第九讲 资本资产定价模型

熊和平
武汉大学经济与管理学院

- **资本资产定价模型**（Capital Asset Pricing Model，**CAPM**）是金融经济学的核心内容之一，是建立在Markowtiz的投资组合理论基础之上的理论。
- 该理论是由Sharpe（1964）、Lintner（1965）和Mossin(1966)等提出来的一种均衡定价理论。

第一节：基本假设

- 先看威廉.夏普等的《投资学》中列举的十个假设

“1. 投资者通过投资组合在某一段时期内的预期回报率和标准差来评价这个投资组合。

2. 投资者永不满足，因此，当面其他条件相同的两种选择时，他们将选择具有较高预期回报率的那一种。

3. 投资者是风险厌恶的，因此，当面临其他条件相同的两种选择时，他们将选择具有较小标准差的那一种。

4. 每一个资产都是无限可分的，意味着，如果投资者愿意的话，他们可以购买一个股票的一部分。

5. 投资者可以以一个无风险利率贷出（即投资）或借入资金。

6. 税收和交易成本均忽略不计。

7. 所有投资者都有相同的投资期限。

8. 对于所有投资者，无风险利率相同。

9. 对于所有投资者，信息是免费的并且是立即可得的。

10. 投资者具有相同的预期，即他们对预期回报率、标准差和证券之间的协方差具有相同的理解。”

一）、主观层面的假设

- ◆假设资本市场上有 K 个经济人或投资者，同样标记为 $k=1,2,...,K$。
- ◆所谓主观层面的假设是指投资者面对客观的投资机会进行投资选择时所表现出来的特征。
- ◆ 投资者特征的严格描述在不确定条件下的选择和行为金融中有具体研究，我们这里尽量提供一些易于理解的假设，并简化问题的分析。CAPM 中关于投资者主观的假设比较多，简单概括如下：

☞**假设9.1：**所有投资者都是同质的（homogeneous）。同质性包括：投资期限相同；同质信念或相同的概率预期

☞**假设9.2：**所有投资者对风险资产或资产组合的评价标准相同。

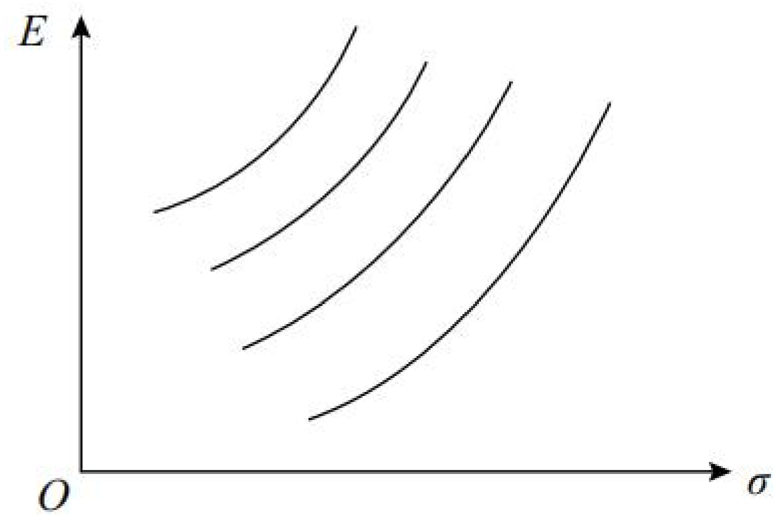

图 9-1　均值-方差标准下的无差异曲线

- 不同程度的风险厌恶 为什么？

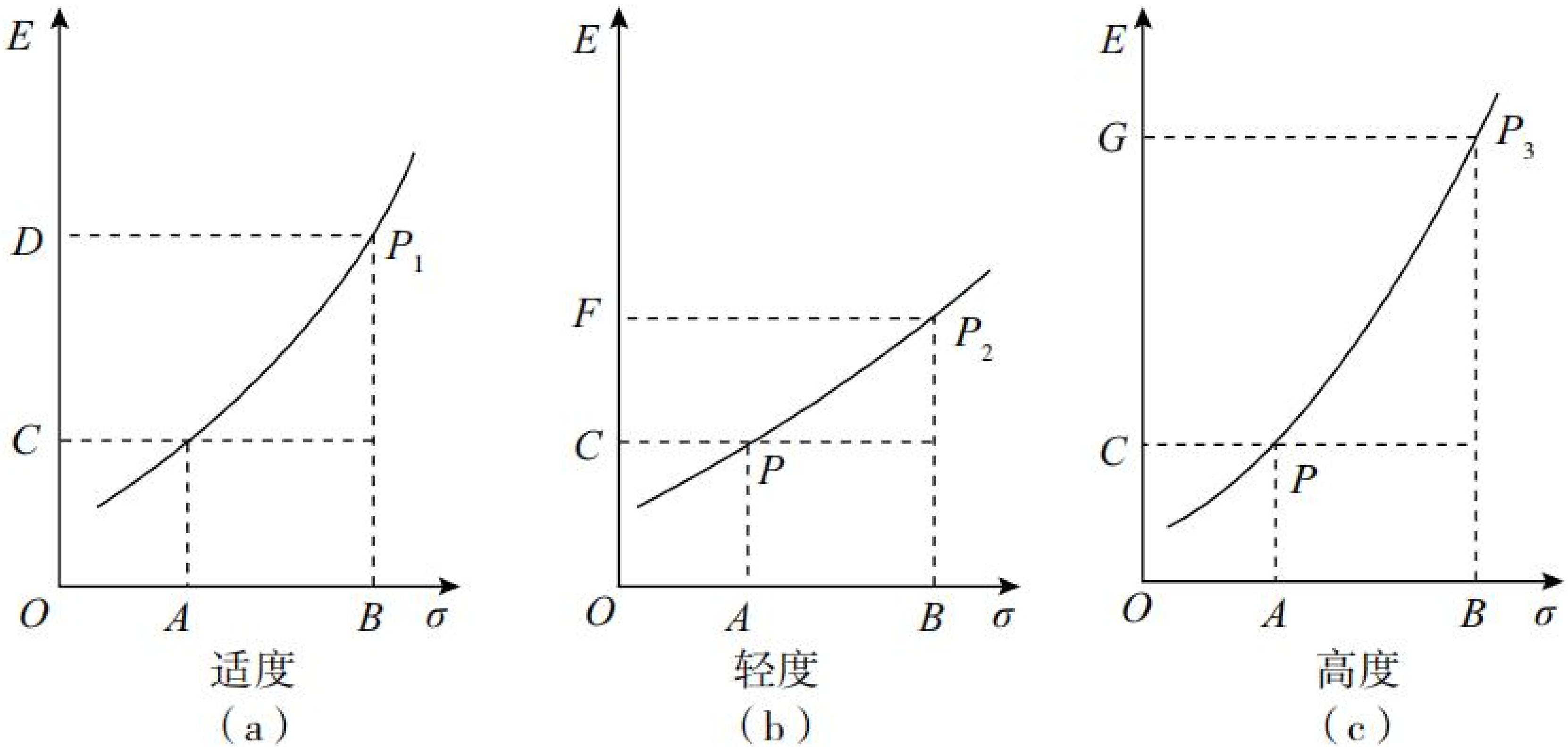

图 9-2　不同程度风险厌恶者

二）、客观层面的假设

- 谓客观层面的假设是指对投资者面对的“投资环境”或投资机会所作出的假设
- 通常假设资本市场上有N+1个证券即N+1个投资机会，其中有N个风险证券和1个无风险证券。对于风险证券有如下假设；

☞**假设9.3：**假设N个风险资产服从联合正态分布

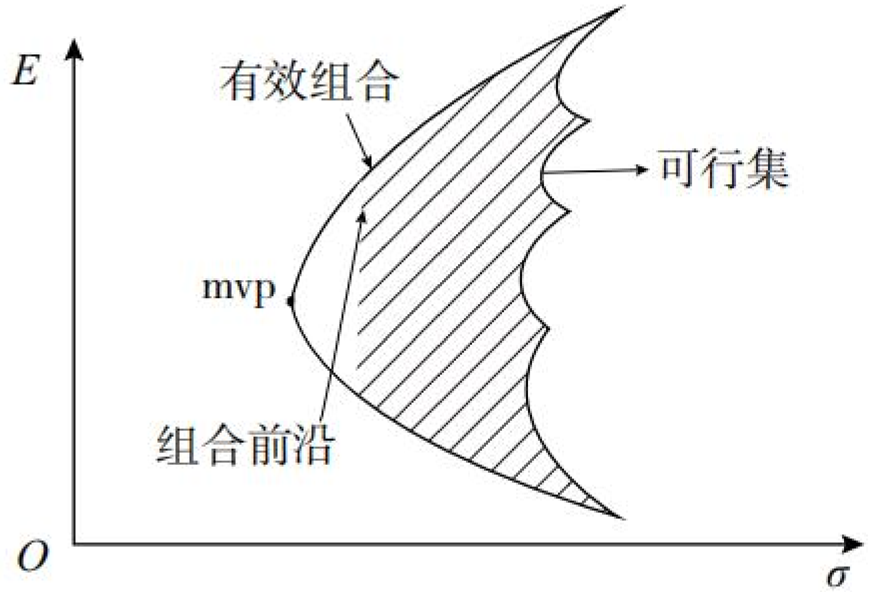

图 9-3　*N* 个风险资产情形下的投资机会

☞**假设9.4：**存在一个无风险资产，或存在一个无风险的借贷市场，借贷利率相等。

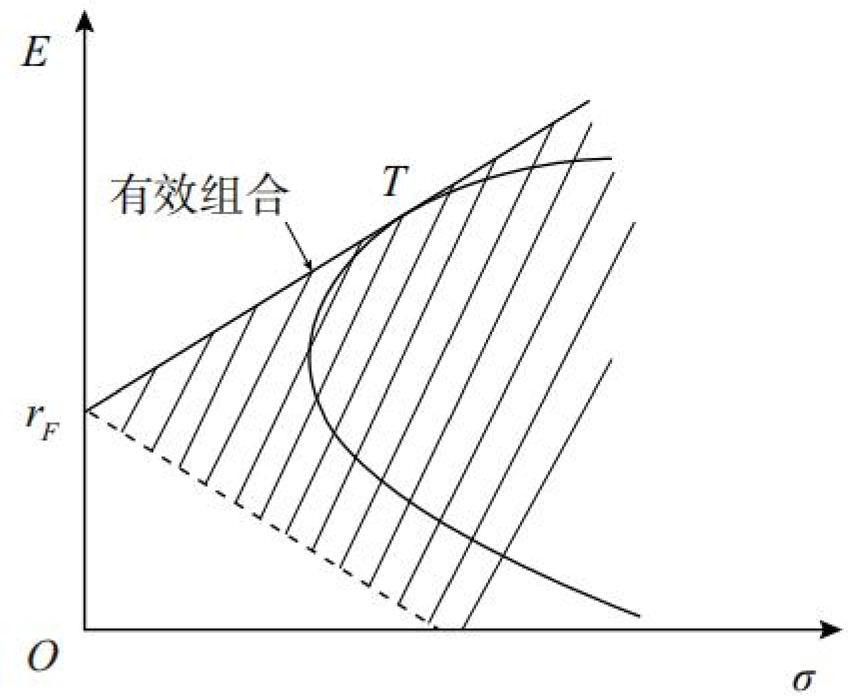

图 9-4　N + 1 个风险资产情形下的投资机会

☞**假设9.5：**无税收、无交易成本；市场无摩擦；市场是自由竞争的。

☞**假设9.6：**资产可以无限细分。

第二节 证券市场的均衡定价

◆我们从证券的供给和需求的角度分析证券市场的均衡定价。所谓一般均衡是指自由竞争均衡，即任何单个的买方和单个的卖方的交易行为都不能影响证券的价格，他们共同作用决定证券的价格。

一、证券市场的一般均衡

◆1、供给

☞从供给方面来看，假设每个股票标准化为1，也就是假设每个股票只有1股，那么，每个投资者持有的量就是占该股票的百分比，并用小数表示。

☞后面的分析可以看出，对每个股票的供给“标准化为1”并不是必要的，只要在研究期内股票的总供给是固定的就不影响结果，通常是为了分析方便才假定净供给为1。

☞从供给方面来看，我们假设每个股票或证券的数量是固定不变的，这意味着在研究期间没有新的股票增发，也没有原有的股票退市。

☞从整体上看，市场上有N+1个资产，其中N个风险资产加1个无风险资产，每个资产的净供给数量给定。

- ☞以上只是证券市场供给的一个初步印象，实际上我们可以从整体上理解证券市场的供给。
- ☞从整体上看，N+1个证券形成特定的投资机会，这个投资机会可以理解为“供给”的总体，其实质从整体上给出了所有投资者所面临的“供给”。
- ☞回顾前面马科维兹投资组合理论，N+1个证券形成的投资机会如图 9-5 所示。

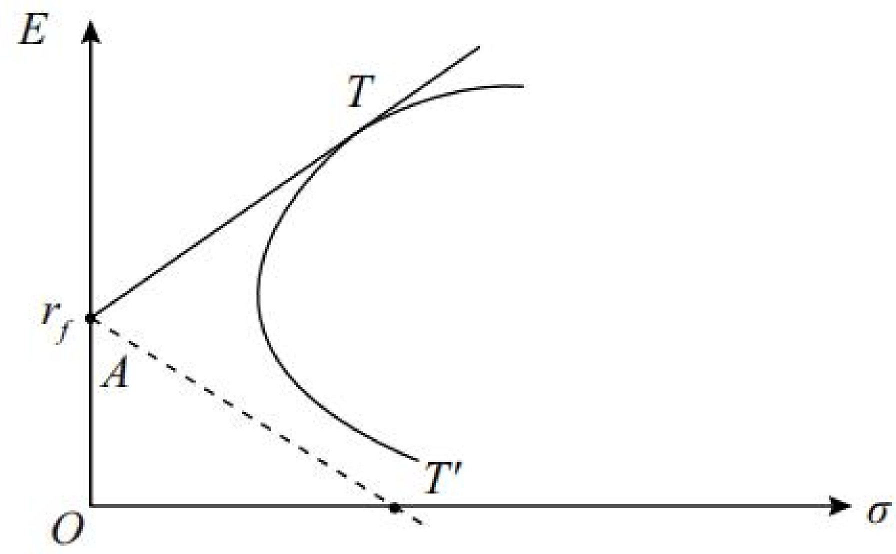

图 9-5　N+1 个证券形成的整体“供给”

☞A点对应的投资组合只包含无风险资产，记为ω_A

☞过A点向风险资产形成的组合前沿作切线，切点为T称为切点组合，记为ω_T。该组合是纯风险资产组合

☞射线AT和AT'形成的锥形区域为可行集，投资者可以从可行集中选择任何一点对应的投资组合。可行集形成了总体供给。

- 2、需求

☞类似于描述“整体供给”，同样从整体上考察投资者的需求，即所有投资者面对投机机会时在证券需求上的共性。

☞在同质信念下，每个投资者面对相同的投资机会，但他们的偏好可能是互不相同的。

☞投资者的偏好可以由无差异曲线来描述，同一曲线上的组合具有相同的“满意程度”，不同的曲线互不相交。在均值-方差平面内无差异曲线单调递增且凸向东南方。

☞对每一个投资者而言，其最终的最优组合必须满足两个条件：

◎ 其一，它必须是可行的，即必须位于图 9-5 中的锥形区域内；

◎其二，它必须是最优的，即所位于的无差异曲线必须尽量靠近西北方。

☞满足上述两个条件的组合必定是无差异曲线与射线AT的切点，因此都位于切线 AT上。

☞从总体上看，所有投资者对证券的需求都位于切线AT上。不同投资者由于偏好不同而形成不同的无差异曲线，从而他们最终的最优投资需求位于切线的不同位置，无论具体位置在什么地方，都可以表示为A点组合和T点组合的线性组合：

$$\omega_p = \alpha\omega_A + (1-\alpha)\omega_T \qquad (9.1)$$

α=1 时，对应于 A 点组合，此时只持有无风险资产；

α=0 时，对应于 T 点组合，此时只持有风险资产

0<α<1 时，对应于 A 点和 T 点之间的某一组合，两种组合都有一个正的权重；

α<0 时，对应于 AT 延长线上的某一组合，此时以无风险利率融资并将所有资金用于投资于组合 T

- 3、市场均衡

◆前面的分析可知，射线AT既反映了N+1个资产情形下的总供给，又反映了该情形下的总需求。

◆AT射线上的所有点都是市场提供给投资者的投资机会，同时，每个投资者的投资需求最终又位于该射线上，可能位于A、T点，或者AT之间的某个P点，或者位于AT延长线上的某个Q点。

◆均衡条件具有什么特征呢？从图 9-5 中无法看出均衡的特征。

◆所有投资者面临相同的投资机会，他们的投资需求都可以描述为公式（9.1），因此，等价于所有投资者的最终投资组合等于组合A和组合T的线性组合。

◆将组合 A和组合T看成两个投资基金，则所有投资者都选择这两个基金，不同的是投资于两基金的资金比率不同，即（9.1）中的α取不同的值。

◆组合T是由所有风险资产形成的组合，由于我们前面假设每个风险证券的总供给大于零，因此组合 T 必定包括所有的风险证券，而且每个证券的组合权重必定大于零，否则该证券无法达到均衡（需求=供给）。至此，我们可以将证券市场的均衡特征总结如下：

◎特征一：所有的N+1个证券的总供给等于总需求；

◎特征二：切点组合T包含了N个风险证券，而且每个证券的权重大于零。

二、分离定理与资本市场线

◆均衡条件下，投资者的最优投资组合都位于射线AT上，公式（9.1）给出了投资者的最优选择。

◆因此，无论投资者的风险偏好是否相同，其最终的最优选择等价于将投资资金在组合A和组合T之间进行分配。这两个投资组合通常被称为投资“基金”，用N+1维向量表示为：

投资组合 A：$\omega_A = (1, 0, \ldots, 0)'$

投资组合 T：$\omega_T = (0, \omega_1^T, \ldots, \omega_N^T)'$

- **定理 9.1（分离定理）**：在假设9.1-9.6下，无论投资者的风险偏好如何，其最优组合选择都可以分解为两个投资“基金”，一个由无风险资产组成，一个由切点组合组成。两基金与投资者的偏好无关。进一步，所有投资者对风险资产的“投资模式”都相同，它由切点组合决定，风险资产的“投资模式”与个人偏好无关。

◆**分离定理：**

投资者对风险资产的投资模式与个人的偏好无关，即组合选择与偏好分离。

含义：对任何一个理性的投资者，尽管他或她的最终投资组合选择不相同，但对风险资产的选择是相同的：每个投资者以无风险利率借或贷，然后把所筹集到的或所剩下的资金按相同的比例投资到不同的风险资产上。这一相同的比例由切点T表示的投资组合来决定。

◆分离定理表明，所有投资者都选择按照基金T 的模式投资风险资产，容易证明，在此前提下切点组合等于市场投资组合（market portfolio）。

◆所谓市场投资组合是指由所有资本市场上交易的证券组成的组合，用权重型投资组合表示时，每个证券的权重等于其相对市值，即等于该证券的市值与组成该组合的所有证券市值和的百分比。

◆市场投资组合通常记为组合M，分离定理成立时，市场投资组合M等于前面所说的切点组合T，我们后面用M而不用T表示。

◆在前面的假设下，市场投资组合M与无风险资产A组成的射线AM形成了有效组合：所有的有效组合位于射线AM上，反之射线AM上的每一点对应的组合均为有效组合。

◆均值-标准差平面内的这条射线AM称为资本市场线（capital market line，简称CML），如图 9-6 所示：

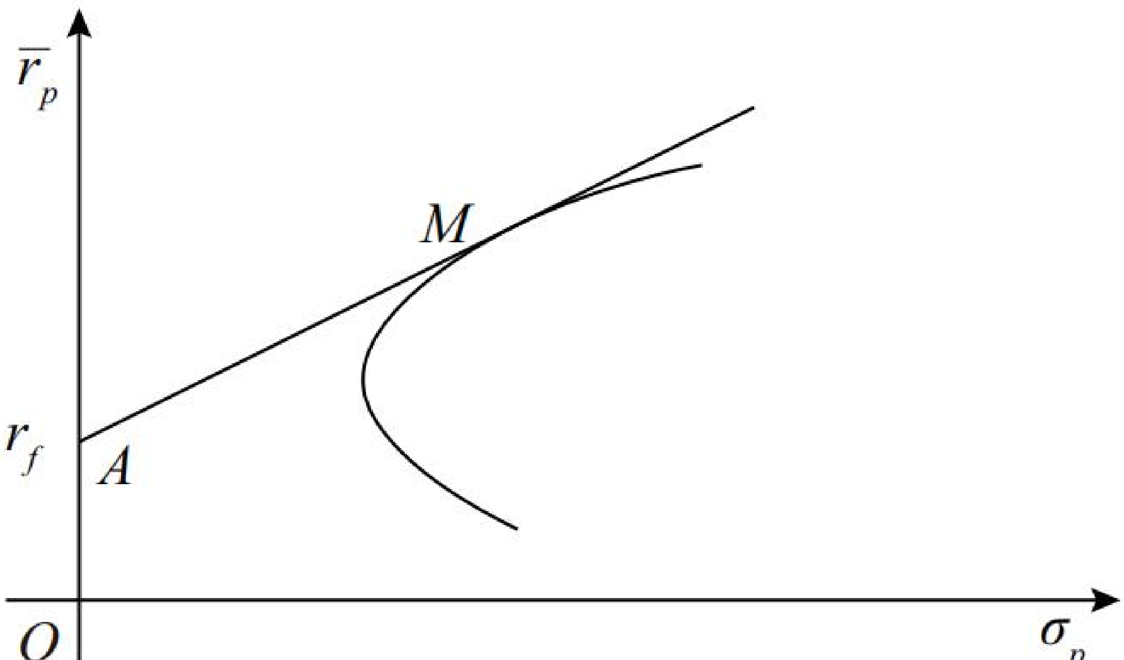

图 9-6　资本市场线(CML)

- 资本市场线（CML）对应的方程：

$$\bar{r}_p = r_f + \frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M}\sigma_p \qquad (9.2)$$

- 其含义是：任何投资组合的收益r_p和风险σ_p若满足方程（9.2）则必为有效投资组合。反之，有效投资组合的收益和风险必须满足方程（9.2）。这里用投资组合的标准差来度量其风险。

第三节 资本资产定价

◆资本市场线给出了投资组合是否有效的判断标准。对单个资产而言其收益与风险之间的关系是否也具有相同的关系呢？

一、证券市场线

$$\sigma_{iM}=\mathrm{cov}(\tilde{r}_i,\tilde{r}_M)=\mathrm{cov}\left(\tilde{r}_i,\sum_{j=1}^{N}\omega_{jM}\tilde{r}_j\right)=\sum_{j=1}^{N}\omega_{jM}\mathrm{cov}(\tilde{r}_i,\tilde{r}_j)$$

$$=\sum_{j=1}^{N}\omega_{jM}\sigma_{ij}$$

◆通常情况下单个证券的期望收益和标准差一般不满足方程（9.2），因为单个风险证券通常不是有效投资组合，因此通常位于资本市场线的下方，而且单个证券收益率的标准差不能度量其风险。

◆为了进一步分析单个证券的作用，我们分析均衡条件下市场投资组合中的单个证券对整个市场风险的“贡献”。用下标M表示市场投资组合，选取市场投资组合的方差代替其标准差进行分解：

$$\sigma_M^2=[\omega_{1M}\sigma_{1M}+\omega_{2M}\sigma_{2M}+\ldots+\omega_{iM}\sigma_{iM}+\ldots+\omega_{NM}\sigma_{NM}] \qquad (9.5)$$

$$\sigma_M^2 = [\omega_{1M}\sigma_{1M} + \omega_{2M}\sigma_{2M} + \ldots + \boxed{\omega_{iM}\sigma_{iM}} + \ldots + \omega_{NM}\sigma_{NM}] \qquad (9.5)$$

- （9.5）的含义：市场投资组合的风险等于N个风险资产的风险之和，而每个$\boxed{\text{风险资产}i\text{的风险}}$等于该资产在市场投资组合中的组合权重$\omega_{iM}$与该资产与市场投资组合的协方差$\sigma_{iM}$之乘积$\omega_{iM}\sigma_{iM}$，该乘积为风险证券$i$对总风险的贡献，因此单个证券$i$的风险应该与协方差$\sigma_{iM}$有关。

◆利用均衡条件下任何证券与市场投资组合形成的组合前沿与N个证券组合前沿内切的关系可以推得到SML：

证券i与市场组合的可行集是B和M的双曲线，N个风险资产共同相切于M

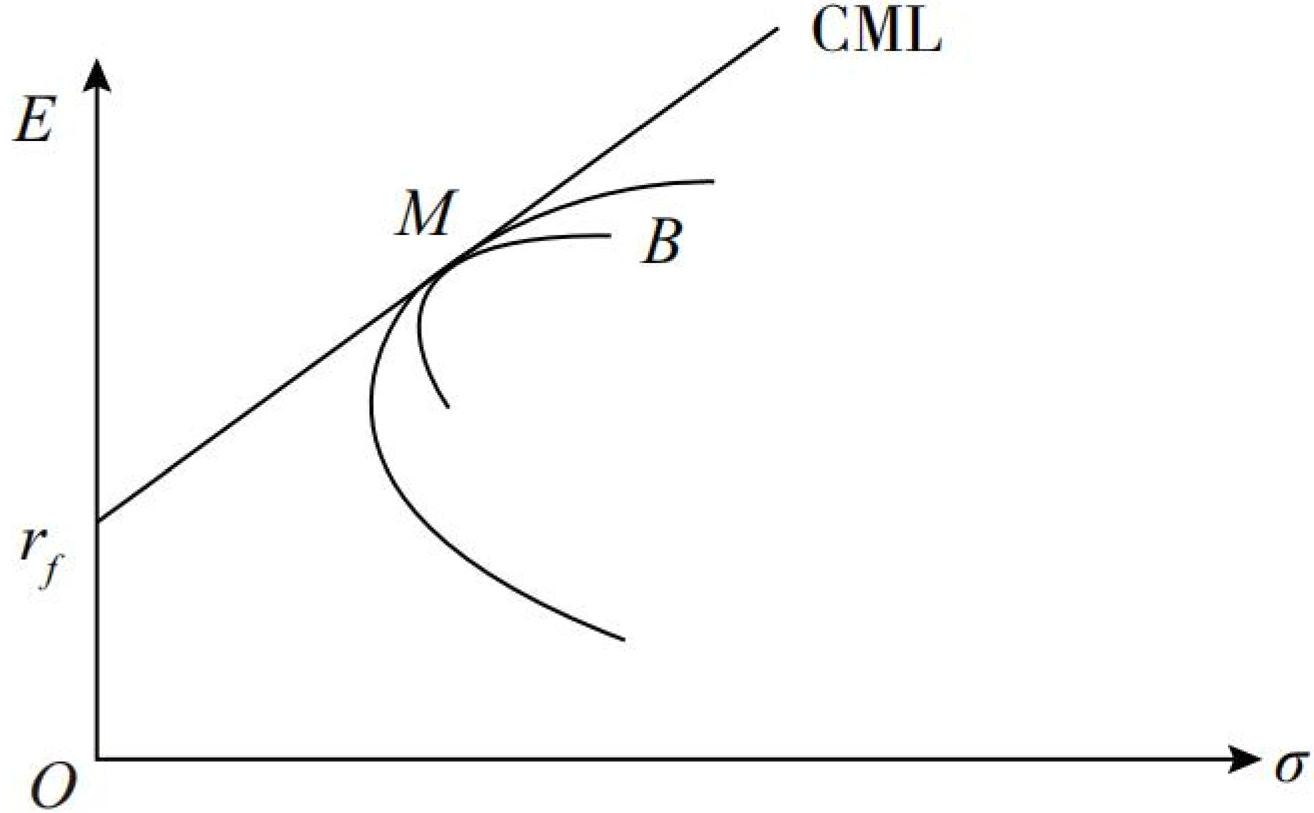

图 9-7　证券 i 与组合 M 形成的组合前沿

◆证券市场线（security market line 简称 SML），也称为贝塔定价方程（beta pricing equation）

$$\bar{r}_i = r_f + \beta_{iM}[\bar{r}_M - r_f] \qquad (9.11\text{b})$$

其中，

$$\beta_{iM} \equiv \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} \qquad (9.12)$$

券市场线是市场均衡确定的关系，当市场达到均衡时，在贝塔-收益平面内所有证券对应的点都落在证券市场线上。

怎么得到beta

1. 投资组合 p 的收益和风险
投资组合 p 由市场组合 M（权重 $1-a$）和证券 i（权重 a）构成。
组合收益率 $\bar{r}_p$：

$$\bar{r}_p = a\bar{r}_i + (1-a)\bar{r}_M \quad (9.7)$$

组合标准差 σ_p：

$$\sigma_p = \sqrt{a^2\sigma_i^2 + (1-a)^2\sigma_M^2 + 2a(1-a)\sigma_{iM}} \quad (9.8)$$

2. 均衡切线斜率 k 的两种表示 A. 组合曲线的切线斜率 (导数法)
根据链式法则，组合曲线在 M 点（$a=0$）的切线斜率 k 为：

$$k = \left.\frac{d\bar{r}_p}{d\sigma_p}\right|_{a=0} = \frac{d\bar{r}_p/da}{d\sigma_p/da} \quad (9.9)$$ 的引申

B. 资本市场线 CML 的斜率
在均衡状态下，该斜率 k 必须等于资本市场线 CML 的斜率：

$$k = \frac{\bar{r}_M - \bar{r}_f}{\sigma_M} \quad (9.10)$$

3. 求解 $\frac{d\bar{r}_p}{da}$ 和 $\frac{d\sigma_p}{da}$

a) 求解 $\frac{d\bar{r}_p}{da}$:

对 $\bar{r}_p = a\bar{r}_i + (1-a)\bar{r}_M$ 求 a 的导数:

$$\frac{d\bar{r}_p}{da} = \bar{r}_i - \bar{r}_M$$

b) 求解 $\left.\frac{d\sigma_p}{da}\right|_{a=0}$:

对 $\sigma_p^2 = a^2\sigma_i^2 + (1-a)^2\sigma_M^2 + 2a(1-a)\sigma_{iM}$ 关于 a 求导:

$$2\sigma_p\frac{d\sigma_p}{da} = 2a\sigma_i^2 + 2(1-a)(-1)\sigma_M^2 + 2\sigma_{iM}[(1-a)(1) + a(-1)]$$

$$2\sigma_p\frac{d\sigma_p}{da} = 2a\sigma_i^2 - 2(1-a)\sigma_M^2 + 2(1-2a)\sigma_{iM}$$

在 M 点 $(a=0)$ 处求值（此时 $\sigma_p = \sigma_M$）:

$$2\sigma_M \left.\frac{d\sigma_p}{da}\right|_{a=0} = 2(0)\sigma_i^2 - 2(1)\sigma_M^2 + 2(1)\sigma_{iM}$$

$$2\sigma_M \left.\frac{d\sigma_p}{da}\right|_{a=0} = 2\sigma_{iM} - 2\sigma_M^2$$

$$\left.\frac{d\sigma_p}{da}\right|_{a=0} = \frac{2(\sigma_{iM} - \sigma_M^2)}{2\sigma_M} = \frac{\sigma_{iM} - \sigma_M^2}{\sigma_M}$$

4. 建立均衡方程

将 $\frac{d\bar{r}_p}{da}$ 和 $\left.\frac{d\sigma_p}{da}\right|_{a=0}$ 代入 $\frac{d\bar{r}_p/da}{d\sigma_p/da}=k$，并令其等于 CML 斜率：

$$\frac{\bar{r}_i-\bar{r}_M}{(\sigma_{iM}-\sigma_M^2)/\sigma_M}=\frac{\bar{r}_M-\bar{r}_f}{\sigma_M}$$

两边除以 σ_M：

$$\frac{\bar{r}_i-\bar{r}_M}{\sigma_{iM}-\sigma_M^2}=\frac{\bar{r}_M-\bar{r}_f}{\sigma_M^2}$$

5. 求解 $\bar{r}_i$ 并导出 β_{iM}

将 $\sigma_{iM}-\sigma_M^2$ 移到等式右边：

$$\bar{r}_i-\bar{r}_M=\frac{\bar{r}_M-\bar{r}_f}{\sigma_M^2}(\sigma_{iM}-\sigma_M^2)$$

$$\bar{r}_i-\bar{r}_M=\frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}(\bar{r}_M-\bar{r}_f)-\frac{\sigma_M^2}{\sigma_M^2}(\bar{r}_M-\bar{r}_f)$$

$$\bar{r}_i-\bar{r}_M=\frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}(\bar{r}_M-\bar{r}_f)-(\bar{r}_M-\bar{r}_f)$$

将等式左边的 $\bar{r}_M$ 移到右边，并合并同类项：

$$\bar{r}_i=\bar{r}_M+\frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}(\bar{r}_M-\bar{r}_f)-\bar{r}_M+\bar{r}_f$$

$$\bar{r}_i=\bar{r}_f+\frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}(\bar{r}_M-\bar{r}_f)$$

将 $\bar{r}_f$ 移到左边：

$$\bar{r}_i-\bar{r}_f=\frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}(\bar{r}_M-\bar{r}_f)\quad(9.11a)$$

根据公式 (9.11b) 的定义：

$$\bar{r}_i=\bar{r}_f+\beta_{iM}[\bar{r}_M-\bar{r}_f]\quad(9.11b)$$

证券市场线（SML）的含义是：

1）均衡条件下单个证券的风险溢价（$\overline{r}_i - r_f$）与市场投资组合的风险溢价（$\overline{r}_M - r_f$，也称为股权溢价）呈线性关系，若贝塔系数大于零时，单个证券的风险溢价随股权溢价的增加而增加，反之则随股权溢价的增加而减小。

2）单个证券的风险由该证券的贝塔系数度量，贝塔系数大于零时，该证券的收益率与市场投资组合的收益率正相关，此时该证券的期望收益率高于无风险利率；贝塔系数等于零时，该证券的收益率与市场投资组合的收益率不相关，此时该证券的期望收益率等于无风险利率；贝塔系数小于零时，该证券的收益率与市场投资组合的收益率负相关，此时该证券的期望收益率低于无风险利率，由于该证券能够对冲风险，投资者对该证券的需求增加，价格高于具有同样收益率水平的无风险证券。

3）单个证券的收益率完全由市场投资组合收益率确定，并呈线性关系，其变化趋势同样由贝塔系数确定。

◆均衡条件下所有证券i都满足SML,对任意投资组合p也满足SML：

$$\bar{r}_p = r_f + \beta_{pM}[\bar{r}_M - r_f] \qquad (9.14)$$

◎（9.14）是投资组合的贝塔系数，我们有：证券的任何投资组合的贝塔等于组成组合的各证券贝塔的加权平均或凸组合

二、SML 与 CML 与特征线

◆ CML和SML看上去非常相似，但其含义是不同：

☞两直线描述的对象是不同的：CML 描述的是有效集；SML 描述的是均衡条件下单个证券或组合的收益与其风险之间的关系

☞两直线中度量风险的指标不同

☞CML 也是资产配置线；SML则被认为是资产定价公式

对任何任意风险资产 i，其期初价格记为 S_i，期末支付记为 X_i，则收益率 r_i 为：

$$r_i = \frac{X_i - S_i}{S_i}$$

定价公式的SML转化为：

$$S_i = \frac{\bar{X}_i}{1 + r_f + \beta_{iM}[\bar{r}_M - r_f]} = \frac{E[\tilde{X}_i]}{1 + E[\tilde{r}_i]} \qquad (9.16)$$

- 含义：风险证券的价格等于期末支付期望值的折现，折现率为该证券要求的回报率，分母中给出了要求的收益率

另一个形式：

$$\frac{\bar{X}_i - S_i}{S_i} = r_f + \frac{\operatorname{cov}(\tilde{r}_i, \tilde{r}_M)}{\sigma_M^2}(\bar{r}_M - r_f)$$

$$\frac{\bar{X}_i - S_i}{S_i} = r_f + \frac{1}{S_i}\frac{\operatorname{cov}(\tilde{X}_i, \tilde{r}_M)}{\sigma_M^2}(\bar{r}_M - r_f)$$

$$S_i = \frac{\bar{X}_i - [\bar{r}_M - r_f]\operatorname{cov}(\tilde{X}_i, \tilde{r}_M) / \sigma_M^2}{1+r_f} \equiv \frac{E[\tilde{X}_i] - Q}{1+r_f} \qquad (9.17)$$

其中，$Q = E[\tilde{r}_M - r_f]\operatorname{cov}(\tilde{X}_i, \tilde{r}_M) / \sigma_M^2$。（9. 17）的含义是风险证券的价格等于期末支付的确定性等价用无风险利率折现的现值，其中分子的整体理解为有风险的期末支付的确定性等价值。

一个风险资产的预期期末支付 $\bar{X}_i$，在扣除一笔金额 Q（风险贴水）之后，剩下的价值可以视作是确定的、无风险的金额，这个金额就是确定性等价。

三、零贝塔 CAPM

◆Black(1972)给出了不存在无风险利率条件下的定价模型——零贝塔资本资产定价模型

$$\bar{r}_i = \bar{r}_{zc(M)} + \beta_{iM}(\bar{r}_M - \bar{r}_{zc(M)}) \qquad (9.20)$$

其中，$\bar{r}_{zc(M)}$ 为投资组合 zc(M)的期望收益率，方程（9.20）即为零贝塔证券市场线。当市场存在无风险资产时，$\bar{r}_{zc(M)}$ 等于无风险利率。

存在一个投资组合与投资组合p的协方差为0，记作zc(p)

第四节 资本资产定价模型的实证分析

- 资本资产定价模型认为资产的期望收益率与其系统性风险之间呈一种简洁而优美的直线关系，这种直线关系易于实证检验。

一、早期经典的实证分析

- 早期的实证分析主要围绕证券市场线而展开
- 经典 SML的实证，主要包括：BJS 和 Fama MacBeth 的经典方法

- 1、BJS 方法

●BJS方法是由 Black,Jensen 和 Scholes（1972）提出来的旨在从时间序列和截面数据两个角度来验证 SML的实证方法。

●此前 Jensen(1968,1969)的实证结果基本支持 SML，Miller 和 Scholes(1972)则认为实证结果不能支持 SML所描述的证券收益与风险之间的线性关系，它们同时还发现利用历史数据估算贝塔值时容易出现偏倚。

- BJS为了检验SML，依据SML提出回归方程：

$$\tilde{R}_i^e = \alpha_i + \beta_{iM}\tilde{R}_M^e + \tilde{\varepsilon}_i \qquad (9.21)$$

- 若SML成立，则回归结果的截距项α_i为零；否则，若截距项α_i显著不为零说明SML不成立。

- 在对上述方程进行检验时，Miller 和 Scholes(1972)发现对贝塔值β_{iM} 进行排序后，高贝塔β_{iM}值往往对应负的截距项α_i，低贝塔β_{iM}值往往对应正的截距项α_i，这说明在估计中存在偏倚（bias）。
- 为了克服这种弊端Black, Jensen 和 Scholes（1972）通过构造适当的投资组合的方式替代单个股票进行实证分析。

- BJS 的实证期间为 1926 年1月到1966年3月，具体地按如下步骤得到实证分析的数据序列：

  step1 计算各股票的贝塔值β_{j0}；

  step2 构造投资组合并计算每个组合的收益率；

  step3 完成组合收益率时间序列的计算；

- 实证分析：

  通过上述方法得到数据后可以正式开始进行实证分析了，BJS 的实证包括两个部分：时间序列回归和截面回归。

  A、时间序列回归

  B、截面回归

时间序列回归

- 时间序列回归的目标是检验方程（9.21）是否成立。采用前述方法构造十个投资组合进行实证分析

$$\tilde{R}_{kt}^{e} = \alpha_k + \beta_k \tilde{R}_{Mt}^{e} + \tilde{\varepsilon}_{kt}, (k = p_1, p_2, \ldots, p_{10})$$

零假设 H_0：$\alpha_k = 0$

检验结果：分别用十个投资组合的 35 年 420 个月的月度超额收益以及同一时期市场投资组合的超额收益形成的时间序列对（9.22）进行最小二乘回归，即：$\tilde{R}_{Mt}^{e}$ 对 $\tilde{R}_{kt}^{e}$ （t=1, 2, . . . , 420）回归，回归结果表明十个组合中的三个回归的 t 值大于 1.85，其余的 t 值都非常小。而且截距项的估计值都非常小从而无法拒绝零假设 H_0。进一步将 35 年分为四个长度相等的子期（每个 105 个月）来对时间序列方程（9.22）进行最小二乘估计，组合 1 到 5 的 t 值都非常小，截距项的估计值也都非常小从而无法拒绝零假设 H_0，拒绝零假设就是拒绝 SML。

截面回归

- 截面回归是从另一个角度来检验 SML，是检验在同一时期具有不同贝塔值的股票或者股票投资组合的贝塔值与超额收益的关系。

截面回归首先采用的是方程：

$$\tilde{R}_j^e = \gamma_0 + \gamma_1 \beta_j + \tilde{\varepsilon}_j \qquad (9.23)$$

H_0：$\gamma_0=0$　$\gamma_1 = \overline{R}_M^e$

分别通过构造的十个组合 35 年的月度数据和四个 105 个月子期的数据检验上述方程，并计算贝塔估计值十个组合的贝塔值（$\beta_j, j = p_1, p_2, \ldots, p_{10}$）和超额收益值（$\overline{R}_j^e, j = p_1, p_2, \ldots, p_{10}$）描点画近似直线。由于存在偏倚，检验$\gamma_0$和$\gamma_1 - \overline{R}_M^e$显著不为零，拟合的直线没有经过原点，而且直线斜率彼此不相同（斜率等于$\overline{R}_M^e$），从而基本上拒绝了（9.23）。在 35 年的跨度中，每一年的无风险利率可能是时变的，因此可以考虑用 Black(1970) 的零贝塔资本资产定价模型来替代通常的

CAPM，从而提出了一个两因子模型：

$$\bar{R}_i = \bar{R}_{zc(M)} + \beta_{iM}(\bar{R}_M - \bar{R}_{zc(M)}) \tag{9.20}$$

或

$$\tilde{R}_i = \tilde{R}_{zc(M)}(1-\beta_{iM}) + \beta_{iM}\tilde{R}_M + \tilde{\varepsilon}_i \tag{9.23}$$

采用基本类似的方法进行检验，继续采用十个组合，甚至将子期限改为 17 个两年 24 个月的数据进行实证，结果基本不变。

2、Fama MacBeth 方法

- **Fama 和 MacBeth 截面回归**已经成为金融实证分析中的一种经典检验方法，该方法直到现在仍普遍用于金融的实证分析中。

- Fama 和 MacBeth1973在发表于《政治经济学杂志》的题为“Risk, Return, and Equilibrium: Empirical Tests”

- 1）实证假设：

起点： $$\bar{R}_i = \bar{R}_0 + \beta_{iM}(\bar{R}_M - \bar{R}_0) \quad (9.24)$$

三个实证检验目标：

C1：形成有效市场组合的任何一个证券，其期望收益与贝塔系数β成线性关系；

C2：贝塔系数β完全度量了单个证券的风险；

C3：对风险厌恶者，风险越高，相应的收益越高。

R0通常代表零贝塔投资组合（Zero-Beta Portfolio）的收益率或者无风险收益率

- 实证模型：

$$\tilde{R}_{it} = \tilde{\gamma}_{0t} + \tilde{\gamma}_{1t}\beta_i + \tilde{\gamma}_{2t}\beta_i^2 + \tilde{\gamma}_{3t}s_i + \tilde{\varepsilon}_{it} \tag{9.25}$$

这里允许 $\tilde{\gamma}_{0t},\tilde{\gamma}_{1t},\tilde{\gamma}_{2t},\tilde{\gamma}_{3t}$ 随时间变化而变化。实证检验的目标分别对应于：

C1 要求：$E[\tilde{\gamma}_{2t}]=0$，即β的二次项系数为零；

C2 要求：$E[\tilde{\gamma}_{3t}]=0$，即 s_i 的系数为零，s_i 表示除β外的其它风险；

C3 要求：$E[\tilde{\gamma}_{1t}]=E[\tilde{R}_{Mt}]-E[\tilde{R}_{0t}]>0$，$R_0$ 的随机性表明它随着时间变化而

si 表示除 β 外的其它风险；

此外，Sharp-Lintner 假设要求：$E[\tilde{\gamma}_{0t}]=R_{Ft}$。

综合起来检验零假设为：

H_0：$E[\tilde{\gamma}_{2t}]=0$；$E[\tilde{\gamma}_{3t}]=0$；$E[\tilde{\gamma}_{1t}]=E[\tilde{R}_{Mt}]-E[\tilde{R}_{0t}]>0$；$E[\tilde{\gamma}_{0t}]=R_{Ft}$。

- 实证步骤：

从总体上看 Fama 和 MacBeth 实证方法分为两大步，因此通常称为两步法（two-pass regression method）：

◆第一步利用时间序列回归估计贝塔风险β和其它风险 s_i；

◆第二步对模型进行截面回归,两步法的每一步又分为若干步

- 第一步：估计贝塔风险β和其它风险 s_i：

Step1：将 N 个证券分为 20 个数量基本相同的组合

用第一个 4 年（1926-1929 年，共 48 个月）的月度数据（到 1929 年底有不少于两年记录的股票才能选入作为 N 个股票之一）估计 $\hat{\beta}_i$，并依 $\hat{\beta}_i$ 从大到小排序，分成 20 个组，形成等权组合，$\hat{\beta}_i$ 的估计方法可以是 48 个月度收益的时间序列数据对同期市场投资组合收益的回归斜率，也可以按照下列公式计算得到：

$$\hat{\beta}_i \equiv \frac{\hat{\text{cov}}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M)}{\hat{\sigma}^2(\tilde{R}_M)} \tag{9.26}$$

等权组合指的是将一个组合（这里是 20 个小组中的其中一个）中所包含的所有资产（股票）以**相同的比例**进行投资和配置。

Value-weighted (或称 **市值加权**, **Market-Value Weighted**) 是一种构建**股票投资组合或市场指数**的方法，它根据每只股票的总市场价值（市值）来确定其在组合中的权重。

Step2：估计 20 个投资组合的贝塔值 $\hat{\beta}_{pt}$ 和其它风险。

用接下来 5 年（1930-1934 年，60 个月）的月度数据重新计算 $\hat{\beta}_i$，并计算 20 个组合的贝塔值 $\hat{\beta}_{pt}$ 用于风险收益检验。Step1 中时间序列回归的残差的标准差 s_i 即为其它风险。

$$\tilde{R}_{it} = \alpha_i + \beta_i \tilde{R}_{Mt} + \tilde{\varepsilon}_{it} \tag{9.27}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(\tilde{R}_i) &= \beta_i^2 \sigma(\tilde{R}_M) + \sigma^2(\tilde{\varepsilon}_i) + 2\beta_i \operatorname{cov}(\tilde{R}_M, \tilde{\varepsilon}_i) \\ &= \beta_i^2 \sigma(\tilde{R}_M) + \sigma^2(\tilde{\varepsilon}_i) \end{aligned} \tag{9.28}$$

由（9.28）解得的 $\sigma(\tilde{\varepsilon}_i)$ 即为其它风险 $s(\tilde{\varepsilon}_i)$，同样可以得到组合的其它风险 $s(\tilde{\varepsilon}_p)$。

- 第二步：截面回归：

由第一步的时间序列回归得到解释变量后可以展开实证分析，具体地计算接下来的4年（1935-1938年）20个组合的逐月收益按（9.29）进行截面回归：

$$\tilde{R}_{pt}=\hat{\gamma}_{0t}+\hat{\gamma}_{1t}\hat{\beta}_{p,t-1}+\hat{\gamma}_{2t}\hat{\beta}^{2}_{p,t-1}+\hat{\gamma}_{3t}\overline{s}_{p,t-1}+\hat{\varepsilon}_{pt},p=1,2,\dots,20 \qquad (9.29)$$

注意回归方程的角标，被解释变量比解释变量滞后一期。由此自1926年经历4年的“组合形成期”、5年的“初始估计期”和4年的“检验期”，完成一个检验周期。在最后4年“检验期”逐月截面回归，得到48个回归系数，计算相应

的均值$\bar{\hat{\gamma}}_i(i=0,1,2,3)$、标准差$s(\bar{\hat{\gamma}}_i)(i=0,1,2,3)$、t值$t(\bar{\hat{\gamma}}_i)(i=0,1,2,3)$等。为了保证检验期的前后相继并提高效率，从第二个周期开始“组合形成期”改为7年。总共9个周期。所得数据最终形成1个全期（1935年到1968年）和3个含10年的长期，6个4年期的子期。沿着上述方法并分别对提出的四个假设进行检验，其结果不能拒绝零假设H_0，从而CAPM基本成立，即不能拒绝收益与风险正相关假设；不能拒绝证券收益与风险呈线性性；不能拒绝市场价格完全反映信息。

罗尔批判

- 早期文献如上述的 BJS 和 Fama-MacBeth 大多在一定程度上支持 CAPM 的理论结果，但随着研究的深入，越来越多的结论对理论提出了挑战。这些挑战形成了“金融异象”（anomalies）。
- 所谓异象是指对资本市场上的资产价格实证分析的结果对资产定价理论的偏离

- **罗尔批判**：针对 CAPM 的实证，Roll(1977)提出了著名的“罗尔批判（Roll Critique）”。罗尔批判包括两条：

◆其一是：任何均值-方差有效的投资组合必定满足 CAPM。因此均值-方差有效是满足 CAPM 的同义反复，前者从数学上可以证明出后者，实证检验 CAPM 等价于实证市场投资组合是均值-方差有效的；

◆其二是：市场投资组合是不可观测的，它应当包含一切投资机会，包括证券、房地产、贵金属乃至珠宝等任何有价值的物品的购买。因此，市场投资组合是不可观测的，从而 CAPM 是不可检验的。许多研究者和实践者在提到“Roll 批判”时一般指第二条“市场投资组合不可观测”

- 即使 CAPM 是可以检验的，从逻辑上看验证 CAPM 的正确性等价于下面两个命题同时成立：

◆ 一是“市场是有效的”，即资产价格反应了市场信息；

◆二是“CAPM模型是正确的”

如果实证表明 CAPM 不成立，有可能因为样本期价格没有正确地反应信息，也可能 CAPM 确实不成立，因此，CAPM 的实证检验是一个非常复杂的问题，实证结果偏离理论结果也就在所难免了。这也就导致了八十年代开始涌现的大量金融异象。

- 金融异象：
- 金融异象是实证结果对金融理论的偏离

◆源自投资者的非理性行为——形成错误定价

◆源自资产定价模型的不够完善——需要拓展模型。

基于市场模型的若干效应——一些实证结果表明，某些特定的因素或指标对股票等风险资产的收益提供了一定的预测能力，我们称之为某效应

◆本茨（Banz，1981)提出的规模效应（size effect）——规模对股票收益具有可预测性，称之为规模效应

◆巴尔（Ball，1978)提出的盈利-收益效应(E/P effect)：盈利价格比（E/P）能部分地解释风险资产的期望收益；巴苏（Basu，1977)将 P/E 纳入模型解释 CAPM；其它替代 E/P的有现金流-价格比（CF/P）和价格-销售比（P/S），价格-账面值效应（P/B）

◆贾根迪西和提特曼（Jegadeesh&Titmaan，1993)提出的动量效应；德伯特和塞纳（DeBondt&Thaler，1985，1987)的过渡反应，动量与反转

◆其他异象

一般地，用理论无法解释的若干现象称为异象，理论上无法预测股票收益的某些特征或变量，如果在实证结果中表现出于股票结果具有显著的预测能力，我们都称之为异象。

- 典型例子：

周末效应（weekend effect）；

一月效应（the January effect）；

月度效应（the monthly effect）；

假日效应（holiday effect）

日内效应（intraday effect）