第八章：马科维茨投资组合理论

0、引言

- 马科维兹（Markowitz）的投资组合理论（Portfolio theory）首次采用数学方法研究证券投资问题，为金融经济学的研究开辟了方向。
- 所谓投资组合理论是指当投资者面临多个投资机会时，如何将自身可用来投资的资金分配到这些不同的投资机会上去的理论。
- 当市场上有 N 个交易的证券时，意味着投资者面临着 N个投资机会。

- 马科维兹投资组合理论是在 N 个投资机会的前提下研究如何构造最优的投资组合，他将证券投资分为三个步骤：

◆证券分析：对每个证券未来的前景进行预测，分析各证券的未来可能的支付以及各证券之间的相互关系

◆组合分析：分析各证券形成不同组合收益的期望和方差

◆组合选择。基于投资组合收益的期望值和方差值选择最优的投资组合

第一节：均值-方差标准的理论基础

◆马科维兹投资组合理论的核心之一是均值-方差标准，即用投资组合收益的期望值度量组合的收益，用投资组合收益的方差或标准差度量组合的风险。

☞投资者在构造投资组合时追求**高收益低风险**，即给定收益构造组合使组合的风险最低；给定风险构造组合使组合的收益最高

☞等价地，给定投资组合的期望值使组合的方差或标准差最小，给定组合方差或标准差使组合的期望值最大

◆本节的核心目标是讨论均值——方差的合理性

1、证券投资组合的相关概念

1）、证券的收益与收益率

◆考虑两时点单期情形，假设市场上有N个证券

☞证券i在期初的价格记为S_i，期末的支付记为X_i，则证券i的相对收益（relative return）记为 R_i，并定义为：

$$R_i = \frac{X_i}{S_i} \qquad (8.1)$$

证券 i 的收益率（the rate of return)记为 r_i，并定义为:

$$r_i = \frac{X_i - S_i}{S_i} = R_i - 1 \qquad (8.2)$$

- 零息国库券的期初价格记为 B，期末支付面值为 1，则无风险收益和收益率分别定为：

$$R_f=\frac{1}{B};r_f=\frac{1-B}{B}=R_f-1 \qquad (8.3)$$

注：在没有特殊说明的情形下，本章用大写的 R 表示相对收益，小写的 r 表示收益率。

2）、投资组合的概念

◆回顾：所谓的投资组合是指投资者将其期初用于投资的财富W_0分配在 N 个不同的投资机会上的方式，为了方便描述这种投资方式通常用向量表示。

◆通常有三种表示方法：

☞投资金额表示的投资组合：

$$\mathbf{W}^T \equiv (W_{1,0}, W_{2,0}, \ldots, W_{N,0})$$

☞投资数量(shares)表示的投资组合：

$$\boldsymbol{\theta}^T \equiv (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$$

☞投资权重或份额表示的投资组合：

$$\boldsymbol{\omega}^T \equiv (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N)$$

- 显然有：

$$W_0 = \sum_{i=1}^{N} W_{i,0} \text{ 或 } W_0 = \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{1} \tag{8.4}$$

$$\omega_i = \frac{W_{i,0}}{W_0} = \frac{W_{i,0}}{\sum_{k=1}^{N} W_{k,0}}$$

$$\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}1 = \sum_{i=1}^{N} \omega_i = 1 \tag{8.5}$$

3）、收益与风险的度量

☞“收益”的含义通常比较丰富，一方面它是指前面定义的收益（return）或收益率（the rate of return）；另一方面它是指财富或价值的增加，也就是资产带来的“好处”。

☞对于风险资产该如何确定其整体收益和风险呢？

马科维兹的投资组合理论中选择将证券或证券组合收益率的期望值作为收益的衡量标准，将证券或证券组合的方差或标准差作为风险度量的标准。

- 设证券 i 的期末支付的期望值和方差都存在，即皆为有限值，相应的收益率 $r_i=X_i/S_i-1$ 的期望和方差也存在。
- 讨论证券的期末支付和收益率是等价的。我们以收益率为代表讨论证券的收益和风险：

$$E[r_i]=\frac{1}{S_i}E[X_i]-1;\ \mathrm{var}[r_i]=\frac{1}{S_i^2}\mathrm{var}[X_i] \tag{8.6}$$

- 构造证券组合同样需要考察组合期末的支付或组合的收益率，我们用下标p表示**证券组合**对应的量，易知：

$$W_{p,0}=W_0=\sum_{i=1}^{N}W_{i,0};\quad \widetilde{W}_T\equiv\widetilde{W}_{p,T}=\sum_{i=1}^{N}\widetilde{W}_{i,T}=\sum_{i=1}^{N}W_{i,0}(1+\tilde{r}_i) \tag{8.7}$$

$$\tilde{r}_p=\frac{\widetilde{W}_{p,T}}{W_0}-1=\sum_{i=1}^{N}\frac{\widetilde{W}_{i,T}}{W_0}-1=\sum_{i=1}^{N}\omega_i\tilde{r}_i \tag{8.8}$$

- （8.8）的含义是：投资组合的收益率等于组成投资组合的证券的收益率的加权平均，各证券收益率的权重等于投资与该证券的资金占总投资的百分比。

- 相应地，由期望和方差的性质可知证券投资组合的收益和风险分别为：

$$E[\tilde{r}_p] = \sum_{i=1}^{N} \omega_i E[\tilde{r}_i] \tag{8.9}$$

$$\mathrm{var}[\tilde{r}_p] \equiv E[\tilde{r}_p - E(\tilde{r}_p)]^2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \omega_i \omega_j \mathrm{cov}(\tilde{r}_i, \tilde{r}_i) \tag{8.10}$$

第二个式子怎么得到？Homework！

为了表述的简便，记 $E[r_i]=\bar{r}_i$，$\mathrm{var}(r_i)=\sigma_i^2$；$\mathrm{cov}(r_i, r_j)=\sigma_{ij}$ 时，上面公式记为：

$$\bar{r}_p=\sum_{i=1}^{N}\omega_i\bar{r}_i \tag{8.9a}$$

$$\sigma_p^2=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\omega_i\omega_j\sigma_{ij}=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\omega_i\omega_j\sigma_i\sigma_j\rho_{ij} \tag{8.10a}$$

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2}; \qquad \rho_{ij} = \frac{\operatorname{cov}(r_i, r_j)}{\sqrt{\operatorname{var}(r_i)}\sqrt{\operatorname{var}(r_j)}} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

若用下列向量和矩阵来表示期望收益率：

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} \equiv (\bar{r}_1, \bar{r}_2, \cdots, \bar{r}_N) \tag{8.11}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & \sigma_N^2 \end{bmatrix} \tag{8.12}$$

则(8.9)和(8.10)用简洁的向量语言表示为：

$$\bar{r}_p = \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\omega = \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E} \tag{8.9b}$$

$$\sigma_p^2 = \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega} \tag{8.10b}$$

- 协方差定义可知，(8.12)中协方差矩阵为对称矩阵，（8.10）或（8.10a）（8.10b）中等式右边为典型的二次型，由方差的定义可知**Σ**是半正定的（因为方差为非负数），若该矩阵为非退化（即可逆矩阵）矩阵，则**Σ**是正定的。

🧩 一、半正定矩阵（Positive Semi-Definite, PSD）

定义：

对称矩阵 A 若对任意非零向量 x，都有

$$x'Ax \geq 0$$

则称 A 为**半正定矩阵**。

例子：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对任意 $x = (x_1, x_2)'$，

$$x'Ax = x_1^2 \geq 0$$

因为结果始终非负，但当 $x_1 = 0$ 时结果为 0（不是严格大于 0），所以 A 是**半正定矩阵**。

💡 二、正定矩阵（Positive Definite, PD）

定义：

对称矩阵 A 若对任意非零向量 x，都有

$$x'Ax > 0$$

则称 A 为**正定矩阵**。

例子：

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

对任意非零 $x = (x_1, x_2)'$，

$$x'Ax = 2x_1^2 + 3x_2^2 > 0$$

因为只要 $x \neq 0$，该值一定大于 0，所以 A 是**正定矩阵**。

2、均值-方差标准及其理论基础

- 马氏组合理论首先明确其组合证券选择的标准：

☞（1）其他条件不变时，投资组合收益的期望值越大越好；

☞（2）其他条件不变时，投资组合收益的标准差越小越好

换言之：

给定 $\bar{r}_p$，极小化σ_p^2；给定σ_p^2，极大化$\bar{r}_p$

这就是所谓的**“均值-方差”标准**。该标准要表达的含义是：**给定收益，风险极小；给定风险，收益极大。**

1）一般框架下的理论基础

◆回到上一章基于消费的组合问题（7.P5）：

$$v(I_0)=\max_{\theta} E[u_1(c_1)]$$

$$\text{s.t}\quad I_0=\sum_{i=1}^{N} S_i\theta_i,\qquad c_1=e_1+\sum_{i=1}^{N}\theta_i X_i \tag{7. P5}$$

$$c_0,\ c_1 \geqslant 0$$

问题可以改写为：

$$\max E[u(\tilde{W}_T)]$$

- 效用函数在期末财富均值处进行泰勒展开：

$$E[u(\widetilde{W}_T)] = u(\overline{W}_T) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} u^{(n)}(\overline{W}_T) E(\widetilde{W}_T - \overline{W}_T)^n \tag{8.13}$$

(8.13)中，$E(\widetilde{W}_T - \overline{W}_T)^n$ 是期末财富的 n 阶中心矩，由概率论知识可知：

一阶中心矩必为0，因为期望值就是随机变量的“中心”，记为 μ_W；

二阶中心矩定义为方差，度量随机变量的分散程度，记为 σ_W^2；

三阶中心矩定义为偏度，对称分布的偏度为0，值大于0为正偏，反之为负偏；

四阶中心矩定义为峰度，度量分布密度形状是否“陡峭”。

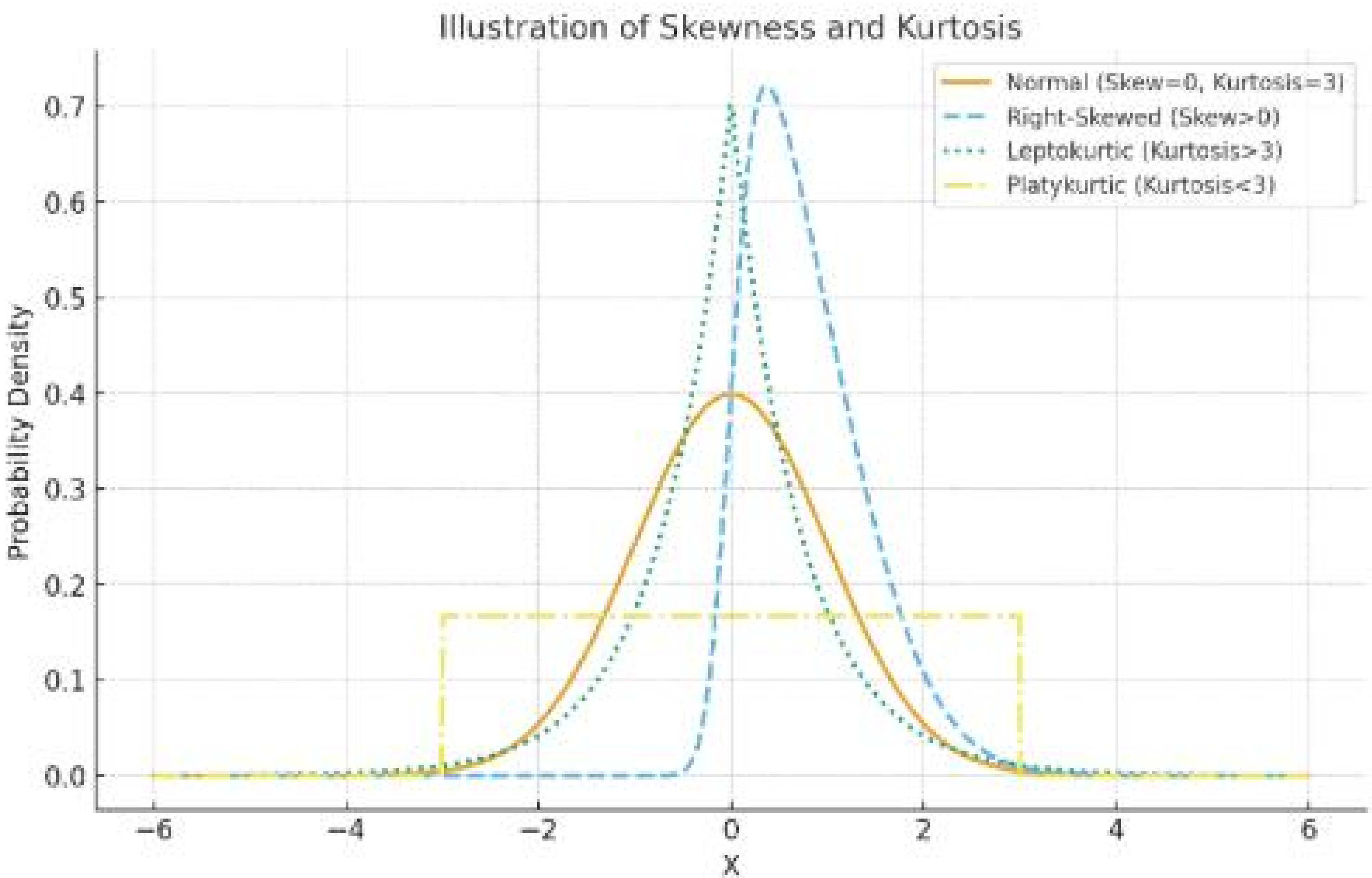
这张图直观展示了偏度（skewness）与峰度（kurtosis）的区别：

•˜Y **正态分布（偏度=0，峰度=3）：**对称、适中。

• **右偏分布（偏度>0）：**分布“拖向右边”。

•ώ **高峰厚尾分布（峰度>3）：**中心更尖。

•ώ **低峰薄尾分布（峰度<3）：**分布更平缓。



若三阶以上的中心矩取值非常小，即它们都属于“高阶无穷小”，则(8.13)近似地满足：

$$E[u(\widetilde{W}_T)] \approx u(\overline{W}_T) + \frac{1}{2}u''(\overline{W}_T)E(\widetilde{W}_T - \overline{W}_T)^2 = v(\overline{W}_T, \sigma_{W_T}) \tag{8.14}$$

即期望效用是期末财富的均值和方差(标准差)的函数，而且满足：

$$\frac{\partial E[u(\widetilde{W}_T)]}{\partial \overline{W}_T} > 0; \quad \frac{\partial E[u(\widetilde{W}_T)]}{\partial \sigma_{W_T}} < 0 \tag{8.15}$$

命题 8.1：当投资组合期末财富水平三阶以上中心矩取值非常小时，投资组合问题符合均值-方差标准，即在进行投资组合选择时，只需要关注财富的均值和方差，并且给定均值极小化方差；给定方差极大化期望。

2）特殊情形下的理论基础

◆托宾（Tobin，1965）给出了两种典型的例子，形成均值-方差标准成立的两个充分条件。该结论的核心是：

如果效用函数为二次效用函数，或者风险资产收益率服从联合正态分布，则均值-方差标准成立。

定理 8.2：当效用函数为二次函数时，投资者选择的偏好满足均值-方差标准。

定理 8.3（Tobin）：如果证券的支付服从联合正态分布，则投资者的偏好满足均值-方差标准。

- 我们省去证明（见教材），容易得到 σ—E 平面内的无差异曲线上

  ☞投资组合的期望收益r_p关于标准差 σ_p 单调递增；

  ☞ 期望收益r_p关于标准差σ_p下凸

因此在标准差—均值平面(σ—E 平面或 σ_p—r_p 平面)内形成的无差异曲线形状呈单调递增且下凸的曲线。如图 8 - 1 所示：

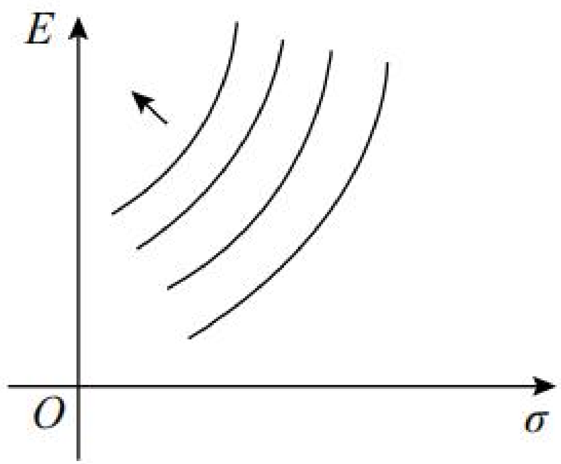


图 8-1 均值-标准差平面内的无差异曲线

下凸的经济直觉？

第二节：均值-方差标准下的组合选择

- 马科维兹投资组合理论正是在均值-方差标准下展开分析，用简单直观的方法给出了由多个证券形成的可行集、组合前沿和有效集，其后默顿（Merton）用数学规划方法给出了最优有效前沿的严格证明。

1、马科维兹版组合理论

◆马科维兹版本的组合理论直观而易于理解，从两资产情形入手，进而分析由多种资产构成投资组合形成的可行集合和有效集

☞所谓**可行集**是将每个组合所对应的均值和标准差在均值-标准差平面内描点，从而形成特定的区域或集合，反之该区域或集合内的每一点的坐标对应的均值和标准差都可以通过构造某一特殊的组合而得到，因此称为可行集

☞**有效集**则是满足均值-方差标准的组合对应的点的集合

1）两风险资产情形

◆假设资本市场包含两个风险资产，称之为资产1和资产2，它们的收益率分别为r_1和r_2，则组合的收益和风险分别为：

$$\bar{r}_p = \omega \bar{r}_1 + (1-\omega)\bar{r}_2 \tag{8.22}$$

$$\sigma_p^2 = \omega^2 \sigma_1^2 + 2\omega(1-\omega)\sigma_{12} + (1-\omega)^2 \sigma_2^2 \tag{8.23}$$

收益与风险的关系分三种情况：

（1）当ρ = 1时，理论上两风险资产完全相关。此时若限定 0 < ω < 1，则

$$\sigma_p = \omega\sigma_1 + (1-\omega)\sigma_2$$

由式（8.22）得收益与风险之间的关系：

$$\frac{r_p - r_2}{r_1 - r_2} = \frac{\sigma_p - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}$$

(8.24)

或

$$r_p = \frac{r_1 - r_2}{\sigma_1 - \sigma_2}\sigma_p + \frac{\sigma_1 r_2 - \sigma_2 r_1}{\sigma_1 - \sigma_2}$$

(8.25a)

或

$$r_p = \frac{r_1 - r_2}{\sigma_1 - \sigma_2}(\sigma_p - \sigma_2) + r_2$$

(8.25b)

此时组合的收益与风险呈直线关系，过证券 1 和 2 在平面内的两点，直线方程为（8.25b)

☞当ρ=-1 时， $\sigma_p = \pm[\omega\sigma_1 - (1-\omega)\sigma_2]$

两风险资产线性负相关，两种资产可以形成对冲关系：

$$\bar{r}_p = \frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_2}{\sigma_1 + \sigma_2}\sigma_p + \frac{\sigma_1\bar{r}_2 + \sigma_2\bar{r}}{\sigma_1 + \sigma_2} \qquad (8.27)$$

$$\bar{r}_p = -\frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_2}{\sigma_1 + \sigma_2}\sigma_p + \frac{\sigma_1\bar{r}_2 + \sigma_2\bar{r}}{\sigma_1 + \sigma_2} \qquad (8.28)$$

此时组合的收益与风险是两条相交于纵轴的射线（8.27）和（8.28）形成的折线

☞当 0<ρ<1 时，直接由（8.22）和（8.23）得到收益与风险的关系

$$\sigma_p^2 = \frac{\sigma_1^2 - 2\sigma_{12} + \sigma_2^2}{(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)^2}(\bar{r}_p - \bar{r}_2)^2 + \frac{2(\sigma_{12} + \sigma_2^2)}{\bar{r}_1 - \bar{r}_2}(\bar{r}_p - \bar{r}_2) + \sigma_2^2 \qquad (8.29)$$

自变量 x　　常数　　因变量 y

此时组合的收益与风险呈非线性关系

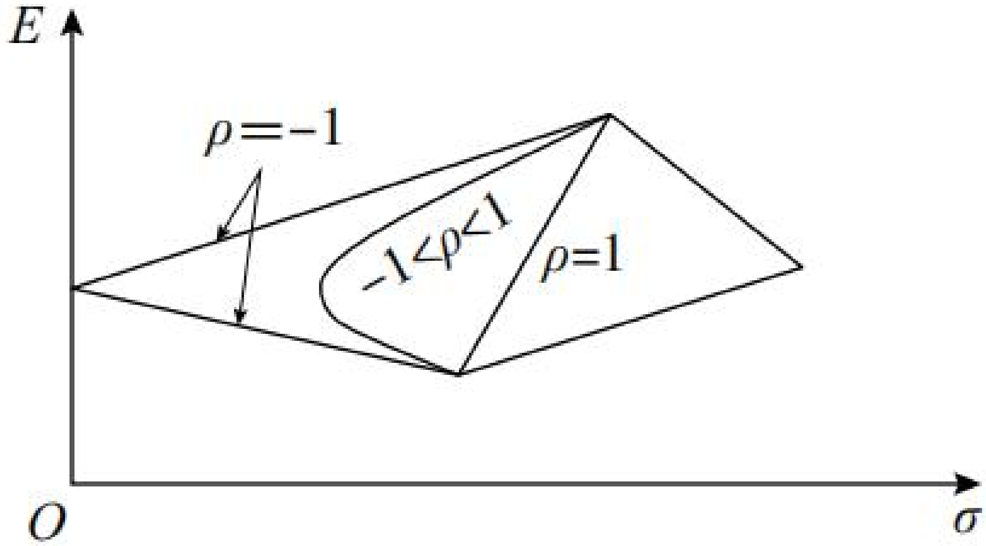


图 8-2　两资产情形下的投资组合收益与风险的关系

2）多风险资产情形

◆多风险资产对风险的分散性

☞当市场上存在 N（N>2）个风险资产时，投资组合收益率的期望和方差分别为：

取等权组合 $\omega_i = 1/N$ 时容易证明：

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\omega_i^2\sigma_i^2 = 0 \tag{8.32}$$

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i,j=1}^{N}\sum_{i\neq j}^{N}\omega_i\omega_j\sigma_{ij} = \text{常数} \tag{8.33}$$

A. 投资组合的方差分解为：

$$\sigma_p^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \omega_i^2 \sigma_i^2}_{\text{非系统风险或特质风险}} + \underbrace{\sum_{i,\,j=1}^{N} \sum_{i \neq j}^{N} \omega_i \omega_j \sigma_{ij}}_{\text{系统性风险或非特质风险}} \qquad (8.30)$$

非系统风险或特质风险

系统性风险或非特质风险

投资组合的总风险=投资组合的系统性风险+投资组合的非系统性风险

取等权组合 $\omega_i = 1/N$ 时容易证明：

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \omega_i^2 \sigma_i^2 = 0 \tag{8.32}$$

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i,\ j=1}^{N} \sum_{i\neq j}^{N} \omega_i \omega_j \sigma_{ij} = \text{常数} \tag{8.33}$$

- （8.32）和（8.33）的含义是：

投资组合的非系统风险可以被完全分散掉，而系统性风险则无法分散。

- 因此构造投资组合的目的之一就是尽量分散风险。上述结论在非等权的情形下也能得到，只是需要取足够多的证券，而且每个证券的权重足够小。

B.多风险资产情形下的初步分析

☞当我们均匀地分配资金时，随着形成投资组合的不同证券数量的增加，投资组合的非系统性风险可以被分散，但系统性险则无法分散。

☞采用半定性的方法分析多个证券形成的可行集：

- ☛从两资产开始，假设资产 1 和资产 2 形成的可行集为双曲线，如图中所示的曲线 AQB。
- ☛加入资产 3（图中的 C 点），按某一比例组合资产 1 和资产 2 得到 AQB 上的 E_1，假设 E_1与资产 3 形成的可性集为曲线 E_1C；
- ☛依次调整资产 1 与资产 2 组合中的比例得到 AQB上的 E_2，E_3，……，E_n，风别于资产 3 形成可行集曲线 E_2C，E_3C……E_nC，当组合权重连续变化时，由此形成图中的阴影区域 AQ’C。
- ☛在此基础上继续加入资产 4，资产 5，……资产 n，由此推测这些资产形成的可行集为右图中的阴影区域

前沿组合（frontier）

有效组合或有效集

可行集

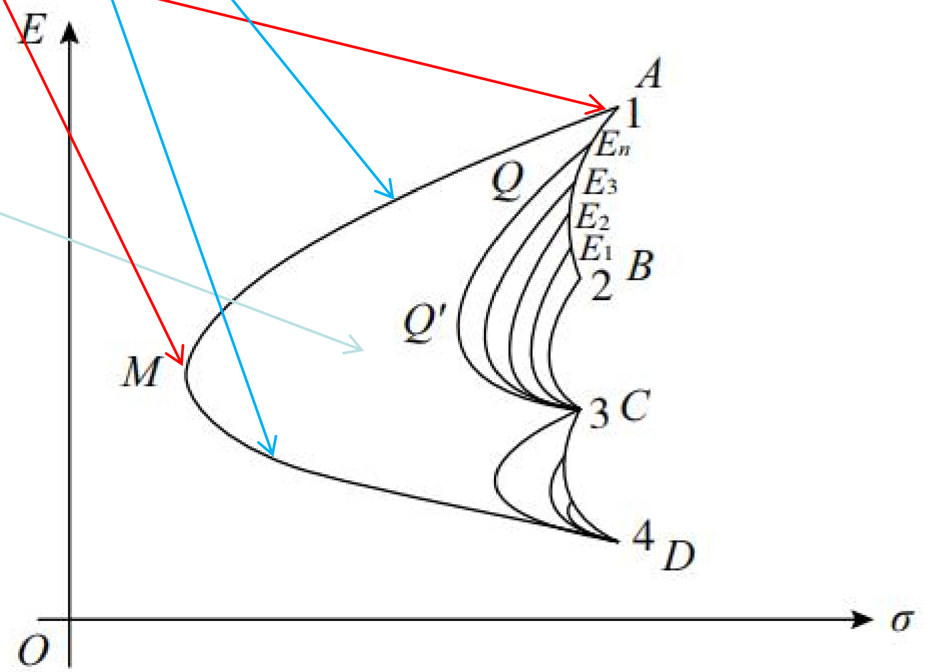
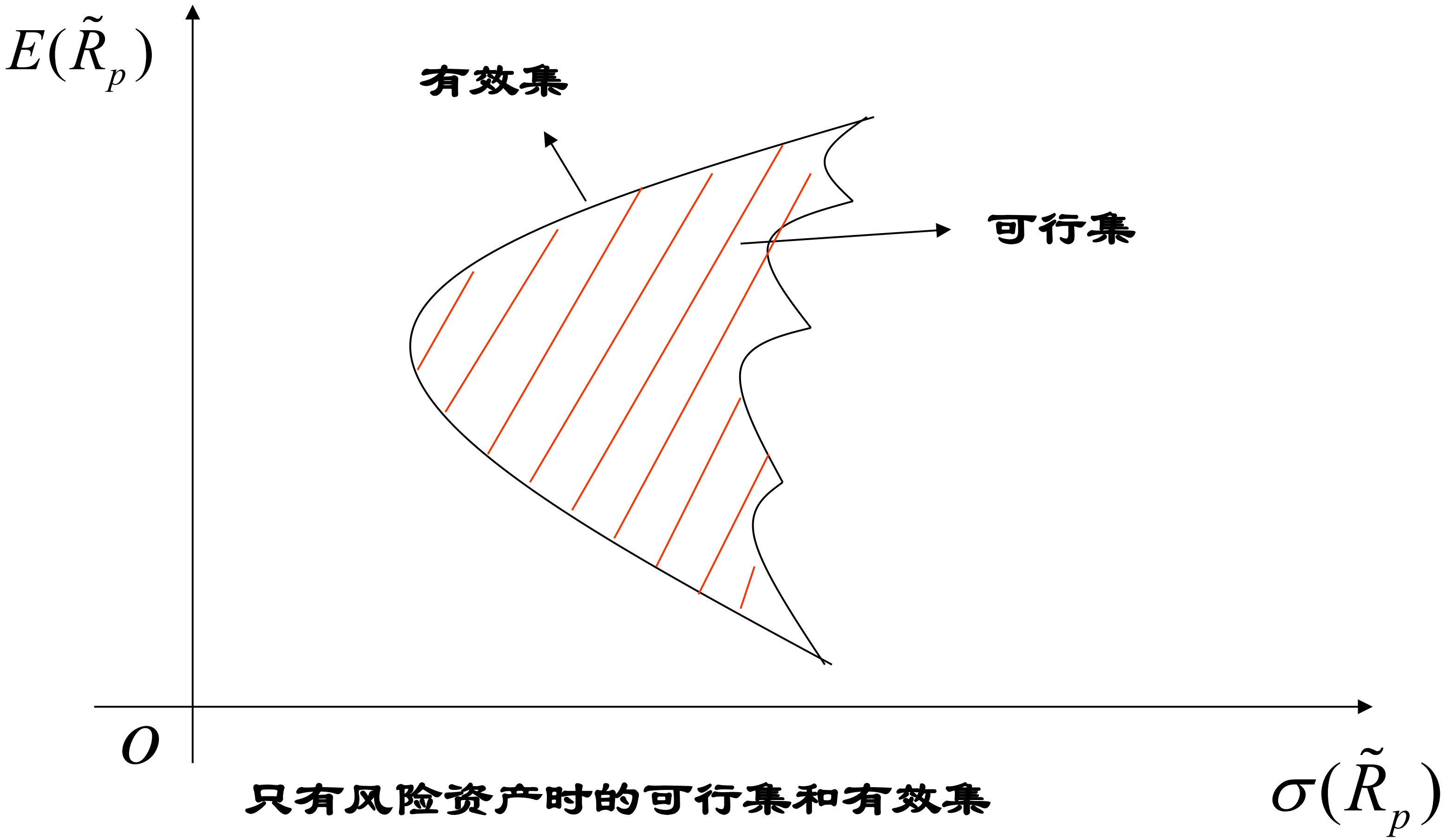


图 8-3　多证券形成的投资组合收益与风险的关系

◆N个风险资产形成的可行集与有效集



只有风险资产时的可行集和有效集

3）引进无风险资产

☞考虑两资产情形：1 个风险资产 A，1 个无风险资产 F，形成的组合的收益和风险分别为：

$$\overline{r_p} = \omega \overline{r_A} + (1 - \omega) r_f \tag{8.34}$$

$$\sigma_p^2 = \omega^2 \sigma_A^2 \tag{8.35}$$

投资组合的收益与风险之间满足直线方程：

$$\overline{r_p} = r_f + \frac{\overline{r_A} - r_f}{\sigma_A} \sigma_p \tag{8.37}$$

结论：无风险资产与任何风险资产形成的可行集为无风险资产与该风险资产的连线！

☞考虑 N+1 个资产的情形，其中包括 N 个风险资产（N≥2），1 个无风险资产。此时，可行集为N个风险资产形成的阴影中的每一点与 F 形成的射线形成 N+1 资产得到的可行集，该集合为夹在射线 FT 和 FT'之间的锥形区域，FT 为有效集，FT 和 FT'形成组合前沿。

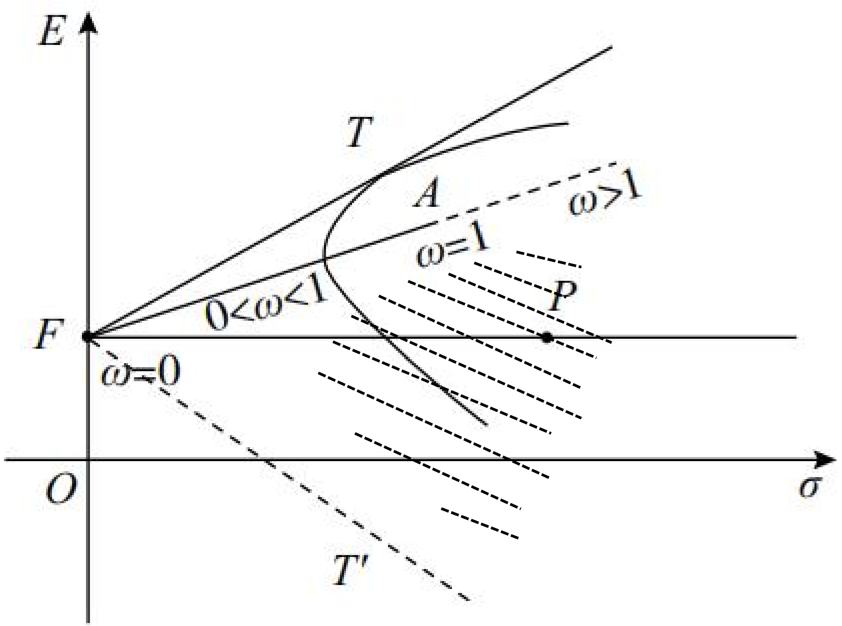
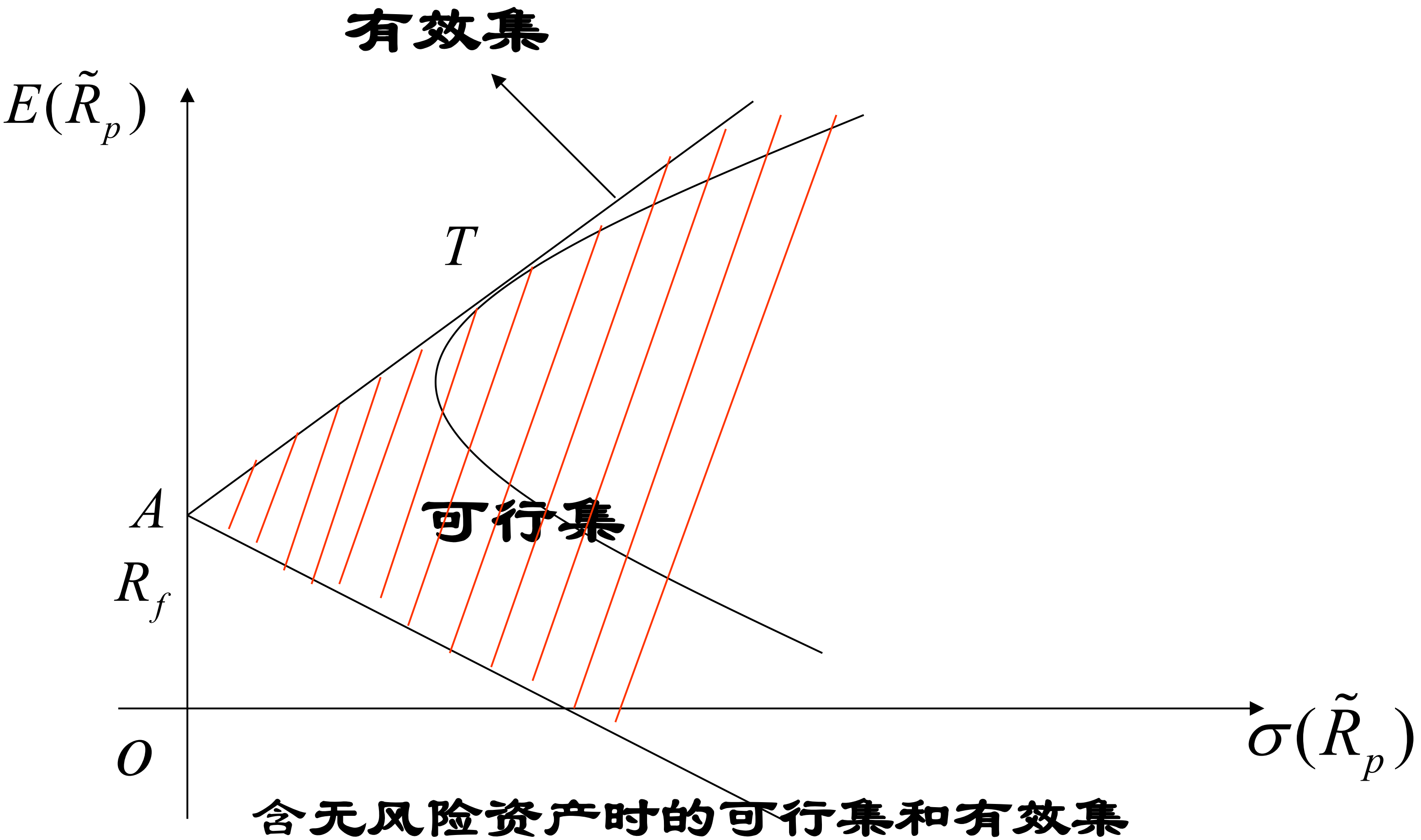


图 8-4　含无风险资产的可行集

所以点 T' 对应 ω<0，即沿 FT 线向左延伸的部分。但是方差线性变化（非负）

N+1个资产形成的有效集和可行集



含无风险资产时的可行集和有效集

2、Merton版组合理论

- 默顿（Merton，1971)用严密的数学工具证明了多风险资产情形下组合前沿是双曲线（r_p 与σ_p）或抛物线（r_p 与σ_p^2）。同时还给出了引入无风险资产情形下的结果。

一）N 个风险资产情形

1）组合前沿的推导

◎组合优化问题：

$$\min \frac{1}{2}\sigma_p^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\omega_i\omega_j\sigma_{ij}$$

$$s.t \quad \sum_{i=1}^{N}\omega_i\bar{r}_i = \bar{r}_p \qquad （8.P1）$$

$$\sum_{i=1}^{N}\omega_i = 1$$

为了推导便利，原函数前面×1/2

若用下列向量和矩阵来表示期望收益率：

$$\mathbf{E}^{\mathrm{T}} \equiv (\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_N)$$

$$\mathbf{\Sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & \sigma_N^2 \end{bmatrix}$$

则（8.6）和（8.7）用简洁的向量语言表示为：

$$\bar{r}_p = \mathbf{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}$$

$$\sigma_p^2 = \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}\boldsymbol{\omega}$$

- 向量语言下在组合问题：

$$
\begin{aligned}
&\min \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega} \\
&\text{s. t}\quad \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E} = \bar{r}_p \\
&\qquad\ \ \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I} = 1
\end{aligned}
\tag{8. P2}
$$

- 处理：

令拉格朗日函数为：

$$L = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega} + \lambda\left[\bar{r}_p - \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\right] + \gamma\left[1 - \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\right] \tag{8.38}$$

其中 γ 和 λ 是拉格朗日乘数，则一阶条件为：

$$\frac{\partial L}{\partial \omega} = \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega} - (\lambda\boldsymbol{E} + \gamma\boldsymbol{I}) = 0 \tag{8.39}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \bar{r}_p - \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E} = 0 \tag{8.40}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} = 1 - \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I} = 0 \tag{8.41}$$

- 最优组合：

$$\boldsymbol{\omega}_p^* = \lambda(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{E}) + \gamma(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{I}) \tag{8.42}$$

$$\Downarrow$$

- 问题（8.P2）对应的最优解表示的投资组合向量为：

$$\boldsymbol{\omega}_p^* = \frac{B(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{I}) - A(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{E})}{D} + \frac{C(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{E}) - A(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{I})}{D}E[\tilde{r}_p] \tag{8.45}$$

因为协方差矩阵是可逆矩阵，同时又是对称矩阵，因此上面的一阶必要条件也是充分要条件，也就是说投资组合位于组合前沿的充要条件是满足方程 (8.42)。将 (8.42) 代入 (8.40)、(8.41)，解出待定系数后可以得到最终的前沿组合，即：

$$\bar{r}_p = \lambda\left(\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{E}\right) + \gamma\left(\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{I}\right)$$
$$1 = \lambda\left(\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{E}\right) + \gamma\left(\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{I}\right)$$

解得：

$$\lambda = \frac{C\bar{r}_p - A}{D}, \quad \gamma = \frac{B - A\bar{r}_p}{D} \quad (8.43)$$

其中：

$$A = \boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{I}; \quad B = \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{E}; \quad C = \boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{I}; \quad D = BC - A^2 \quad (8.44$$

因为协方差矩阵是正定的，所以 $B > 0, C > 0$，又因为：

$$(\boldsymbol{AE} - \boldsymbol{BI})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{AE} - \boldsymbol{BI}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{BC} - \boldsymbol{A}^2) = \boldsymbol{BD} > 0$$

所以 $D > 0$。

$$\sigma^2(\bar{r}_p) = \omega_p^{*\mathrm{T}}\Sigma\omega_p^{*} \tag{8.46}$$

- 化简可以得到最小方差边界所对应的曲线方程——组合前沿方程曲线：

$$\frac{\sigma^2(\tilde{r}_p)}{1/C} - \frac{(E[\tilde{r}_p] - A/C)^2}{D/C} = 1 \tag{8.47}$$

自变量 x　　　　因变量 y

在 $\sigma_p - r_p$ 平面内，σ_p 是自变量 x，r_p 是因变量 y。因此，方程 (8.47) 是 r_p 关于 σ_p 的双曲线。由于标准差是方差的算术平方根，因此非负，从而方程是双曲线的右半支；在 $\sigma_p^2 - r_p$ 平面内，σ_p^2 是自变量 x，r_p 依然是因变量 y。因此，方程 (8.47) 同时也是 r_p 关于 σ_p^2 的**抛物线**。由于它位于所有可以得到的投资组合的最左侧或最西边，因此被称为**组合前沿** (portfolio frontier)，组合前沿上的每一个点对应的组合名称为**前沿组合** (frontier portfolio)。至此，我们证明了图 8-3 中最西边界的真实形状。

2）、组合前沿的性质

◆（8.45）给出了判断一个投资组合是否是前沿组合充要条件，以此为出发点还可以发现前沿组合很多有趣的性质，回到公式：

$$\boldsymbol{\omega}_p^* = \boxed{\frac{B(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{I}) - A(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{E})}{D}} + \boxed{\frac{C(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{E}) - A(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{I})}{D}} E[\tilde{r}_p] \qquad (8.45)$$

定理 8.4： 假设 N 个风险资产的协方差矩阵可逆，则由 N 个资产形成的投资组合是前沿组合的充分必要条件是该组合满足：

$$\omega_p^* = g + hE[\tilde{r}_p] \qquad (8.46)$$

其中：

$$g = \frac{1}{D}[B(\Sigma^{-1}I) - A(\Sigma^{-1}E)]$$

$$h = \frac{1}{D}[C(\Sigma^{-1}E) - A(\Sigma^{-1}I)]$$

定理 8.5： （1）g 是前沿组合中期望收益为 0 的组合之权重向量；g+h 是前沿组合中期望收益为 1 的组合之权重向量；

（2）全部组合前沿都可以由组合 g 和 g+h 生成，即任何一个前沿组合都可以表示为 g 和 g+h 的线性组合。

(2) 对组合前沿上的任意一个组合 q，若其期望收益为 $E[\bar{r}_q]$，则它必定满足 (8.44)。另一方面我们构造 $\mathbf{g}$ 和 $\mathbf{g}+\mathbf{h}$ 的投资组合 $(\alpha, 1-\alpha)$，则该组合的权重为：

$$\boldsymbol{\omega}_p = \alpha\mathbf{g} + (1-\alpha)(\mathbf{g}+\mathbf{h}) = \mathbf{g} + (1-\alpha)\mathbf{h}$$

当 $\alpha = 1 - E[\bar{r}_q]$ 时，$\boldsymbol{\omega}_p = \boldsymbol{\omega}_q$，从而组合 $\mathbf{g}$ 和 $\mathbf{g}+\mathbf{h}$ 复制了前沿组合 q，由组合 q 的任意性可知 $\mathbf{g}$ 和 $\mathbf{g}+\mathbf{h}$ 可以生成全部前沿。证毕。

定理 8.6： （1）全部组合前沿都可以由任何两个不同的前沿组合生成；

（2）任何前沿组合的线性组合均为前沿组合。

- 结论：任何两个互不相同的前沿组合能够生成全部的前沿组合，因此，两个不同的前沿组合就可以推出组合前沿。

◆在前沿组合中，有一个最特殊的组合，其方差最小，我们称之为最小方差组合（minimum variance portfolio），简称为*mvp*。易知 *mvp* 具有下列特性：

(1) mvp 组合为：

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{mvp}} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{I}}{\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{I}} \tag{8.49}$$

(2) mvp 组合的期望和方差分别为：

$$E[\tilde{r}_{\text{mvp}}] = \frac{A}{C} \tag{8.50}$$

$$\operatorname{var}[\tilde{r}_{\text{mvp}}] \equiv \sigma^2_{\text{mvp}} = \frac{1}{C} \tag{8.51}$$

要找到**最小方差**组合 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{mvp}}$，需要使用**优化**的方法。最小方差组合 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{mvp}}$ 是通过求解以下约束优化问题得到的：

$$\min_{\boldsymbol{\omega}} \quad \sigma^2(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I} = 1 \quad (\text{权重和为 } 1)$$

$$\frac{\sigma^2(\tilde{r}_p)}{1/C} - \frac{(E[\tilde{r}_p] - A/C)^2}{D/C} = 1 \tag{8.47}$$

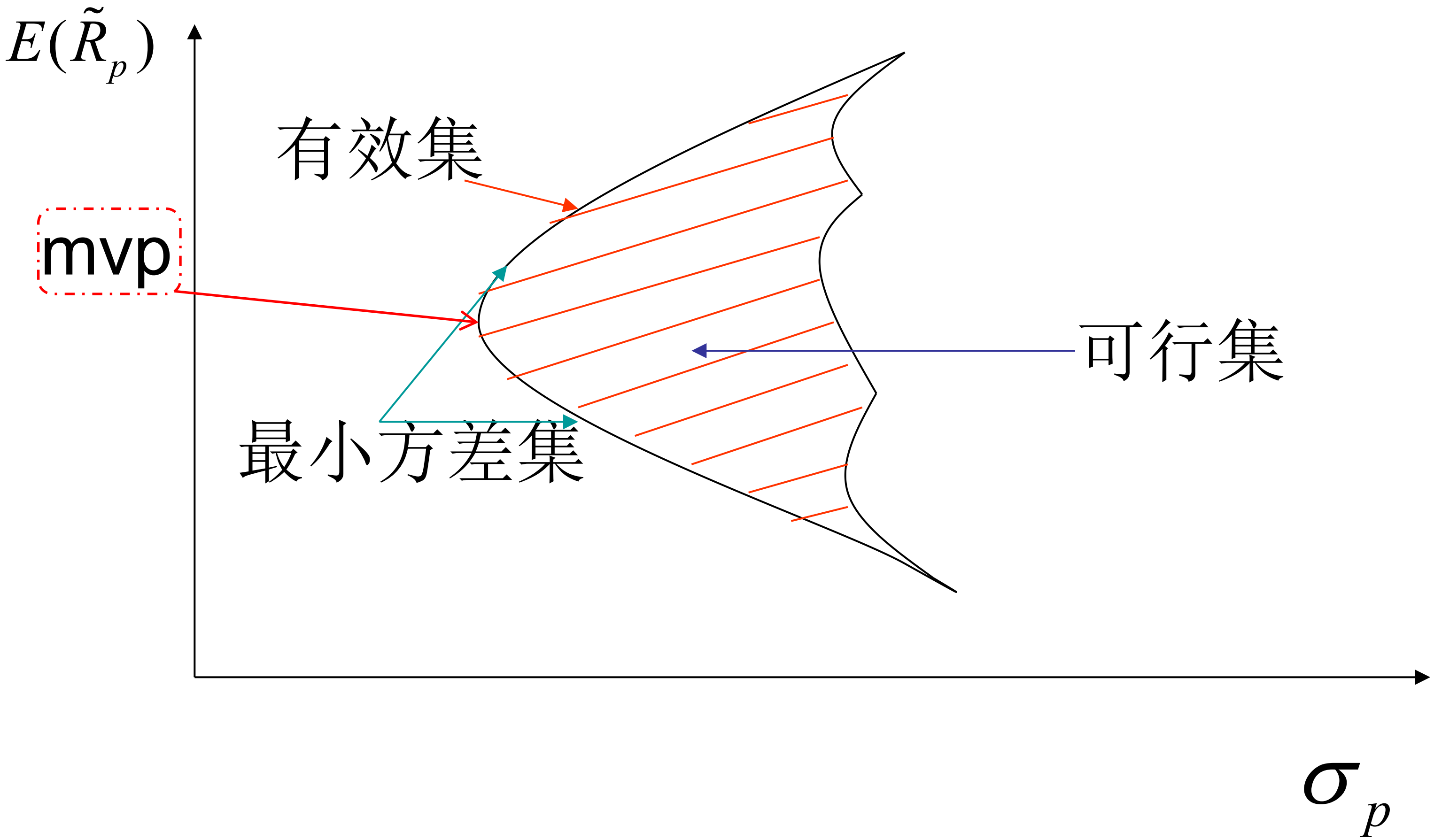
• ☞各种组合的定义：

定义 8.1：组合前沿上所有期望收益大于 *mvp* 组合期望收益的投资组合称为有效投资组合（efficient portfolio），所有的有效组合形成有效前沿；所有期望收益低于 mvp 组合收益的非 *mvp* 组合称为非有效组合(inefficient portfolio)。

定理 8.7：有效组合的任意凸组合都是有效组合，有效组合的集合为凸集。

只有N个风险资产情形下的有效集

- N个风险资产情形：



3)、零协方差组合（选学）

◆在所有前沿组合中最小方差组合 mvp 扮演了一个非常重要的角色，它可以用来区分组合前沿上的组合是否有效。除此之外，还有一种前沿组合也比较重要，它就是零协方差组合。

定义 8.2： 在投资组合前沿上，任何一个异于最小方差组合（mvp）的前沿组合 p 都存在一个前沿组合，它与组合 p 的协方差为零，记为 zc(p)，称为 p 的**零协方差前沿组合**，简称**零协方差组合**。

◆我们不加证明地给出性质和定理：

性质 8.1：

(1) 组合前沿上的任一组合 p(除 mvp 之外)，存在唯一的前沿组合 $\mathrm{zc}(p)$ 与之协方差为零；

(2) 若 p 为有效组合，则 $\mathrm{zc}(p)$ 必为非有效组合；若 p 为非有效组合，则 $\mathrm{zc}(p)$ 必为有效组合；

(3) 前沿组合 p 的零协方差前沿组合的零协方差前沿组合为组合 p，即：

$$\mathrm{zc}(\mathrm{zc}(p)) = p \tag{8.54}$$

性质8.2：(1)在σ-E平面内，任何有效前沿组合p的零协方差组合zc(p)可以通过如下方式得到：过p对应的点作组合前沿的切线，切线在E轴(期望收益轴)上的截距即为零协方差组合的期望收益$E[r_{zc(p)}]$，即组合前沿上期望收益等于$E[r_{zc(p)}]$对应的点，即为zc(p)；

(2)在σ^2-E平面内，任何有效前沿组合p的零协方差组合zc(p)可以通过如下方式得到：p与最小方差组合(mvp)的连线在E轴的截距即为零协方差组合的期望收益$E[r_{zc(p)}]$，即组合前沿上期望收益等于$E[r_{zc(p)}]$对应的点，即为zc(p)。

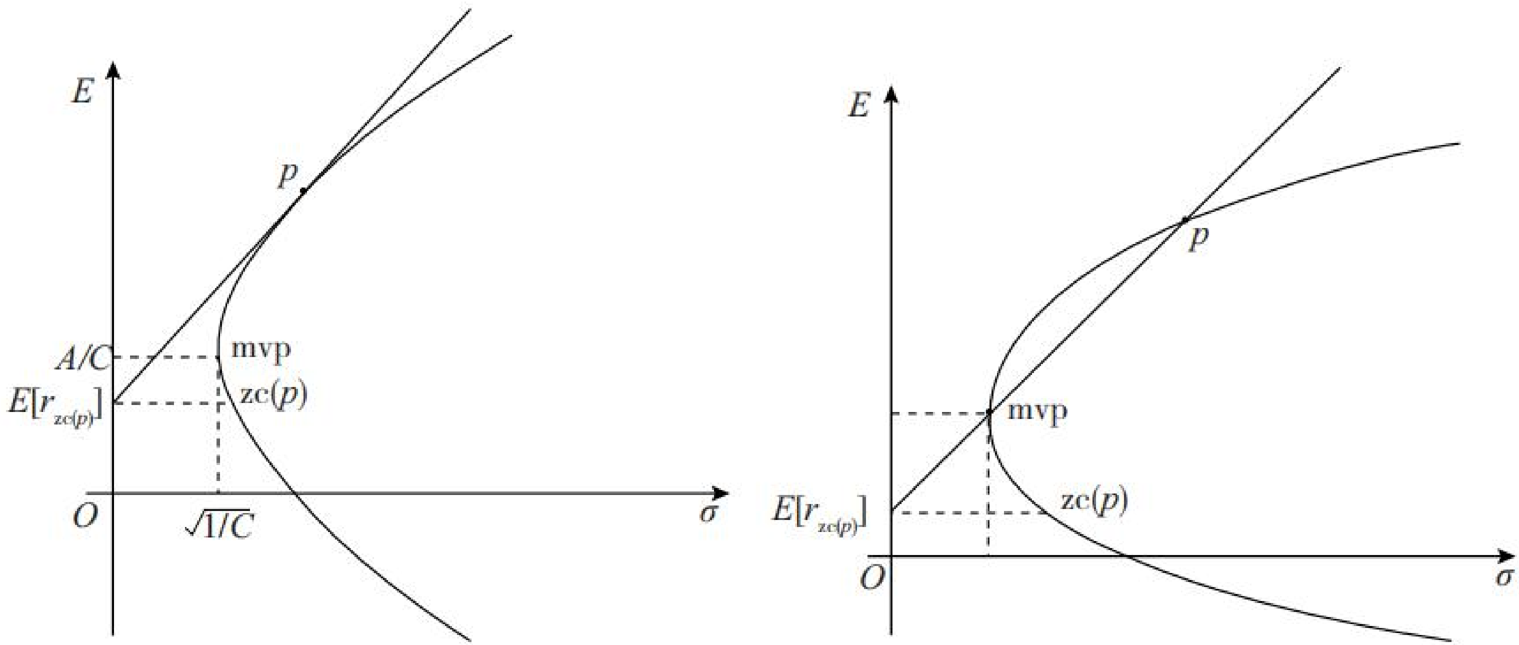


图 8-5　前沿组合的零协方差组合的画法

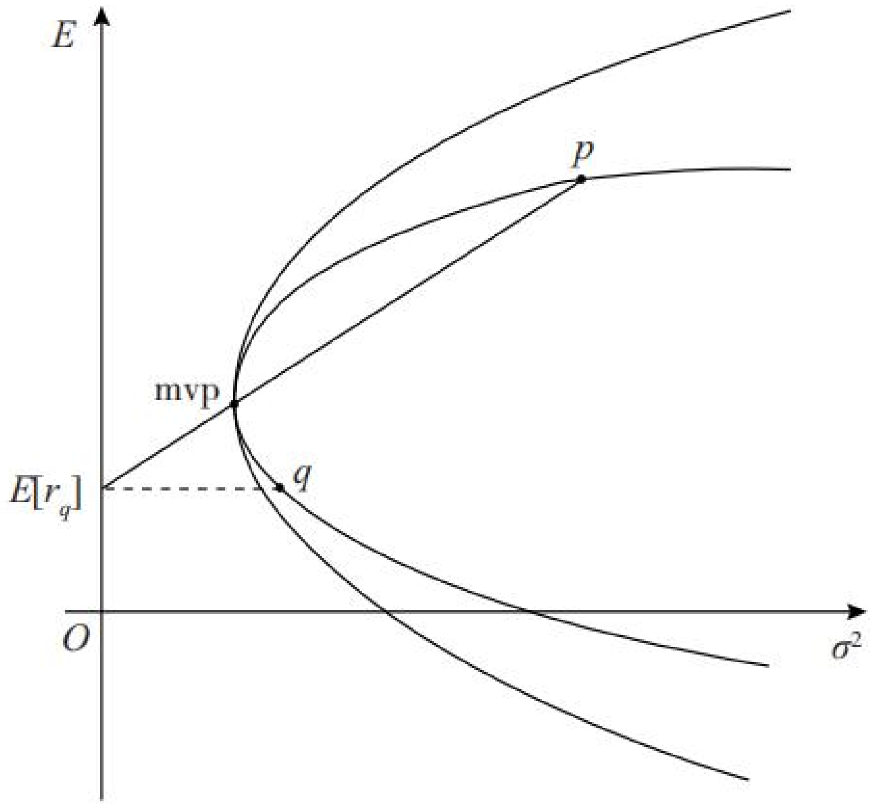


图 8-6 非前沿组合的零协方差组合的画法

定理 8.7：在 σ^2-E 平面内，任何非前沿组合 p 与最小方差组合(mvp)的连线在 E 轴的截距等于组合 q 的期望收益，组合 q 与 p 具有零协方差，是所有与 p 具有零协方差的组合中方差最小的组合，即 q 是 p 与 mvp 形成的组合前沿上与 p 具有零协方差的组合，而 p 与 mvp 形成的组合前沿位于所有资产形成的组合前沿内部。

二）引进无风险资产情形

◆在 N个风险资产的基础上引进收益率为 r_F的无风险资产，形成 N+1个投资机会时，经济人的最优组合问题转化为：

$$
\begin{aligned}
&\min_{\omega_p} \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_p^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}_p \\
&\text{s.t}\quad \boldsymbol{\omega}_p^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E} + (1 - \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I})r_f = E[r_p]
\end{aligned}
\qquad (8.\mathrm{P4})
$$

引入拉氏乘数后由一阶条件可得最优解为：

$$\boldsymbol{\omega}_p^* = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{E} - r_f\boldsymbol{I})\frac{E[r_p] - r_f}{H} \quad (8.59)$$

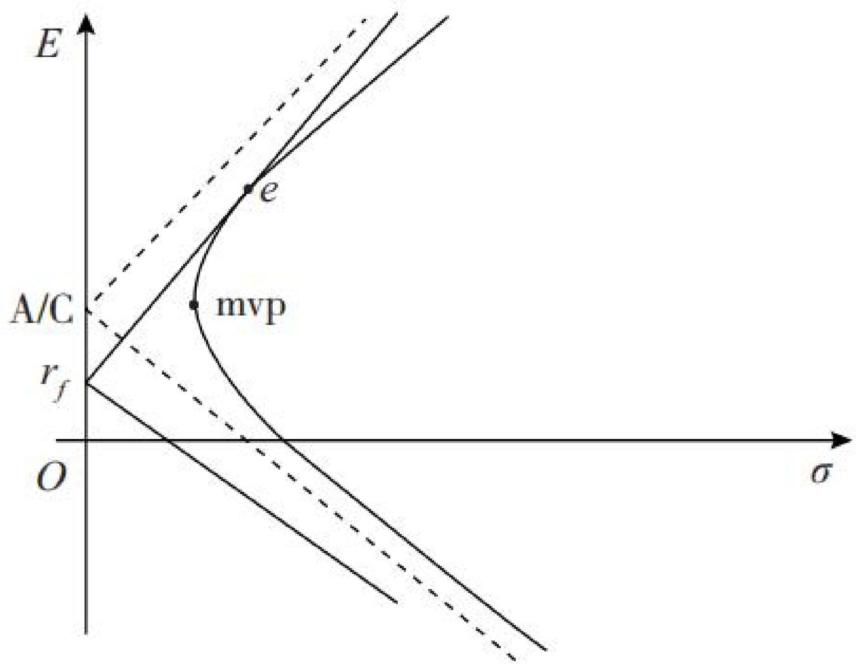
其中，$H = (\boldsymbol{E} - r_f\boldsymbol{I})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{E} - r_f\boldsymbol{I}) = B - 2Ar_f + Cr_f^2$，易证 $H > 0$。此时，最优组合 p 的方差为：

$$\sigma_p^2(\bar{r}_p) = \boldsymbol{\omega}_p^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}_p^* = \frac{(E[r_p] - r_f)^2}{H} \quad (8.60)$$

等价地：

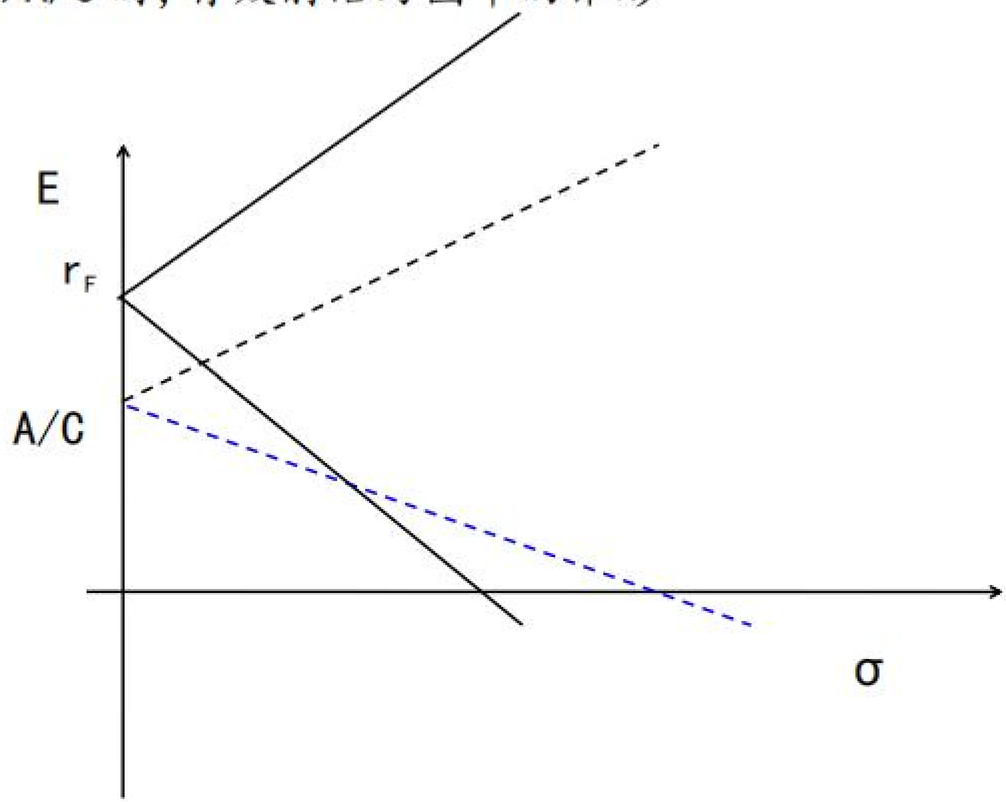
$$\sigma(r_p) = \begin{cases} \frac{E[r_p]-r_f}{\sqrt{H}} & E[r_p] \geq r_f \\ -\frac{E[r_p]-r_f}{\sqrt{H}} & E[r_p] < r_f \end{cases} \quad (8.61)$$

情形一：$r_f<A/C$ 时，有效前沿为图中的锥形



组合前沿是形成的两条射线，锥形是可行解

情形二：r_F>A/C 时，有效前沿为图中的锥形



情形三：$r_F = A/C$ 时，有效前沿为图中的锥形

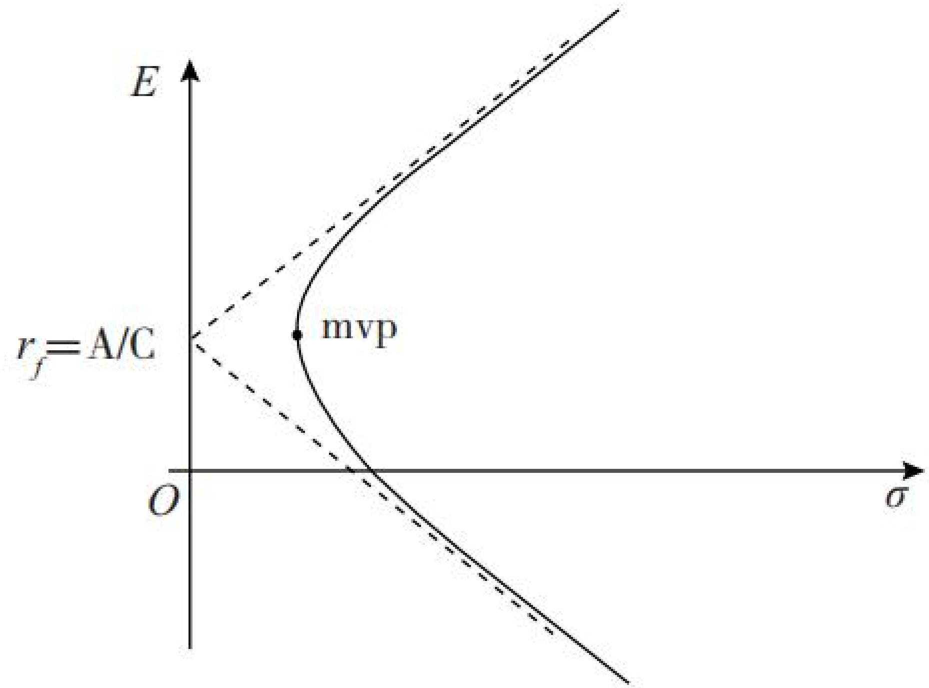


图 8-7　N+1 个资产对应的组合前沿