第四章：Arrow-Debreu经济

武汉大学经济与管理学院

引言

- Arrow-Debreu经济是由美国经济学家Arrow (1964)和Debreu(1959)分别提出的,其目的是用一种简单的方法来分析资产定价问题,得出了一些普适性的结论。该方法或模型虽然简单，但得出的结论非常具有代表性。
- 该经济考虑一种两时点、有限状态、有限证券情形，在此情形下从市场交易的证券中找出几个基本证券，通过对这几个基本证券定价进而对其它证券进行定价。

基本框架

- 两时点单期情形
- 期末有有限状态——S个状态
- 有有限个证券 —— N个证券
- 此时描述证券的量：

  期初价格向量： $S^T=(S_1,S_2,\ldots,S_N)$

  期末支付矩阵：

$$X \equiv \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{S1} & x_{S2} & \cdots & x_{SN} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} X_{1.} \\ X_{2.} \\ \cdots \\ X_{S.} \end{bmatrix}$$

第一节：Arrow-Debreu证券市场

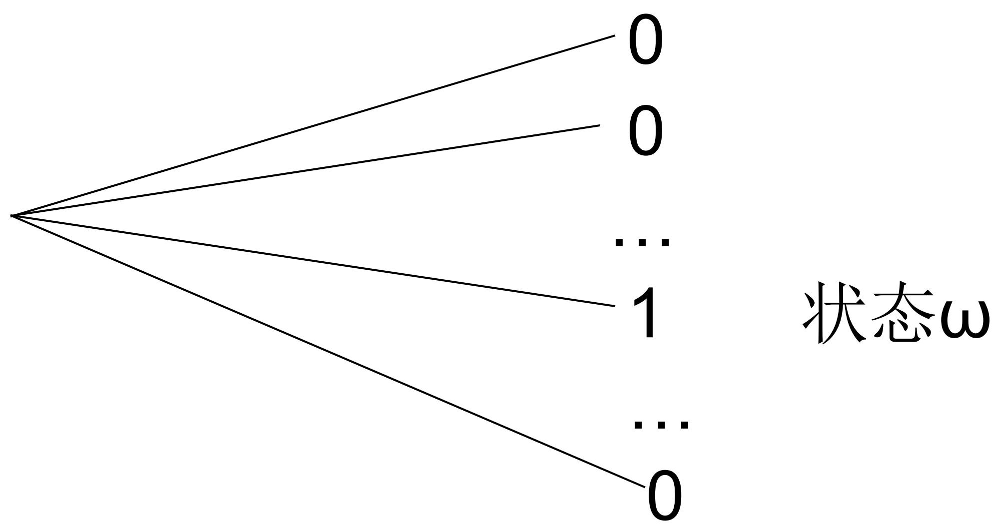
- 基本框架下每一个证券都可以表示为S维支付向量，且支付向量具有责任有限的性质，即支付向量的每个分量都是**非负**的。
- 一种理想的情形是除了某个特定状态有正的支付外其它状态都没有支付，对其**标准化**后即是Arrow-Debreu证券，我们简称之为A-D**证券**。

一、A-D证券的定义

- A-D证券又称纯证券、状态或有证券、状态或有要求权，有时简称状态证券。

  ☞**定义4.1**：只在某个特定ω状态下支付为一个单位，其它状态下的支付为零的证券称为纯证券。

  ☞几何表示：



- 状态证券可以用示性函数表示：

$$I_{\omega}(\omega')=\begin{cases}1, & \omega'=\omega \\ 0, & \omega'\neq\omega\end{cases}$$

- 也可以表示为特殊向量：

$$1_{\omega}=\begin{pmatrix}0\\ \cdots\\ 1\\ \cdots\\ 0\end{pmatrix}$$

进一步

- A-D证券市场是指由所有A-D证券所构成的证券市场。具体地，考虑两期有限状态（S状态）情形，如果证券市场包含了**S个不同**的A-D证券，则称之为A-D证券市场。
- 由**所有可能**的状态或有证券形成的集合称为A-D证券的完全集合。
- 本人简单地用A-D表示Arrow-Debreu

A-D证券的定义（续）

◆**例子**：假如未来只有三种状态，则市场上只有三类纯证券：

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

◆通常情况下，期末有S个状态时，有S个不同的纯证券，其支付向量对应与S维向量空间的标准正交基。

相应的市场结构

- 若市场存在S个状态证券，这S个状态证券形成的市场结构按顺序形成一个单位矩阵

$$X^{A-D} \equiv \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & & 1 & & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & & 0 & & 1 \end{bmatrix} = I$$

二、状态价格

- 回顾：每个证券我们关心两个时点的值：

期初的价格S　　　　　　期末的支付X

	price	payoff
单个证券	s_i	x_i
一个组合	$S^T = (s_1, s_2, \ldots, s_N)$	$X = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$
状态证券	ϕ_ω	1_ω

- 对于我们刚才定义的特殊证券——A-D证券，其价格也颇受关注，我们给它特殊的名称。
- 我们称A-D证券的价格为状态价格

定义 4.2（状态价格，state price）：状态ω Arrow-Debreu 证券在期初的价格称为**状态ω价格**，简称为**状态价格**，记为 ϕ_ω。

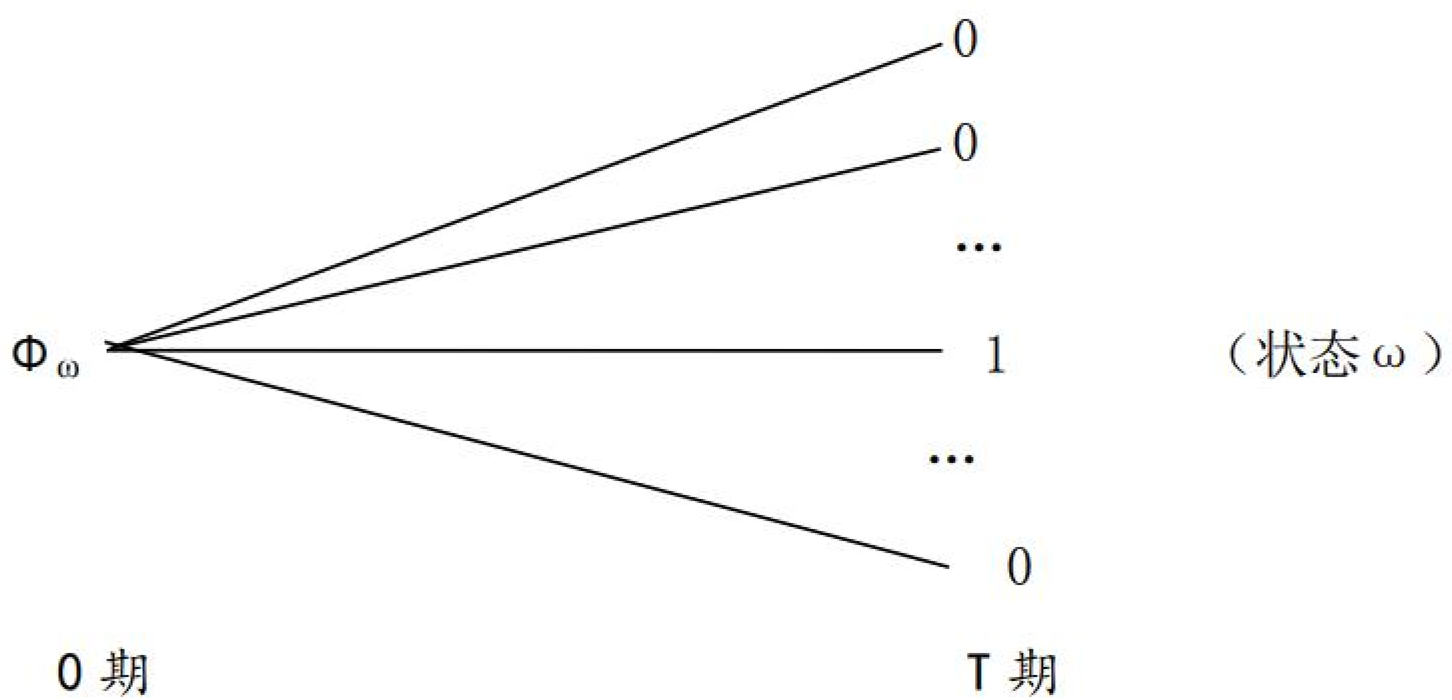


图 4-2 状态ω Arrow-Debreu 证券的价格与支付

- 确定状态价格的例子：
- 我们构造一个简单的例子来看状态价格的确定：假如市场上有两个交易证券j和k，期末只有两种可能的状态，两证券的支付和价格如表4.1所示：

证券	状态1	状态2	价格
j	*$10*	*$20*	*$8*
k	*$30*	*$10*	*$9*

解：两证券的价格表示为：$S_j=8;S_k=9$；相应的支付向量表示为：

$$X_j=\begin{pmatrix}10\\20\end{pmatrix} \text{和} \ X_k=\begin{pmatrix}30\\10\end{pmatrix}$$

由线性代数的知识可知：

$$\begin{pmatrix}10\\20\end{pmatrix}=10\times\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+20\times\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \text{和} \begin{pmatrix}30\\10\end{pmatrix}=30\times\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+10\times\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

- 因此状态价格满足如下方程组：

$$\begin{cases} 10\phi_1 + 20\phi_2 = 8 \\ 30\phi_1 + 10\phi_2 = 9 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\phi_1 = \$0.20, \phi_2 = \$0.30$$

进一步假定某证券在状态1、2下的支付分别为\$15和\$50，则价格应该为：

$$15 \times \$0.20 + 50 \times \$0.30 = \$18$$

一般情形

- 单个证券的支付分解

$$x_i = \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \cdots \\ x_{Si} \end{bmatrix} = x_{1i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_{2i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + x_{Si} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= x_{1i} 1_1 + x_{2i} 1_2 + \ldots + x_{Si} 1_S$$

$$X_i = \left(x_{\{1i\}}, x_{\{2i\}}, \ldots, x_{\{\omega i\}}, \ldots, x_{\{Si\}}\right)^{\mathrm{T}}$$

合理情形（无套利机会）下，其价格与状态价格之间必定满足：

$$S_i = x_{1i}\phi_1 + x_{2i}\phi_2 + \ldots + x_{\omega i}\phi_\omega + \ldots, + x_{Si}\phi_S \tag{4.4}$$

为便于记忆，将上述分析简单概括如下：

在 1 时点：$X_i = x_{1i}1_1 + x_{2i}1_2 + \ldots + x_{\omega i}1_\omega + \ldots, + x_{Si}1_S$

在 0 时点：$S_i = x_{1i}\phi_1 + x_{2i}\phi_2 + \ldots + x_{\omega i}\phi_\omega + \ldots, + x_{Si}\phi_S$

$$\begin{cases} x_{11}\phi_1 + x_{21}\phi_2 + \ldots + x_{S1}\phi_S = S_1 \\ x_{12}\phi_1 + x_{22}\phi_2 + \ldots + x_{S2}\phi_S = S_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{1N}\phi_1 + x_{2N}\phi_2 + \ldots + x_{SN}\phi_S = S_N \end{cases} \tag{4.5a}$$

向量语言：

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} & \cdots & x_{S1} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} & \cdots & x_{S2} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & \cdots & x_{22} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{1N} & x_{2N} & x_{3N} & \cdots & x_{SN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \cdots \\ \phi_S \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \cdots \\ S_s \end{pmatrix} \qquad (4.5b)$$

或简单地表示为：

$$X^T\phi = S\text{；或 }\phi^T X = S^T \qquad (4.5c)$$

写法一： $X^T\phi = S$

设

$$X = \begin{bmatrix} 10 & 30 \\ 20 & 10 \end{bmatrix}, \quad \phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

那么：

$$X^T\phi = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix} = S.$$

写法二： $\phi^T X = S^T$

对上式取转置，有

$$\phi^T X = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 30 \\ 20 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 9 \end{bmatrix} = S^T.$$

- 接下来的问题是如何解这个方程组。当然，要解得状态价格向量必须方程组有解。

- 方程组是否有解需要利用线性代数的相关知识进行分析。为了分析解的存在性，我们首先介绍一个特殊的概念——市场完全性。

第二节：完全资本市场

- 问题：

假设期末有S个互斥状态、市场上有N个证券而且每个证券期初的价格和期末的支付都已知时，求状态价格的问题可以归结为方程组（4.5）的求解。那么，什么时候有解？解是否唯一？

- 所有这些问题涉及市场的完全性和套利问题。套利问题在下一章中展开分析。

一、完全市场

- 这里我们先给出完全市场的概念，具体地：

定义 4.3：上述框架下，若市场上存在 S 个不同的 A-D 证券或者能够复制出S 个不同的 A-D 证券则该市场称为完全市场（complete market）。

- 当市场上存在 S 个不同的 A-D 证券时，任何有限支付的证券都可以通过构造一个 A-D证券组合而得到，即该证券可以被 A-D 证券复制。如果市场上的 N 个证券能够复制出 S 个 A-D 证券，则任何有限支付的证券也能被复制出来。
- 所谓有限支付的证券是指证券的支付向量的每一个分量都是有限实数

- 我们概括为命题4.1：

命题4. 1： 完全市场上任何一个有限支付证券都可以被复制。

- 命题的证明是比较容易的，当然，首先要明确一个概念“复制”——所谓**复制**是指存在一个证券组合使得其期末的支付与某证券的期末支付完全相同。用数学语言来描述：

◆证券 $\mathbf{X}$ 是不同于证券$\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\ldots,\mathbf{X}_N$的证券，如果存在投资组合$\boldsymbol{\theta}^T=(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$满足：

$$\mathbf{X}=\theta_1\mathbf{X}_1+\theta_2\mathbf{X}_2+\ldots+\theta_N\mathbf{X}_N$$

则称证券 $\mathbf{X}$ 被证券$\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\ldots,\mathbf{X}_N$的**复制**，也称为被$\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\ldots,\mathbf{X}_N$**线性表示**。数学里的线性表示等价于这里的**复制、合成、生成**

所谓有限支付证券是指支付向量的每一个分量都是有限值，当市场上有 S 个 A-D 证券时，显然可以通过购买有限个不同状态 A-D 证券复制。如果市场上不存在 S 个 A-D 证券时，由于市场是完全的，由定义 4.3 可知每个 A-D 证券都能被复制，即对任意 ω，都存在投资组合 θ_ω 使得证券状态可以被复制，则有：

$$I_\omega = X\theta_\omega,$$

其中 $I_\omega = (0,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)^{\mathrm{T}}$ 是 ω 状态的 A–D 证券的组合向量，并且记

$$E^{A-D} = (I_1, I_2, \ldots, I_S) = (X\theta_1, X\theta_2, \ldots, X\theta_S) = X(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_S).$$

即

$$E^{A-D} \equiv XH,$$

其中

$$H \equiv (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_S) = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{1j} & \cdots & \theta_{1S} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{\omega 1} & \theta_{\omega j} & \cdots & \theta_{\omega S} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{S1} & \theta_{Sj} & \cdots & \theta_{SS} \end{pmatrix}.$$

又因为对任意的有限向量 $X_i = (x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{\omega i}, \ldots, x_{Si})^{\mathrm{T}}$，有

$$\begin{aligned} X_i &= x_{1i}I_1 + x_{2i}I_2 + \cdots + x_{\omega i}I_\omega + \cdots + x_{Si}I_S = E^{A-D}X_i \\ &= XHX_i \\ &= X(HX_i). \end{aligned}$$

其中 $\theta_i = HX_i$，显然在市场结构 X 下，组合 θ_i 复制证券 i。由于 i 的任意性，原命题得证。

◆由命题4.1容易得出结论：

总之，在完全市场上，任何一个有限的消费计划都可以通过买卖证券而实现，因此完全市场上的任何有限消费计划都是可行的。

这就是为什么文献中通常要假设“市场是完全的”！！

二、A-D 证券市场与完全市场

- 由前面的定义可知，A-D 证券市场是完全市场，因为它包含了 S 个不同的 A-D证券

- 反之，如果市场是完全的，那么可以得到一个 A-D 证券市场。

- 我们将由 N个证券组成的市场称为**原生证券市场**，其期末支付矩阵为 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_N)$，价格向量为 $\boldsymbol{S}^T=$（S_1，S_2，…,S_N）,则($\boldsymbol{S}^T$, $\boldsymbol{X}$）包含了市场的主要信息，我们称原生证券市场

- 回顾投资组合的价格和支付的计算方法。由 N 个证券形成的任意投资组合$\boldsymbol{\theta}^T$=（θ_1,θ_2，…,θ_N），其期末的支付向量为 $\boldsymbol{X}_\theta=\boldsymbol{X\theta}$；期初的价格为 $\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{\theta}$。
- 为了便于记忆，我们可以将证券和证券组合的价格与支付之间的对称性描述为图 *4-3*：

	0 期	T 期
证券 i	S_i	$\boldsymbol{X}_i$
N 个证券	$\boldsymbol{S}^T=(S_1,S_2,\ldots,S_N)$	$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\ldots,\boldsymbol{X}_N)$
组合向量	$\boldsymbol{\theta}^T$=（θ^1,θ^2，…,θ^N）	
组合的价格与支付	$\mathbf{S}^T\boldsymbol{\theta}$	$\mathbf{X}\boldsymbol{\theta}$

图 4-3 证券和证券组合具有对称性的价格与支付图示

- 图 4-3 对原生市场(S^T, X）是成立的，对特殊的市场(ϕ^T, $X^{A\text{-}D}$）也是成立的，唯一的区别在于前者形成的投资组合为 N 维向量，后者形成的投资组合为 S 维向量。
- 图4-3的表达方式并不是唯一的，但因为具有对称性，所以是最容易记住的。

A-D框架下的组合价格与支付

	0 期	T 期
ω A-D 证券	ϕ_ω	1_ω
S 个 A-D 证券	$\phi^T=(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_S)$	$X^{A\text{-}D}=E$
组合向量	$\boxed{\theta^T}=(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_S)$	
组合的价格与支付	$\phi^T\theta$	$X\theta=\boxed{\theta}$

A-D 框架下证券组合的透明性

概括为命题4.2

命题 4.2： 在 A-D 证券市场(ϕ^T, X^{A-D}）上，投资组合选择具有“透明”性，即任何投资组合的支付向量与投资组合向量完全相同，即：

0 时点的投资组合	1 时点的支付
θ	θ

换言之，为了实现期末时点的消费计划c，只需要投资组合θ =c即可

- 如果原生证券市场是完全的，则复制状态证券的方程（4.6）有解，显然，当支付矩阵 X 的秩等于状态个数 S 时，方程组有唯一解，因此我们有：

$$I_{\omega} = X\theta_{\omega} \qquad (4.6)$$

命题4.3：当且仅当支付矩阵的秩等于状态个数 S 时，市场是完全的。

假设有两个状态 $S=2$，证券支付矩阵是

$$X=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

这里 $\mathrm{rank}(X)=2=S$。任意状态证券，比如 $(1,0)^\top$，都可以唯一由证券组合得到。

但如果

$$X=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

此时 $\mathrm{rank}(X)=1<2$，只能生成形如 $(a,a)^\top$ 的状态证券，无法唯一复制任意状态证券，市场不完备。

命题 4.3 也可以作为完全市场的定义，即若 rank(X)=S 则称市场是完全的。若市场完全，由于市场(ϕ^T, X^{A-D}）具有“透明”性，因此在分析问题时可以考虑分两步进行：

第一步：由原生市场(S^T, X）经（4.6）得到 A-D 证券市场(ϕ^T, X^{A-D}）；

第二步：在 A-D 证券市场(ϕ^T, X^{A-D}）上分析问题。

第三节：A-D框架下的一般均衡分析

- 两时点有限状态下建立的 A-D 框架可以简化问题的分析，讨论证券市场上价格的确定。
- 一般均衡方法来自微观经济学，通常分为两步：

☛第一步：**各自优化**，确定经济人的最优需求和最优供给，此时的最优需求和供给都是价格的函数；

☛第二步：**市场出清**，总供给等于总需求，由此形成关于价格的方程组，解方程组即可得一般均衡价格，进一步还可以求出最优供给和最优需求。

- 纯交换经济下的各自优化：

通常各自优化包含供给和需求两个方面，但是在纯交换经济下，证券的供给是给定的，只有证券的需求需要通过经济人的各自优化来决定。

因此，纯交换经济下的各自优化是经济人基于消费效用极大化的各自优化。

生产性经济学下的最优化则包括厂商利润极大化由此形成的证券最优供给。

- A-D 框架下，所有经济人的禀赋、消费计划都可以通过 A-D 证券资产化，各自优化的结果可以将经济人的消费需求表示为 A-D 证券价格的函数，市场出清解出 A-D 证券的价格。市场上存在其他证券则由 A-D 证券的价格计算出来。

- 我们按如下几个步骤来考虑参与者的优化问题

  Step 1：参与者的预算约束

  Step2：参与者的优化问题

  Step3：优化的必要条件

A、预算约束

- 参与者的禀赋：

假设有两类禀赋：

☞实物禀赋——在各时点、各状态下获得实物禀赋，即在每个时间-状态节点获得的外生给定的消费品的数量

☞证券禀赋——期初拥有的证券禀赋，除各时间-状态节点获得实物禀赋外，还可能在期初拥有某些证券

我们需要一种方法将各种不同形式的禀赋统一起来，为此，我们给出一种方法来计量实物禀赋的财富值。

（一）禀赋的财富值

考虑两种特殊情形：

情形一： 经济人只有实物禀赋，即证券禀赋均为零。此时，总禀赋为：$e=(e_0,e_{11},\ldots,e_{1S})^T \in R^{S+1}$；

情形二： 经济人的实物禀赋为 0 期的 e_0 和 A-D 证券组合：$\overline{\theta}=(\overline{\theta}_1,\ldots,\overline{\theta}_S)^T$，其中 $\overline{\theta}_\omega=e_{1\omega},\forall\omega\in\Omega$，即 $\overline{\theta}=(e_{11},\ldots,e_{1\omega},\ldots,e_{1S})^T$。

- 两种情形下对应的实物禀赋是完全相同的，即他们对应的实物禀赋均如图 4-4 所示：

赋均如图 4-4 所示：

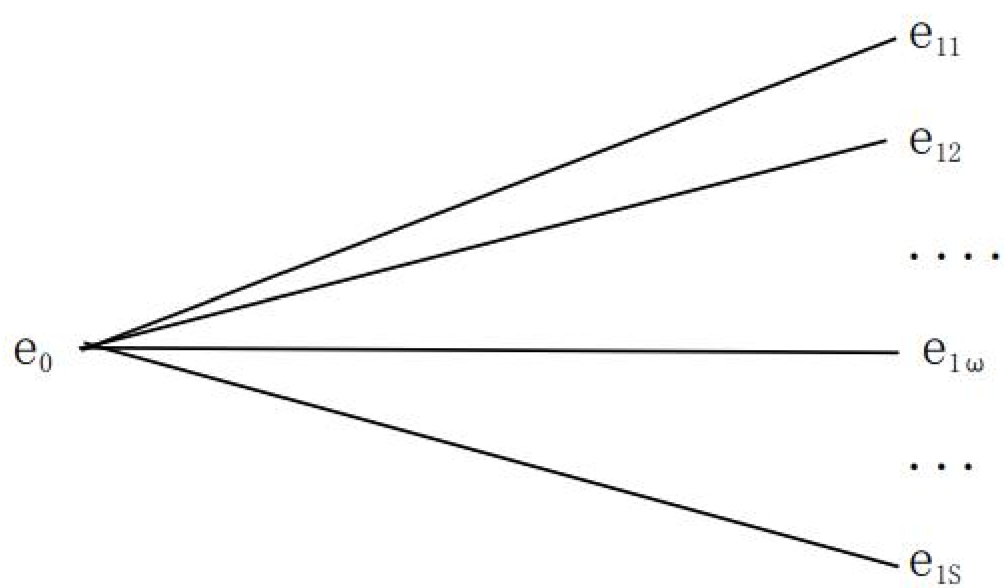


图 4-4 两种特定禀赋对应的实物禀赋分布图

- 由于两种情形下对应的禀赋完全相同，因此我们认为它们具有相同的“财富值”

◆情形二下的财富值按如下思路计算：我们用期初消费品作为法币（numeraire），即用期初的 1 单位消费品作为消费品价格的单位，则这种折合为期初的实物的方式可以计算情形二下的“市场价值”

情形二的“财富价值”计算为：

☞0期的实物禀赋价值为：e_0

☞0期的证券禀赋等价于A-D证券组合 $\bar{\theta}=(e_{11},\ldots,e_{1\omega},\ldots,e_{1S})^T$

其价值为：

$$\sum_{\omega=1}^{S} e_{1\omega}\phi_{\omega}$$

总价值称之为该禀赋的**金融财富（financial wealth）**，简称为**财富(wealth)**，记为 **w**：

$$w=e_0+\sum_{\omega=1}^{S} e_{1\omega}\phi_{\omega}=e_0+\phi^T e \qquad (4.7)$$

（二）预算约束

所谓预算约束是指经济人的需求必须满足的约束条件

☞经济人的需求是其消费计划 $c=(c_0,c_{11},\ldots,c_{1S})^T$

类似前面的分析，在 A-D 经济下可以计算出消费计划**c**= $(c_0, c_{11},\ldots, c_{1S})^T$ 的市场价值：

$$w_c=c_0+\sum_{\omega=1}^{S}c_{1\omega}\phi_\omega=c_0+\phi^T c \tag{4.8}$$

☞经济人的需求的价值不超过其禀赋的价值即为预算约束：

$$c_0+\sum_{\omega=1}^{S}c_{1\omega}\phi_{\omega}\le e_0+\sum_{\omega=1}^{S}e_{1\omega}\phi_{\omega} \qquad (4.9a)$$

在不满足性假设下不存在资源浪费，不等式变为方程，即预算约束方程：为什么？

$$c_0+\sum_{\omega=1}^{S}c_{1\omega}\phi_{\omega}=e_0+\sum_{\omega=1}^{S}e_{1\omega}\phi_{\omega} \qquad (4.10)$$

精简表示

$$c_0 + \phi^T c_1 = w = e_0 + \phi^T e_1$$

$$(1, \phi^T)\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = (1, \phi^T)\begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\phi}^T \equiv (1, \phi^T), c \equiv \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}, e \equiv \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\phi}^T c = \hat{\phi}^T e$$

- 预算约束方程：

$$c_0 + \sum_{\omega=1}^{S} c_{1\omega}\phi_\omega = e_0 + \sum_{\omega=1}^{S} e_{1\omega}\phi_\omega$$

- 满足预算约束方程的消费计划是可行的消费计划。所有的满足约束方程的消费计划形成的集合称为预算集记为：

$$B(e,\phi) = \{c : c \geq 0, c_0 + \phi^T c_1 \leq e_0 + \phi^T e_1\} \qquad (4.11)$$

B、 经济人的优化问题

- 给定证券市场以及 A-D 证券价格，经济人在其预算约束下寻找最优的消费计划，使其消费的效用极大。

（一）优化问题

◆经济人的优化问题是选择消费计划$\mathbf{c}=(c_0;c_{11},\ldots,c_{1S})^T$使其期望效用极大，用数学语言描述为：

$$\max_{\{c_0,c_{11},\ldots,c_{1S}\}} U(c_0;c_{11},\ldots,c_{1S})$$

$$s.t \quad c_0+\sum_{\omega=1}^{S}c_{1\omega}\phi_\omega=e_0+\sum_{\omega=1}^{S}e_{1\omega}\phi_\omega \qquad (4.\mathrm{P}1)$$

$$c_0\geq 0;c_{1\omega}\geq 0,\omega=1,2,\ldots,S$$

等价地，该问题用向量描述为：

$$\max_{\{c_0,c_1\}} U(c_0, c_1)$$

$$s.t \quad c_0 + \phi^T c_1 = e_0 + \phi^T e_1 \qquad （4 .P2）$$

$$c_0 \geq 0; c_1 \geq 0$$

- 期望效用理论下，效用函数可以具体化为：

$$U(c)=\sum_{\omega\in\Omega}\pi_{\omega}u_{\omega}(c_0,c_{1\omega}) \qquad (2.4)$$

状态独立、时间可加假设下，优化问题可以简化为：

$$\max_{c} U(c)=u(c_0)+\rho\sum_{\omega\in\Omega}\pi_{\omega}u(c_{1\omega})$$

$$s.t \quad c_0+\sum_{\omega=1}^{S}c_{1\omega}\phi_{\omega}=e_0+\sum_{\omega=1}^{S}e_{1\omega}\phi_{\omega} \qquad (4.P3)$$

$$c_0\geq 0; c_{1\omega}\geq 0, \omega=1,2,\ldots,S$$

我们不加证明地给出定理

定理 4. 1： 消费集为 S+1 维向量空间的子集，$C \subset R_{+}^{1+S}$，而且效用函数 U(C)在消费集 C 上连续，则上述优化问题有解。

（二）必要条件

◆定理 4.1 表明，当个人的预算约束集为闭集时，由于效用函数满足一定的性质，从而优化问题有解。效用函数满足的性质包括：不满足性和风险厌恶

假设 4.1： 经济人的效用函数二阶可微。

☞进一步假设不满足性：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U(c_0, c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1S})}{\partial c_0} > 0; \\ \dfrac{\partial U(c_0, c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1S})}{\partial c_{1\omega}} > 0, \omega = 1, 2, \ldots, S \end{cases} \tag{4.14}$$

☞风险厌恶假设

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U^2(c_0, c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1S})}{\partial c_0^2} < 0; \\ \dfrac{\partial U^2(c_0, c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1S})}{\partial c^2{}_{1\omega}} < 0, \omega = 1, 2, \ldots, S \end{cases} \tag{4.15}$$

该假设也意味着“边际效用递减”

优化问题的处理

- 我们讨论问题（4.P1）的解所满足的一阶条件，因为该问题是（4.P2）和（4.P3）的最一般的形式。
- 由于经济人问题是约束极值问题，通常采用拉格朗日法处理：

令拉格朗日函数（Lagrangian function 简称拉氏函数）：

$$L(c,\lambda,\mu)=U(c_0,c_{11},\ldots,c_{1S})+\overbrace{\lambda[w-c_0-\sum_{\omega=1}^{S}c_{1\omega}\phi_{\omega}]}^{\text{等式约束}}+\overbrace{\mu_0c_0+\sum_{i=1}^{S}\mu_ic_{1i}}^{\text{不等式约束}}$$

F.O.C:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial c_0} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial c_{1\omega}} = 0, \omega = 1,2,\ldots,S \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \mu_i} \geq 0, \mu_i c_i = 0, i = 0,1,\ldots S \end{cases} \quad (4.17)$$

互补松弛条件 $\mu_i c_i = 0$ 的意思是：**要么约束是紧的，要么乘子为零**。

F.O.C是一阶条件（first order conditions）的缩写；

S.O.C是一阶条件（second order conditions）的缩写；

h.o.t是高阶项（higher order term）的缩写

- 当最优解在不等式约束的边界点处（$c_i=0$ 点）取得时，我们称最优解为边角解；当最优解不在不等式约束的边界点处（$c_i=0$ 点）取得时，我们称最优解为内点解。
- 大多经济学分支不考虑边角解。经济学中为了避免边角解的出现，通常引进一个新的假设，称为**稻田条件**（Inada condition）：

$$\lim_{c\to 0}\frac{\partial U}{\partial c}=\infty;\lim_{c\to \infty}\frac{\partial U}{\partial c}=0 \qquad (4.18)$$

引进了稻田条件后的优化问题：

$$\max_{\{c_0, c_{11}, \ldots, c_{1S}\}} U(c_0, c_{11}, \ldots, c_{1S})$$

$$s.t \quad c_0 + \sum_{\omega=1}^{S} c_{1\omega}\varphi_\omega = e_0 + \sum_{\omega=1}^{S} e_{1\omega}\varphi_\omega$$

此时属于等式约束极值，其拉氏函数为：

$$L(c, \lambda, \mu) = U(c_0, c_{11}, \ldots, c_{1S}) + \lambda[w - c_0 - \sum_{\omega=1}^{S} c_{1\omega}\phi_\omega]$$

F. O. C：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial c_0} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial c_{1\omega}} = 0, \omega = 1,2,\ldots,S \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \qquad (4.20)$$

例子

例 4.3： 考虑一个“Lucas 树经济”，1 期有两种状态 a 和 b，相应状态发生的概率分别为π_a和π_b。假设这两个状态对应的状态价格分别为ϕ_a和ϕ_b。某经济人的全部禀赋为实物禀赋（e_0, e_{1a}, e_{1b}），他具有状态独立时间可加的期望效用函数，时间偏好率为ρ，而且令 u(x)=lnx。求该经济人的最优消费-组合选择。

☞经济人的优化问题：

$$\max_{\{c_0, c_{1a}, c_{1b}\}} U(c) = \ln c_0 + \rho[\pi_a \ln c_{1a} + \pi_b \ln c_{1b}]$$

$$s.t\ \ c_0 + c_{1a}\phi_a + c_{1b}\phi_b = w$$

☞引进拉氏函数：

令： $L(c, \lambda, \mu) = \ln c_0 + \rho[\pi_a \ln c_{1a} + \pi_b \ln c_{1b}] + \lambda[w - c_0 - c_{1a}\phi_a - c_{1b}\phi_b]$

- F.O.C

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial c_0} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial c_{1a}} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial c_{1b}} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \text{等价地} \begin{cases} \dfrac{1}{c_0} = \lambda \\ \dfrac{\rho\pi_a}{c_{1a}} = \lambda\phi_a \\ \dfrac{\rho\pi_b}{c_{1b}} = \lambda\phi_b \\ w - c_0 - c_{1a}\phi_a - c_{1b}\phi_b = 0 \end{cases} \tag{4.21}$$

- 由预算约束解得：

$$\begin{cases} c_0 = \dfrac{w}{1+\rho} \\ c_{1a} = \dfrac{\rho w \pi_a}{(1+\rho)\phi_a} \\ c_{1b} = \dfrac{\rho w \pi_b}{(1+\rho)\phi_b} \end{cases}$$

进一步，若两状态等概率，即$\pi_a=\pi_b=0.5$，同时$\rho=1$，则：

$$\begin{cases} c_0 = \dfrac{w}{2} \\ c_{1a} = \dfrac{w}{4\phi_a} \\ c_{1b} = \dfrac{w}{4\phi_b} \end{cases}$$

（三）最优消费和投资组合的性质

◆例 4.3 给我们一个直观的感觉，经济人的财富配置从时间上看与时间偏好率密切相关，从状态上看与状态价格的大小密切相关。

◆回到问题（4.P1）及其一阶条件（4.20）分析一般情形下经济人的最优消费和组合所具有的性质。或者说，经济人将其资源在不同时点、不同状态下的配置所具有的共性；最优消费满足的性质。

- 一阶条件：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial c_0} = \dfrac{\partial U}{\partial c_0} - \lambda = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial c_{1\omega}} = \dfrac{\partial U}{\partial c_{1\omega}} - \lambda \phi_\omega = 0, \omega = 1,2,\ldots,S \end{cases} \tag{4.22}$$

- 化简：

期末与期初的边际效用之比为：

$$\frac{\dfrac{\partial U}{\partial c_{1\omega}}}{\dfrac{\partial U}{\partial c_0}} = \phi_\omega \tag{4.23}$$

- 进一步转化：

对其变形为：

$$\frac{\partial U}{\partial c_{1\omega}} = \phi_{\omega} \times \frac{\partial U}{\partial c_0} \tag{4.24}$$

- 经济含义解读：

我们可以作如下解释：等式左边的含义是期末ω状态下多消费1个单位的消费品带来效用的增加量；等式的右边是期初放弃ϕ_{ω}个单位消费品带来效用的减少量，也可以理解为期初增加消费期末减少消费。由状态价格的含义可知等式的意思是，将期初和期末状态下的消费进行跨时调整，所增加的效用刚好等于效用的减少量。也即是说，跨时调整消费无法改变总效用。

类似地，期末任何两个状态ω和ω'的边际效用之比为：

$$\frac{\dfrac{\partial U}{\partial c_{1\omega}}}{\dfrac{\partial U}{\partial c_{1\omega'}}}=\frac{\phi_{\omega}}{\phi_{\omega'}} \qquad (4.25)$$

对其变形为：

$$\frac{\partial U}{\partial c_{1\omega}}\times\phi_{\omega'}=\phi_{\omega}\times\frac{\partial U}{\partial c_{1\omega'}} \qquad (4.26)$$

类似的分析方法可知，（4.23）的含义是期末任何两个不同的状态之间消费品的调整都无法改变经济人的总效用。我们概括为命题：

核心结论

定理 4.2： 当且仅当消费计划使得跨时调整消费和跨状态调整消费都无法改变经济人的总效用时，该消费计划才是最优的消费计划。

C、市场出清

- 当市场上存在 K 个经济人时，每个经济人选择自己的消费计划使其效用极大化，即“各自优化”。为了区分不同的经济人，我们对问题（4.P1）加角标以示区别，第 k 个经济人（k=1,2，...,K）的优化问题为：

$$\max_{\{c_{k,0},c_{k,11},\ldots,c_{k,1S}\}} U_k(c_{k,0},c_{k,11},\ldots,c_{k,1S})$$

$$s.t \quad c_{k,0}+\sum_{\omega=1}^{S}c_{k,1\omega}\phi_{\omega}=w_k \qquad (4.\text{P5})$$

$$c_{k,0}>0; c_{k,1\omega}>0, \omega=1,2,\ldots,S$$

- 由此解得最优消费计划：

$$\begin{cases} c_{k,0} = c_{k,0}(\phi, e_k) \\ c_{k,1\omega} = c_{k,1\omega}(\phi, e_k) \end{cases} \qquad (4.27)$$

（4.27）表明：每个经济人的最优消费计划是状态价格和自身禀赋的函数，同时也是每个经济人对消费品的需求函数。

- 另一方面，市场上存在消费品（商品）的供给。当所有经济人对消费品的总需求之和等于总供给时，市场出清（market clear）：

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{K} c_{k,0} = \sum_{k=1}^{K} e_{k,0} \\ \sum_{k=1}^{K} c_{k,1\omega} = \sum_{k=1}^{K} e_{k,1\omega}, \omega \in \Omega \end{cases} \tag{4.28}$$

解方程组（4.28）得均衡解

D、市场均衡

- 证券市场的一般均衡分析就是结合市场上对每个证券的总供给和总需求来确定证券的均衡价格。
- A-D 框架下，假定市场上存在 S 个不同的状态证券，我们的目标是确定每一个状态价格：

$$\{\phi_\omega : \omega \in \Omega\}$$

均衡定义

所谓 **A-D 经济下的均衡**是指状态价格集合 $\{\phi_\omega : \omega \in \Omega\}$，该价格集合使得如下两个条件成立：

1、给定状态价格，每个经济人通过选择其消费计划使其效用极大化。即各经济人的消费计划 $\{c_K(e_k,\phi) \equiv (c_{k,0}(e_k,\phi), c_{k,1}(e_k,\phi)) : k = 1,2,\ldots,K\}$ 满足：

$$c_k(e_k,\phi) = Arg\max U_k(c_{k,0}, c_{k,1})$$

$$s.t \quad c_{k,0} + \phi^T c_{k,1} = w_k \qquad (4.P6)$$

$$c_{k,0} \geq 0, c_{k,1} \geq 0$$

2、市场出清：

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{K} c_{k,0}(e_k,\phi) = \sum_{k=1}^{K} e_{k,0} \\ \sum_{k=1}^{K} c_{k,1\omega}(e_k,\phi) = \sum_{k=1}^{K} e_{k,1\omega}, \omega \in \Omega \end{cases}$$

例 4.4：在例 4.3 的基础上假设有两个经济人 1 和 2，他们都具有对数效用函数，时间偏好均为 1，经济人 1 的禀赋为（100，（0,0））；经济人 2 的禀赋为（0，（200,50）），求状态价格。

$$
\begin{cases}
c_{i0} = \dfrac{1}{\lambda} \\
c_{ia} = \dfrac{\pi_a}{\lambda \phi_a} \quad i = 1,2 \\
c_{ib} = \dfrac{\pi_b}{\lambda \phi_b}
\end{cases}
$$

由预算约束方程得：

$$
w_1 = c_{10} + {}_{1a}\phi_a + c_{1b}\phi_b = \frac{2}{\lambda_1} = 100
$$

由市场出清可知：

$$\begin{cases} c_{10}+c_{20}=\dfrac{1}{\lambda_1}+\dfrac{1}{\lambda_2}=100 \\ c_{1a}+c_{2a}=\dfrac{1}{2\lambda_1\phi_a}+\dfrac{1}{2\lambda_1\phi_a}=200 \\ c_{1b}+c_{2b}=\dfrac{1}{2\lambda_1\phi_b}+\dfrac{1}{2\lambda_1\phi_b}=50 \end{cases}$$

由此解得状态价格和最优消费：

$$\begin{cases} \phi_a=1/4 \\ \phi_b=1 \end{cases}; \quad \begin{cases} c_{10}=c_{20}=50 \\ c_{1a}=c_{2a}=100 \\ c_{1b}=c_{2b}=25 \end{cases}$$