第九次作业答案

金融经济学-2025 年秋

Answer 1

单因子模型下，两资产 A, B 的收益为

$$r_i = E(r_i) + b_i F + \varepsilon_i, \qquad \mathrm{Var}(F) = \sigma_F^2, \quad \mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma_{\varepsilon i}^2,$$

且特质成分之间、与因子之间都不相关。设投资组合权重为 (w_A, w_B)，则

- 组合因子载荷：

$$b_p = w_A b_A + w_B b_B.$$

- 组合因子风险方差：

$$\sigma_{f,p}^2 = b_p^2 \sigma_F^2.$$

- 组合非因子（特质）风险方差：

$$\sigma_{\varepsilon,p}^2 = w_A^2 \sigma_{\varepsilon A}^2 + w_B^2 \sigma_{\varepsilon B}^2.$$

- 组合总方差：

$$\sigma_p^2 = \sigma_{f,p}^2 + \sigma_{\varepsilon,p}^2.$$

已知

$$b_A = 0.20, \quad b_B = 3.5, \quad \sigma_{\varepsilon A}^2 = 49\% = 0.49, \quad \sigma_{\varepsilon B}^2 = 100\% = 1.00, \quad \sigma_F = 15\% = 0.15.$$

(1) 组合 $(w_A, w_B) = (0.4, 0.6)$ 时，

$$b_p = 0.4 \times 0.20 + 0.6 \times 3.5 = 2.18.$$

因子风险的标准差为

$$\sigma_{f,p} = |b_p| \sigma_F = 2.18 \times 0.15 = 0.327 \approx 32.7\%.$$

(2) 非因子风险：

$$\sigma_{\varepsilon,p}^2 = 0.4^2 \times 0.49 + 0.6^2 \times 1 = 0.16 \times 0.49 + 0.36 = 0.0784 + 0.36 = 0.4384,$$

$$\sigma_{\varepsilon,p} = \sqrt{0.4384} \approx 0.6621 \approx 66.2\%.$$

因子风险方差

$$\sigma_{f,p}^2 = b_p^2 \sigma_F^2 = (2.18)^2 \times 0.15^2 = 0.106929,$$

故组合总方差

$$\sigma_p^2 = 0.106929 + 0.4384 = 0.545329,$$

$$\sigma_p = \sqrt{0.545329} \approx 0.7385 \approx 73.9\%.$$

(3) 若无风险资产、A, B 的权重为 $(0.10, 0.36, 0.54)$，则仅 A, B 承担风险，

$$w_A = 0.36, \quad w_B = 0.54.$$

组合因子载荷

$$b'_p = 0.36 \times 0.20 + 0.54 \times 3.5 = 0.072 + 1.89 = 1.962.$$

因子风险

$$\sigma'_{f,p} = |b'_p| \sigma_F = 1.962 \times 0.15 = 0.2943 \approx 29.4\%.$$

非因子风险

$$\sigma'^2_{\varepsilon,p} = 0.36^2 \times 0.49 + 0.54^2 \times 1 = 0.1296 \times 0.49 + 0.2916 = 0.063504 + 0.2916 = 0.355104,$$

$$\sigma'_{\varepsilon,p} = \sqrt{0.355104} \approx 0.5959 \approx 59.6\%.$$

总方差

$$\sigma'^2_p = 0.08661249 + 0.355104 = 0.44171649,$$

$$\sigma'_p = \sqrt{0.44171649} \approx 0.6646 \approx 66.5\%.$$

Answer 2

单因子 APT 下，资产的期望收益满足

$$E(r_i) = r_f + \lambda b_i,$$

其中 λ 为因子风险溢价。

无风险利率 $r_f = 2\% = 0.02$, 单位敏感性组合 $(b = 1)$ 的期望收益率为 $4.5\% = 0.045$, 故

$$0.045 = 0.02 + \lambda \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0.025 = 2.5\%.$$

资产 A, B 的因子载荷为

$$b_A = 4.0, \qquad b_B = 2.6.$$

则

$$E(r_A) = 0.02 + 0.025 \times 4.0 = 0.12 = 12\%,$$

$$E(r_B) = 0.02 + 0.025 \times 2.6 = 0.085 = 8.5\%.$$

组合权重为 $(w_A, w_B) = (0.3, 0.7)$，其期望收益率为

$$E(r_p) = 0.3E(r_A) + 0.7E(r_B) = 0.3 \times 12\% + 0.7 \times 8.5\% = 3.6\% + 5.95\% = 9.55\%.$$

因此，该组合的均衡期望收益率为

$$E(r_p) = 9.55\%.$$

Answer 3

两因子 APT 下，

$$E(r_i) = r_f + \lambda_1 b_{i1} + \lambda_2 b_{i2}.$$

表中给出

证券	b_{i1}	b_{i2}	$E(r_i)$
A	0.50	0.80	$5.2\% = 0.052$
B	1.50	1.40	$7.6\% = 0.076$
C	0.00	0.00	$2\% = 0.02$

显然 C 为无风险资产，$r_f = 2\% = 0.02$。

(1) 初始资金为 100 元，卖空 50 元 B，买入 150 元 A。相对于初始财富 100 元，

$$w_A = \frac{150}{100} = 1.5, \qquad w_B = \frac{-50}{100} = -0.5.$$

则组合对两个因子的敏感性为

$$b_{p1} = w_A b_{A1} + w_B b_{B1} = 1.5 \times 0.5 + (-0.5) \times 1.5 = 0.75 - 0.75 = 0,$$

$$b_{p2} = w_A b_{A2} + w_B b_{B2} = 1.5 \times 0.8 + (-0.5) \times 1.4 = 1.2 - 0.7 = 0.5.$$

因此，该组合对因子 1 的敏感性为 0，对因子 2 的敏感性为 0.5。

(2) 再以无风险利率借入 100 元，与原来的 100 元一起共 200 元，仍按 (1) 中比例 (即

$3:-1)$ 投资于 A, B。此时持有

$$A:300, \quad B:-100, \quad C:-100,$$

相对于净财富 100，权重为

$$w'_A = 3, \quad w'_B = -1, \quad w'_C = -1.$$

因子敏感性：

$$b'_{p1} = 3 \times 0.5 + (-1) \times 1.5 + (-1) \times 0 = 1.5 - 1.5 = 0,$$

$$b'_{p2} = 3 \times 0.8 + (-1) \times 1.4 + (-1) \times 0 = 2.4 - 1.4 = 1.0.$$

组合期望收益率为

$$\begin{aligned} E(r'_p) &= w'_A E(r_A) + w'_B E(r_B) + w'_C r_f \\ &= 3 \times 0.052 - 1 \times 0.076 - 1 \times 0.02 \\ &= 0.156 - 0.076 - 0.02 = 0.06 = 6\%. \end{aligned}$$

(3) 因子 2 的期望风险溢价为其“单位敏感性”组合的超额收益。

上一小问中的组合对因子 2 的敏感性为 $b'_{p2} = 1$，且 $b'_{p1} = 0$，故由 APT 有

$$E(r'_p) = r_f + \lambda_2 \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = E(r'_p) - r_f = 6\% - 2\% = 4\%.$$

因此，因子 2 的期望风险溢价为

$$\lambda_2 = 4\%.$$