第七次作业答案

金融经济学-2025 年秋

Answer 1

设初始时刻 0，投资者的总财富为 $W_0 > 0$。因此，整个投资组合在一期末的随机财富为

$$\widetilde{W}_1 = \sum_{i=1}^{N} W_0\, \omega_i (1 + r_i).$$

另一方面，若将投资组合的一期收益率记为 r_p，按定义有

$$\widetilde{W}_1 = W_0(1 + r_p).$$

两种写法的 $\widetilde{W}_1$ 相等：

$$W_0(1 + r_p) = \sum_{i=1}^{N} W_0\, \omega_i (1 + r_i).$$

(1) **证明** $E[r_p] = \sum_{i=1}^{N} \omega_i E[r_i]$。

由上一步得到

$$r_p = \sum_{i=1}^{N} \omega_i r_i,$$

对两边取数学期望，有

$$E[r_p] = E\left[\sum_{i=1}^{N} \omega_i r_i\right] = \sum_{i=1}^{N} \omega_i\, E[r_i].$$

(2) **证明** $\mathrm{var}[r_p] = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \omega_i \omega_j \mathrm{cov}(r_i, r_j)$。

仍由

$$r_p = \sum_{i=1}^{N} \omega_i r_i, \qquad E[r_p] = \sum_{i=1}^{N} \omega_i E[r_i],$$

写出

$$r_p - E[r_p] = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \big(r_i - E[r_i]\big).$$

于是方差为

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}(r_p) &= E\Big[(r_p - E[r_p])^2\Big] \\
&= E\left[\left(\sum_{i=1}^{N}\omega_i(r_i - E[r_i])\right)\left(\sum_{j=1}^{N}\omega_j(r_j - E[r_j])\right)\right] \\
&= E\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\omega_i\omega_j(r_i - E[r_i])(r_j - E[r_j])\right] \\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\omega_i\omega_j\, E\big[(r_i - E[r_i])(r_j - E[r_j])\big] \\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\omega_i\omega_j \operatorname{cov}(r_i, r_j),
\end{aligned}
$$

其中最后一步用到了协方差的定义

$$
\operatorname{cov}(r_i, r_j) = E\big[(r_i - E[r_i])(r_j - E[r_j])\big].
$$

Answer 2

设三个证券的收益率向量为

$$
\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix},
$$

协方差矩阵为

$$
\Sigma = \begin{pmatrix} 24 & -10 & 9 \\ -10 & 75 & 3 \\ 9 & 3 & 12 \end{pmatrix},
$$

投资组合权重向量为

$$
\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}.
$$

则投资组合收益率为

$$
r_p = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3 = \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{r},
$$

其方差为

$$
\operatorname{var}(r_p) = \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\Sigma\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\omega_i\omega_j \operatorname{cov}(r_i, r_j).
$$

(1) 等权重投资组合的方差

等权重时,

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

利用

$$\mathrm{var}(r_p) = \sum_{i=1}^{3} \omega_i^2 \sigma_{ii} + 2 \sum_{1 \le i < j \le 3} \omega_i \omega_j \sigma_{ij},$$

其中 σ_{ij} 为协方差矩阵中第 i, j 元素,有

$$\sigma_{11} = 24, \quad \sigma_{22} = 75, \quad \sigma_{33} = 12, \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = -10, \quad \sigma_{13} = \sigma_{31} = 9, \quad \sigma_{23} = \sigma_{32} = 3.$$

对等权重 $\omega_i = \frac{1}{3}$,先计算对角项:

$$\sum_{i=1}^{3} \omega_i^2 \sigma_{ii} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 (24 + 75 + 12) = \frac{1}{9} \cdot 111 = \frac{111}{9}.$$

再计算非对角项:

$$2 \sum_{1 \le i < j \le 3} \omega_i \omega_j \sigma_{ij} = 2 \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) (-10 + 9 + 3) = \frac{2}{9} \cdot 2 = \frac{4}{9}.$$

于是

$$\mathrm{var}(r_p) = \frac{111}{9} + \frac{4}{9} = \frac{115}{9} \approx 12.78.$$

(2) 两个给定投资组合的方差

组合 *1*:

$$\boldsymbol{\omega}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.8 \\ 0.1 \end{pmatrix}.$$

同样使用

$$\mathrm{var}(r_p) = \sum_{i=1}^{3} \omega_i^2 \sigma_{ii} + 2 \sum_{1 \le i < j \le 3} \omega_i \omega_j \sigma_{ij},$$

其中

$$\omega_1 = 0.1, \quad \omega_2 = 0.8, \quad \omega_3 = 0.1.$$

对角项为

$$0.1^2\cdot 24+0.8^2\cdot 75+0.1^2\cdot 12=0.01\cdot 24+0.64\cdot 75+0.01\cdot 12=0.24+48+0.12=48.36.$$

非对角项为

$$\begin{aligned}&2\Big[0.1\cdot 0.8\cdot(-10)+0.1\cdot 0.1\cdot 9+0.8\cdot 0.1\cdot 3\Big]\\&\quad=2\big[0.08\cdot(-10)+0.01\cdot 9+0.08\cdot 3\big]\\&\quad=2\big[-0.8+0.09+0.24\big]=2\cdot(-0.47)=-0.94.\end{aligned}$$

因此

$$\operatorname{var}\big(r_p^{(1)}\big)=48.36-0.94=47.42.$$

组合 2:

$$\boldsymbol{\omega}^{(2)}=\begin{pmatrix}1.25\\-0.1\\-0.15\end{pmatrix}.$$

同理,

$$\omega_1=1.25,\quad \omega_2=-0.1,\quad \omega_3=-0.15.$$

对角项为

$$\begin{aligned}&1.25^2\cdot 24+(-0.1)^2\cdot 75+(-0.15)^2\cdot 12\\&\qquad=1.5625\cdot 24+0.01\cdot 75+0.0225\cdot 12\\&\qquad=37.5+0.75+0.27\\&\qquad=38.52.\end{aligned}$$

非对角项为

$$\begin{aligned}&2\Big[1.25\cdot(-0.1)\cdot(-10)+1.25\cdot(-0.15)\cdot 9+(-0.1)\cdot(-0.15)\cdot 3\Big]\\&\quad=2\big[1.25+(-1.6875)+0.045\big]\\&\quad=2\cdot(-0.3925)=-0.785.\end{aligned}$$

于是

$$\operatorname{var}\big(r_p^{(2)}\big)=38.52-0.785=37.735.$$

Answer 3

设两项资产的收益率分别为 r_1, r_2，给定

$$E[r_1] = 0.3, \quad \mathrm{var}(r_1) = \sigma_1^2 = 5.9, \qquad E[r_2] = 0.08, \quad \mathrm{var}(r_2) = \sigma_2^2 = 0.05,$$

$$\mathrm{cov}(r_1, r_2) = \sigma_{12} = -0.01.$$

令投资组合权重为

$$\omega_1 = \omega, \qquad \omega_2 = 1 - \omega,$$

不允许卖空则 $\omega \in [0, 1]$

投资组合的收益率为

$$r_p = \omega r_1 + (1 - \omega) r_2.$$

(1) 可行集

首先计算投资组合的期望收益率：

$$\begin{aligned}
E[r_p] &= E[\omega r_1 + (1 - \omega) r_2] \\
&= \omega E[r_1] + (1 - \omega) E[r_2] \\
&= \omega \cdot 0.3 + (1 - \omega) \cdot 0.08 \\
&= 0.08 + 0.22\,\omega.
\end{aligned}$$

再计算投资组合的方差：

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(r_p) &= \mathrm{var}\big(\omega r_1 + (1 - \omega) r_2\big) \\
&= \omega^2 \sigma_1^2 + (1 - \omega)^2 \sigma_2^2 + 2\omega(1 - \omega)\sigma_{12} \\
&= \omega^2 \cdot 5.9 + (1 - \omega)^2 \cdot 0.05 + 2\omega(1 - \omega) \cdot (-0.01).
\end{aligned}$$

将其展开：

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(r_p) &= 5.9\omega^2 + 0.05(1 - 2\omega + \omega^2) - 0.02\omega(1 - \omega) \\
&= 5.9\omega^2 + 0.05 - 0.10\omega + 0.05\omega^2 - 0.02\omega + 0.02\omega^2 \\
&= (5.9 + 0.05 + 0.02)\omega^2 - (0.10 + 0.02)\omega + 0.05 \\
&= 5.97\,\omega^2 - 0.12\,\omega + 0.05.
\end{aligned}$$

因此，由这两个资产形成的**可行集**（在期望收益–方差平面上）可表示为

$$\mathcal{F} = \Big\{ \big(E[r_p(\omega)],\, \mathrm{var}(r_p(\omega)) \big) : \omega \in [0,1] \Big\},$$

其中

$$E[r_p(\omega)] = 0.08 + 0.22\,\omega, \qquad \mathrm{var}(r_p(\omega)) = 5.97\,\omega^2 - 0.12\,\omega + 0.05.$$

这是一条在 $(E[r_p], \mathrm{var}(r_p))$ 平面上的抛物线轨迹。

(2) 最小方差集的组合向量（全局最小方差组合）

要得到全局最小方差组合，只需在 ω 上最小化

$$\mathrm{var}(r_p(\omega)) = 5.97\,\omega^2 - 0.12\,\omega + 0.05.$$

对 ω 求导，得到一阶条件（FOC）：

$$\frac{d}{d\omega}\mathrm{var}(r_p(\omega)) = 2 \cdot 5.97\,\omega - 0.12 = 11.94\,\omega - 0.12 = 0.$$

故

$$\omega^* = \frac{0.12}{11.94} = \frac{12/100}{1194/100} = \frac{12}{1194} = \frac{2}{199} \approx 0.01005.$$

对应地，

$$\omega_1^* = \omega^* = \frac{2}{199}, \qquad \omega_2^* = 1 - \omega^* = 1 - \frac{2}{199} = \frac{197}{199} \approx 0.98995.$$

二阶导数

$$\frac{d^2}{d\omega^2}\mathrm{var}(r_p(\omega)) = 11.94 > 0,$$

说明该解确为最小值。

因此，全局最小方差组合的**组合向量**为

$$\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{GMV}} = \begin{pmatrix} \omega_1^* \\ \omega_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{199} \\ \frac{197}{199} \end{pmatrix}$$

即约 1% 投资于资产 1，99% 投资于资产 2。