第七讲：基于消费的投资组合理论

武汉大学经济与管理学院

引言

- 投资组合理论是金融经济学的基本理论之一，马科维兹（Markowitz）的组合理论是金融经济学的标志性成果和理论基石，该理论的创立标志金融经济学的诞生。
- 在介绍马科维兹组合理论之前，我们从一般的角度来探讨投资组合问题。

第一节：投资组合的选择问题

- 所谓**消费-组合问题**是指最优消费计划和最优投资组合选择问题的全称，通常将投资组合简称为组合，两者不加区分。

1、消费-组合问题

- 分析的基本框架：

◆市场上存在N个证券，不存在冗余证券，价格向量和支付矩阵分别为

$\mathbf{S}^T=(S_1, S_2, \ldots, S_N)$和 $\mathbf{X}=(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_N)$

◆有 K个经济人，每个经济人都具有状态独立时间可加的期望效用函数。

◆经济人的禀赋为（$\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$）

- 每个经济人的决策包括两个层面：
  - ☞其一是选择期初的消费水平；
  - ☞其二是将剩余的财富分散到N个不同的投资机会(N个证券)上，由组合向量**θ**来表示

$$
\begin{aligned}
&\max_{\theta} u_0(c_0)+\sum_{\omega=1}^{S}\pi_{\omega}u_1(c_{1\omega}) \\
&s.t\ \ c_0=e_0-\sum_{i=1}^{N}S_i\theta_i \\
&\quad c_1=e_1+\sum_{i=1}^{N}\theta_i X_i \\
&\quad c_0,c_1\geq 0
\end{aligned}
\qquad (7.P1)
$$

- 该问题等价于：

$$\max_{\{c,\theta\}} u_0(c_0) + \sum_{\omega=1}^{S} \pi_\omega u_1(c_{1\omega})$$

$$s.t\ \ c_0 = W_0 - \sum_{i=1}^{N} S_i \theta_i \qquad (7.P2)$$

$$c_1 = W_1 = \sum_{i=1}^{N} \theta_i X_i$$

其选择层次可以用如下图示表示：

	0		1
期初的财富水平：	W		
期初的消费水平：	c_0		
期初的投资水平：	$W-c_0$	投资在期末的财富水平：	W_1

图 7.1 消费-组合问题

- 在完全市场上问题可简化为：

$$\max_{\theta} u_0(c_0) + \sum_{\omega=1}^{S} \pi_\omega u_1(c_{1\omega})$$

$$s.t\ \ c_0 + \sum_{\omega=1}^{S} \phi_\omega c_{1\omega} = e_0 + \sum_{\omega=1}^{S} \phi_\omega e_{1\omega} \equiv W \qquad (7.P3)$$

2、 解的存在性

定理 7.1： 证券市场记为$\{\mathbf{X},\mathbf{S}\}$，如果效用函数满足：$u'(.)\ge 0, u(.)''\le 0$，那么当且仅当资本市场不存在套利机会时，（7.P1）或（7.P2）有解。即优化问题有解的充分必要条件是资本市场不存在套利机会。

实际上对更一般的效用函数我们都有： 只要效用函数关于消费水平是连续的，对各时点消费水平的一阶偏导数大于零— —投资者具有“不满足性”，二阶偏导数形成的海塞矩阵负定——投资者具有凹 偏好或者边际效用递减，则最优解总是存在的。

3、问题的转化

回到问题（7.P2）记期初的投资为 $I_0=e_0-c_0$，问题改写为：

$$
\begin{aligned}
&\max_{\theta}\{u_0(e_0-I_0)+E[u_1(c_1)]\}\\
&s.t\ \ I_0=\sum_{i=1}^{N}S_i\theta_i\\
&\qquad c_1=e_1+\sum_{i=1}^{N}\theta_i X_i\\
&\qquad c_0,c_1\ge 0
\end{aligned}
\tag{7.P4}
$$

- 问题（7.P4）是从数学角度来描述消费-组合问题，该问题等价于两步决策问题：
  - ☞第一步：确定最优的期初消费水平 c_0，由此确定最优投资水平 I_0；
  - ☞第二步通过解下列为题（7.P5）确定最优组合：

$$\upsilon(I_0)=\max_{\theta} E[u_1(c_1)]$$

$$s.t\ \ I_0=\sum_{i=1}^{N} S_i\theta_i,\quad c_1=e_1+\sum_{i=1}^{N}\theta_i X_i \qquad (7.P5)$$

$$c_0,c_1\geq 0$$

定义

设个体在未来可以通过投资组合 $\{\theta_i\}$ 获得随机收益，其目标是最大化期望效用：

$$\max_{\{\theta_i\}} E[u_1(c_1)] \quad \text{s.t.} \quad I_0=\sum_{i=1}^{N} S_i\theta_i.$$

在给定投资额 I_0 下，该最优化问题的最优值定义为

$$v(I_0)=\max_{\{\theta_i\}} E[u_1(c_1)],$$

其中 $v(I_0)$ 即为**间接效用函数（indirect utility function）**，表示给定 I_0 时个体能够获得的最大期望效用。

其中，$v(I_0)$为间接效用函数。这样，问题（7.P5）可以改写为：

$$\max_{I_0}\{u_0(e_0-I_0)+\upsilon(I_0)\}$$

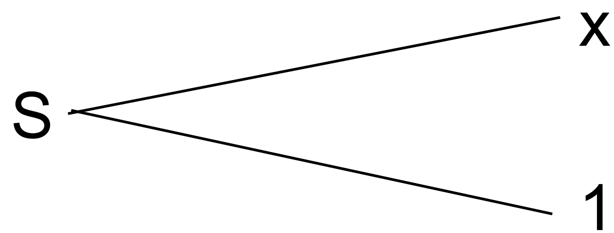
$$s.t\ \ I_0=\sum_{i=1}^{N}S_i\theta_i \tag{7.P6}$$

显然（7.P6）的充要条件为：

$$u_0'(e_0-I_0)=\upsilon'(I_0) \tag{7.1}$$

问题（7.P5）属于单纯的投资组合问题。为了分析问题的方便，我们将投资组合问题单独分离出来重点讨论。

- **例子**：考虑一个经济，未来有两个等概率状态，市场上只有一个证券，其价格-支付为：



- 参与者的禀赋为：　w_0 ———— 0
- 效用函数：

$$\ln c_0 + \frac{1}{2}\rho(\ln c_{1a} + \ln c_{1b}) = \ln(w0 - \theta S) + \frac{1}{2}\rho(\ln \theta x + \ln \theta)$$

- F.O.C

$$\frac{S}{w_0 - \theta S} = \frac{\rho}{\theta} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\rho}{1+\rho}\frac{w_0}{S}$$

- 最优解：

$$
\begin{cases}
c_0 = w_0 - \theta S = \dfrac{1}{1+\rho} w_0 \\[2ex]
c_{1a} = \theta x = \dfrac{\rho}{1+\rho} \dfrac{w_0}{S} x \\[2ex]
c_{1a} = \theta = \dfrac{\rho}{1+\rho} \dfrac{w_0}{S}
\end{cases}
$$

欧拉方程

构造拉格朗日函数:

$$\mathcal{L} = \ln c_0 + \frac{\rho}{2}(\ln c_{1a} + \ln c_{1b}) + \lambda(w_0 - c_0 - \theta S).$$

对 c_0 与 θ 求偏导得:

$$\lambda = u_0'(c_0),$$

$$\rho\,\mathbb{E}\left[u_1'(c_1)\tilde{R}\right] = \lambda S.$$

两式相除得到最一般的欧拉方程:

$$u_0'(c_0) = \rho\,\mathbb{E}\left[u_1'(c_1)\frac{\tilde{R}}{S}\right].$$

其中 $\tilde{R}/S$ 为资产的各状态毛回报,未来收益为随机变量 $\tilde{R} \in \{x, 1\}$。

第二节：两资产情形下最优投资组合的性质

- 所谓的两资产情形是指市场上存在一个风险资产和一个无风险资产，有时也称为单资产情形，实质是指单风险资产情形

1、决定风险资产买卖的原则

- 考虑一个简单的投资组合模型：市场上只有一个风险资产和一个无风险资产

表 7.1 单个风险资产下的投资收益

	期初投资额	期末价值
风险资产	α	$\alpha(1+\tilde{x}_0)$
无风险资产	W-α	$(W-\alpha)(1+r_f)$
合计	W	$W(1+r_f)+\alpha(\tilde{x}_0-r_f)$

- 主要假设：

◆经济人的效用：$u'(.) > 0, u''(.) < 0$

◆初始财富 W

◆两财富情形：

$$\begin{array}{lllll} & \alpha & \longrightarrow & \tilde{x}_0 & \longrightarrow \ risky \\ W \nearrow\!\!\searrow & & & & \\ & W-\alpha & \longrightarrow & r & \longrightarrow \ riskless \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$(W-\alpha)(1+r)+\alpha(1+\tilde{x}_0) = W(1+r)+\alpha(x_0-r)$$

$$\equiv w_0 + \alpha\tilde{x}$$

- ◆问题归结：

记 $w_0 = W(1+r_f)$， $\tilde{x} = \tilde{x}_0 - r_f$， 则期末财富总额为：

$$W_T = w_0 + \alpha\tilde{x} \qquad (7.3)$$

我们通常称 $\tilde{x} = \tilde{x}_0 - r_f$ 为风险资产的超额收益（excess return），投资者的组合问题归结为：

$$\max_{\alpha} V(\alpha) = E[u(W_T)] \qquad (7.P7)$$

- 注意：x是超额收益，不是一般的收益

◆必要条件

该优化问题的一阶条件和二阶条件如下：

F.O.C：

$$V'(\alpha) = E[u'(W_T) \times \tilde{x}] = 0 \tag{7.4}$$

S.O.C：

$$V''(\alpha) = E[u''(W_T) \times \tilde{x}^2] \leq 0 \tag{7.5}$$

定理7.2：（最优的风险资产买卖原则）：当市场上只存在一个风险资产和一个无风险资产，而且经济人具有单调递增和凹的效用函数时：

当且仅当风险资产的超额收益率的期望值大于零时，其最优投资数量为正；

当且仅当风险资产的超额收益率的期望值小于零时，其最优投资数量为负；

当且仅当风险资产的超额收益率的期望值等于零时，其最优投资数量为零。

用数学语言表述为：

$$\alpha^* > 0 \Leftrightarrow E(\tilde{x}) > 0 \qquad (7.6a)$$

$$\alpha^* < 0 \Leftrightarrow E(\tilde{x}) < 0 \qquad (7.6b)$$

证明：我们只证明第一个结论，另外两个的证明方法类似。

由上述二阶条件 (7.5) 可知函数 $V'(\alpha)$ 关于 α 是单调递减的函数，因此：$\alpha^* > 0$ 当且仅当 $V'(\alpha^*) < V'(0)$。

又因为: $V'(\alpha^*) = 0$ 且 $V'(0) = E[u'(w_0)\tilde{x}] = u'(w_0) \times E[\tilde{x}], u'(w_0) > 0$

所以: $V'(\alpha^*) < V'(0)$ 当且仅当 $0 = V'(\alpha^*) < E[u'(w_0)\tilde{x}] = u'(w_0) \times E[\tilde{x}]$

即当且仅当 $0 < E[\tilde{x}]$。证毕 ■

- 风险溢价为负时，对风险资产的最优投资数理为负，则最优原则为卖空风险资产。
- 说明：我们可能会猜想：若某资产的超额收益为正但非常不确定强（有非常大的风险），则可能不投资该风险资产更好一些。
- 后面的算例实际上支持这一直觉，因为现实生活中投资风险资产需要达到一定规模才能实现，比如股票最小交易量通常为100股，交易规模小于这一数近似风险资产的投资为0。

2、小风险情形的最优投资规则

- 为了说明问题，我们继续研究风险资产的最优投资数量，为此，我们先考虑一种所谓的“小风险情形”

所谓小风险情形是指一类特殊情形，其方差比较小，特别是一类我们能作如下处理的情形：

我们从超额收益入手，取：

$$\tilde{x} = k\mu + \tilde{\varepsilon} \qquad (7.7)$$

其中，$E[\tilde{\varepsilon}] = 0$，所以 $E[\tilde{x}] = k\mu$。我们用 $\tilde{x} = k\mu + \tilde{\varepsilon}$ 代替 $\tilde{x} = E[\tilde{x}] + \tilde{\varepsilon}$ 的目的是通过设定固定的μ和可以变动的 k 来描述期望超额收益率的变化，从而便于分析

为方便有时省略星号但仍表示最优组合，即：

$$\alpha^* = \alpha^*(k)\text{；}\quad \alpha'^*(k) > 0\text{；}\quad \alpha^*(0) = 0$$

⇓

$$\alpha^*(k) \approx \frac{u'(w_0)k\mu}{u''(w_0)E[\varepsilon^2]} = \frac{E[\tilde{x}]}{A(w_0)\,\mathrm{var}(\tilde{x})}$$

⇓

定理 7.3 ：小风险情形下，最优投资数量与风险资产的超额收益成正比例，与超额收益的方差成反比例，与绝对风险厌恶系数成反比例。

证明

证明：由 (7.7) 和 (7.8)，一阶条件 $V'(\alpha) = E[u'(W_T)\cdot\tilde{x}] = 0$ 可以改写为：

$$V'(\alpha^*(k)) = E\left[u'[w_0 + \alpha^*(k)(k\mu + \tilde{\varepsilon})](k\mu + \tilde{\varepsilon})\right] = 0 \quad (7.9)$$

右边对 k 求导得：

$$E\left[u''(\cdot)[\alpha^{*'}(k)(k\mu + \tilde{\varepsilon})^2 + \alpha^*(k)\mu(k\mu + \tilde{\varepsilon})] + u'(\cdot)\mu\right] = 0$$

$k = 0$ 时上式改写为：

$$E\left[u''(w_0)\alpha^{*'}(0)\tilde{\varepsilon}^2 + u'(w_0)\mu\right] = 0$$

解出 $\alpha^{*'}(0)$ 得

$$\alpha^{*'}(0) = -\frac{u'(w_0)\mu}{u''(w_0)E[\tilde{\varepsilon}^2]} \quad (7.10)$$

对 $\alpha^*(k)$ 在 $k = 0$ 处进行 Taylor 展开：

$$\alpha^*(k) = \alpha^*(0) + \alpha^{*'}(0)k + \text{h.o.t}$$

式中 h.o.t 是指高阶项 (higher order terms)，由此可知：

$$\alpha^*(k) \approx \frac{u'(w_0)k\mu}{-u''(w_0)E[\tilde{\varepsilon}^2]} = \frac{E[\tilde{x}]}{A(w_0)\text{var}(\tilde{x})} \quad (7.11)$$

证毕 ■

- 该结果的含义比较符合我们的直观，因此可以作为我们分析问题的一种基准情形，但由于采用了 Taylor 展开并且只近似到了一阶导数，似乎并不严密。在一些特殊情形下，我们无须近似就可以得到这一结论。

3、特殊偏好下的最优组合选择

- 所谓特殊偏好是指限定偏好，从而效用函数给定。由前面的知识可知，常见的偏好包括：

☞二次偏好

☞CARA偏好

☞CRRA偏好

☞HARA偏好

二次偏好因为不太合理比较少用（？）HARA太难，下面看看CARA和CRRA

1）、CARA偏好加正态分布

我们在两资产情形下加入两个特殊的假设：

假设 1：投资者具有 CARA 偏好，即：

$$u(W_T) = -e^{-AW_T} = -\exp\{-A(w_0 + \alpha\tilde{x})\} \qquad (7.12)$$

假设 2 ：风险资产的收益服从正态分布，即 x_0 服从正态分布，从而 $\tilde{x}_0$ 乃至

$\tilde{x} = \tilde{x}_0 - r_f$ 和 $-A(w_0 + \alpha\tilde{x})$ 都服从正态分布。

引理 7.1 ：若随机变量 X 服从正态分布，即 $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ 则：

$$E[e^X] = e^{EX + \frac{1}{2}\mathrm{var}(X)} = e^{\mu_X + \frac{1}{2}\sigma_X^2} \qquad (7.13)$$

该引理的另一个版本是：

若随机变量 $Y = e^X$ 服从对数正态分布，即 $\ln Y \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ 则：

$$\ln E[Y] = E[\ln Y] + \frac{1}{2}\mathrm{var}(\ln Y) \qquad (7.14)$$

- 在假设1下，组合问题为：

$$\max_{\alpha} V(\alpha) = E[u(W_T)] = E[-e^{-A\tilde{W}_T}]$$

$$s.t \quad W_T = w_0 + \alpha\tilde{x}$$

等价于

$$\min_{\alpha} V(\alpha) = E[e^{-A\tilde{W}_T}]$$

- 由引理可知该问题进一步等价于问题：

$$\max_{\alpha} E[A\widetilde{W}_T] - \frac{1}{2}\operatorname{var}(\widetilde{W}_T) = A(w_0 + \alpha E[\widetilde{x}]) + \frac{1}{2}A^2\alpha^2\operatorname{var}(\widetilde{x})$$

F.O.C

$$V'(\alpha) = AE[\widetilde{x}] + A^2\alpha\operatorname{var}(\widetilde{x}) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha^* = \frac{E[\widetilde{x}]}{A\operatorname{var}(\widetilde{x})}$$

- 概括为：

定理 7.4： 本章描述的两资产情形下，如果投资者具有 CARA 偏好而且风险资产的收益率服从正态分布，则投资者对风险资产的最优投资数量与风险资产的收益（超额收益率）成正比例，与风险资产的风险（风险资产的方差）成反比例，与投资者的绝对风险厌恶成反比例。

2）、CRRA 偏好加对数正态分布

假设 3： 基于两资产组合的期末财富 W_{t+1} 服从对数正态分布。

- 为了论述的方便，我们将期末的财富记为 W_{t+1}，由于期末的消费等于期末的财富，即 $c_{t+1}=W_{t+1}$，所以在 CRRA 偏好下投资者的优化问题为：

$$\max_{\theta_{t+1}} E_t\left[\frac{W_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] \qquad (7.p11)$$

$$s.t \quad W_{t+1} = W_t(1+R_{p,t+1})$$

其中，γ是相对风险厌恶系数，W_t是期初的财富值，$R_{p,t+1}$是投资组合的收益率，θ_{t+1}是组合中投资于风险资产的权重，R_{t+1}是风险资产的收益率，$R_{f,t+1}$是无风险资产的收益率，$R_{p,t+1}=\theta_{t+1}R_{t+1}$ +（$1-\theta_{t+1}$）$R_{f,t+1}$。

问题转化

$$\ln E_t[\frac{W_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}] = E_t[\ln \frac{W_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}] + \frac{1}{2}\text{var}_t[\ln \frac{W_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}]$$
$$= (1-\gamma)E_t[w_{t+1}] + \frac{1}{2}(1-\gamma)^2 \text{var}_t[w_{t+1}] - \ln(1-\gamma) \qquad (7.16)$$

其中，$w_{t+1}=lnW_{t+1}$因此，问题（7. p11）等价于：

$$\max_{\theta_{t+1}} E_t[w_{t+1}] + \frac{1}{2}(1-\gamma)Var_t[w_{t+1}] \qquad （7.P12）$$
$$s.t \quad w_{t+1} = w_t + r_{p,t+1}$$

其中，$r_{p,t+1} = \ln(1+R_{p,t+1})$，$w_t=lnW_t$ ，相应地$r_{t+1} = \ln(1+R_{t+1})$和$r_{f,t+1} = \ln(1+R_{f,t+1})$，在没有特殊说明情况下，我们在本章用小写的标量表示相应的大写变量的对数值。

- # 处理

$$
\begin{aligned}
r_{p,t+1} - r_{f,t+1} &= \ln(1+R_{p,t+1}) - \ln(1+R_{f,t+1}) \\
&= \ln\frac{1+R_{p,t+1}}{1+R_{f,t+1}} = \ln\frac{1+\theta_{t+1}R_{t+1}+(1-\theta_{t+1})R_{f,t+1}}{1+R_{f,t+1}} \\
&= \ln(1+\theta_{t+1}\frac{R_{t+1}-R_{f,t+1}}{1+R_{f,t+1}}) = \ln[1+\theta_{t+1}(\frac{1+R_{t+1}}{1+R_{f,t+1}}-1)] \\
&= \ln[1+\theta_{t+1}(\exp\{r_{t+1}-r_{f,t+1}\}-1)]
\end{aligned}
\tag{7.17}
$$

- 当 $x \equiv r_{t+1} - r_{f,t+1}$趋于零时，取$f(x) = \ln[1+\theta(e^x-1)]$，
- f(x)在x=0处进行泰勒展开：

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + h.o.t \\
&= \theta x + \frac{1}{2}\theta(1-\theta)x^2 + h.o.t
\end{aligned}
\tag{7.18}
$$

$$
r_{p,t+1} - r_{f,t+1} \approx \theta_{t+1}(r_{t+1} - r_{f,t+1}) + \frac{1}{2}\theta_{t+1}(1-\theta_{t+1})(r_{t+1} - r_{f,t+1})^2
$$

为了论述的方便，我们再次采用简单的记号：

$$\sigma_{p,t}^2 \equiv \mathrm{var}_t(r_{p,t+1}); \quad \sigma_t^2 \equiv \mathrm{var}_t(r_{t+1})$$

当 $x = r_{t+1} - r_{f,t+1} \to 0$ 时，$x^2 = (r_{t+1} - r_{f,t+1})^2 \to \sigma_t^2$，结合 $w_{t+1} = w_t + r_{p,t+1}$，所以：

$$E_t[w_{t+1}] = w_t + E_t[r_{p,t+1}]$$

$$\approx w_t + r_{f,t+1} + \theta_{t+1}(E_t[r_{t+1}] - r_{f,t+1}) + \frac{1}{2}\theta_{t+1}(1-\theta_{t+1})\mathrm{var}_t[r_{t+1}]$$

$$\mathrm{var}_t[w_{t+1}] = \mathrm{var}_t[r_{p,t+1}] \approx \theta_{t+1}^2 \mathrm{var}_t[r_{t+1}] \quad (7.20)$$

所以，问题 (7.P11) 等价于下列问题：

$$\max_{\theta_{t+1}} \theta_{t+1} E_t[r_{t+1} - r_{f,t+1}] + \frac{1}{2}[\theta_{t+1}(1-\theta_{t+1}) + (1-\gamma)\theta_{t+1}^2]\sigma_t^2 \quad (7.P13)$$

$$\mathbf{R_{p,t+1} = \theta_{t+1} R_{t+1} + (1 - \theta_{t+1}) R_{f,t+1}}$$

$$\mathbf{R_{p,t+1} - R_{f,t+1} = \theta_{t+1}(R_{t+1} - R_{f,t+1})}$$

问题 (7.P13) 可写为

$$\max_{\theta_{t+1}} f(\theta_{t+1}) = \theta_{t+1}\mu_t + \frac{1}{2}\left[\theta_{t+1}(1-\theta_{t+1}) + (1-\gamma)\theta_{t+1}^2\right]\sigma_t^2. \tag{7.P13}$$

对方括号部分进行整理：

$$\theta(1-\theta) + (1-\gamma)\theta^2 = \theta - \theta^2 + (1-\gamma)\theta^2 = \theta - \gamma\theta^2.$$

于是有

$$f(\theta) = \theta\mu_t + \frac{1}{2}\theta\sigma_t^2 - \frac{1}{2}\gamma\theta^2\sigma_t^2.$$

对 θ 求导并令其为零：

$$f'(\theta) = \mu_t + \frac{1}{2}\sigma_t^2 - \gamma\theta_{t+1}^*\sigma_t^2 = 0.$$

由此得最优投资比例：

$$\boxed{\theta_{t+1}^* = \frac{\mu_t + \frac{1}{2}\sigma_t^2}{\gamma\sigma_t^2} = \frac{E_t[r_{t+1}] - r_{f,t+1} + \frac{1}{2}\sigma_t^2}{\gamma\sigma_t^2}.} \tag{7.22}$$

- 概括为定理7.5：

定理 7.5： 本章描述的两资产情形下，如果投资者具有 CRRA 偏好而且通过构造投资组合期末财富服从对数正态分布，则投资者对风险资产的最优投资比例或权重近似地与风险资产的收益（超额收益率）成正比例，与风险资产的风险（风险资产的方差）成反比例，与投资者的相对风险厌恶成反比例。

- 显然，CRRA情形太复杂！

3）、 HARA偏好下的投资组合

- 即便是非常复杂是HARA效用，似乎也能得到一点有意思的结论，先看效用：

$$u(W_T)=\xi(\eta+\frac{\alpha\tilde{W}_T}{\gamma})^{1-\gamma}]$$

- 优化问题：

$$\max_{\alpha} V(\alpha)=E[u(W_T)]=E[\xi(\eta+\frac{\tilde{W}_T}{\gamma})^{1-\gamma}]$$

$$s.t \quad W_T=w_0+\alpha\tilde{x}$$

- 一阶条件

$$V'(\alpha^*)=\xi(1-\gamma)\frac{1}{\gamma}E[\tilde{x}(\eta+\frac{w_0+\alpha^*\tilde{x}_T}{\gamma})^{-\gamma}]=0$$

- 化简 FOC 中的常数项可以提出，因为期望算子只作用于 $\tilde{x}_T$：

$$E\left[\tilde{x}_T\left(\eta+\frac{w_0+\alpha^*\tilde{x}_T}{\gamma}\right)^{-\gamma}\right]=\left(\eta+\frac{w_0}{\gamma}\right)^{-\gamma}E\left[\tilde{x}_T\left(1+\frac{\alpha^*\tilde{x}_T}{\eta+w_0/\gamma}\right)^{-\gamma}\right].$$

$$\left(\eta+\frac{w_0}{\gamma}\right)^{-\gamma}E\left[\tilde{x}_T\left(1+\frac{a\tilde{x}_T}{\gamma}\right)^{-\gamma}\right]=0,$$

- 最优解：

$$\alpha^*=a(\eta+\frac{w_0}{\gamma}) \qquad a=\frac{\alpha^*}{\eta+w_0/\gamma}$$

- 含义：

☞a 是方程（7.28）中 $\eta+\frac{w_0}{\gamma}=1$ 时，问题（7.p15）的最优解

☞所以HARA下的最优组合可以是：

第一步取 $\eta+\frac{w_0}{\gamma}=1$ 求最优解

第二步写出最优组合

$$\alpha^*=a(\eta+\frac{w_0}{\gamma})$$

4、最优组合的一般性质

- **定理7.6**：

☞当且仅当经济人具有递减的绝对风险厌恶偏好（DARA）时，其最优风险资产的持有数量随着其财富水平的增加而增加；

☞当且仅当经济人具有递增的绝对风险厌恶偏好(IARA)时，其最优风险资产的持有数量随着其财富水平的增加而减少；

☞当且仅当经济人具有定常的绝对风险厌恶偏好(CRAR)时，其最优风险资产的持有数量保持恒定，不随着其财富水平的变化而变化。

- 用数学语言表述为：

$$\alpha *'(w) > 0 \Leftrightarrow A'(w) < 0$$

$$\alpha *'(w) < 0 \Leftrightarrow A'(w) > 0$$

$$\alpha *'(w) = 0 \Leftrightarrow A'(w) = 0$$

投资者对财富的投资需求也不同。一个容易联想到的概念是弹性系数。我们将最优投资数量对财富水平的弹性定义为:

$$e(w) \equiv \frac{\mathrm{d}\ln\alpha}{\mathrm{d}\ln w} = \frac{w}{\alpha} \times \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}w} \quad (7.35)$$

弹性越大，单位财富水平的变化将使投资者将更多的资产投入风险资产；反之弹性越小，财富的增加对风险资产的投资影响相对越弱；完全缺乏弹性意味着弹性系数为零，风险资产的投资数量不受财富变化的影响。

这个弹性系数 $\mathbf{e}(\mathbf{w})$ 衡量的是:

> **当投资者的初始财富 (w) 变化 1% 时，他们愿意投入风险资产的最优金额 (α) 会变化百分之几。**

用数学语言来说:

$$\mathbf{e}(\mathbf{w}) \equiv \frac{\mathrm{d}\ln\alpha}{\mathrm{d}\ln\mathbf{w}} = \frac{\text{百分比变化 }\alpha}{\text{百分比变化 }\mathbf{w}}$$

- **定理7.7：**

☞当且仅当经济人具有递减的相对风险厌恶偏好（DRRA）时，投资者对风险资产的投资需求富有弹性；

☞当且仅当经济人具有递增的相对风险厌恶偏好(IRRA)时，投资者对风险资产的投资需求缺乏弹性；

☞当且仅当经济人具有定常的绝对风险厌恶偏好(CRRA)时，投资者对风险资产的投资需求单位弹性。

- 用数学语言表述为：

$$
\boxed{\begin{gathered}
e(w) > 1 \Leftrightarrow R'(w) < 0 \\
e(w) < 1 \Leftrightarrow R'(w) > 0 \\
e(w) = 1 \Leftrightarrow R'(w) = 0
\end{gathered}}
$$

第三节：多资产情形下最优投资组合的性质

- 下面我们试图将两资产情形下的结果向多资产情形推广。两资产情形下通常假设两资产中有一个风险资产和一个无风险资产，推广到多资产情形时同样假定有一个无风险资产加上多个风险资产。因此我们希望单一风险资产的结果能够推广到多风险资产情形。

- 1、多资产情形下的问题描述

☞假设资本市场上有 n 个风险资产和一个无风险资产，即投资者面临 n+1 个投资机会

☞投资者的财富为 W

☞投资于第 i 个风险资产的金额为α_i,(i=1,2,...,n)，投资于无风险资产的金额为 $W-\sum^{n}\alpha_i$

☞第 i 个风险资产的收益率为 r_i

☞无风险利率为 r_F,

☞期末的财富水平 记为W_T

- 期末的财富水平 W_T为：

$$\begin{aligned}\tilde{W}_T &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(1+\tilde{r}_i)+(W-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i)(1+r_F) \\ &= W(1+r_F)+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\tilde{r}_i-r_F) \qquad (7.40) \\ &\equiv w_0+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\tilde{x}_i\end{aligned}$$

- 其中，我们依然将 $W(1+r_F)$记为 w_0；风险证券的超额收益 r_i-r_F记为 x_i。

投资者的最优资金配置问题可归结为：

$$\max_{\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}} V(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=E[u(\tilde{W}_T)] \tag{7.P16}$$

即，求最优的资金分配模式，使期末财富效用极大化，因为期末总财富等于期末总消费，所以也等价地使期末消费效用极大化。

2、多风险资产情形下风险资产的投资原则

- **定理7.8**：当且仅当所有风险资产的超额收益的期望值为零的时，所有风险资产的最优投资额为零，即当且仅当
  $E[\tilde{x}_i]=0\ (i=1,2,\ldots,n)$ 有 $\alpha_i=0\ (i=1,2,\ldots,n)$

- **定理7.9**：

（1）当且仅当所有风险资产的超额收益的期望值大于零时，则所有风险资产的最优投资额均大于零；

（2）当且仅当所有风险资产的超额收益的期望值小于零时，则所有风险资产的最优投资额均小于零；

（3）当且仅当至少有一个风险资产的超额收益的期望值大于零时，最优投资策略中至少对某一风险资产的持有为正。

- 3、特殊情形下的组合问题

◆所谓特殊情形依然是指将效用函数限定在特殊效用函数上。

◆由于对数正态分布不具有线性性，而正态分布具有线性性，即如果每个随机变量服从正态分布，则这些向量的线性组合也服从正态分布。所以我们依然选择CARA+正态分布作为特殊情形

◆CARA+正态分布——核心工具是引理

引理 7.1 ：若随机变量 X 服从正态分布，即 $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ 则：

$$E[e^X] = e^{EX + \frac{1}{2}\mathrm{var}(X)} = e^{\mu_X + \frac{1}{2}\sigma_X^2} \qquad (7.13)$$

该引理的另一个版本是：

若随机变量 $Y = e^X$ 服从对数正态分布，即 $\ln Y \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ 则：

$$\ln E[Y] = E[\ln Y] + \frac{1}{2}\mathrm{var}(\ln Y) \qquad (7.14)$$

- 我们同样有：

引理 7.1：若随机变量 X 服从正态分布，即 $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ 则：

$$E[e^X] = e^{EX + \frac{1}{2}\mathrm{var}(X)} = e^{\mu_X + \frac{1}{2}\sigma_X^2}$$

$$u(W_T) = -e^{-AW_T} = -\exp\{-A(w_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tilde{x}_i)\}$$

$$E[u(W_T)] = E[-e^{-AW_T}] = -\exp\{-A[E(\tilde{W}_T) - \frac{1}{2} A Var(\tilde{W}_T)]\}$$

等价于：

$$\max_{\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}} E[\tilde{W}_T] - \frac{1}{2} A\mathrm{Var}[\tilde{W}_T] \quad (7.P18)$$

由于 $\tilde{W}_T = w_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tilde{x}_i$，故有：

$$E[\tilde{W}_T] = w_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E[\tilde{x}_i]; \quad \mathrm{Var}[\tilde{W}_T] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i\alpha_j\sigma_{ij} = \alpha^\top \mathbf{\Omega}\alpha$$

$$\max_{\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}} V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = E[u(\tilde{W}_T)]$$

$$\max_{\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E[\tilde{x}_i] - \frac{1}{2} A \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \sigma_{ij}$$

$$\mathrm{Var}\left[\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{a_i X_i}\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

- 因此，多资产情形下，“CARA+正态分布”依然能够得到显示解，这就是文献经常假设CARA偏好的主要原因。事实上，在CRRA偏好下经常没有显示解！