第六章：无套利原理在衍生证券定价中的应用

武汉大学经济与管理学院金融系

引言

- 上一章我们介绍了无套利的基本思想，本章我们通过以期权为例，进一步分析无套利思想在衍生证券定价和衍生证券性质研究中的应用。

第一节：衍生证券定价的一般方法

- 衍生证券也叫衍生产品，是一类价值依赖于其它更基本变量的证券。这里所说的基本变量我们通常称为标的资产(underlying asset)，它可以是其它证券的价格，也可以是某些商品的价格，还可以是某一地域在特定时期的气温或者降雪量等等。

一、衍生证券

- 衍生证券的种类很多，除了上述依据标的资产的分类之外，我们还可以依据其功能来进行分类。通常我们将衍生证券分为远期、期货、期权、互换以及混合证券，这些衍生证券还可以继续细分。
- 限于篇幅，我们以远期（期货）和期权为例进行分析，互换和混合证券的分析可以在相关的文献中找到。

（一）、远期和期货

◆**远期**（forward）是一种合约，它约定在未来预定的时间、按预定的价格对
预定规模的标的资产进行交易，远期也称为远期合约。

◆远期合约的要素包括：

☞**交易时间**：也就是远期“约定的未来的时间”；

☞ **交割价格**：也就是远期中“预定的价格”；

☞**交易规模**：远期合约中规定买卖标的资产的数量；

☞**标的资产**：是远期合约中规定的买卖对象，这种买卖通常称为“交割”；

☞**头寸**：远期合约通常是由两方签订的合约，合约中规定的买方称为多头，卖方称为空头，合约到期时，买卖双方按原来约定的交割价格进行买卖，完成交易。

◆**期货**也是合约，是一种标准化的并且在交易所内交易的远期合约。

◆从本质上讲，期货与远期是相同的，最主要的差别在于期货合约在交割时间、交割方式、交易规模、标的资产品质以及报价模式等方面都是按严格的标准来进行规定的， 而且期货可以在期货交易所内进行交易，因此，期货比远期具有更高的流动性。

（二）、期权

◆**期权**也是一种合约，它赋予买方在未来预定的时间、按预定的价格买或卖预定数量的预定的标的资产，期权买卖的是权利。

◆ 期权的要素

☞标的资产：期权合约中约定买卖的资产；

☞交易规模：期权合约中约定标的资产交易的规模；

☞执行价格：合约中约定的买卖价格；

☞到期日：合约约定的期权的有效期或具体的执行日期；

☞期权价格：买每一份期权合约需要支付的价格，也叫期权费；

☞头寸：在期权交易中处于购买方还是出售方。

二、无套利思想与积木分析法

- 积木分析法是金融工程中利用衍生产品创新和对衍生产品定价时的一个典型的方法，通过积木分析法研究衍生产品定价或衍生产品在价值方面所具有的性质其本质就是对无套利思想的应用。

（一） 无套利思想

- 无套利思想就是在理想市场条件下，当市场达到均衡时**不存在套利**机会。
- 所谓理想市场条件一般是指市场无摩擦，即投资者能够按证券的市场价格买卖任意数量的证券。无摩擦市场条件给存在套利机会时能够顺利实现套利提供客观保证。

- 本章后面的分析都是基于这些假设而展开：

（1） 假设所有投资者都可以无成本地参与交易；

（2） 假设所有投资者的交易所得没有税收或税率相同，没有头寸限制；

（3） 假设所有投资者的借贷利率相等；

（4） 假设当套利机会出现时，所有投资者会立即使用套利机会；

（5） 假设市场无摩擦，套利交易可以顺利进行。

- 利用无套利思想对衍生证券进行定价时，一般可以采用如下步骤：

☞**第一步**：确定需要定价的衍生证券可以被复制

具体地，则构造两个投资组合：组合 A 和组合 B，其中组合 A 包含衍生证券 X ，组合B不包含 X，且两组合中除 X 之外其它证券的价格是已知的，所有证券 的现金流都是已知的。

☞**第二步**：证明两个组合相互复制

具体地，证明组合 A 和组合 B 产生的现金流完全相同。讨论T期各状态下两个组合对应的支付相同。

☞**第三步**：确定衍生证券的价格。

两个组合的0期的价格相同，形成一个关于证券X价格的简单方程，解方程求X。

（二） 积木分析法

◆如何形成两个相互复制的组合呢？积木分析法是一个非常有效而直观的手段。通过积木分析法可以直观地分析衍生证券之间可能存在的相互复制的关系或途径。

◆主要思想：将特定证券的现金流量图和损益图看成积木，通过不同方式的组合或分拆，从而得到新的产品或者找出金融产品之间的关系。

1）、两类不同的积木

- ◆金融产品的支付图：没有考虑期初成本
- ◆金融产品的损益图：期末支付减期初成本

下面列举常见的积木

现货

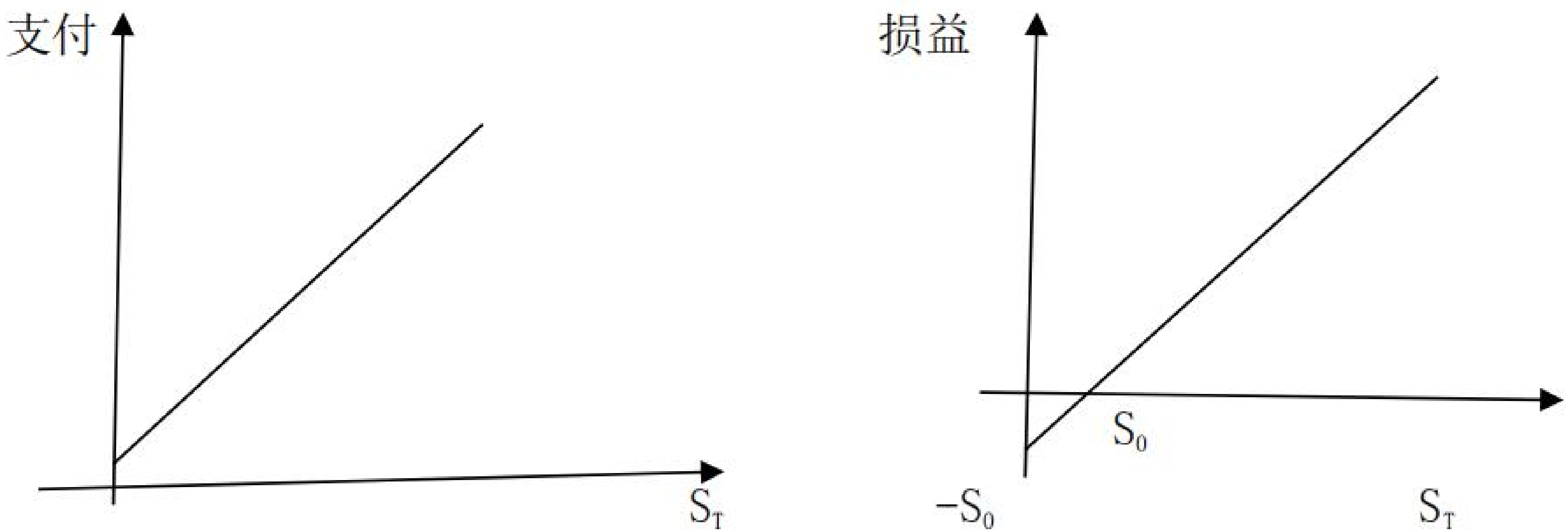


图6-1 股票或现货多头的支付图和损益图

期初支付价格S_0，期末出售收回现金S_T，比如大米，股票

股票的损失：$\pi = S_T$- S_0

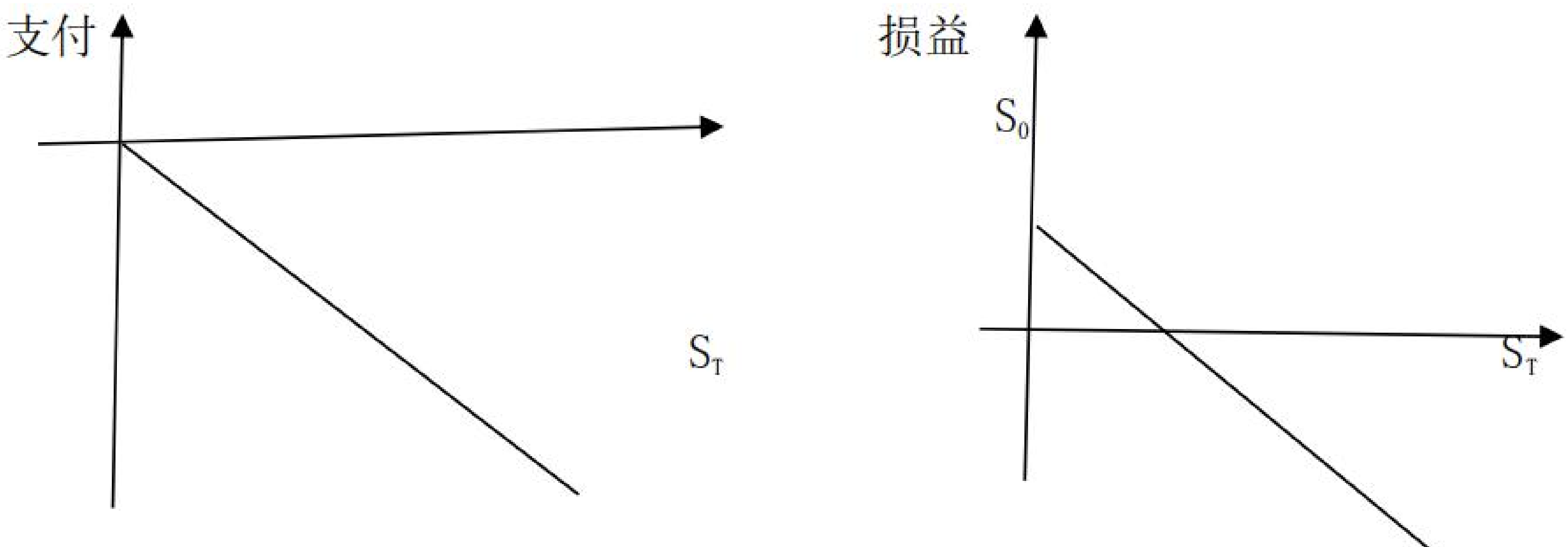


图6-2 股票或现货空头的支付图和损益图

无风险证券

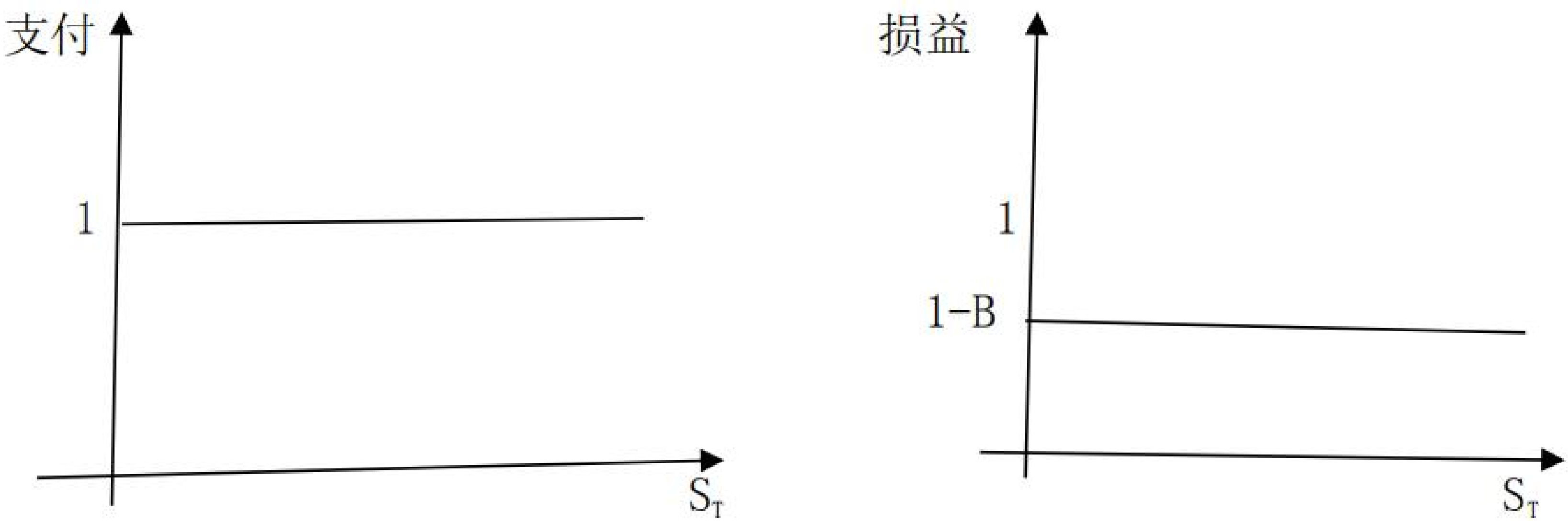
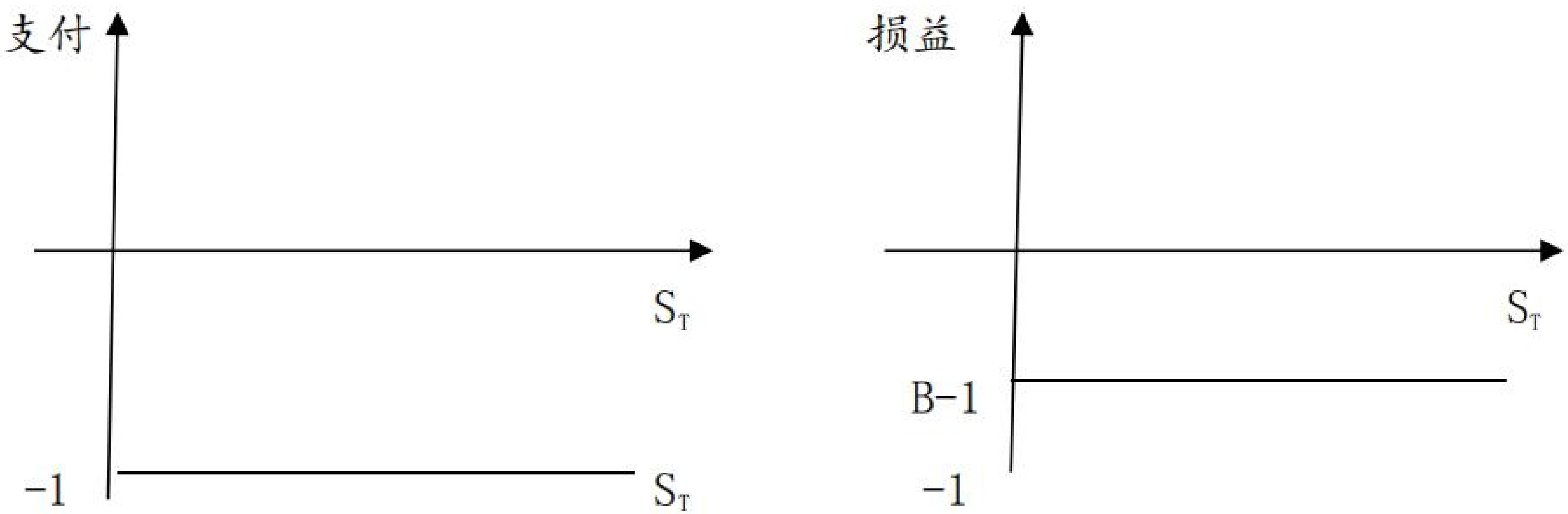


图6-3 无风险证券多头的支付图和损益图

无风险证券支付或损益是常数，不会因标的价格变化而变化



6-4 无风险证券空头的支付图和损益图

远期和期货

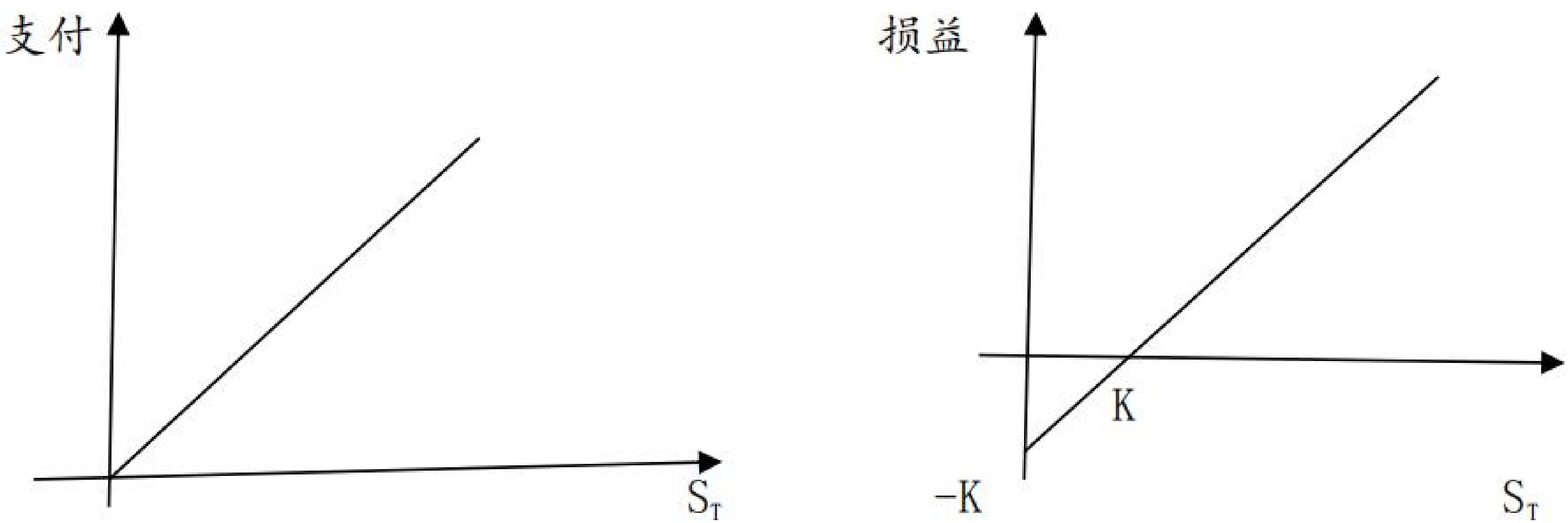


图6-5 远期多头的支付图和损益图

远期期初价格表示签订远期合约时约定的交割价格K
期货期初价格是在购买期货时的期货价格F_0
远期期末损益是$S_T - K$，期货期末损益是$S_T - F_0$

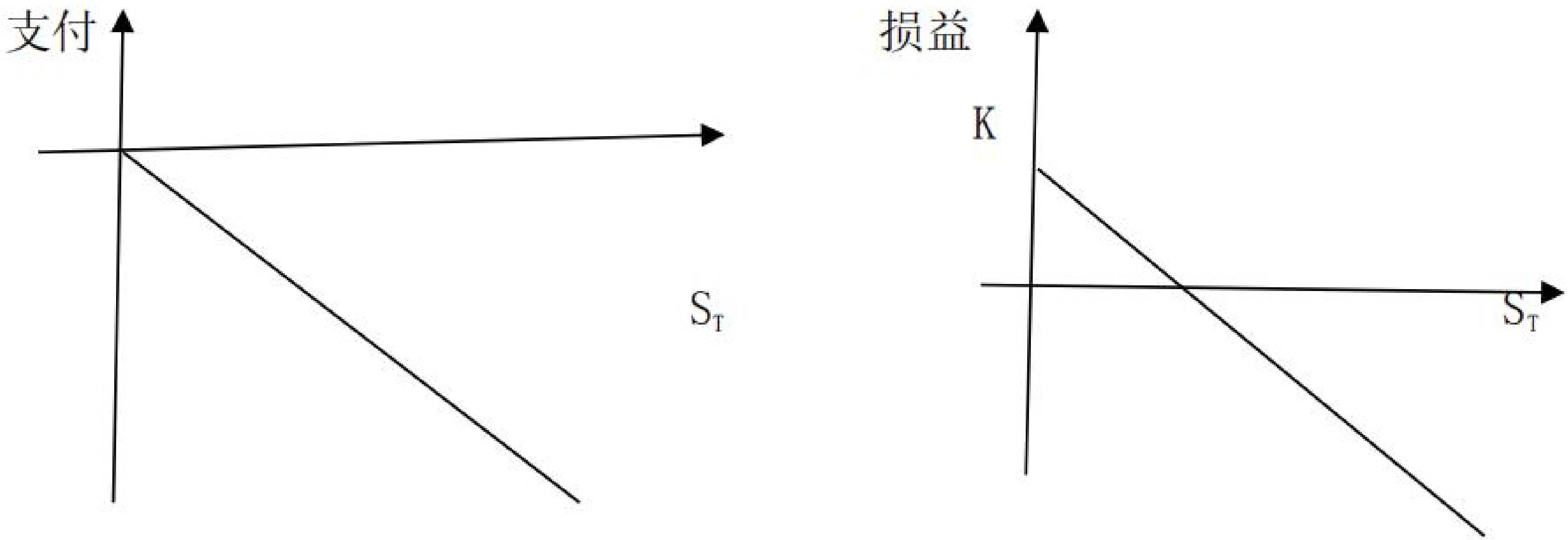


图6-6 远期空头的支付图和损益图

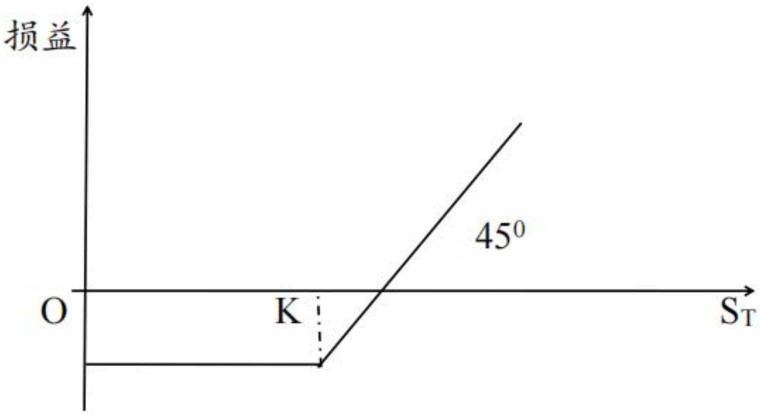


图 6-7 欧式看涨期权多头的支付和损益图

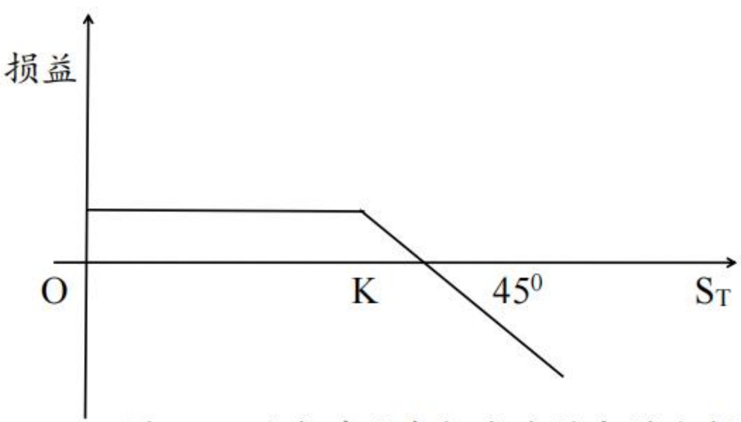


图 6-8 欧式看涨期权空头的支付和损益

期权

欧式看涨期权期初价格c，看跌期权价格p
执行价格为K，标的到期价格S_T

看涨期权赋予其**持有人（买方）在合约到期日或之前，以预先确定的行权价格（Strike Price）从出售人（卖方）那里买入**约定数量标的资产的**权利**。

看跌期权赋予其**持有人（买方）在合约到期日或之前，以预先确定的行权价格（Strike Price）向出售人（卖方）那里卖出**约定数量标的资产的**权利**。

欧式看涨期权在 T 时的支付: $X_T = \max\{S_T - K, 0\} = [S_T - K]_+$;
相应的损益: $\pi = \max\{S_T - K, 0\} - c = [S_T - K]_+ - c$

欧式看跌期权在 T 时的支付: $X_T = \max\{K - S_T, 0\} = [K - S_T]_+$;
相应的损益: $\pi = \max\{K - S_T, 0\} - p = [K - S_T]_+ - p$

以看涨期权为例，期末的支付实际上是一个分段函数，用 $\max\{S_T - K, 0\}$ 或 $[S_T - K]_+$ 来表示，其含义为:

$$\max\{a, b\} = \begin{cases} b & a \le b \\ a & a > b \end{cases}$$

$$[a]_+ = \begin{cases} 0 & a \le 0 \\ a & a > 0 \end{cases}$$

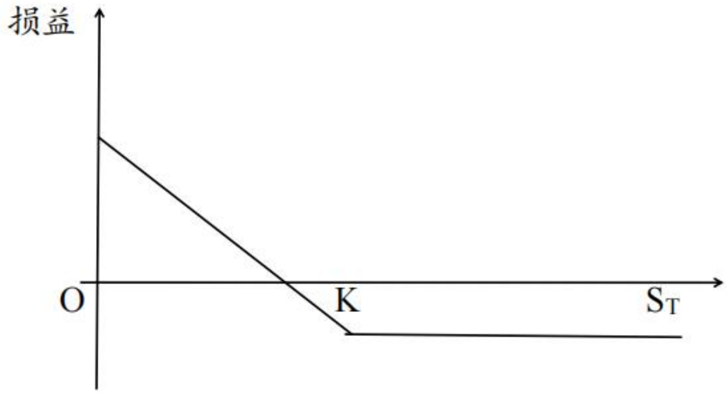


图 6-9 欧式看跌期权多头的支付和损益

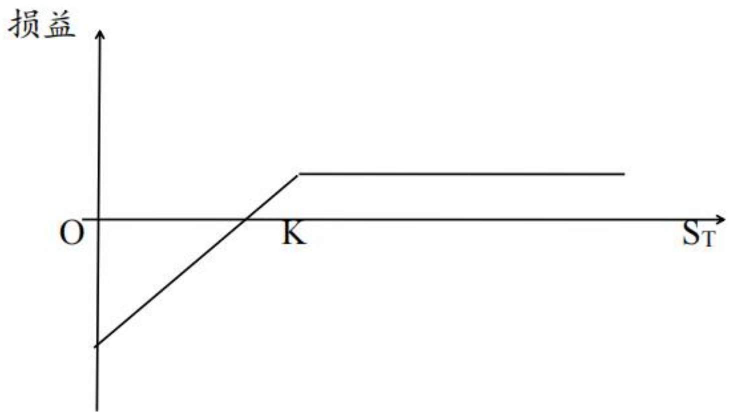


图 6-10 欧式看跌期权空头的支付和损益

欧式期权到期执行，美式期权到期前都可以
唯一的区别是美式在到期之前都有支付和收益
积木分析法需要对同一时点的支付和收益比较

（2）积木分析法举例

例 6.2：平价关系的确定

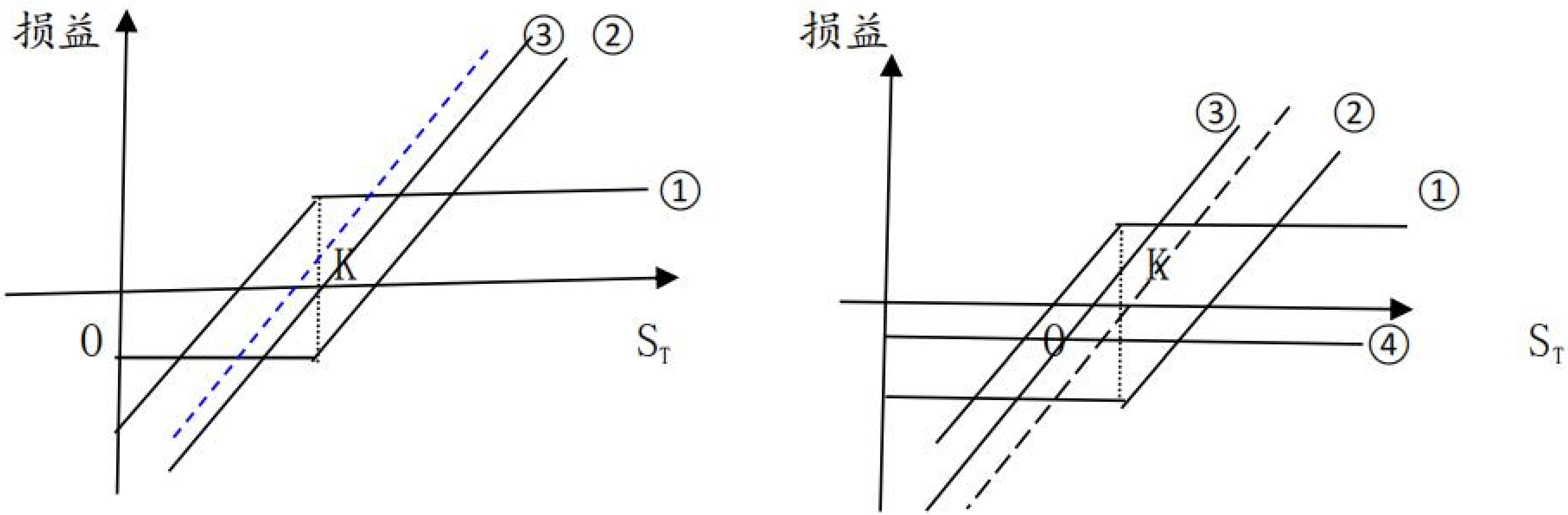


图 6-12 平价关系的积木图

我们将欧式看涨期权的多头标注为积木 1；欧式看跌期权的空头标注为积木 2；以 K 为交割价格的远期加现金标注为积木 3，左图表明：

积木 1+积木 2=虚线=积木 3+p-c

或者将标的资产标注为积木 3；债券空头积木标注为积木 4，右图表明：

积木 1+积木 2=虚线积木=积木 3+积木 4

基于这种关系可以写出平价公式

第二节： 期权与无套利定价

- 期权定价能体现无套利定价思想，尤其是适合欧式期权只有两个时点有现金流的情形

1、 期权的价值

- 期权的价值是确定期权价格的基础。一般可以简单地认为期权在期初的价值等于期权的期初价格。

- 我们设定期权的生命期为[0,T]，t 时点(0≤t≤T)的欧式看涨期权和欧式看跌期权价值分别记为：

$$c(t) \text{ 和 } p(t)$$

- 事实上，期权的价格（或价值）不仅仅依赖于时间，还与标的资产和市场利率有关，当标的资产不支付红利时，期权价格与五个因素有关：

$$c = c(S, K, r_f, \sigma, T-t) \tag{6.1}$$

$$p = p(S, K, r_f, \sigma, T-t) \tag{6.2}$$

即期价格，执行价格，无风险利率，标的波动率，剩余生命周期

- 在到期日 T 时，由期权的定义容易得出其价值：

$$c_T = \max\{S_T - K, 0\} \equiv [S_T - K]_+ \qquad (6.3)$$

$$p_T = \max\{K - S_T, 0\} \equiv [K - S_T]_+ \qquad (6.4)$$

- 到期前任一时点 t，期权的价值由两部分组成：

$$c_t = [S_t - K]_+ + V_t \qquad (6.5)$$

$$p_t = [K - S_t]_+ + V_t \qquad (6.6)$$

内在价值　时间价值

- 公式表明期权在到期之前的价值 由两部分组成：内在价值和时间价值
- 内在价值：t时刻标的的资产价格执行期权产生的价值
- 时间价值由于到期前的标的朝着更有利的方向变化使得期权可能具有更高的内在价值

- 从内在价值来看，立即执行
  - ☞ 获利的期权称为实值期权（in the money）
  - ☞ 获利为负的称为虚值期权（out of money）
  - ☞ 获利为零的称平价期权　（at the money）

因此理性的投资者不会执行虚值期权！

- 由于到期前标的资产朝着更有利的方向变化，从而使期权可能转化为具有更高内在价值的期权。这种由于离到期还有一段时间使得期权所具有的价值称为时间价值

- 在到期日期权不再具有时间价值，到期前的任何时点期权的价值都等于其内在价值与时间价值的和。

- 基于公式（6.5）可知：

☞S 越大，内在价值越高，期权价值越高；

☞K 越大，内在价值越低，期权价值越低；

☞波动率越大，具有**保险作用**的期权越有价值，或者在剩余的生命期间内在价值提高的可能性越大，从而时间价值越高，期权价值越高；

☞T-t 越大，时间价值越高，期权价值越高；

☞无风险利率越高，标的资产要求的回报率越高，标的资产价格超过执行价格的可能性越大，期权价值越高。

以上分析结果用数学语言可以描述为：

$$\frac{\partial c}{\partial S}>0;\ \frac{\partial c}{\partial K}<0;\ \frac{\partial c}{\partial \sigma}>0;\ \frac{\partial c}{\partial (T-t)}>0;\ \frac{\partial c}{\partial r_f}>0 \tag{6. 7}$$

类似的分析对看跌期权也成立，从而有：

$$\frac{\partial p}{\partial S}<0;\ \frac{\partial p}{\partial K}>0;\ \frac{\partial p}{\partial \sigma}>0;\ \frac{\partial p}{\partial (T-t)}>0;\ \frac{\partial p}{\partial r_f}<0 \tag{6. 8}$$

2、 期权价格的性质

- 在半定量分析之后，我们结合无套利方法对期权价格所具有的性质展开分析，为了方便，我们先分析欧式期权价格的性质，因为欧式期权属于典型的两时点支付的单期产品。

- 当时点、标的资产和利率给定之后，标的资产的波动率、利率和到期期限均为常数，因此对期权价格产生影响就只的剩下标的资产的价格S 和执行价格 K 了，从而（6.1）（6.2）简化为：

$$c = c(S,K) \text{ 和 } p = p(S,K) \qquad (6.9)$$

- （一）期权价格的性质

性质 1（非负性）： 欧式期权的价格是非负的，即：$c(S,K)\geq 0; p(S,K)\geq 0$

性质 2（单调性）： $c(S,K)$关于 K 非增；$p(S,K)$关于 K 非减，即：

$$\forall K_1>K_2,\ c(S,K_1)\leq c(S,K_2);\quad p(S,K_1)\geq p(S,K_2) \tag{6.10}$$

性质 3（凸性）： $c(S,K)$和$p(S,K)$关于 K 为凸函数，即：$\forall K_1>K_2,\ \alpha\in(0,1)$，均有：

$$\begin{aligned} &c(S,\alpha K_1+(1-\alpha)K_2)\leq \alpha c(S,K_1)+(1-\alpha)c(S,K_2);\\ &p(S,\alpha K_1+(1-\alpha)K_2)\leq \alpha p(S,K_1)+(1-\alpha)p(S,K_1) \end{aligned} \tag{6.11}$$

- 这里我们只是列出了性质，课本上给出的是公式化的证明。需要说明的是这些性质和后面的一些等式的证明方法很多，我们选择了一种“机械化”的方法是想说明“三步法”可以证明本章几乎所有的性质或结论。

◆三步法：

☞第一步：构造组合（依据要证明的结论构造组合）

☞第二步：证明期末支付的复制关系或价值的大小关系

☞第三步：确定期初的等量关系或大小关系——即要证明的结论

◆依据——上一章的几个重要结论：

☞一价律

☞单调性

☞线性性

单调性

证明： 构造投资组合：

- **组合 A:** 买 1 份欧式看涨期权，其标的资产价格为 S，执行价格为 K_1；
- **组合 B:** 买 1 份欧式看涨期权，标的资产与组合 A 的相同，执行价格为 K_2。

在到期日 T 时，两组合的价值分别记为 V_T^A 和 V_T^B，则：

$$V_T^A = [S_T - K_1]_+ = \begin{cases} 0, & S_T \leq K_1 \\ S_T - K_1, & S_T > K_1 \end{cases}$$

$$V_T^B = [S_T - K_2]_+ = \begin{cases} 0, & S_T \leq K_2 \\ S_T - K_2, & K_2 < S_T \leq K_1 \\ S_T - K_2, & S_T > K_1 \end{cases}$$

因此，$V_T^A \leq V_T^B$，由定理 5.7 可知，在 0 时点的价值也有相同的关系，$V_0^A \leq V_0^B$，即：

$$\boldsymbol{c(S, K_1) \leq c(S, K_2)}$$

证毕。

凸性

组合 C: 买 1 份欧式看涨期权，其标的资产价格为 S，**执行价格为** $\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2$；

组合 D: 买 α 份欧式看涨期权，标的资产相同，**执行价格为** K_1；
买 $1-\alpha$ 份欧式看涨期权，标的资产相同，**执行价格为** K_2。

在到期日 T 时，两组合的价值分别记为 V_T^C 和 V_T^D，则：

$$\begin{aligned} V_T^C = [S_T - (\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2)]_+ &= [\alpha(S_T - K_1) + (1-\alpha)(S_T - K_2)]_+ \\ &\le [\alpha(S_T - K_1)]_+ + [(1-\alpha)(S_T - K_2)]_+ \\ &= \alpha[S_T - K_1]_+ + (1-\alpha)[S_T - K_2]_+ \end{aligned}$$

$$V_T^D = \alpha[S_T - K_1]_+ + (1-\alpha)[S_T - K_2]_+$$

因此，$V_T^C \le V_T^D$，由定理 5.7 可知，在 0 时点的价值也有相同的关系，$V_0^C \le V_0^D$，即

$$\boldsymbol{c(S, \alpha K_1 + (1-\alpha)K_2) \le \alpha c(S, K_1) + (1-\alpha)c(S, K_2)}$$

证毕。

- （二）期权价格的上下界与平价公式

性质 5（期权的界）：若标的资产不支付红利，则欧式看涨期权的价格满足：

$$S \geq c(S,K) \geq [S - \frac{K}{1+r_f}]_+ \tag{6.13}$$

- B-S公式的记忆：

改为连续复利

$$c(S,K) \geq S - e^{-r(T-t)}K \tag{6.14b}$$

加“权重”变等式

$$c(S,K) = S\boxed{N(d_1)} - e^{-r(T-t)}K\boxed{N(d_2)} \tag{6.15}$$

期权价格大于等于标的资产的即期价格减去执行价格的贴现值。

期权的界

看涨期权的价格不可能超过它标的资产的价格，否则市场将出现无风险套利机会。

证明：欧式看涨期权价格下限
证明：当 $S \leq \frac{K}{1+r_f}$ 时显然成立，我们只需证明 $S > \frac{K}{1+r_f}$ 时 $c(S,K) \geq S - \frac{K}{1+r_f}$。
证明方法：我们同样采用构造投资组合的方法来证明：
组合 G：买 1 份欧式看涨期权，其标的资产的价格为 S，执行价格为 K；
组合 H：买 1 份标的资产，以无风险利率 r_f 贷款 $\frac{K}{1+r_f}$（或发行价值为 $\frac{K}{1+r_f}$ 的债券）；
在到期日 T 时，两组合的价值分别记为 V_T^G 和 V_T^H，则：

$$V_T^G = [S_T - K]_+ = \begin{cases} 0, & S_T \leq K \\ S_T - K, & S_T > K \end{cases}$$

$$V_T^H = S_T - K$$

因此，$V_T^G \geq V_T^H$，由定理 5.7 可知，在 0 时点的价值也有相同的关系，$V_0^G \geq V_0^H$，即：

$$c(S,K) \geq S - \frac{K}{1+r_f}$$

证毕。

性质 6（平价关系）：当标的资产不支付红利时，具有相同标的资产、相同实行价格和想到期日的欧式看涨期权和欧式看跌期权之间满足如下的等量关系，通常称为平价关系：

$$c(S,K)+\frac{K}{1+r_f}=p(S,K)+S \tag{6.18a}$$

- 支付红利的情形：如果标的资产支付红利，而且D 是期权在到期之前（包括到期时）累计支付红利的现值，则有：

$$c(S,K)+\frac{K}{1+r_f}+D=p(S,K)+S \tag{6.18b}$$

平价关系

证明方法：构造投资组合。

组合 I: 买 1 份欧式看涨期权，其标的资产的价格为 S，执行价格为 K；买价值 $\frac{K}{1+r_f}$ 的无风险债券，债券可获得无风险收益率 r_f；

组合 J: 买 1 份欧式看跌期权，其标的资产和执行价格均与 I 中期权的相同；买 1 份上述期权的资产。

在到期日 T 时，两组合的价值分别记为 V_T^I 和 V_T^J，则：

组合 I 的到期价值 V_T^I

$$V_T^I = [S_T - K]_+ + K$$

$$= \begin{cases} K, & S_T \le K \\ S_T, & S_T > K \end{cases}$$

组合 J 的到期价值 V_T^J

$$V_T^J = [K - S_T]_+ + S_T$$

$$= \begin{cases} K, & S_T \le K \\ S_T, & S_T > K \end{cases}$$

因此，$V_T^I = V_T^J$，由定理 5.5 可知，在 0 时点的价值也有相同的关系，$V_0^I = V_0^J$，即：

$$c(S,K) + \frac{K}{1+r_f} = p(S,K) + S_0$$

证毕。

继续证：在组合I中加入包括红利D的债券，组合J中会产生期末$D(1+r_f)$红利

3、 美式期权与提前执行

- 与欧式期权相比，美式期权多出了一份权力：在到期之前的任何时点，当市场行情有利时可以执行期权实现盈利，而欧式期权则只能等到到期日；
- 在任何时点如果不执行美式期权，其作用与欧式期权相同，因此美式期权的价值（价格）总是大于或等于欧式期权的价值（价格），即：

$$C(S,K) \geq c(S,K); \quad P(S,K) \geq p(S,K) \tag{6.19}$$

（一）、标的资产不支付红利的情形

定理 6. 1： 如果标的资产不支付红利，美式看涨期权提前执行不是最优的，即美式看涨期权一般不会提前执行，因此，美式看涨期权的价格等于欧式看涨期权的价格。

如何理解？看一个例子

- **例子 6.1**：股票 A 即期价格为 S0=40 元，以股票 A 为标的资产执行价格 K=40 元的美式看涨期权，到期日为 T 时，即期标的资产价格等于执行价格不会执行。如图所示

☞在 t_1时股票 A 的价格涨到 43 元，依据定理 6.1 不应该提前执行，因此继续持有；

☞到 t_2时股票 A 的价格跌到 36 元，看似失去了一次因执行期权而盈利的机会，继续持有；

☞到 t_3时 A 的价格再次涨到 46 元，立即执行每股盈利 6 元，依据定理 6.1 不应该提前执行，继续持有；

☞此后股票 A 开始下跌，直到 T 时股价定位于 38 元，再次失去盈利机会。这是否说明定理 6.1 是错误的？

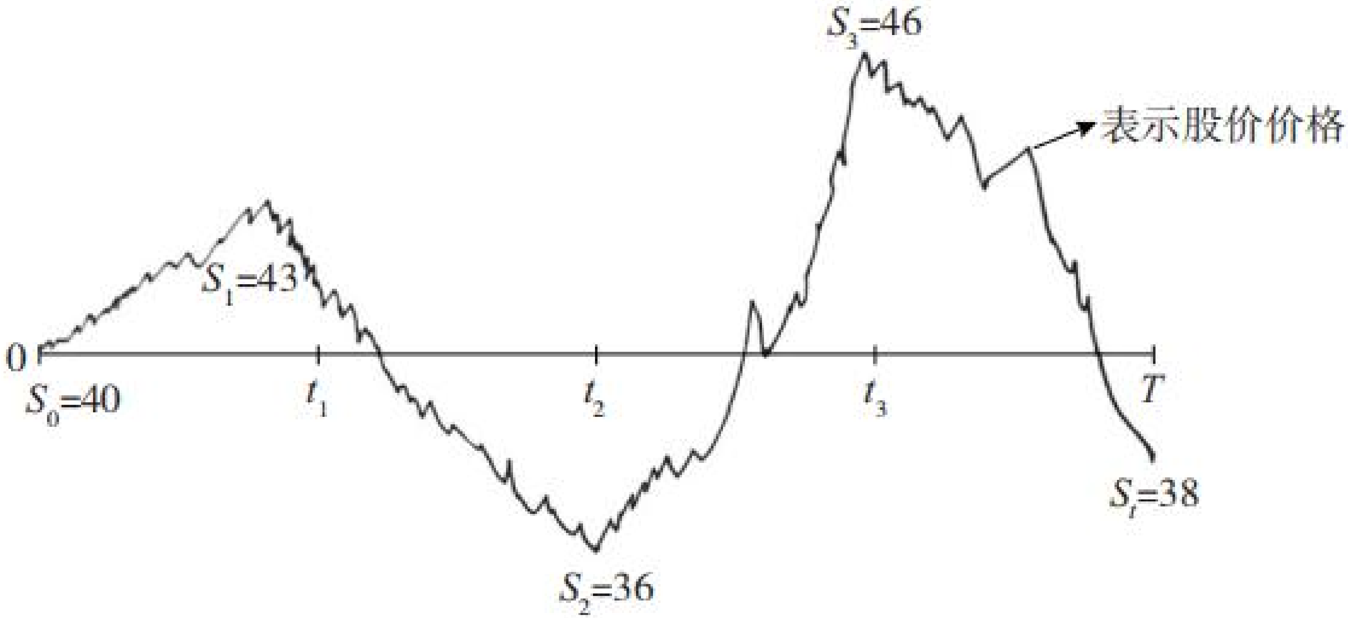


图 6-15　股票 A 的走势

- 不可否认，无论是在 t_1时还是在 t_3时执行期权都是非常不错的选择，定理6.1 表明不要提前执行并非单纯地死等机会，而是说可能存在比提前执行有更好的选择。
- 理论上，在每个时点至少有三种可供选择的策略：

策略 1：立即执行，获利为：Π_1=S（t）-K

策略 2：出售看涨期权，获利为：Π_2=c(t)

策略 3：卖空标的资产并继续持有期权，等待时机平仓，获利为：Π_3=max[S(t)-S(t*),S(t)-K]。

期权提前执行策略的获利比较

假设 t_1 时和 t_3 时的期权价格分别为 $c(t_1) = 3.5$ 元和 $c(t_3) = 6.4$ 元。

表 1: 不同时点的获利对比

交易时点 (t)	股票价格 $S(t)$ (元)	策略 Π_1 (元)	策略 Π_2 (元)	策略 Π_3 (元)
t_1	43	$43-40=3$	3.5	$43-38=5$
t_3	46	$46-40=6$	6.4	$46-38=8$

比较而言，策略1获利最低！

- 对于美式看跌期权定理 6.1 不再成立，可以简单地概括为：

$$P(S,K)=\max[K- S, p(S,K)] \qquad (6.20)$$

☞(6.20)的表面含义是：任何时刻的美式看跌期权的价格等于立即执行的价值K-S 或同一时刻欧式看跌期权的价格中的最大值者.

☞进一步的含义则是：当立即执行的价值 K-S 大于相同条件下的欧式看跌期权的价格时应该立即执行。

- 而欧式看跌期权的价格可以由平价关系来确定，因此（6.20）又可以改写为(6.20a):

$$P(S,K)=\max[K-S,\frac{K}{1+r_F}-S+c(S,K)] \tag{6.20a}$$

- 总之，在任何时刻可以比较K-S和 $\frac{K}{1+r_F}-S+c(S,K)$ 值的大小，前者大意味着立即执行更优，后者大则应该继续持有以等待时机。

（二）、标的资产支付红利的情形

◆对于美式看涨期权有：

$$C(S,D,K)=\max[S+D-K,c(S,D,K)] \quad (6.21)$$

◆对于美式看涨期权有

$$P(S,D,K)=\max[K-S-D,p(S,D,K)] \quad (6.22)$$

因此，都有可能提前执行！

4、 有限状态下的期权定价

- 为了更好地理解期权定价公式，CRR（Cox,Ross，Rubinstein(1979)） 建立了一种期末只有两状态的模型，通常称为二叉树模型。二叉树模型虽然看上去假设过于简单似乎十分不合理，但它能很好地展示期权定价所包含的思想。

（一）、两状态下的期权定价——二叉树模型

◆两状态下的期权定价模型又包括：

- ☞单期模型
- ☞两期模型
- ☞多期模型

◆主要假设

假设 1：标的资产——股票从期初到期末只有两种变化（也称为两种状态），上涨或下跌，多期情形下上涨或下跌的幅度保持不变；

假设 2：不存在套利机会。

（1）、单期模型

◆假设价格变化的二叉树

图 6-16 价格变化的二叉树

根据看涨期权的性质显然有：

$$C_u = [uS - K]_+ \qquad C_d = [dS - K]_+ \tag{6.23}$$

◆二叉树假设下构造对冲组合

投资组合： h 股的标的股票的空头

1 份欧式看涨期权的多头

该组合在期初的价值变化为：

$$
c - hS \;\begin{cases} C_u - huS & （上涨时） \\ C_d - hdS & （下跌时） \end{cases}
$$

图 6-17 投资组合的价值变化二叉树

选择组合中的h，使得 Cu-huS=Cd-hdS，这种h称为**完全对冲的对冲比**

完全对冲组合意味着复制无风险资产

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{C_d} - \mathbf{C_u}}{\mathbf{S(d-u)}} = \frac{\mathbf{C_u} - \mathbf{C_d}}{\mathbf{S(u-d)}}$$

◆期权定价公式

☞ 无套利条件下完全对冲组合的收益率等于无风险利率，则：

$$(c-hS)(1+r_F)=C_u-huS=C_d-hdS \qquad (6.24)$$

解（6.24）得到期权定价公式：

$$\boxed{c=\frac{1}{1+r_F}\left[\frac{1+r_F-d}{u-d}C_u+\frac{u-(1+r_F)}{u-d}C_d\right] \qquad (6.25)}$$

记：

$$q_u=\frac{1+r_F-d}{u-d};q_d=\frac{u-(1+r_F)}{u-d} \qquad (6.26)$$

得：

$$\boxed{c=\frac{q_uC_u+q_dC_d}{1+r_F}\equiv\frac{E^Q[\tilde{C}_T]}{1+r_F} \qquad (6.25a)}$$

（2）两期模型

◆两期模型下价格变化的二叉树

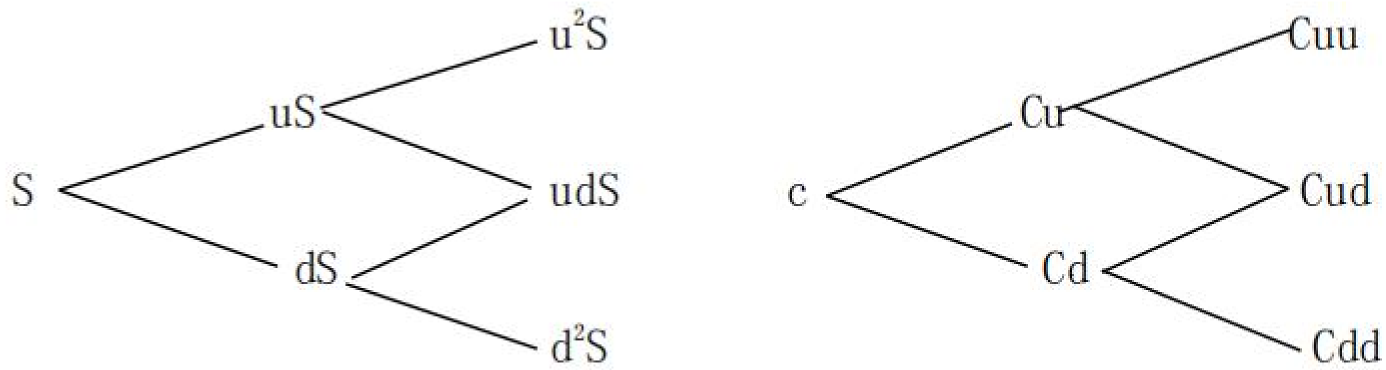


图 6-18　两期情形下股票和期权价格变化的二叉树

类似地：$C_{uu}=[u^2S-K]_+$，$C_{ud}=[udS-K]_+$，$C_{dd}=[d^2S-K]_+$。

◆二叉树分解为三个单期二叉树：

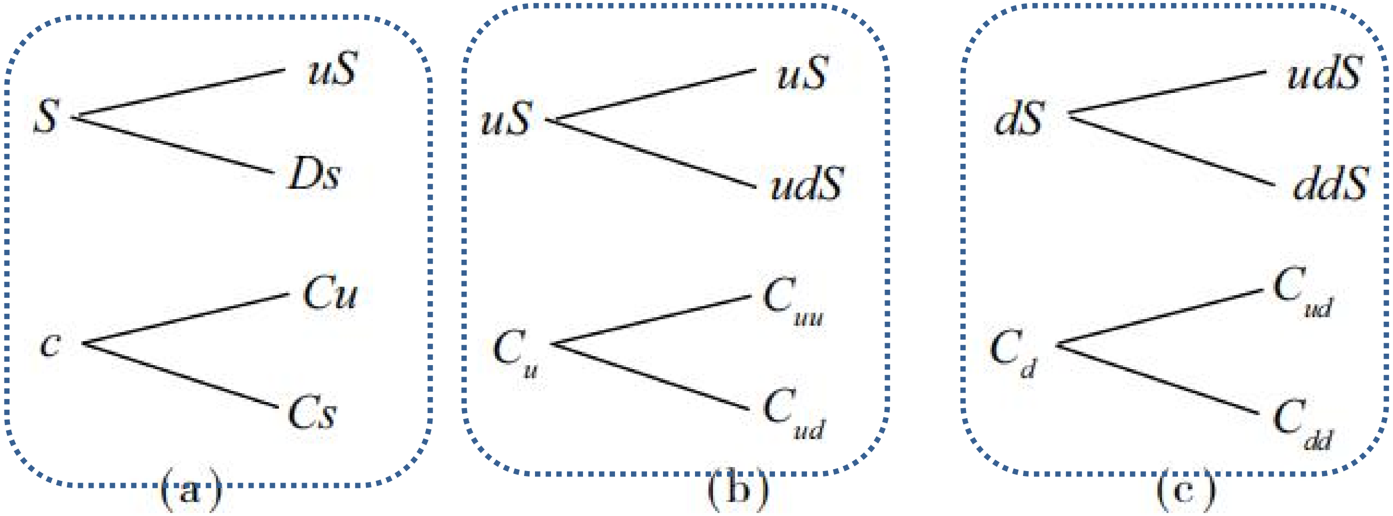


图 6-19　分解后的三个单期二叉树

◆期权定价公式

☞以先对(b)(c)定价，然后再对(a)定价，容易得到：

$$C_u = \frac{q_u C_{uu} + q_d C_{ud}}{1+0.5r_F}; \quad h_u = \frac{C_{uu} - C_{ud}}{u-d} \tag{6.27a}$$

$$C_d = \frac{q_u C_{ud} + q_d C_{dd}}{1+0.5r_F}; \quad h_d = \frac{C_{ud} - C_{dd}}{u-d} \tag{6.27b}$$

$$c = \frac{q_u C_u + q_d C_d}{1+0.5r_F}; \ h = \frac{C_u - C_d}{u-d} \tag{6.28}$$

将（6.27a）(6.27b)代入(6.28)得：

$$c = \frac{q_u^2 C_{uu} + 2q_u q_d C_{ud} + q_d^2 C_{dd}}{(1+0.5r_F)^2} \equiv \frac{E^Q[\tilde{C}_T]}{(1+0.5r_F)^2} \tag{6.30}$$

如果将 q_u 看作上涨的概率，等式 (6.30) 中第一个等式的分子的含义就是从 0 时到 T 时股票经过两次变化得到三种结果的概率与相应状态下看涨期权价格的乘积之和，因此其值为基于风险中性概率的期望值，由此有了第二个等式，它表明两期情形下风险中性定价依然成立。

（3）多期模型

◆两期模型的结果可以推广到 n(n>2)期情形：假设[0,T]期间股票经过了 n 次变化，最终有 n+1 种可能的结果，相应的定价公式为：

$$c=\frac{1}{(1+r_F/n)^n}\sum_{i=0}^{n}C_n^i q_u^i q_d^{n-i} C_{u^i d^{n-i}} \equiv \frac{E^Q[\tilde{C}_T]}{(1+r_F/n)^n} \qquad (6.31)$$

相应的证明见 Cox,Ross 和 Rubinstein(1979)的文章

第三节： 期权与市场完全化

- 在特定条件下可以通过构造期权使市场完全化，由此还能得出标的证券价格与期权价格之间的关系。

1、利用期权完全化市场

◆一类特殊的证券：

☞利用期权完全化市场需要具备一定的条件，即市场上存在状态分离（state separating）支付也称为状态指数化证券(state-index security)。

☞所谓**状态分离支付**是指一类特殊的证券，它在期末的任何两个不同状态下的支付互不相同，即：考虑有限状态情形下某证券的支付为 $X^T=(x_1,\ldots,x_\omega,\ldots,x_{\omega'},\ldots x_S)$

$\forall\omega,\omega'\in\Omega$ 若 $\omega\neq\omega'$ 则必有 $x_\omega\neq x_{\omega'}$，

则称该证券为**状态指数化证券**

◆基于状态指数化证券构造期权

☞为了论述的方便，我们不妨假设：

若 $\omega < \omega'$ 则必有 $x_\omega < x_{\omega'}$，这样我们有：

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_\omega \ldots < x_{\omega'} \ldots < x_S \tag{6.34}$$

☞利用该状态分离指数化证券来构造欧式看涨期权，从而使市场完全化，我们称该证券为 X：

（1）以 X 为标的，以 0 为执行价的欧式看涨期权；

（2）以 X 为标的，以 x_1 为执行价的欧式看涨期权；

（3）以 X 为标的，以 x_2 为执行价的欧式看涨期权；

。。。。。。

（S）以 X 为标的，以 x_{S-1} 为执行价的欧式看涨期权。

◆证明市场完全

我们构造了 S 个看涨期权，其中第一个实际上是标的资产本身，由这 S个期权形成的资本市场的市场结构为：

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & x_2 - x_1 & 0 & \dots & 0 \\ x_3 & x_3 - x_1 & x_3 - x_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_S & x_S - x_1 & x_S - x_2 & \dots & x_S - x_{S-1} \end{bmatrix}$$

显然，市场结构是满秩的，从而市场是完全的

示例：分析第二列（第二个基础证券）

第二列的支付为 $[\mathbf{0}, \mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}, \mathbf{x_3} - \mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_S} - \mathbf{x_1}]^{\mathbf{T}}$。

这表示一个**平移过的线性支付**，它通过买入**执行价为** x_1 **的看涨期权** $C(x_1)$ 构造：

$$\text{支付} = C(x_1) = \max(S_T - x_1, 0)$$

- 当 $S_T = x_1$ 时，支付是 $\max(x_1 - x_1, 0) = 0$。
- 当 $S_T = x_2$ 时，支付是 $\max(x_2 - x_1, 0) = x_2 - x_1$。
- 当 $S_T = x_i$ 时，支付是 $\max(x_i - x_1, 0) = x_i - x_1$。

2、 标的证券价格与期权价格

◆利用市场结构复制所有A-D证券

为简单起见，我们取 $x_i = i\delta$， δ 为常数，此时：

$$X^T = (\delta, 2\delta \ldots, \omega\delta \ldots, S\delta) \qquad (6.35)$$

市场结构简化为：

$$\begin{bmatrix} \delta & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 2\delta & \delta & 0 & \ldots & 0 \\ 3\delta & 2\delta & \delta & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S\delta & (S-1)\delta & (S-2)\delta & \ldots & \delta \end{bmatrix}$$

◆复制 A-D 证券：

进一步我们记：

$$Y \equiv (Y_0, Y_1, \ldots, Y_{S-1}) \equiv \begin{bmatrix} \delta & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 2\delta & \delta & 0 & \ldots & 0 \\ 3\delta & 2\delta & \delta & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S\delta & (S-1)\delta & (S-2)\delta & \ldots & \delta \end{bmatrix} \tag{6.36}$$

- 则有：

（1）状态 S 的纯证券（A-D 证券）可通过购买 1/δ 份的第 S 个期权来得到，它们之间的支付关系为：

$$1_S = \frac{1}{\delta} Y_{S-1} \qquad (6.37a)$$

（2）状态 S-1 的纯证券（A-D 证券）可通过购买 1/δ 份的第 S-1 个期权并出售 2/δ 份的第 S 个期权来得到，即：

$$1_{S-1} = \frac{1}{\delta}[Y_{S-2} - 2Y_{S-1}] \qquad (6.37b)$$

（3）状态 S-2 的纯证券（A-D 证券）可通过购买 1/δ 份的第 S-2 个和第 S 个期权并出售 2/δ 份的第 S-1 个期权来得到：

$$1_{s-2} = \frac{1}{\delta}[Y_{S-3} - 2Y_{S-2} + Y_{S-1}] \qquad (6.37c)$$

（4）状态ω的纯证券（A-D 证券）可通过购买 1/δ 份的第ω个和第$\omega+2$个期权并出售 2/δ 份的第$\omega+1$ 个期权来得到：

$$1_{\omega} = \frac{1}{\delta}[Y_{\omega-1} - 2Y_{\omega} + Y_{\omega+1}] \qquad (6.38)$$

◆一般情形下的状态价格

☞假设标的股票价格取值范围为 [0,M]

☞将取值范围离散化，即将[0,M]分成 n 等份使得 M=nδ，并假设股票在期末的价格可能取值为 0,δ,2δ,3δ,...,nδ，则该股票的期末支付向量为：

$$X^T = (\delta, 2\delta \ldots, \omega\delta \ldots, n\delta)$$

☞由期末收益的线性关系(6.38)可知，价格关系为：

$$\phi_i = \frac{1}{\delta}[c(K_{i-1}) - 2c(K_i) + c(K_{i+1})] \qquad (6.39)$$

☞极限情形：如果 c(.)关于 K 二阶可导

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\phi_i}{\delta}=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta^2}[c(K_{i-1})-2c(K_i)+c(K_{i+1})]$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta^2}[(c(K_{i-1})-c(K_i))-(c(K_i)-c(K_{i+1}))]$$

$$=\frac{\partial^2 c(K)}{\partial K^2}\Big|_{K=K_i}$$

☞回到资产定价公式：

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n} \phi_i X(K_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{[c(K_{i-1}) - 2c(K_i) + c(K_{i+1})]}{\delta^2} \cdot X(K_i) \cdot \delta \end{aligned} \qquad (6.40)$$

- ☞取极限得到两个重要的结果：

其中 $X(K_i)$表示状态 i 发生时股票的支付。当 n 趋于无穷大时得到连续情形下的股票价格：

$$S=\int_0^M \frac{\partial^2 c(K)}{\partial K^2} X(K) dK=\int_0^\infty \frac{\partial^2 c(K)}{\partial K^2} X(K) dK \qquad (6.41)$$

这个公式的金融意义是：**任何资产或未来的支付 $X(K)$ 的现值 S，都可以通过一系列不同执行价的看涨期权（即 $\frac{\partial^2 c(K)}{\partial K^2}$，代表蝶式价差）的组合来复制。** S 是这些蝶式价差的现值与其相应支付的乘积的积分。

$$\mathbf{S}=\int_0^\infty \underbrace{\frac{\partial^2 c(K)}{\partial K^2}}_{\text{复制 } X(K) \text{ 的权重}} \underbrace{X(K)}_{\text{未来支付}} dK$$

- X(K)=1 时为债券，则有：

$$B=\int_0^\infty \frac{\partial^2 c(K)}{\partial K^2} dK \qquad (6.42)$$