第十一章：完全市场中的资源配置与资产价格

武汉大学经济与管理学院

0、引言

- 前面介绍了完全市场的概念和特点，并给出了A-D框架下的资源配置和一般均衡。本讲我们将相关理论推广到一般的完全市场框架下。
- 所谓**资源配置**是指由禀赋到最终消费，即

  已知：$(e_{k0},\boldsymbol{e}_{k1})$, $\quad k=1,2,\ldots,K$

  目标：$(c_{k0},\boldsymbol{c}_{k1})$, $\quad k=1,2,\ldots,K$
- 所谓资产定价是指由市场供求关系确定证券的价格。

第一节：完全市场下经济人的决策问题

- 回顾：

- 市场完全时，rank(X)=S，若无冗余证券，则X为方阵，所有支付均为市场化的。
- 由资产定价第一定理，无套利条件下，存在正的状态价格向量$\phi >> 0$
- 特别地，可以复制A-D证券，求状态价格

$$\forall \omega \in \Omega, \ \exists \theta_\omega, s.t \ 1_\omega = X\theta_\omega$$

$$\phi_\omega = S^T X^{-1} 1_\omega$$

- 上式含义：原始证券市场（**S**, **X**）可以导出一个对应的、等价的A-D市场(ϕ, **X**$^{A\text{-}D}$)
- 原始证券市场的任意证券都可以表示成A-D证券的组合，其市场价格也等于状态价格的线性组合。
- 特别地，每个参与者的预算集变为

$$B(e_k) = \{c \geq 0 : c_0 + \sum_{\omega \in \Omega} \phi_\omega c_\omega = w_\omega\}$$

故，与A-D市场中一样，在一个完全市场中，参与者的预算集合只取决于他的财富（即禀赋在即期的市值），而**与禀赋在时间和状态上的具体分布无关。**

在完全市场下，可以卖掉今天的禀赋、买未来的；可以反过来。最终，他们面对的“可行消费集”都是相同的，因为市场允许他们把时间和状态的分布完全转换。

一 、完全市场下的投资机会与禀赋

- 基本框架：

  ☞ K个经济人，标之以 k, k=1,2,...,K；

  ☞两时点单期，期末有S个状态；

  ☞市场上有 N 个证券，原始市场可以描述为（**S**，**X**）；

$$S^T=(S_1,S_2,\ldots,S_N)$$

$$X=(X_1,X_2,\ldots,X_N)$$

  ☞经济人的禀赋：$\{(e_{k,0},e_{k,\omega}),\omega\in\Omega\}$，

  ☞ 经济人的资源配置：$\{(c_{k,0},c_{k,\omega}),\omega\in\Omega,k=1,2,\ldots,K\}$

1、经济人的禀赋：

◆我们在书本上列举了三种禀赋：各时点各状态下的实物禀赋、期初的实物禀赋加证券禀赋、各时点各状态的实物禀赋加证券禀赋，目的是试图说明各种禀赋形式在本质上没有什么差别，可以折合为实物禀赋，因此我们只考虑第一种情形。

◆假设：经济人 $k(k=1,2,\ldots,K)$ 的实物禀赋表示为 $\{(e_{k,0}, e_{k,\omega}), \omega \in \Omega\}$，

$$e_k = (e_{k,0}, e_{k,1})$$

此时经济的总禀赋（$e_0;e_1$）满足：

$$e_0 = \sum_{k=1}^{K} e_{k,0}; e_\omega = \sum_{k=1}^{K} e_{k,\omega}, \omega \in \Omega \qquad (11.1)$$

2、完全市场下的投资机会

◆市场上有 N个证券，原始市场为 ($\mathbf{S}$, $\mathbf{X}$)，其中：

$$\mathbf{S}^T=(S_1, S_2,\ldots, S_N)$$

$$\mathbf{X}=(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2,\ldots, \mathbf{X}_N)$$

N 个证券形成 N 个投资机会，经济人可以利用这 N 个投资机会对其资源进行重新配置，从而达到其效用极大化。

◆在完全市场下，市场结构 X 的秩等于状态数 S，即：

$$\text{rank}(X)=S$$

任何有限的可行消费计划都可以通过适当配置资源而得到，因此任何有意义的最优解都是可行解，因此我们无需考虑如何通过市场实现最优消费计划，只需要确定什么是最优的消费计划。

二、经济人的决策问题

- 经济人依据其自身的禀赋，结合投资机会作出相应的决策。
- 两时点单期且期末状态有限（S 种状态）情形下的资源配置描述为：

$$\{(c_{k,0}, c_{k,\omega}), \omega \in \Omega, k = 1, 2, \ldots, K\}$$

- 在拥有实物禀赋$\{(e_{k,0}, e_{k,\omega}), \omega \in \Omega\}$的经济人 k 的预算约束为：

$$\begin{cases} c_{k,0} = e_{k,0} - \sum_{i=1}^{N} \theta_{k,i} S_i \\ c_{k,\omega} = e_{k,\omega} + \sum_{i=1}^{N} \theta_{k,i} X_i \end{cases} \tag{11.4}$$

（X，S）框架下经济人的决策问题：

$$
\begin{aligned}
&\max_{\theta_{k,i}} u_{k,0}(c_{k,0}) + \sum_{\omega\in\Omega} \pi_\omega u_k(c_{k,\omega}) \\
&s.t \quad c_{k,0} = e_{k,0} - \sum_{i=1}^{N} \theta_{k,i} S_i \\
&\qquad\;\; c_{k,\omega} = e_{k,\omega} + \sum_{i=1}^{N} \theta_{k,i} X_i \\
&\qquad\;\; c_{k,0} \ge 0, c_{k,\omega} \ge 0
\end{aligned}
\qquad (11.P1)
$$

在（$X^{A\text{-}D}$,ϕ）框架下可以将上述的决策问题简化为：

$$\max_{c_{k,0},c_{k,\omega}} u_{k,0}(c_{k,0})+\sum_{\omega\in\Omega}\pi_{\omega}u_{k}(c_{k,\omega})$$

$$s.t\quad c_{k,0}+\sum_{i=1}^{N}c_{k,\omega}\phi_{\omega}=w_{k} \qquad (11.P3)$$

$$c_{k,0}\geq 0,c_{k,\omega}\geq 0$$

三、单个经济人最优决策的若干性质

- 假定经济人的效用函数满足 Inada 条件，从而经济人的决策问题的最优解为内点解，可以忽略非负约束条件。依据等式约束极值问题的处理方法求解问题（11.P3），令 k 的拉格朗日（简称拉氏）函数为 L_k，拉氏乘数为λ_k，则：

$$L_k = [u_{k,0}(c_{k,0}) + \sum_{\omega\in\Omega} \pi_\omega u_k(c_{k,\omega})] + \lambda_k [w_k - c_{k,0} - \sum_{i=1}^{N} c_{k,\omega}\phi_\omega] \tag{11.11}$$

F.O.C：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_k}{\partial c_{k,0}} = 0 \\ \dfrac{\partial L_k}{\partial c_{k,\omega}} = 0, \quad \omega = 1,2,\ldots,S \\ \dfrac{\partial L_k}{\partial \lambda_k} = 0 \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
u'_{k,0}(c_{k,0}) = \lambda_k \\
\pi_\omega u'_k(c_{k,\omega}) = \lambda_k \phi_\omega, \quad \omega = 1,2,\ldots,S \\
c_{k,0} + \sum_{\omega\in\Omega} c_{k,\omega}\phi_\omega = w_k
\end{cases}
\tag{11.12}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\pi_\omega u'_k(c_{k,\omega})}{u'_{k,0}(c_{k,0})} = \phi_\omega \\
\dfrac{\pi_\omega u'_k(c_{k,\omega})}{\pi_{\omega'} u'_k(c_{k,\omega'})} = \dfrac{\phi_\omega}{\phi_{\omega'}}, \quad \omega, \omega' \in \Omega
\end{cases}
\tag{11.13}
$$

- 并有：$\begin{cases} c_{k,0} = u'^{-1}_{k,0}(\lambda_k) \\ c_{k,1\omega} = u'^{-1}_{k,\omega}(\lambda_k \phi_\omega / \pi_\omega) \end{cases}$

其中λ_k 由预算约束确定：

$$c_{k,0} + \sum_{\omega\in\Omega} \phi_\omega c_{k,1\omega} = u'^{-1}_{k,0}(\lambda_k) + \sum_{\omega\in\Omega} \phi_\omega u'^{-1}_{k,\omega}(\lambda_k \phi_\omega / \pi_\omega) = w_k \tag{11.15}$$

理论上由（11.15）可以解出福利权重λ_k 。

定理:11.1：若经济人的效用函数满足严格递增和严格凹，即$u'(.)>0, u''(.)<0$，则消费决策为最优的充要条件为：

（1）每个经济人的跨期边际替代率都由特定状态的状态价格确定，即期末任意状态ω下的边际效用与期初的边际效用之比等于ω状态对应的状态价格；

（2）期末跨状态边际替代率均由两特定状态下的状态价格确定。即期末任意两状态ω与ω'下的边际效用之比都等于两状态的状态价格之比。

$$\begin{cases} \dfrac{\pi_{\omega} u_k'(c_{k,\omega})}{u_{k,0}'(c_{k,0})} = \phi_{\omega} \\ \dfrac{\pi_{\omega} u_k'(c_{k,\omega})}{\pi_{\omega'} u_k'(c_{k,\omega'})} = \dfrac{\phi_{\omega}}{\phi_{\omega'}}, \quad \omega, \omega' \in \Omega \end{cases} \tag{11.13}$$

- 由一阶条件（11.12）可以得到如下有趣的性质定理：

定理 11.2：完全市场下若所有参与者都具有状态独立、跨时可加的期望效用函数，并且效用函数严格单调、凹，则对任意的经济人 k，其最优消费决策必定满足：

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega \text{，} \quad c_{k,\omega} > c_{k,\omega'} \text{ 当且仅当 } \frac{\phi_{\omega}}{\pi_{\omega}} < \frac{\phi_{\omega'}}{\pi_{\omega'}} \text{。}$$

- 含义：对任何经济人，他（她）在任何状态下的最优消费水平取决于相应状态的“价格”，“价格”越高消费越少；“价格”越低消费越多。

- 这里的“价格”不是单纯的状态价格，而是经概率调整后的价格 ϕ_ω/π_ω ，即单位概率的状态价格，通常被称为状态价格密度（state price density）,也称为随机贴现因子（discount factor）或资产定价的核（asset pricing kernel）。请注意，我们在前面近似地将φ理解为“随机贴现因子”，本质上 ϕ_ω/π_ω 才是真正的随机贴现因素，记为 M_ω，它是一个非常重要的概念。

四、自由竞争经济下的均衡

- 一般均衡方法是传统的资产定价方法之一，即由自由竞争来确定各资产的价格。
- 该方法遵循两个核心的步骤或条件：
  - ◆ 一是经济人各自优化；
  - ◆二是市场出清。

- 1、各自优化

◆为简化问题我们依然假设 Inada 条件成立，在此假设下最优解为内点解。

◆前面给出了优化问题的几种形式，包括问题（11.P1）、问题（11.P2）和（11.P3),三种问题有类似的处理方法，有类似的一阶条件，并且由一阶条件可以解得最优解：

$$\theta_{k,i}^{*} = \theta_{k,i}^{*}(S, e_k, \bar{\theta}_k) \quad （11.17）$$

◆将（11.17）代入预算约束可以得到最优消费选择：

$$\begin{cases} c_{k,0}^{*} = c_{k,0}^{*}(S, e_k, \overline{\theta}_k) \\ c_{k,1}^{*} = c_{k,1}^{*}(S, e_k, \overline{\theta}_k) \end{cases} \quad (11.18)$$

- 2、市场出清

◆市场出清可以分为两个不同的市场，一是证券市场出清；二是消费品市场出清。

☛证券市场出清是指经济人对各证券的总需求等于各证券的总供给；

☛消费品市场出清是指各时点个状态下的总消费等于相应时点——状态下的总禀赋。

◆容易证明：上述两市场之一出清必导致另一市场出清，因此我们经常只考虑消费品市场的市场出清。

- 3、均衡定价

◆经济人各自优化是在假定价格外生给定的条件下进行的，即各经济人假定N 个证券的价格 S_i(i=1,2,...,N)是已知的，在此条件下解得最优消费需求；而市场出清得到 S+1 个方程组成的方程组，解方程组得到均衡价格。

◆在实际的求解中可能并不遵从上述步骤，比如在各自优化中直接求解最优消费，在没有特别要求的情形下无需求解作为“过渡变量的”最优组合$\boldsymbol{\theta}$，更多的时候直接转化为 A-D 框架求解状态价格，然后再推导出均衡价格。

- 为了直观，先看一个例子，例11.1

例 11.1：考虑期末有两种状态的单期问题，两状态分别为 g 和 b 且等概率发生。市场上有两个证券：债券和股票。债券在两状态下支付均为 1；股票在 g 和 b 状态下的支付分别为 4 和 1。两证券的价格分别为 B 和 S。经济中有两个经济人：分别为经济人 1 和经济人 2 ，经济人 1 的禀赋为 100 单位的期初消费品，经济人 2 的禀赋为 50 股股票。两经济人均具有 CRRA 偏好，经济人 1 的相对风险厌恶系数为 1；经济人 2 的相对风险厌恶系数为 0.5，他们的时间偏好都为 1。求解该经济的最优资源配置和均衡价格。

的市场结构为:

$$X=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

因此市场是完全的, 由此可以考虑在 A-D 框架下先求状态价格 ϕ_g,ϕ_b, 再求均衡 解。考虑到两个经济人具有不同的偏好, 我们分别求解各自的优化问题。 经济人 1 具有对数效用函数, 其优化问题为:

$$\max \ln c_{1,0}+\frac{1}{2}(\ln c_{1,g}+\ln c_{1,b})$$

$$\text{s.t. } c_{1,0}+c_{1,g}\phi_g+c_{1,b}\phi_b=w_1$$

令 $L_1=\ln c_{1,0}+\frac{1}{2}(\ln c_{1,g}+\ln c_{1,b})+\theta_1[w_1-c_{1,0}-c_{1,g}\phi_g-c_{1,b}\phi_b]$ 一阶条件为:

$$\begin{cases}\frac{\partial L_1}{\partial c_{1,0}}=0\\ \frac{\partial L_1}{\partial c_{1,g}}=0\\ \frac{\partial L_1}{\partial c_{1,b}}=0\end{cases}\text{化简得}\begin{cases}c_{1,0}=\frac{1}{\theta_1}\\ c_{1,g}=\frac{1}{2\theta_1\phi_g}\\ c_{1,b}=\frac{1}{2\theta_1\phi_b}\end{cases}$$

由经济人 1 的禀赋可知: $w_1=e_{1,0}+e_{1,g}\phi_g+e_{1,b}\phi_b=1+0\times\phi_g+0\times\phi_b=100$, 而且:

$$w_1=c_{1,0}+c_{1,g}\phi_g+c_{1,b}\phi_b=\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{2\theta_1\phi_g}\times\phi_g+\frac{1}{2\theta_1\phi_b}\times\phi_b=\frac{2}{\theta_1}\qquad(11.23)$$

经济人 2 的效用函数为 $u(z)=2\sqrt{z}$, 其优化问题为:

$$\max 2\sqrt{c_{2,0}} + \frac{1}{2}(2\sqrt{c_{2,g}} + 2\sqrt{c_{2,b}})$$

$$\text{s.t. } c_{2,0} + c_{2,g}\phi_g + c_{2,b}\phi_b = w_2$$

今 $L_2 = 2\sqrt{c_{2,0}} + (\sqrt{c_{2,g}} + \sqrt{c_{2,b}}) + \theta_2[w_2 - c_{2,0} - c_{2,g}\phi_g - c_{2,b}\phi_b]$ 一阶条件为:

$$\begin{cases} \frac{\partial L_2}{\partial c_{2,0}} = 0 \\ \frac{\partial L_2}{\partial c_{2,g}} = 0 \\ \frac{\partial L_2}{\partial c_{2,b}} = 0 \end{cases} \text{化简得} \begin{cases} c_{2,0} = \frac{1}{\theta_2^2} \\ c_{2,g} = \frac{1}{4(\theta_2\phi_g)^2} \\ c_{2,b} = \frac{1}{4(\theta_2\phi_b)^2} \end{cases}$$

由经济人 1 的特殊性可以大大简化运算, 直接由市场出清得到下列方程组:

$$\begin{cases} c_{1,0} + c_{2,0} = 100 \\ c_{1,g} + c_{2,g} = 200 \\ c_{1,b} + c_{2,b} = 50 \end{cases} \text{即} \begin{cases} \frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2^2} = 100 \\ \frac{1}{2\theta_1\phi_g} + \frac{1}{4(\theta_2\phi_g)^2} = 200 \\ \frac{1}{2\theta_1\phi_b} + \frac{1}{4(\theta_2\phi_b)^2} = 50 \end{cases}$$

由 (11.23) 得: $\theta_1 = 1/50$ 故, $\theta_2^2 = 1/50$, 代入上式得状态价格:

$$\begin{cases} \phi_g = (1+\sqrt{17})/16 \\ \phi_b = (1+\sqrt{5})/4 \end{cases}$$

进一步求得相应的最优消费和均衡价格:

$$\begin{cases} c_{1,0} = 50 \\ c_{1,g} = 25(\sqrt{17}-1) \\ c_{1,b} = 25(\sqrt{5}-1) \end{cases} \begin{cases} c_{2,0} = 50 \\ c_{2,g} = 25(9-\sqrt{17}) \\ c_{2,b} = 25(3-\sqrt{5}) \end{cases} \begin{cases} B = (5+4\sqrt{5}+\sqrt{17})/16 \\ S = (2+\sqrt{17}+\sqrt{5})/4 \end{cases}$$

◆值得说明的是，本例题中经济人的特殊性使求解大大简化，其特殊性在于经济人 1 的禀赋呈现“只有今天没有明天”，经济人 2“只有明天没有今天”，他们唯有相互交换才能提高各自的“福利”。（这体现了我们之前学的什么？）

◆一般情形下的结果比较复杂，比如异质偏好下不一定有显示解，王江（Wang，1996）给出了一类异质偏好下显示解存在的充要条件，从一个角度证明了异质情形下显示解确定的困难。

第二节 完全市场下的最优资源配置与风险分担

◆上一节从单个人的角度讨论了自由竞争条件下投资者的最优选择问题，同时给出了一般均衡的分析框架，依据该框架可以确定市场价格，该价格称为一般均衡价格。

◆本节从**整个经济系统的视角**研究各投资者在市场约束下最终能够获得的最优消费水平，最优消费水平也意味着最终对整个经济系统资源的占用，我们称为资源配置

一、最优资源配置

- 首先依然是基本框架：

☞考虑两时点单期情形下的纯交换经济，整个经济系统中只有一个易腐的消费品。

☞期初的消费品作为**法币**

☞K 个经济人，他们在 0 时点对当期的消费和投资做出选择。通过选择对每种 A-D 证券的投资数量来确定期末个状态下的消费水平。

☞个人效用函数满足严格单调和严格凹性，效用函数二次可微

几个重要概念

- 几个概念：

☞**可行配置**：称配置$\{(c_{i0},c_{i\omega},\omega\in\Omega);i=1,2,\ldots,S\}$是可行的，若它满足：

$$\sum_{k=1}^{K} c_{k,0} = \sum_{k=1}^{K} e_{k,0} = C_0 \tag{11.24}$$

$$\sum_{k=1}^{K} c_{k,\omega} = \sum_{k=1}^{K} e_{k,\omega} = C_\omega \quad \omega \in \Omega \tag{11.25}$$

☞**Pareto最优配置**或**Pareto有效配置**：称可行配置 $\{(c_{i0}, c_{i\omega}, \omega\in\Omega); i=1,2,\ldots,S\}$ 是Pareto最优配置或Pareto有效配置，如果不存在其他可行配置，使至少一个参与者的效用严格增加，而其他参与者效用没有降低。

- 表示为定义：

定义 11.1：满足下列两个条件的配置称为是 **Pareto 最优**的或 **Pareto 有效**的：

（1）配置是可行的；

（2）不存在其他可行配置，使得至少有一个经济人的效用严格增加而其他经济人的效用没有任何减少。

- Pareto 最优作为整体经济系统资源配置有效性的衡量标准，考虑了每个经济人的福利，但是该标准似乎太过于定性，无法用量化方法来进行处理。但下面的定理给出了数学处理方法：

定理 11.3：每个 Pareto 最优配置，都存在一个非负的数量集 $\{\lambda_i\}_{i=1}^{K}$，使得相同的配置可以由下列中央计划者 的优化问题得到：

$$
\begin{aligned}
&\max_{\{c_{k,0},c_{k,\omega}\}} \sum_{k=1}^{K} \lambda_k \Big[\sum_{\omega\in\Omega} \pi_{k,\omega} u_{k,\omega}(c_{k,0}, c_{k,\omega})\Big] \\
&s.t \quad \sum_{k=1}^{K} c_{k,0} = \sum_{k=1}^{K} e_{k,0} \equiv C_0 \qquad\qquad (11.\mathrm{P5}) \\
&\qquad \sum_{k=1}^{K} c_{k,\omega} = \sum_{k=1}^{K} e_{k,\omega} \equiv C_\omega \quad \omega\in\Omega
\end{aligned}
$$

☞目标函数中选择了最一般的效用函数说明想在最一般情形下都是成立的，包括经济人k的对期末状态发生概率的“看法”π可以互不相同，π称为对状态的“概率信念”或“信念”(beliefs)。角标 k 表明不同经济人可以具有不同的概率信念，即异质信念（heterogeneous beliefs）。

☞若对任意的经济人k都有相同的信念，则称为同质信念（homogeneous beliefs）。同质信念下一般认为所有经济人的概率信念都等于真实的概率。

☞此外我们在效用函数符号下加角标表示经济人i在状态ω下的效用函数，因此效用函数是状态依赖的。

◆为了更好地理解，我们改写该问题：

$$\max_{\{c_{k,0},c_{k,\omega}\}} \sum_{i=1}^{K} \lambda_k U_k$$

$$s.t \quad \sum_{k=1}^{K} c_{k,0} = \sum_{k=1}^{K} e_{k,0} \equiv C_0 \qquad \text{（11.P6）}$$

$$\sum_{k=1}^{K} c_{k,\omega} = \sum_{k=1}^{K} e_{k,\omega} \equiv C_\omega \quad \omega \in \Omega$$

◆由此可见，目标函数是 K 个经济人效用的加权平均，λ_k是各经济人的福利权重，而且它们取值是非负的

- ◆问题的处理：

$$L=\sum_{k=1}^{K}\lambda_k U_k+\phi_0'[C_0-\sum_{k=1}^{K}c_{k,0}]+\sum_{\omega\in\Omega}\phi_\omega'[C_\omega-\sum_{k=1}^{K}c_{k,\omega}]$$

F.O.C:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial c_{k,0}}=0,\ \ k=1,2,\ldots,K\\ \dfrac{\partial L}{\partial c_{k,\omega}}=0,\ \ k=1,2,\ldots,K;\omega\in\Omega\\ \dfrac{\partial L}{\partial \phi_0'}=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial \phi_\omega'}=0,\ \ \omega\in\Omega\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lambda_k\sum_{\omega\in\Omega}\pi_\omega\frac{\partial u_k(c_{k,0},c_{k,\omega})}{\partial c_{k,0}}=\phi_0', \quad k=1,2,\ldots,K\\ \lambda_k\pi_\omega\frac{\partial u_k(c_{k,0},c_{k,\omega})}{\partial c_{k,\omega}}=\phi_\omega', \quad k=1,2,\ldots,K; \quad \omega\in\Omega\\ \sum_{k=1}^{K}c_{k,0}=C_0\\ \sum_{i=1}^{K}c_{i,\omega}=C_\omega, \quad \omega\in\Omega\end{cases} \tag{11.28}$$

◆化简为：

$$\frac{\pi_{k,\omega}\dfrac{\partial u_{k,\omega}(c_{k,0},c_{k,\omega})}{\partial c_{k,\omega}}}{\sum_{\omega\in\Omega}\pi_{k,\omega}\dfrac{\partial u_{k,\omega}(c_{k,0},c_{k,\omega})}{\partial c_{k,0}}}=\frac{\phi'_{\omega}}{\phi'_{0}},\quad \omega\in\Omega,k=1,2,\dots,K \qquad (11.29)$$

◆概括为命题：

定理 11.4：若所有经济人都有严格单调递增、严格凹的效用函数，而且每个经济人都有非零的禀赋（所有经济人的福利权重大于零），此时资源配置为 Pareto 最优的充分必要条件是所有经济人有相同的跨时边际替代率，即它们满足方程（11.29）。

◆再看充要条件：

$$\frac{\pi_{i\omega}\dfrac{\partial u_{i\omega}(c_{i0},c_{i\omega})}{\partial c_{i\omega}}}{\sum_{\omega\in\Omega}\pi_{i\omega}\dfrac{\partial u_{i\omega}(c_{i0},c_{i\omega})}{\partial c_{i0}}}=\frac{\phi'_{\omega}}{\phi'_{0}}\qquad \forall\omega\in\Omega, i=1,\dots,I$$

☛含义：可行配置是Pareto最优的，当且仅当当前消费和未来状态消费的边际替代率相等

◆定理表明，方程（11.29）可以作为判断配置是否是 Pareto 最优的充分必要条件，利用这一结论我们可以得到A-D框架下的福利经济学第一定理。

定理11.5：在（ϕ，$X^{A\text{-}D}$）框架下，自由竞争均衡是 Pareto 最优的。换言之，Pareto 最优可以在自由竞争经济下达到。

☞证明见课本（略）

◆定理 11.5 将自由竞争均衡与中央计划者问题相联系。该定理的本质是福利经济学第一定理。福利经济学定理：

福利经济学第一定理：完全市场下，自由竞争均衡是 Pareto 最优的；

福利经济学第二定理：完全市场下，任何一个 Pareto 最优都可以在自由竞争均衡中达到。

特殊情形：特殊效用函数

- 状态独立，时间可加时：

$$\max_{\{(c_{i0},c_{i\omega})_{i=1}^{I},\omega\in\Omega)\}} \sum_{i=1}^{I} \lambda_i [u_{i,0}(c_{i0}) + \sum_{\omega\in\Omega} \pi_{i\omega} u_{i,1}(c_{i\omega})]$$

$$s.t \quad \sum_{i=1}^{I} c_{i0} = C_0$$

$$\sum_{i=1}^{I} c_{i\omega} = C_\omega, \quad \forall \omega \in \Omega$$

- 此时的一阶条件为：

$$\begin{cases} \lambda_i u_{i0}'(c_{i0}) = \phi_0', \ \forall i \\ \lambda_i \pi_\omega u_{i\omega}'(c_{i\omega}) = \phi_\omega', \ \forall \omega, i \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\pi_\omega u_{i0}'(c_{i\omega})}{u_{i0}'(c_{i0})} = \frac{\phi_\omega'}{\phi_0'}, \quad \forall \omega, i$$

完全市场的最优配置

- **定理11.5**：如果市场是完全的，则Pareto最优可以在自由竞争经济中达到。
- 考虑A-D经济：

$$\max_{\{(c_{i0},c_{i\omega},\omega\in\Omega)\}} \sum_{\omega=1}^{S} \pi_{i\omega} u_{i\omega}(c_{i0}, c_{i\omega})$$

$$s.t \quad c_{i0} + \sum_{\omega=1}^{S} \phi_{\omega} c_{i\omega} = e_{i0} + \sum_{\omega=1}^{S} \phi_{\omega} e_{i\omega}$$

$$\Downarrow$$

$$\max L = \sum_{\omega=1}^{S} \pi_{i\omega} u_{i\omega}(c_{i0}, c_{i\omega}) + \theta_i [(e_{i0} - c_{i0} + \sum_{\omega=1}^{S} \phi_{\omega}(e_{i\omega} - c_{i\omega})]$$

完全市场的最优配置（续）

- F.O.C:

$$\begin{cases} \sum_{\omega\in\Omega} \pi_{i\omega} \dfrac{\partial u_{i\omega}(c_{i0}, c_{i\omega})}{\partial c_{i0}} = \theta_i \\ \pi_{i\omega} \dfrac{\partial u_{i\omega}(c_{i0}, c_{i\omega})}{\partial c_{i\omega}} = \theta_i \phi_\omega \quad \forall \omega \in \Omega \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\pi_{i\omega}\partial u_{i\omega}(c_{i0}, c_{i\omega}) / \partial c_{i\omega}}{\sum_{\omega\in\Omega} \pi_{i\omega}\partial u_{i\omega}(c_{i0}, c_{i\omega}) / \partial c_{i0}} = \phi_\omega \qquad \forall \omega \in \Omega, i = 1, \ldots, I$$

☞取$\phi_0' = 1, \lambda_i = 1/\theta_i$，则$\phi_\omega' = \phi_\omega$，从而满足配置为Pareto最优的充要条件。

☞含义：完全市场下，A-D框架下，自由竞争配置使前面的中央计划者的一阶条件成立，从而是Pareto最优的；反正，自由竞争配置下达到Pareto最优，则中央计划者的权重为

$$\lambda_i = \frac{1}{\theta_i} > 0$$

为什么？互补性松弛

- 简单地小结：

  问题的提出——什么是资源配置

  优化的标准——Pareto最优

  处理方法——化为A-D框架下的自由竞争

  两个重要的定理——福利经济学一二定理

  定价的抽象结论——状态价格密度

二、风险分担——资源配置模式（选讲）

- 前面讨论了非常一般的情形。可以包括：

☞Heterogeneous beliefs

☞State-dependent and non-time-additive utility function

下面讨论一定特殊情形：

☞Homogeneous beliefs

☞State-independent and time-additive utility function

1、风险分担规则

- 固定Pareto最优：

☞——0时消费 $\{c_{i0}, i=1,2,\ldots,I\}$

☞—— 1时消费 $\{c_{i\omega}, \omega\in\Omega, i=1,2,\ldots,I\}$

☞——权重 λ_i, $i=1,2,\ldots,I$

- 由于选择状态独立、时间可加的效用函数，一阶条件变为：

$$\begin{cases} \lambda_i u'_{i0}(c_{i0}) = \phi'_0, \ i=1,2,\ldots,I \\ \lambda_i \pi_\omega u'_i(c_{i\omega}) = \phi'_\omega, \ \forall\,\omega, i \end{cases}$$

- 同质信念下（概率相同），必有：

$$\begin{cases} \lambda_i u'_{i0}(c_{i0}) = \lambda_k u'_{k0}(c_{k0}), \ \forall i,k \\ \lambda_i u'_i(c_{i\omega}) = \lambda_k u'_k(c_{k\omega}), \ \forall i,k \end{cases}$$

- **定理11.6**：若ω和ω' 使 $C_\omega > C_{\omega'}$ 则必有：

$$c_{i\omega} > c_{i\omega'}, \quad \forall i$$

- 即对所有经济人，他们在总禀赋高的状态下的最优消费水平都比总禀赋低的状态下的消费水平高。或者说每个人都最优消费水平关于该时点该状态的总禀赋单调递增。

- 定理 11.6 表明，对任何经济人，他在期末的最优消费水平关于相应状态的总禀赋单调递增，从而个人消费水平与总禀赋之间存在一一对应关系，一一对应关系可以用函数来描述，即对任何经济人 k，都存在一个特定的函数 $f(.)$ 满足：

$$\tilde{c}_k = f_k(\tilde{C}) \qquad (11.33)$$

$f_i(.)$严格递增，类似地存在$f_{i0}(.)$使得：

$$\tilde{c}_{k0} = f_{k0}(\tilde{C}_0) \qquad (11.34)$$

☛ $f_k(.)$的存在说明配置下具有如下特征：**总消费相同的状态下，其配置也相同；**

☛ $f_k(.)$，$f_{k0}(.)$描述资源在不同人之间的最优配置，称为 Pareto 最优分担规则(Pareto optimal sharing rules)

- 说明：
- Pareto optimal sharing rules翻译为Pareto 最优分担规则，有时又翻译为“分享”规则，是同一个含义。

2、线性分担规则

- 满足如下条件的最优分享规则称为线性分享规则：

$$c_i = f_i(\tilde{C}) = a_i + b_i\tilde{C} \quad \forall i$$

- **定理11.7**：当且仅当参与者具有的效用函数满足如下条件时，其最优分享规则为线性的

$$-\frac{u_i'(z)}{u_i''(z)} = A_i + Bz$$

- 说明：

☞ $-\frac{u_i'(z)}{u_i''(z)} \equiv T_i(z) = \frac{1}{A_i(z)}$ ——风险容忍系数

☞$T_k{}'(z) \equiv CA_k(f(z))$ —— 谨慎系数（cautiousness）

引理：

定理 11.8：对于给定的 Pareto 最优配置以及其相应地 k 的分享规则为 f_k，则有：

1）经济人 k 的分享规则函数关于总禀赋的瞬时变化率由其绝对风险容忍决定，等于 k 的风险容忍与所有人风险容忍之和（后面证明代表性经济人的风险容忍等于所有经济人风险容忍之和）之比，即：

$$f_k{}'(z) = \frac{T_k(f_k(z))}{\sum_{i=1}^{K} T_i(f_i(z))} \tag{11.37}$$

2）当且仅当所有人都具有线性分享规则时，所有人的谨慎系数相等，即：

$$CA_i(f_i(z)) = CA_k(f_k(z)) \tag{11.38}$$

- 证明过程见书，下面给出简单过程

➪上述效用函数，B=0时，$u_i(z)=\rho_i\exp\{-z/A_i\}$

$$\tilde{c}_i=\boxed{A_i\ln(\lambda_i\rho_i)-\frac{A_i\sum_{k=1}^{I}A_k\ln(\lambda_k\rho_k)}{\sum_{k=1}^{I}A_k}}+\boxed{\frac{A_i}{\sum_{k=1}^{I}A_k}}\tilde{C}$$

B≠0时 $u_i(z)=\rho_i(A_i+Bz)^{-\frac{1}{B}}$

$$\tilde{c}_i=\boxed{\frac{B}{B(\lambda_i\rho_i)^{-B}\sum_{k=1}^{I}(\lambda_k\rho_k)^{B}}}\tilde{C}+\boxed{\frac{A_i\sum_{k=1}^{I}A_k}{B(\lambda_i\rho_i)^{-B}\sum_{k=1}^{I}(\lambda_k\rho_k)^{B}}-\frac{A_i}{B}}$$

- 再小结：

  特殊效用函数可以得到更多的信息：

  资源配置结果可用函数表示——风险分担规则；

  特殊情形下的线性分担规则：

定理 11.7'： Pareto 最优分享规则是线性分享规则的充要条件是所有经济人的效用函数满足下列微分方程：

$$-\frac{u_k'(z)}{u_k''(z)} = A_k + Bz \qquad (11.36)$$

第三节 代表性经济人

- 当市场上有两个或两个以上的经济人参与交换等经济活动时，整个经济系统的资源配置问题可以沿着两种不同的方式进行分析：
  - ◆一是在自由竞争框架下分析一般均衡结果；
  - ◆二是考察中央计划者的最优资源配置问题

问题：中央计划者的问题究竟是一个什么样的问题？我们希望通过在特殊情形下对“中央计划者”进行分析了解。

一、代表性经济人

- 代表性经济人最早是在纯交换经济下定义的，纯交换经济假定经济中所有的产品是容易腐烂的，经济中的禀赋以这些产品而出现。
- 在 Lucas（1979）的文献中，纯交换经济模型被称为“树模型”，Lucas 将经济中的公司比作为树，公司的产出比作树结的果子，可以理解为“苹果”，这些果子可以用于消费，但不能留到下一期，因为期初的果子到了期末会全部乱掉。

- 不同的经济人可能有不同的禀赋，他们只能通过彼此交换来改变各自在不同时点所能获得的消费品“果子”数量，但经济系统的总禀赋既不能跨时转移也不能跨状态转移

- 回到中央计划者问题（11.P8），在状态独立、跨时可加的偏好和同质信念下假设下，该问题可以化简为：

$$\max_{\{c_{i0}, c_{i\omega}\}} \sum_{k=1}^{K} \lambda_k u_{k,0}(c_{k,0}) + \sum_{k=1}^{K} \sum_{\omega \in \Omega} \lambda_k \pi_{\omega} u_k(c_{k,\omega})$$

$$s.t \quad \sum_{k=1}^{K} c_{k,0} = \sum_{k=1}^{K} e_{k,0} \equiv C_0 \qquad \text{（11.P8）}$$

$$\sum_{k=1}^{K} c_{k,\omega} = \sum_{k=1}^{K} e_{k,\omega} \equiv C_{\omega} \quad \omega \in \Omega$$

- 目标函数可以进一步简化为：

$$\sum_{k=1}^{K}\lambda_k u_{k,0}(c_{k,0})+\sum_{\omega\in\Omega}\pi_\omega[\sum_{k=1}^{K}\lambda_k u_k(c_{k,\omega})]$$

- 问题最后归结为：

$$\max_{\{c_{i0},c_{i\omega}\}}\sum_{k=1}^{K}\lambda_k u_{k,0}(c_{k,0})+\sum_{\omega\in\Omega}\pi_\omega[\sum_{k=1}^{K}\lambda_k u_k(c_{k,\omega})]$$

$$s.t\quad \sum_{k=1}^{K}c_{k,0}=\sum_{k=1}^{K}e_{k,0}\equiv C_0 \qquad (11.P9)$$

$$\sum_{k=1}^{K}c_{k,\omega}=\sum_{k=1}^{K}e_{k,\omega}\equiv C_\omega \quad \omega\in\Omega$$

- 由于总禀赋不能跨时转移，因此资源在期初的配置方式不影响期末的最优解，即期初的消费水平的取值只影响（11.P9）中目标函数第一项的最终取值，不影响第二项的取值；同理，期末ω状态下的资源配置方式不影响其他时点、其他状态的最优解，即ω状态下的消费水平的取值只影响ω状态下的效用值，因此问题（11.P9）等价于下列 S+1 个优化问题：

- S+1个优化问题：

$$u_0(C_0) \equiv \max_{\{c_{k,0}\}} \sum_{k=1}^{K} \lambda_k u_{k,0}(c_{k,0})$$

$$s.t \quad \sum_{k=1}^{K} c_{k,0} = C_0$$

（11.50）

$$u_1(C_\omega) \equiv \max_{\{c_{k,\omega}\}} \sum_{k=1}^{K} \lambda_k u_k(c_{k,\omega})$$

$$s.t \quad \sum_{k=1}^{K} c_{k,\omega} = C_\omega \quad \omega \in \Omega$$

（11.51）

- 此时的效用函数称为代表性参与者的效用函数：

$$u_0(C_0)+\sum_{\omega\in\Omega}\pi_\omega u_1(C_{1\omega})$$

二、代表性经济人的若干性质

- 效用函数的性质：

定理11.9：如果所有经济人的效用函数一阶导数大于零，二阶导数小于零，那么代表性经济人的效用函数也有同样的性质，即：

如果$\forall k, u'_{k,0}(c_{k,0})>0, u''_{k,0}(c_{k,0})<0$，那么$u'_0(C_0)>0, u''_0(C_0)<0$。

同样，如果$\forall k, \forall \omega\in\Omega, u'_k(c_{k,\omega})>0, u''_k(c_{k,\omega})<0$，那么$u'_0(C_0)>0, u''_0(C_0)<0$。

命题证明提示

- 证明：

$$u_0'(C_0)=\sum_{i=1}^{I}\lambda_i u_{i,0}'(c_{i,0}^*)\frac{dc_{i,0}^*}{C_0}=\sum_{i=1}^{I}\phi_0' f_{i0}'(C_0)=\phi_0'>0$$

$$u_1'(C_{1\omega})=\sum_{i=1}^{I}\lambda_i u_{i,1}'(c_{i,\omega}^*)\frac{dc_{i,\omega}^*}{C_{1\omega}}=\sum_{i=1}^{I}\phi_\omega' f_{i\omega}'(C_{1\omega})=\phi_\omega'>0$$

$$u_0''(C_0)=\sum_{i=1}^{I}\lambda_i u_{i,0}''(c_{i,0}^*)[f_{i0}'(C_0)]^2+\sum_{i=1}^{I}\lambda_i u_{i,0}'(c_{i,0}^*)f_{i0}''(C_0)<0$$

$$u_1''(C_{1\omega})=\sum_{i=1}^{I}\lambda_i u_{i,1}''(c_{i,\omega}^*)[f_{i\omega}'(C_{1\omega})]^2+\sum_{i=1}^{I}\lambda_i u_{i,1}'(c_{i,\omega}^*)f_{i\omega}''(C_{1\omega})<0$$

- （11.53）和（11.54）进一步定义了代表性经济人的效用函数，基于该效用函数我们可以定义代表性经济人的绝对风险厌恶系数和绝对风险容忍系数。

- **定义11.1：**代表性经济人的绝对风险厌恶系数和绝对风险容忍系数定义为：

$$A(C)=-\frac{\partial^2 u_1(C)/\partial C^2}{\partial u_1(C)/\partial C} \text{ 和 } T(C)=\frac{1}{A(C)} \qquad (11.58)$$

- 相对风险厌恶系数和相对风险容忍系数定义为：

$$R(C)=-\frac{\partial^2 u_1(C)/\partial C^2}{\partial u_1(C)/\partial C}\times C \text{ 和 } P(C)=\frac{\partial T(C)}{\partial C} \qquad (11.59)$$

- 依据代表性经济人效用函数的定义我们有：

定理 11.10： 若 f 为有效的风险分担规则，而且 T 为代表性投资者的风险容忍，则对任意投资者 k 都有：

$$T(C)=\frac{1}{f_k'(C)}T_k(f_k(C)) \tag{11.60}$$

$$T(C)=\sum_{k=1}^{K}T_k(f_k(C)) \tag{11.61}$$

$$T'(C)=\sum_{k=1}^{K}f_k'(C)T_k'(f_k(C)) \tag{11.62}$$

- 定理 11.10 表明，代表性经济人的风险容忍与每个经济人的风险容忍之间具有特定的关系：

代表性经济人的风险容忍等于个经济人风险容忍之和；代表性经济人的谨慎系数则等于个经济人谨慎系数的加权平均或者“平均值”。

- 利用定理 11.10 还可以证明：

若所有经济人具有 CRAR 偏好，则代表性经济人也具有 CARA 偏好；若所有经济人具有 CRRA 偏好，而且至少有两个人的相对风险厌恶系数不相同，则代表性经济人不再具有 CRRA。

三、代表性经济人与资产定价

- 考虑代表性经济人，其总禀赋为$[C_0;C_1]$,给定状态价格向量φ，代表性经济人问题：

$$\max_{\{c_0,c_1\}} u_0(c_0)+\sum_{\omega\in\Omega}\pi_\omega u_1(c_{1\omega})$$

$$s.t \quad c_0+\sum_{\omega\in\Omega}\phi_\omega c_{1\omega}=C_0+\sum_{\omega\in\Omega}\phi_\omega C_{1\omega}$$

- F.O.C：

$$\frac{\pi_\omega u_1'(c_{1\omega})}{u_0'(c_0)}=\phi_\omega, \quad \forall\omega\in\Omega$$

- 市场出清时$c_0= C_0; c_{1\omega}=C_{1\omega}$故:

$$\frac{\pi_\omega u_1'(C_{1\omega})}{u_0'(C_0)} = \phi_\omega, \quad \forall \omega \in \Omega$$

因此，当经济中只有一个参与者时，立即可以求得均衡：其消费就是其禀赋，均衡价格则是各状态下的相对边际效用。

- 由此可见，若经济中只有单一参与者，则他就是代表性参与者；若有多个参与者，则代表性参与者得到的均衡价格与由初始的多个参与者的经济所得到的均衡价格完全一样。

例 11.3: 与例 11.1 一样有两个经济人, 在同样的几何情形下我们构造代表性经济人。因此, 代表性经济人的效用函数为:

$$u_c(C_0) = \max_{c_{10}+c_{20}=C_0} [\lambda_1 \ln c_{10} + 2\lambda_2 \sqrt{c_{20}}]$$

$$u_c(C_1) = \max_{c_{1\omega}+c_{2\omega}=C_\omega} [\lambda_1 \ln c_{1\omega} + 2\lambda_2 \sqrt{c_{2\omega}}]$$

对福利权重标准化, 代表性经济人简化为:

$$u_1(C) = \max_{c_1+c_2=C} [\ln c_1 + 2\lambda \sqrt{c_2}]$$

今 $L \equiv \ln c_1 + 2\lambda\sqrt{C - c_1}$, 则一阶条件为:

$$\frac{dL}{dc_1} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{\sqrt{C - c_1}}(-1) = 0$$

解得:

$$c_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\lambda^2 C}}{2\lambda^2}; \quad c_2 = C - c_t$$

由题意可知, $C_0=100$, $C_g=200$, $C_b=50$, 代入上式可得各经济人在各时点各状态的最优消费水平。状态价格满足如下一阶条件:

$$\phi_\omega=\frac{u_1'(C_\omega)\pi_\omega}{u_0'(C_0)}=\frac{u_1'(c_{1\omega})\pi_\omega}{u_0'(C_{10})},\quad \omega=g,b$$

所以

$$\phi_g=\frac{1}{2}\frac{c_{10}}{c_{1g}};\quad \phi_b=\frac{1}{2}\frac{c_{10}}{c_{1b}}$$

而且

$$c_{10}+c_{1g}\phi_g+c_{1b}\phi_b=c_{10}+c_{1g}\times\frac{1}{2}\frac{c_{1,0}}{c_{1g}}+c_{1b}\times\frac{1}{2}\frac{c_{1,0}}{c_{1b}}=2c_{10}=e_{10}+e_{1g}\phi_g+e_{1b}\phi_b=100$$

故 $c_{10}=50$ 又因为

$$c_{10}=\frac{-1+\sqrt{1+400\lambda^2}}{2\lambda^2}=50;\quad c_2=C-c_1=100-50=50$$

则 $\lambda^2=1/50$, 最终解得状态价格和最优配置, 结果与例 11.1 中完全一致, 在此不再重复。

$$C_g=200,\quad \lambda^2=\frac{1}{50}$$

由推导公式:

$$c_1=\frac{-1+\sqrt{1+4\lambda^2C}}{2\lambda^2},\quad c_2=C-c_1$$

上一例题如何构造代表性个人效用函数的？

在一般的社会最优分配（social planner problem）中，我们构造一个社会福利最大化问题：

$$\max\ \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2$$

其中：

$$U_1 = \ln c_{1,0} + \frac{1}{2}(\ln c_{1,g} + \ln c_{1,b}), \quad U_2 = 2\sqrt{c_{2,0}} + \frac{1}{2}[2\sqrt{c_{2,g}} + 2\sqrt{c_{2,b}}]$$

小结

- 当市场完全时，对于给定财富的有多个参与者的市场，我们可以构造一个对应的市场，在这个市场中，只有一个参与者——代表性参与者
  - 其效用函数是所有参与者效用的加权和
  - 其禀赋是经济的总禀赋
- 代表性参与者的市场得到的均衡价格与初始多个参与者市场均衡价格完全一样！！