_i)\in R$ 与之对应。

对于市场上已经存在的 N 个证券，我们通常记：

$$S_i=\mathrm{V}(\boldsymbol{X}_i)$$

定理 5.5（一价律，law of one price）：两个具有相同支付的证券或证券组合的价格必定相同。即：$\forall X_i, X_j \in M$，

$$\text{若 } X_i = X_j\text{，则必有 } V(X_i) = V(X_j) \tag{5.13}$$

证明（反证法）

假设结论不成立，不妨设 $V(X_i) < V(X_j)$ 而 $X_i = X_j$。只看由证券 i, j 构成的两种证券市场，令它们的价格向量与支付矩阵分别为

$$S^\top = (V(X_i), V(X_j)), \qquad X = (X_i, X_j).$$

取投资向量

$$\theta^\top = (1, -1) \quad (\text{做多 } i\text{、做空 } j).$$

则因为 $X_i = X_j$，有

$$S^\top \theta = V(X_i) - V(X_j) < 0, \qquad X\theta = X_i - X_j = 0.$$

这意味着无需承担任何未来支付义务（$X\theta = 0$），却可以获得当期现金流入（$S^\top \theta < 0$），构成**第一类套利机会**，与无套利原理矛盾。故假设错误，原命题成立。□

- “一价律”是金融学中的一个著名的法则，是衍生产品定价的核心规则。
- 本章的定理证明我们全部“形式化”——采用反证法，分为三步：第一步假设命题不成立；第二步在假设下构造套利机会；第三步结论
  “形式化”便于理解但缺乏“创造性”

其它性质及证明

推论 5.1： 支付为 0 的证券其价格必定为 0 。即：$V(0)=0$

推论的证明比较容易。进一步由无套利原理易证下面两个定理：

定理 5.6： 具有正的支付向量的证券或证券组合，其价格必为正。即，

若 $X_i>0$，则必有 $V(X_i)>0$ （5.11）

定理 5.7： 在无摩擦的市场中，定价算子是递增的算子。即：$\forall X_i, X_j \in M$，

若 $X_i>X_j$，则必有 $V(X_i)>V(X_j)$ （5.12）

定理5.7如何证明呢？提示：反证法

证明： 用反证法。

假定上述结论不成立，即 $V(\mathbf{X}_i) \leq V(\mathbf{X}_j)$。由证券 i, j 两个证券组成的证券组的价格向量和支付矩阵分别为：$\mathbf{S}^\top = (V(\mathbf{X}_i), V(\mathbf{X}_j))$ 和 $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j)$，取 $\theta^\top = (1, -1)$，则因为 $\mathbf{X}_i > \mathbf{X}_j$，所以：

$$\mathbf{S}^\top\theta = V(\mathbf{X}_i) - V(\mathbf{X}_j) \leq 0; \quad \mathbf{X}\theta = \mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j > 0$$

因此存在**第二类或第三类套利机会**，这与**无套利原理**矛盾，所以假设错误，原命题成立。证毕

定理 5.8： 在无摩擦的市场中，定价算子是线性算子，即 $\forall X_i, X_j \in M$

（1） $\forall a,b \in R$，有 $V(aX_i + bX_j) = aV(X_i) + bV(X_j)$ （5.13）

（2） $\forall X_i \in M, i=1,2,\ldots,n$， $\forall a_i \in R, i=1,2,\ldots,n$，有：

$$V(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i V(X_i) \qquad (5.14)$$

系： 在无摩擦的市场中，定价算子是递增的线性算子。

定价算子的线性性可用于 A–D 经济，对任意的证券 X_i，由于：

$$X_i = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{\omega i} \\ \vdots \\ x_{Si} \end{pmatrix} = x_{1i}I_1 + \cdots + x_{\omega i}I_\omega + \cdots + x_{Si}I_s$$

所以：

$$V(X_i) = x_{1i} \times V(I_1) + \cdots + x_{\omega i} \times V(I_\omega) + \cdots + x_{Si} \times V(I_S)$$

由状态价格的定义可知，$V(I_\omega) = \phi_\omega$。所以：

$$V(X_i) = x_{1i}\phi_1 + \cdots + x_{\omega i}\phi_\omega + \cdots + x_{Si}\phi_S = \phi^\top X_i$$

因为 $I_\omega \geq 0$，所以 $V(I_\omega) = \phi_\omega > 0$。

为什么ϕ_ω>0？

系：在无摩擦的市场中，定价算子是递增的线性算子。

定价算子的线性性可用于 A–D 经济，对任意的证券 X_i，由于：

$$X_i = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{\omega i} \\ \vdots \\ x_{Si} \end{pmatrix} = x_{1i} I_1 + \cdots + x_{\omega i} I_\omega + \cdots + x_{Si} I_s$$

所以：

$$V(X_i) = x_{1i} \times V(I_1) + \cdots + x_{\omega i} \times V(I_\omega) + \cdots + x_{Si} \times V(I_S)$$

由状态价格的定义可知，$V(I_\omega) = \phi_\omega$。所以：

$$V(X_i) = x_{1i}\phi_1 + \cdots + x_{\omega i}\phi_\omega + \cdots + x_{Si}\phi_S = \phi^\top X_i$$

因为 $I_\omega \geq 0$，所以 $V(I_\omega) = \phi_\omega > 0$。

- 若 $\phi_\omega \leq 0$，则意味着买入状态证券 I_ω 时，当期支付为负或者 0，而未来在状态 ω 的支付却为 1。这显然构成套利机会，与无套利条件矛盾。

定理 5.9（资产定价基本定理，Fundamental Theorem of Asset Pricing）：证券市场中不存在套利机会的充要条件是：存在向量 $\phi >> o$ 使得：

$$S = (\phi^T X)^T \tag{5.18}$$

证明: 充分性
若存在 $\boldsymbol{\phi} \gg 0$ 使得 $S = (\boldsymbol{\phi}^\top \mathbf{X})^\top$，则对任意支付向量 $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$，则有:
若 $\mathbf{X}_i \gg 0$，　$S_i = V(\mathbf{X}_i) = \boldsymbol{\phi}^\top \mathbf{X}_i = \sum_{\omega=1}^{S} \phi_\omega x_{\omega i} > 0$
若 $\mathbf{X}_i = 0$，　$S_i = V(\mathbf{X}_i) = \sum_{\omega=1}^{S} \phi_\omega \cdot 0 = 0$
故不存在套利机会。
证明: 必要性
若不存在套利机会，存在 $V(\mathbf{I}_\omega) = \phi_\omega > 0$ 使得

$$S_i = V(\mathbf{X}) = x_{1i}\phi_1 + \cdots + x_{\omega i}\phi_\omega + \cdots + x_{Si}\phi_S = \boldsymbol{\phi}^\top \mathbf{X}_i$$

且

$$\mathbf{S}^\top = (S_1, \cdots, S_N) = (\boldsymbol{\phi}^\top \mathbf{X}_1, \cdots, \boldsymbol{\phi}^\top \mathbf{X}_N) = \boldsymbol{\phi}^\top (\mathbf{X}_1, \cdots, \mathbf{X}_N) = \boldsymbol{\phi}^\top \mathbf{X}$$

从而 (5.18) 成立。证毕 ■

充分性：不会存在“零成本获得正收益”的机会，也不会有“负价格买到非负支付”的机会。即 **无套利成立**。
必要性：如果没有套利机会，就一定存在严格正的状态价格向量 ϕ_ω。

B、风险中性定价

- 将定价的线性性用于无风险债券，可以得到一些有趣的结论。
- 无风险债券的期末支付为**1**，该债券的期初价格记为B，期末的支付向量记$\mathbf{X}_B$，则：

$$X_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

- 由定价的线性性可知：

$$B = V(X_B) = \phi^T I = \sum_{\omega=1}^{S} \phi_\omega \tag{5.19}$$

- 1 单位无风险债券投资的净支付称为收益率或无风险利率，记为r_F，则：

$$B(1+r_F)=1 \text{ 或 } \quad r_F=\frac{1-B}{B} \qquad (5.20)$$

所以：

$$B=\frac{1}{1+r_F}=\sum_{\omega=1}^{S}\phi_{\omega} \qquad (5.21)$$

- 其含义：

  状态价格之和等于无风险贴现因子。

- 式（5.21）可以作如下变化：

$$B=\sum_{\omega=1}^{S}\phi_{\omega}=\sum_{\omega=1}^{S}\pi_{\omega}\times\frac{\phi_{\omega}}{\pi_{\omega}}=E[\frac{\phi_{\omega}}{\pi_{\omega}}] \qquad （5.22）$$

- 将 $\frac{\phi_{\omega}}{\pi_{\omega}}$ 定义为“随机贴现因子”（stochastic discount factor），记为$m_{\omega}=\phi_{\omega}/\pi_{\omega}$ 。（5.22）的含义：

随机贴现因子的期望等于无风险贴现因子！

- 由定价的线性性：

$$S_i = \sum_{\omega=1}^{S} x_{\omega i}\phi_\omega = B\sum_{\omega=1}^{S}\frac{x_{\omega i}\phi_\omega}{B} = \frac{1}{1+r_F}\sum_{\omega=1}^{S}\frac{\phi_\omega}{B}\times x_{\omega i} \qquad (5.23)$$

无套利条件下$\phi_\omega > 0$，令$q_\omega \equiv \dfrac{\phi_\omega}{B}$，则因为：

$$q_\omega \equiv \frac{\phi_\omega}{B} = \frac{\phi_\omega}{\phi_1 + \ldots + \phi_\omega + \ldots + \phi_S} \qquad （5.24）$$

所以有：

$$0 < q_\omega < 1，\text{而且}\sum_{\omega=1}^{S} q_\omega = 1$$

可以将 q_ω "看做" 概率，我们称之为**风险中性概率**或**等价鞅测度**（equivalent martingale measure），记为 $Q=\{q_\omega, \omega\in\Omega,\ 0<q_\omega<1\}$。将风险中性概率用于（5.23）得：

$$S_i=\frac{\sum_{\omega=1}^{S} q_\omega x_{\omega i}}{1+r_F}\equiv\frac{E^Q[\tilde{X}_i]}{1+r_F} \tag{5.25}$$

(5.25)的含义是：**任何证券的价格都可以用同一个概率测度 Q 来计算其期末支付的期望值，然后用无风险利率贴现。**

- 作为比照

现实世界里，资产的期望值一般都是用该资产要求的回报率贴现：

$$S_i = \frac{E[\widetilde{X}_i]}{1+E[r_i]} \qquad （5.26）$$

- 再回到价格支付图：

	0 期(价格）	T 期（支付）
风险证券	S_i	X_i
无风险证券	B	1
现金流之比	S_i/B	$X_i/1$

图 5. 2 两类证券的价格依支付比较

比较图 5.2 中两种证券的价格与支付，对（5.25）再变形为：$S_i = BE^Q[\tilde{X}_i]$

则，

$$\frac{S_i}{B} = E^Q[\frac{\tilde{X}_i}{1}] \qquad (5.28)$$

- 因此有

在概率测度 Q 下，期末两证券现金流之比的期望值等于期初的两证券现金流之比，这一性质表明：**任何风险证券与无风险证券支付之比在两时点形成了“鞅过程”**。因此，测度 Q 又称为**等价鞅测度**。此处属于两时点情形，其结果能够推广到多期的动态情形。

- 定价公式含义深刻！概率测度Q称为风险中性测度，相关概率称为风险中性概率，定价公式称为风险中性定价公式！
- 概率测度Q称为等价鞅测度

例 5.6：在例 5.1 的基础下，若四个证券的价格分别为 1.5、2.1、0.3 和 1.4，即四个证券的价格向量和支付矩阵分别为：

$$S=\begin{pmatrix}1.28\\1.66\\0.3\\1.04\end{pmatrix} \text{ 和 } X=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\2 & 1 & 1 & 0\\1 & 2 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

此时，令三个状态价格分别为：ϕ_1，ϕ_2，ϕ_3，则有：

$$\begin{cases} 1.28 = \phi_1 + 2\phi_2 + \phi_3 \\ 1.66 = 2\phi_1 + \phi_2 + 2\phi_3 \\ 0.3 = 0\phi_1 + \phi_2 + 0\phi_3 \\ 1.04 = \phi_1 + 0\phi_2 + 2\phi_3 \end{cases}$$

解方程组得到状态价格：

$$\begin{cases} \phi_1 = 0.32 \\ \phi_2 = 0.3 \\ \phi_3 = 0.36 \end{cases}$$

因此，B=0.32+0.3+0.36=0.98，无风险利率为 1/49。等价鞅测度为：（16/49, 15/49, 18/49）。容易验证：

$$\begin{cases} 1.5 = [1\times\frac{16}{49}+2\times\frac{15}{49}+1\times\frac{18}{49}]/(1+1/49)=\frac{E^Q[X_1]}{1+r_F} \\ 1.66 = [2\times\frac{16}{49}+1\times\frac{15}{49}+2\times\frac{18}{49}]/(1+1/49)=\frac{E^Q[X_2]}{1+r_F} \\ 0.3 = 1\times\frac{15}{49}/(1+1/49)=\frac{E^Q[X_3]}{1+r_F} \\ 1.04 = [1\times\frac{16}{49}+2\times\frac{18}{49}]/(1+1/49)=\frac{E^Q[X_4]}{1+r_F} \end{cases}$$

上式变形为：

$$\begin{cases} \frac{1.5}{(1+1/49)}=\frac{S_1}{B}=E^Q[X_1]=E^Q[\frac{X_1}{1}] \\ \frac{1.66}{(1+1/49)}=\frac{S_2}{B}=E^Q[X_2]=E^Q[\frac{X_2}{1}] \\ \frac{0.3}{(1+1/49)}=\frac{S_3}{B}=E^Q[X_3]=E^Q[\frac{X_3}{1}] \\ \frac{1.04}{(1+1/49)}=\frac{S_4}{B}=E^Q[X_4]=E^Q[\frac{X_4}{1}] \end{cases}$$