第十次作业答案

金融经济学-2025 年秋

Answer 1

1 期末有三种等概率状态 $s \in \{a, b, c\}$，$\pi_s = \frac{1}{3}$。设

$$q_s > 0 \quad (s = a, b, c)$$

为在 $t = 0$ 购买一份“在 $t = 1$ 且仅在状态 s 支付 1 单位消费品”的 Arrow 证券的状态价格。

两位参与者的禀赋为

$$(w_{1,0}, w_{1,a}, w_{1,b}, w_{1,c}) = (100, 0, 0, 0), \qquad (w_{2,0}, w_{2,a}, w_{2,b}, w_{2,c}) = (0, 200, 100, 50).$$

总禀赋（也即均衡总消费）为

$$C_0 = 100, \qquad (C_a, C_b, C_c) = (200, 100, 50).$$

时间偏好为 1（即贴现因子 $\beta = 1$）。效用为 CRRA：

$$u_\gamma(c) = \begin{cases} \ln c, & \gamma = 1, \\ \dfrac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}, & \gamma \neq 1, \end{cases} \qquad c > 0.$$

因此

$$u_1(c) = \ln c, \qquad u_2(c) = \frac{c^{-1}}{-1} = -\frac{1}{c}.$$

在完全市场下，每个参与者在 $t = 0$ 选择消费计划

$$(c_{i,0}, c_{i,a}, c_{i,b}, c_{i,c})$$

以最大化

$$U_i = u_i(c_{i,0}) + \sum_{s \in \{a,b,c\}} \pi_s\, u_i(c_{i,s})$$

并满足跨期预算约束

$$c_{i,0} + \sum_s q_s c_{i,s} \ \leq \ w_{i,0} + \sum_s q_s w_{i,s}.$$

均衡还需满足市场出清：

$$c_{1,0}+c_{2,0}=C_0,\qquad c_{1,s}+c_{2,s}=C_s\ \ (s=a,b,c).$$

(1) 求两位参与者的最优消费计划

参与者 1（$\gamma_1=1$，对数效用）

给定状态价格 (q_a,q_b,q_c)，参与者 1 的问题为

$$\max_{c_{1,0},c_{1,a},c_{1,b},c_{1,c}>0}\left\{\ln c_{1,0}+\frac{1}{3}(\ln c_{1,a}+\ln c_{1,b}+\ln c_{1,c})\right\}$$

$$\text{s.t.}\quad c_{1,0}+q_ac_{1,a}+q_bc_{1,b}+q_cc_{1,c}\le 100.$$

拉格朗日函数（取等号成立）：

$$\mathcal{L}=\ln c_{1,0}+\frac{1}{3}\sum_s\ln c_{1,s}+\lambda_1\Big(100-c_{1,0}-\sum_s q_sc_{1,s}\Big).$$

一阶条件：

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c_{1,0}}:\quad \frac{1}{c_{1,0}}-\lambda_1=0\ \Rightarrow\ \lambda_1=\frac{1}{c_{1,0}},$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c_{1,s}}:\quad \frac{1}{3}\frac{1}{c_{1,s}}-\lambda_1q_s=0\ \Rightarrow\ c_{1,s}=\frac{1}{3\lambda_1q_s}=\frac{c_{1,0}}{3q_s}.$$

代回预算约束：

$$100=c_{1,0}+\sum_s q_sc_{1,s}=c_{1,0}+\sum_s q_s\cdot\frac{c_{1,0}}{3q_s}=c_{1,0}+\frac{c_{1,0}}{3}\cdot 3=2c_{1,0}.$$

故

$$\boxed{c_{1,0}^*=50},\qquad \boxed{c_{1,s}^*=\frac{50}{3q_s}\ \ (s=a,b,c)}.$$

参与者 2（$\gamma_2=2$，$u(c)=-1/c$）

参与者 2 的问题为

$$\max_{c_{2,0},c_{2,a},c_{2,b},c_{2,c}>0}\left\{-\frac{1}{c_{2,0}}+\frac{1}{3}\sum_s\Big(-\frac{1}{c_{2,s}}\Big)\right\}$$

$$\text{s.t.}\quad c_{2,0}+\sum_s q_sc_{2,s}\le 200q_a+100q_b+50q_c.$$

拉格朗日函数：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{c_{2,0}} - \frac{1}{3}\sum_s \frac{1}{c_{2,s}} + \lambda_2\Big(200q_a + 100q_b + 50q_c - c_{2,0} - \sum_s q_s c_{2,s}\Big).$$

注意 $u'(c) = \frac{1}{c^2}$。一阶条件：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_{2,0}}: \quad \frac{1}{c_{2,0}^2} - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{c_{2,0}^2},$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_{2,s}}: \quad \frac{1}{3}\frac{1}{c_{2,s}^2} - \lambda_2 q_s = 0 \Rightarrow c_{2,s} = \frac{1}{\sqrt{3\lambda_2 q_s}} = \frac{c_{2,0}}{\sqrt{3q_s}}.$$

因此其最优消费满足

$$\boxed{c_{2,s}^* = \frac{c_{2,0}^*}{\sqrt{3q_s}} \ \ (s = a, b, c)}.$$

接下来用 $t = 0$ 市场出清确定 $c_{2,0}^*$。由上面已得 $c_{1,0}^* = 50$，且

$$c_{1,0}^* + c_{2,0}^* = C_0 = 100 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c_{2,0}^* = 50}.$$

故

$$\boxed{c_{2,s}^* = \frac{50}{\sqrt{3q_s}} \ \ (s = a, b, c)}.$$

(2) 求解均衡状态价格 q_a, q_b, q_c

对每个状态 s，用 $t = 1$ 市场出清 $c_{1,s}^* + c_{2,s}^* = C_s$：

$$\frac{50}{3q_s} + \frac{50}{\sqrt{3q_s}} = C_s.$$

令 $x_s = \sqrt{q_s} > 0$，则 $q_s = x_s^2$，并且

$$\frac{50}{3x_s^2} + \frac{50}{\sqrt{3}\,x_s} = C_s.$$

两边乘以 $3x_s^2$ 得到一元二次方程：

$$50 + 50\sqrt{3}\,x_s = 3C_s x_s^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3C_s x_s^2 - 50\sqrt{3}\,x_s - 50 = 0.$$

取正根（$x_s>0$）：

$$x_s=\frac{50\sqrt{3}+\sqrt{(50\sqrt{3})^2+4\cdot 3C_s\cdot 50}}{6C_s}=\frac{50\sqrt{3}+\sqrt{7500+600C_s}}{6C_s},\qquad q_s=x_s^2.$$

分别代入 $C_a=200$, $C_b=100$, $C_c=50$：

状态 a：$C_a=200$

$$\sqrt{7500+600C_a}=\sqrt{7500+120000}=\sqrt{127500}=50\sqrt{51}.$$

$$x_a=\frac{50\sqrt{3}+50\sqrt{51}}{1200}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{51}}{24},\quad q_a=x_a^2=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{51})^2}{576}=\frac{54+2\sqrt{153}}{576}=\frac{9+\sqrt{17}}{96}.$$

状态 b：$C_b=100$

$$\sqrt{7500+600C_b}=\sqrt{7500+60000}=\sqrt{67500}=150\sqrt{3}.$$

$$x_b=\frac{50\sqrt{3}+150\sqrt{3}}{600}=\frac{\sqrt{3}}{3},\quad q_b=x_b^2=\frac{1}{3}.$$

状态 c：$C_c=50$

$$\sqrt{7500+600C_c}=\sqrt{7500+30000}=\sqrt{37500}=50\sqrt{15}.$$

$$x_c=\frac{50\sqrt{3}+50\sqrt{15}}{300}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6},\quad q_c=x_c^2=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{15})^2}{36}=\frac{18+2\sqrt{45}}{36}=\frac{3+\sqrt{5}}{6}.$$

因此均衡状态价格为

$$\boxed{q_a=\frac{9+\sqrt{17}}{96},\qquad q_b=\frac{1}{3},\qquad q_c=\frac{3+\sqrt{5}}{6}.}$$

(1) 的最优消费计划（代回 q_s ）

参与者 1：

$$c_{1,0}^*=50,\qquad c_{1,s}^*=\frac{50}{3q_s}.$$

于是

$$c_{1,a}^*=\frac{50}{3\cdot\frac{9+\sqrt{17}}{96}}=\frac{1600}{9+\sqrt{17}}=\frac{1600(9-\sqrt{17})}{81-17}=25(9-\sqrt{17}),$$

$$c_{1,b}^*=\frac{50}{3\cdot\frac{1}{3}}=50,\qquad c_{1,c}^*=\frac{50}{3\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{6}}=\frac{100}{3+\sqrt{5}}=25(3-\sqrt{5}).$$

参与者 2：

$$c_{2,0}^*=50,\qquad c_{2,s}^*=\frac{50}{\sqrt{3q_s}}\quad \text{或}\quad c_{2,s}^*=C_s-c_{1,s}^*.$$

即：

$$c_{2,a}^*=200-25(9-\sqrt{17})=25(\sqrt{17}-1),$$

$$c_{2,b}^*=100-50=50,$$

$$c_{2,c}^*=50-25(3-\sqrt{5})=25(\sqrt{5}-1).$$

综上，

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{参与者 1：}\quad (c_{1,0}^*,c_{1,a}^*,c_{1,b}^*,c_{1,c}^*)=\Big(50,\ 25(9-\sqrt{17}),\ 50,\ 25(3-\sqrt{5})\Big),\\ &\text{参与者 2：}\quad (c_{2,0}^*,c_{2,a}^*,c_{2,b}^*,c_{2,c}^*)=\Big(50,\ 25(\sqrt{17}-1),\ 50,\ 25(\sqrt{5}-1)\Big).\end{aligned}}$$

(3) 支付向量为 $(200,100,50)$ 的股票的均衡价格

在 Arrow–Debreu 状态价格体系下，任意 $t=1$ 支付向量 $X=(X_a,X_b,X_c)$ 的资产，其 $t=0$ 价格为

$$P=\sum_s q_sX_s.$$

对本题股票 $X=(200,100,50)$，

$$P=200q_a+100q_b+50q_c=200\cdot\frac{9+\sqrt{17}}{96}+100\cdot\frac{1}{3}+50\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{6}.$$

化简：

$$200\cdot\frac{9+\sqrt{17}}{96}=\frac{25}{12}(9+\sqrt{17})=\frac{225+25\sqrt{17}}{12},$$

$$100\cdot\frac{1}{3}=\frac{400}{12},\qquad 50\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{6}=\frac{100(3+\sqrt{5})}{12}=\frac{300+100\sqrt{5}}{12}.$$

故

$$\boxed{P=\frac{225+25\sqrt{17}+400+300+100\sqrt{5}}{12}=\frac{925+25\sqrt{17}+100\sqrt{5}}{12}=\frac{25}{12}\Big(37+\sqrt{17}+4\sqrt{5}\Big).}$$

Answer 2

$t=0,1$ 两时点；$t=1$ 有两状态 a,b，概率分别为 $\pi, 1-\pi$。市场上两只证券：

$$X_1=(1,1)\quad (\text{无风险证券}),\qquad X_2=(uC,dC)\quad (\text{风险证券/股票}),$$

其中 $C>0$, $0<d<u$。设两证券在 $t=0$ 的价格分别为 P_1, P_2（用 $t=0$ 消费品作计价单位）。

经济中有 K 个经济人。经济人 k 的禀赋为：$t=0$ 拥有 s_k 单位消费品且持有 s_k 单位证券 2，

$$s_k>0,\qquad \sum_{k=1}^{K} s_k=1.$$

效用函数：

$$U_k=\ln c_{k,0}+\rho\Big[\pi\ln c_{k,a}+(1-\pi)\ln c_{k,b}\Big],\qquad \rho>0.$$

$t=0$ 的状态价格为

$$q_a:\ t=1\text{ 状态}a\text{ 的 1 单位消费在}t=0\text{ 的价格},\qquad q_b:\ \text{同理}.$$

则任意支付 $X=(X_a,X_b)$ 的价格为

$$P(X)=q_aX_a+q_bX_b.$$

特别地

$$P_1=q_a+q_b,\qquad P_2=q_a(uC)+q_b(dC).$$

(1) **证明证券市场是完全的**

两状态经济下，市场完全当且仅当可交易证券的支付向量张成 $\mathbb{R}^2$。两只证券的支付矩阵为

$$\begin{pmatrix}1 & uC\\ 1 & dC\end{pmatrix}.$$

其行列式

$$\det=1\cdot dC-1\cdot uC=(d-u)C\neq 0\quad (\text{因为}C>0,\ d\neq u).$$

故矩阵可逆，$\{(1,1),(uC,dC)\}$ 线性无关并张成 $\mathbb{R}^2$，从而任意状态依赖支付 (Y_a,Y_b) 都能由两证券复制，市场完全。

(2) **求解每个经济人的最优消费--投资选择**

经济人 k 的现值预算约束为

$$c_{k,0}+q_a c_{k,a}+q_b c_{k,b} \ \le\ s_k+q_a(s_k uC)+q_b(s_k dC)=s_k\Big(1+q_a uC+q_b dC\Big).$$

记其现值财富

$$W_k := s_k\Big(1+q_a uC+q_b dC\Big).$$

则最优化：

$$\max_{c_{k,0},c_{k,a},c_{k,b}>0}\ \ln c_{k,0}+\rho\big[\pi\ln c_{k,a}+(1-\pi)\ln c_{k,b}\big] \quad \text{s.t.} \quad c_{k,0}+q_a c_{k,a}+q_b c_{k,b}=W_k.$$

拉格朗日函数

$$\mathcal{L}=\ln c_{k,0}+\rho\big[\pi\ln c_{k,a}+(1-\pi)\ln c_{k,b}\big]+\lambda\Big(W_k-c_{k,0}-q_a c_{k,a}-q_b c_{k,b}\Big).$$

一阶条件（FOC）：

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c_{k,0}}:\quad \frac{1}{c_{k,0}}=\lambda,$$
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c_{k,a}}:\quad \frac{\rho\pi}{c_{k,a}}=\lambda q_a,\qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c_{k,b}}:\quad \frac{\rho(1-\pi)}{c_{k,b}}=\lambda q_b.$$

由 $\lambda=1/c_{k,0}$ 得到最优消费（以 $c_{k,0}$ 表示）：

$$c_{k,a}=\frac{\rho\pi}{q_a}\,c_{k,0},\qquad c_{k,b}=\frac{\rho(1-\pi)}{q_b}\,c_{k,0}.$$

代回预算约束：

$$c_{k,0}+q_a c_{k,a}+q_b c_{k,b}=c_{k,0}+q_a\frac{\rho\pi}{q_a}c_{k,0}+q_b\frac{\rho(1-\pi)}{q_b}c_{k,0}=(1+\rho)c_{k,0}=W_k.$$

因此

$$\boxed{c^*_{k,0}=\frac{W_k}{1+\rho},\quad c^*_{k,a}=\frac{\rho\pi}{q_a}\frac{W_k}{1+\rho},\quad c^*_{k,b}=\frac{\rho(1-\pi)}{q_b}\frac{W_k}{1+\rho}.}$$

设经济人 k 在 $t=0$ 交易后持有 $(\theta_{k1},\theta_{k2})$ 两证券，则

$$c_{k,a}=\theta_{k1}+\theta_{k2}(uC),\qquad c_{k,b}=\theta_{k1}+\theta_{k2}(dC).$$

解得

$$\boxed{\theta_{k2}=\frac{c_{k,a}-c_{k,b}}{(u-d)C},\qquad \theta_{k1}=c_{k,a}-\theta_{k2}uC=c_{k,b}-\theta_{k2}dC.}$$

在均衡中我们将看到 $c_{k,a}=s_k uC$，$c_{k,b}=s_k dC$，从而 $\theta_{k2}=s_k$，$\theta_{k1}=0$，即每个经

济人最优是不交易：保留其初始股票份额。

(3) **求两个证券的均衡解**

市场出清：$t=0$ 总消费品为 $\sum_k s_k = 1$，故

$$\sum_{k=1}^{K} c_{k,0} = 1.$$

$t=1$ 状态 a 的总资源来自所有人持有的股票支付：$\sum_k s_k(uC) = uC$，故

$$\sum_{k=1}^{K} c_{k,a} = uC.$$

同理

$$\sum_{k=1}^{K} c_{k,b} = dC.$$

先求状态价格 q_a, q_b。注意

$$W_k = s_k\Big(1 + q_a uC + q_b dC\Big).$$

由第 (2) 问，

$$c_{k,0}^* = \frac{W_k}{1+\rho} = \frac{s_k\big(1 + q_a uC + q_b dC\big)}{1+\rho}.$$

对 k 求和并用 $\sum_k s_k = 1$ 与出清 $\sum_k c_{k,0} = 1$ 得

$$1 = \sum_k c_{k,0}^* = \frac{1 + q_a uC + q_b dC}{1+\rho} \;\Rightarrow\; \boxed{1 + q_a uC + q_b dC = 1+\rho \;\Rightarrow\; q_a uC + q_b dC = \rho.}$$

再用状态 a 出清。由第 (2) 问的表达式

$$c_{k,a}^* = \frac{\rho\pi}{q_a}\frac{W_k}{1+\rho} = \frac{\rho\pi}{q_a}\frac{s_k(1 + q_a uC + q_b dC)}{1+\rho}.$$

代入 $1 + q_a uC + q_b dC = 1+\rho$ 简化为

$$c_{k,a}^* = \frac{\rho\pi}{q_a} s_k.$$

对 k 求和并用出清 $\sum_k c_{k,a} = uC$：

$$uC = \sum_k c_{k,a}^* = \frac{\rho\pi}{q_a}\sum_k s_k = \frac{\rho\pi}{q_a} \;\Rightarrow\; \boxed{q_a = \frac{\rho\pi}{uC}.}$$

同理在状态 b:

$$dC = \sum_k c^*_{k,b} = \frac{\rho(1-\pi)}{q_b} \;\Rightarrow\; \boxed{q_b = \frac{\rho(1-\pi)}{dC}.}$$

因此均衡配置为

$$\boxed{c_{k,0} = s_k, \qquad c_{k,a} = s_k uC, \qquad c_{k,b} = s_k dC \quad (\forall k),}$$

即每个经济人消费其按份额分得的总禀赋；由于初始禀赋已经是按份额持有股票与当期消费品，均衡下没有交易:

$$\boxed{\theta_{k2} = s_k, \qquad \theta_{k1} = 0.}$$

均衡价格:

$$\boxed{P_1 = q_a + q_b = \rho\left(\frac{\pi}{uC} + \frac{1-\pi}{dC}\right), \qquad P_2 = q_a(uC) + q_b(dC) = \rho.}$$

并且无风险毛收益率与股票毛收益率分别为

$$\boxed{R_f = \frac{1}{P_1} = \frac{1}{\rho\left(\frac{\pi}{uC} + \frac{1-\pi}{dC}\right)}, \qquad R_2(a) = \frac{uC}{\rho},\; R_2(b) = \frac{dC}{\rho}.}$$

(4) **与期权定价的二叉树模型比较，得到什么结论？**

在本题中我们已经得到唯一状态价格 q_a, q_b，因此任意支付 $X = (X_a, X_b)$ 的价格为

$$P(X) = q_a X_a + q_b X_b = P_1\Big(\tilde{\pi} X_a + (1-\tilde{\pi}) X_b\Big),$$

其中风险中性概率 $\tilde{\pi}$ 由

$$\tilde{\pi} := \frac{q_a}{q_a + q_b} = \frac{q_a}{P_1}.$$

代入本题的 q_a, q_b 可得

$$\boxed{\tilde{\pi} = \frac{\frac{\rho\pi}{uC}}{\rho\left(\frac{\pi}{uC} + \frac{1-\pi}{dC}\right)} = \frac{\frac{\pi}{u}}{\frac{\pi}{u} + \frac{1-\pi}{d}}.}$$

因此:

- 与标准二叉树完全一致：任意期权/衍生品价格都等于 $P_1\times$（风险中性概率

下的期望支付）。

- 风险中性概率一般不等于真实概率 π；它反映了用边际效用对状态进行再加权。
- 在本题里，q_a, q_b 与消费增长（uC, dC）直接相关：状态越“好”（消费越高），对应状态价格越低。

(5) **构建代表性经济人**

考虑社会规划者问题：给定 Pareto 权重 $\{\alpha_k > 0\}$，最大化加总效用

$$\max_{\{c_{k,0}, c_{k,a}, c_{k,b}\}} \sum_{k=1}^{K} \alpha_k \Big[\ln c_{k,0} + \rho \big(\pi \ln c_{k,a} + (1-\pi) \ln c_{k,b} \big) \Big]$$

满足可行性（逐期逐状态资源约束）

$$\sum_k c_{k,0} = 1, \qquad \sum_k c_{k,a} = uC, \qquad \sum_k c_{k,b} = dC.$$

对任一给定时点/状态（例如 $t = 0$），规划者的一阶条件给出

$$\frac{\alpha_k}{c_{k,0}} = \mu_0 \quad \Rightarrow \quad c_{k,0} = \frac{\alpha_k}{\sum_j \alpha_j} \cdot 1.$$

同理对 $t = 1$ 的状态 a, b 也成立（因为同为对数且同一 ρ）：

$$c_{k,a} = \frac{\alpha_k}{\sum_j \alpha_j} \cdot uC, \qquad c_{k,b} = \frac{\alpha_k}{\sum_j \alpha_j} \cdot dC.$$

令

$$\omega_k := \frac{\alpha_k}{\sum_{j=1}^{K} \alpha_j}, \qquad \sum_k \omega_k = 1,$$

则规划者分配规则为

$$c_{k,0} = \omega_k \cdot 1, \qquad c_{k,a} = \omega_k \cdot uC, \qquad c_{k,b} = \omega_k \cdot dC.$$

这表明存在一个代表性经济人，其消费等于总消费（总禀赋）：

$$C_0 = 1, \quad C_a = uC, \quad C_b = dC.$$

代表性经济人的效用可取为

$$\boxed{U^{RA}(C) = \ln C_0 + \rho \Big[\pi \ln C_a + (1-\pi) \ln C_b \Big],}$$

它将生成与竞争均衡一致的随机贴现因子与资产价格。

(6) **计算代表性经济人效用中每个经济人的权重。它依赖什么？为什么？**

由第 (5) 问，规划者权重经归一化后为 ω_k，并诱导分配 $c_{k,s} = \omega_k C_s$。而竞争均衡（第 (3) 问）给出 $c_{k,s} = s_k C_s$（其中 $C_0 = 1, C_a = uC, C_b = dC$）。两者一致要求

$$\boxed{\omega_k = s_k, \qquad k = 1, \ldots, K.}$$

因此，代表性经济人（或等价的规划者问题）中各人的权重依赖于初始禀赋/财富份额 s_k。

(7) **证明代表性经济人的偏好与禀赋在各经济人中的分布无关**

将最优分配 $c_{k,s} = s_k C_s$ 代入加总效用（取权重 $\omega_k = s_k$）：

$$\sum_{k=1}^{K} s_k \ln(s_k C_s) = \sum_{k=1}^{K} s_k (\ln s_k + \ln C_s) = \left(\sum_{k=1}^{K} s_k \ln s_k\right) + \ln C_s,$$

其中 $\sum_k s_k \ln s_k$ 是常数（与 C_s 无关）。因此社会福利可写为

$$\sum_{k=1}^{K} s_k U_k = \underbrace{\ln C_0 + \rho\big[\pi \ln C_a + (1-\pi)\ln C_b\big]}_{\text{仅依赖总消费}} + \underbrace{\left(\sum_k s_k \ln s_k\right) \cdot (1+\rho)}_{\text{常数项}}.$$

常数项不改变对 C_0, C_a, C_b 的边际效用，从而不改变随机贴现因子与资产价格。并且总禀赋过程本身只由 $\sum_k s_k = 1$ 决定：

$$(C_0, C_a, C_b) = (1, uC, dC),$$

也与 $\{s_k\}$ 的分布无关。故代表性经济人的（有效）偏好与总禀赋过程都与个体间分布无关。

(8) **用基于消费的 CAPM 给两证券定价**

代表性经济人的边际效用：

$$u'(C_0) = \frac{1}{C_0}, \qquad u'(C_s) = \frac{1}{C_s} \ (s = a, b).$$

因此随机贴现因子（SDF）为

$$\boxed{m_s = \rho \frac{u'(C_s)}{u'(C_0)} = \rho \frac{C_0}{C_s}, \qquad s \in \{a, b\}.}$$

在本题中 $C_0=1$, $C_a=uC$, $C_b=dC$，故

$$m_a=\frac{\rho}{uC},\qquad m_b=\frac{\rho}{dC}.$$

状态价格满足 $q_s=\mathbb{P}(s)\,m_s$，即

$$q_a=\pi m_a=\frac{\rho\pi}{uC},\qquad q_b=(1-\pi)m_b=\frac{\rho(1-\pi)}{dC},$$

与第 (3) 问一致。

对任意资产 i（支付 X_i），CCAPM/消费定价公式为

$$\boxed{P_i=\mathbb{E}[mX_i]=\pi m_a X_{i,a}+(1-\pi)m_b X_{i,b}.}$$

应用到两证券：

无风险证券 1：$X_1=(1,1)$，

$$P_1=\mathbb{E}[m]=\pi\frac{\rho}{uC}+(1-\pi)\frac{\rho}{dC}=\rho\left(\frac{\pi}{uC}+\frac{1-\pi}{dC}\right).$$

股票 2：$X_2=(uC,dC)$，

$$P_2=\mathbb{E}[mX_2]=\pi\frac{\rho}{uC}(uC)+(1-\pi)\frac{\rho}{dC}(dC)=\rho.$$

(9) **计算风险资产的股权溢价**

股票毛收益率：

$$R_2(a)=\frac{uC}{\rho},\qquad R_2(b)=\frac{dC}{\rho}.$$

故其期望毛收益率

$$\mathbb{E}[R_2]=\frac{1}{\rho}\Big(\pi uC+(1-\pi)dC\Big)=\frac{C}{\rho}\big(\pi u+(1-\pi)d\big).$$

无风险毛收益率

$$R_f=\frac{1}{P_1}=\frac{1}{\rho\left(\frac{\pi}{uC}+\frac{1-\pi}{dC}\right)}.$$

因此股权溢价（毛）为

$$\boxed{\mathbb{E}[R_2]-R_f=\frac{1}{\rho}\Big(\pi uC+(1-\pi)dC\Big)-\frac{1}{\rho\left(\frac{\pi}{uC}+\frac{1-\pi}{dC}\right)}.}$$

注意由 Jensen/均值不等式（调和均值 $\le$ 算术均值），当 $u \neq d$ 时

$$\pi uC + (1-\pi)dC \ > \ \frac{1}{\frac{\pi}{uC} + \frac{1-\pi}{dC}} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[R_2] - R_f > 0.$$

(10) **利率与股权风险溢价依赖于什么？对 $E[C_1/C_0]$、$\mathrm{var}(C_1/C_0)$、ρ 的依赖性**

令消费增长率（毛增长）为

$$g := \frac{C_1}{C_0} = \begin{cases} g_a := \dfrac{C_a}{C_0}, & a \\ g_b := \dfrac{C_b}{C_0}, & b \end{cases} \qquad (\text{本题中}C_0 = 1,\ g_a = uC,\ g_b = dC).$$

对数效用下

$$m = \rho\frac{C_0}{C_1} = \rho\frac{1}{g}.$$

(i) 无风险利率依赖性 无风险资产满足 $P_1 = \mathbb{E}[m] = \rho\,\mathbb{E}\left[\frac{1}{g}\right]$，故

$$\boxed{R_f = \frac{1}{P_1} = \frac{1}{\rho\,\mathbb{E}\left[\frac{1}{g}\right]}.}$$

因此：

- ρ 越大（越“重视未来”），P_1 越大，R_f 越小（利率下降）。
- 在给定分布形状下，g 的水平越高（消费增长更快），$\mathbb{E}[1/g]$ 越小，P_1 越小，R_f 越大（利率上升）。
- 波动率作用：由于函数 $x \mapsto 1/x$ 是凸函数，在给定均值 $\mathbb{E}[g]$ 下，$\mathrm{var}(g)$ 越大 $\Rightarrow$ $\mathbb{E}[1/g]$ 越大（Jensen 不等式），从而 P_1 上升、R_f 下降（预防性储蓄：不确定性增大使无风险资产更贵、利率更低）。

(ii) 股权风险溢价依赖性 本题股票支付与总消费同向（$X_2 = C_1$），且 $P_2 = \rho C_0$（这里 $C_0 = 1$ 故 $P_2 = \rho$）。股票毛收益率

$$R_2 = \frac{C_1}{P_2} = \frac{C_1}{\rho C_0} = \frac{g}{\rho}.$$

因此

$$\boxed{\mathbb{E}[R_2] = \frac{\mathbb{E}[g]}{\rho}, \qquad \mathbb{E}[R_2] - R_f = \frac{1}{\rho}\left(\mathbb{E}[g] - \frac{1}{\mathbb{E}[1/g]}\right).}$$

由调和均值 $\le$ 算术均值（严格不等式当 g 非常数）知溢价非负且在有风险时为正。并且在给定 $\mathbb{E}[g]$ 下，$\mathrm{var}(g)$ 越大 $\Rightarrow$ $\mathbb{E}[1/g]$ 越大 $\Rightarrow$ $1/\mathbb{E}[1/g]$ 越小 $\Rightarrow$ 风险

溢价越大。经济解释：股票在“消费高”的好状态回报更高、在“消费低”的坏状态回报更低，无法提供保险，因此需要更高的期望回报作为补偿。

(iii) 对当前消费水平 C_0 的依赖 对数效用为同质偏好（CRRA），资产毛收益率只与增长率 $g = C_1/C_0$ 有关，不依赖消费的绝对水平（规模缩放不改变风险补偿的本质），因此利率与溢价主要由 g 的分布与 ρ 决定。

(11) **看涨期权定价，并证明基于消费的 CAPM 也适用于期权**

考虑以证券 2 为标的、执行价为 $\mathcal{K}$ 的欧式看涨期权，到期（$t = 1$）支付

$$X_{call} = \big((uC - \mathcal{K})^+, (dC - \mathcal{K})^+\big), \qquad (x)^+ := \max\{x, 0\}.$$

(A) 用状态价格直接定价（Arrow–Debreu / 二叉树定价）

$$\boxed{P_{call} = q_a(uC - \mathcal{K})^+ + q_b(dC - \mathcal{K})^+ = \frac{\rho\pi}{uC}(uC - \mathcal{K})^+ + \frac{\rho(1-\pi)}{dC}(dC - \mathcal{K})^+.}$$

亦可写成风险中性形式：

$$P_{call} = P_1\Big(\tilde{\pi}(uC - \mathcal{K})^+ + (1 - \tilde{\pi})(dC - \mathcal{K})^+\Big), \quad \tilde{\pi} = \frac{q_a}{q_a + q_b}.$$

(B) 用复制组合（Delta–Bond 复制） 求 Δ, B 使得

$$\Delta(uC) + B = (uC - \mathcal{K})^+, \qquad \Delta(dC) + B = (dC - \mathcal{K})^+.$$

解得

$$\boxed{\Delta = \frac{(uC - \mathcal{K})^+ - (dC - \mathcal{K})^+}{(u - d)C}, \qquad B = (uC - \mathcal{K})^+ - \Delta(uC).}$$

则期权价格为

$$\boxed{P_{call} = \Delta P_2 + B P_1,}$$

与 (A) 一致（因为完全市场下复制定价与状态价格定价等价）。

(C) 证明基于消费的 CAPM 也适用于期权

由于期权也是可交易/可复制资产，其价格必须满足同一随机贴现因子定价：

$$\boxed{P_{call} = \mathbb{E}[mX_{call}] = \pi m_a(uC - \mathcal{K})^+ + (1 - \pi)m_b(dC - \mathcal{K})^+.}$$

代入 $m_a = \rho/(uC)$, $m_b = \rho/(dC)$，即得到 (A) 中的显式公式。进一步，期权收益

率 $R_{call} = X_{call}/P_{call}$ 也满足

$$1 = \mathbb{E}[mR_{call}] \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[R_{call}] - R_f = -\frac{\mathrm{Cov}(m, R_{call})}{\mathbb{E}[m]},$$

这正是“基于消费的 CAPM/消费定价关系”对期权同样成立的表述。