第一次作业答案

金融经济学-2025 年秋

Answer 1

(a) 如果不能交易，那么参与者只能消费自己的初始禀赋：

$$c_0^a = 100, \qquad c_1^a = 1,$$

$$U^a = \log(100) + \rho \log(1) = \log 100.$$

(b) 可以在市场交易

令 S 为 0 期购买的债券数量（$S > 0$ 为储蓄，$S < 0$ 为借款），则

$$c_0 = 100 - S, \qquad c_1 = 1 + S(1 + r_F).$$

(b1) 参与者的预算集是

$$\left\{ C \in \mathbb{R}_+^2 \ : \ c_0 = 100 - S,\ c_1 = 1 + S(1 + r_F),\ S \in \mathbb{R} \right\}.$$

由预算约束：

$$w = c_0 + \frac{c_1}{1 + r_F} = 100 + \frac{1}{1 + r_F},$$

其中 w 为以当前消费为单位衡量的总财富。

(b2) 求解最优消费

方法一：直接对 S 最大化

$$\max_S \ \log(100 - S) + \rho \log\big(1 + S(1 + r_F)\big).$$

一阶条件

$$-\frac{1}{100 - S} + \rho \frac{1 + r_F}{1 + S(1 + r_F)} = 0,$$

解得最优储蓄

$$S^* = \frac{100\rho(1 + r_F) - 1}{(1 + \rho)(1 + r_F)}.$$

代回得

$$c_0^b = 100 - S^* = \frac{100(1 + r_F) + 1}{(1 + \rho)(1 + r_F)} = \frac{w}{1 + \rho},$$

$$c_1^b = 1 + S^*(1 + r_F) = \frac{\rho\big(100(1 + r_F) + 1\big)}{1 + \rho} \cdot \frac{1}{1 + r_F} = \frac{\rho(1 + r_F)}{1 + \rho} w.$$

方法二：Euler 方程
把问题写成

$$\max_{c_0,c_1}\ \log c_0+\rho\log c_1 \quad \text{s.t.} \quad c_0+\frac{c_1}{1+r_F}=w.$$

由拉格朗日一阶条件

$$\frac{1/c_0}{\rho/c_1}=1+r_F \quad \Longrightarrow \quad \frac{c_1}{c_0}=\rho(1+r_F).$$

与预算联立得：

$$c_0^b=\frac{w}{1+\rho}, \qquad c_1^b=\frac{\rho(1+r_F)}{1+\rho}w.$$

把最优消费代回效用：

$$\begin{aligned}U^b&=\log\Big(\frac{w}{1+\rho}\Big)+\rho\log\Big(\frac{\rho(1+r_F)}{1+\rho}w\Big)\\&=(1+\rho)\log w+\rho\log\rho+\rho\log(1+r_F)-(1+\rho)\log(1+\rho).\end{aligned}$$

(b3) 由 $c_0^b=\frac{w}{1+\rho}$、$c_1^b=\frac{\rho(1+r_F)}{1+\rho}w$ 可见：

- c_0^b 随 ρ 上升而下降，随 r_F 上升而下降；
- c_1^b 随 ρ 上升而上升，随 r_F 上升而上升

当 r_F 上升时，储蓄的收益率增加，因此参与者会减少当前的消费以增加储蓄，同时也就增加了 1 期消费了；当 ρ 上升时，1 期消费带来效用的权重增加，因此参与者会减少 0 期消费以增加 1 期消费。

(c) 证明 $U^b\geq U^a$
不能自由交易的情形对应 $(c_0,c_1)=(100,1)$（或 $S=0$），在预算集合内。而能自由交易的情形是同一预算集合上的最优点，故

$$U^b\geq U^a,$$

且当且仅当 $S^*=0$ 时取等号。

(d) 由

$$U^b(w-g)=U^a=\log 100.$$

令 $x=w-g$。将 $U^b(x)$ 的表达代入：

$$(1+\rho)\log x+\rho\log\rho+\rho\log(1+r_F)-(1+\rho)\log(1+\rho)=\log 100.$$

解得
$$x=(1+\rho)\cdot 100^{\frac{1}{1+\rho}}\cdot\big[\rho(1+r_F)\big]^{-\frac{\rho}{1+\rho}}.$$
于是
$$g=w-(1+\rho)\cdot 100^{\frac{1}{1+\rho}}\cdot\big[\rho(1+r_F)\big]^{-\frac{\rho}{1+\rho}},\qquad w=100+\frac{1}{1+r_F}.$$

一、关于 ρ 的单调性

对 x 取对数:
$$h(\rho):=\ln x=\ln(1+\rho)+\frac{\ln 100}{1+\rho}-\frac{\rho}{1+\rho}\,\ln\big[\rho(1+r_F)\big].$$

求导得
$$h'(\rho)=\frac{1}{1+\rho}-\frac{\ln 100}{(1+\rho)^2}-\frac{1}{(1+\rho)^2}\ln\big[\rho(1+r_F)\big]-\frac{1}{1+\rho}=-\frac{\ln\big(100\,\rho(1+r_F)\big)}{(1+\rho)^2}.$$
因 $x>0$，有
$$\frac{\partial x}{\partial\rho}=x\,h'(\rho)=-\frac{x}{(1+\rho)^2}\,\ln\big(100\,\rho(1+r_F)\big).$$
于是
$$\frac{\partial g}{\partial\rho}=-\frac{\partial x}{\partial\rho}=\frac{x}{(1+\rho)^2}\,\ln\big(100\,\rho(1+r_F)\big)\,.$$
当 $100\,\rho(1+r_F)>1$ 时，$\ln(\cdot)>0$，故 $\partial g/\partial\rho>0$。

二、关于 r_F 的单调性

$$\frac{\partial\ln x}{\partial r_F}=-\frac{\rho}{1+\rho}\cdot\frac{1}{1+r_F}\quad\Longrightarrow\quad\frac{\partial x}{\partial r_F}=x\cdot\Big(-\frac{\rho}{1+\rho}\cdot\frac{1}{1+r_F}\Big).$$
因此
$$\frac{\partial g}{\partial r_F}=\frac{\partial w}{\partial r_F}-\frac{\partial x}{\partial r_F}=-\frac{1}{(1+r_F)^2}+\frac{\rho}{1+\rho}\cdot\frac{x}{1+r_F}.$$
从而
$$\frac{\partial g}{\partial r_F}>0\iff\frac{\rho x}{1+\rho}>\frac{1}{1+r_F}\iff x>\frac{1+\rho}{\rho(1+r_F)}.$$
代入 x 的表达式得，
$$(1+\rho)\,100^{\frac{1}{1+\rho}}\,[\rho(1+r_F)]^{-\frac{\rho}{1+\rho}}>\frac{1+\rho}{\rho(1+r_F)}\iff\big(100\,\rho(1+r_F)\big)^{\frac{1}{1+\rho}}>1,$$

等价于 $100\,\rho(1+r_F)>1$。在该条件下，$\partial g/\partial r_F>0$。

$100\,\rho(1+r_F) > 1$ 在通常经济参数下如 $\rho \geq 0.01$, $r_F \geq 0$ 总成立，因此 g 随着 ρ、r_F 的增加而增加。

g 表示的是参与者能够在证券市场上交易而获得的益处；参与者是为了在当前消费和未来消费之间进行消费转移而进行交易的。如果他进行消费转移的动力越大，那么他从交易中获得的益处越大；而当 ρ、r_F 增加时，参与者都希望增加未来消费，他进行消费转移的动力也增大，因而 g 增加。