国家税务总局徐州市税务局稽查局

Convex Opt

1. (a) 若 $x, y \in S$, i.e., $\alpha \le a^T x \le b$, $\alpha \le a^T y \le b$

则 $\forall \theta \in [0,1]$,

$\alpha \le a^T(\theta x + (1-\theta) y) \le b$. 故 S 为 convex set.

(b) 若 $x, y \in W$, i.e. $\begin{cases} a_1^T x \le b_1 \\ a_2^T x \le b_2 \end{cases}$ 且 $\begin{cases} a_1^T y \le b_1 \\ a_2^T y \le b_2 \end{cases}$

则 $\forall \theta \in [0,1]$, $\begin{cases} a_1^T(\theta x + (1-\theta) y) \le \theta b_1 + (1-\theta) b_1 = b_1 \\ a_2^T(\theta x + (1-\theta) y) \le b_2 \end{cases}$ 故 W is a convex set.

(c) 其可以表示为:

$$\bigcap \{x \mid \|x - x_0\|_2 \le \|x - y\|_2\},\ \forall y \in S$$

而 $\{\|x - x_0\|_2 \le \|x - y\|_2\} = \{x \mid (x - \frac{x_0 + y}{2})^T \cdot (x_0 - y) \ge 0\}$

为 convex set.

故其为一系列 convex set 之交, 其为 convex set.

(d) 否.

设 $S = \{(-1,0), (1,0)\}$, $T = \{(0,0)\}$

则 $x_1 = (-1, 0) \in$ 原集合, $x_2 = (1,0) \in$ 原集合, 而 $\frac{x_1 + x_2}{2} = (0,0) \notin$ 原集合.

故不为 convex

(e) 即为: $S = \{x \mid x + u \in S_1,\ \forall u \in S_2\}$

而若 $x_1, x_2 \in S$

有: $\forall u \in S_2$, $x_1 + u \in S_1$, $x_2 + u \in S_1$

又 $\because S_1$ 为 convex set $\therefore \theta(x_1 + u) + (1-\theta)(x_2 + u) \in S_1$, $\forall \theta \in [0,1]$

故 $\theta x_1 + (1-\theta) x_2 + u \in S_1$, $\forall \theta \in [0,1]$

故 $\theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in S$, $\forall \theta \in [0,1]$. S 为 convex set.

(4) ① $\theta \in [0,1)$

即为：$\{\vec{x} \mid \sum (x_i-a_i)^2-\theta^2(x_i-b_i)^2 \le 0\}$

$=\{\vec{x} \mid \sum (1-\theta^2)x_i^2-(2a_i-2\theta^2 b_i)x_i+a_i^2-\theta^2 b_i^2 \le 0\}$

$=\{\vec{x} \mid \sum x_i^2-2\frac{a_i-\theta^2 b_i}{1-\theta^2}x+\frac{a_i^2-\theta^2 b_i^2}{1-\theta^2} \le 0\}$

$=\{\vec{x} \mid \|\vec{x}-\frac{\vec{a}-\theta^2\vec{b}}{1-\theta^2}\|_2 \le \sqrt{\sum(\frac{a_i-\theta^2 b_i}{1-\theta^2})^2-\sum\frac{a_i^2-\theta^2 b_i^2}{1-\theta^2}}\}$

易知其为 convex set. 是一个n维球.

② $\theta=1$,

即为：$\{\vec{x} \mid (\vec{x}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2})^T\cdot(\vec{b}-\vec{a}) \ge 0\}$. 为 halfspace，故为 convex set.

2、其为：

$\{X \in S \mid \|X\|_* \le 1\}$

proof: 记 $S_0=\{\pm uu^T \mid \|u\|=1\}$，$T_0=\{X\in S \mid \|X\|_* \le 1\}$

"⇒"：$\forall X_0 \in \operatorname{conv} S_0$，$X_0=\sum_k \theta_k\cdot(\pm1)u_k u_k^T$，其中 $\sum_k \theta_k=1$

故 $\forall U^TU=I, V^TV=I$，有：

$|tr(UX_0V)|=|\sum_k(\pm\theta_k)\cdot tr(Uu_ku_k^TV)|$

$=|\sum_k(\pm\theta_k)\cdot u_k^T\cdot VU\cdot u_k|$，而且 VU 也是正交阵，故 $\|u_k^TVUu_k\|_2 \le \|u_k^T\|_2\|VU\|_2\|u_k\|_2 \le 1$

而由于：$\|X\|_*=\max_{U^TU=I, V^TV=I} tr(UXV^T)$

$\therefore |tr(UX_0V)| \le \sum_k(\pm\theta_k) \le 1$，即，$\|X_0\|_* \le 1$

故 $\operatorname{conv} S_0 \subseteq T_0$

"⇐"：$\forall X_0\in T_0$，对 X_0 做谱展开，

$X_0=\sum_i \lambda_i u_i u_i^T$，其中 $\sum_i|\lambda_i| \le 1$

则令 $X_0=\theta_1 u_1u_1^T-\theta_2 u_1u_1^T+\sum_{i=2}^n sgn(\lambda_i)\cdot\theta_i\cdot u_iu_i^T$

其中：$\begin{cases}\theta_1=\frac{1}{2}(|\lambda_1|+1-|\lambda_2|-\cdots-|\lambda_n|)\\ \theta_2=\frac{1}{2}(1-|\lambda_1|-|\lambda_2|-\cdots-|\lambda_n|)\\ \theta_i=|\lambda_i|, i=2,\cdots,n\end{cases}$

则满足：$\begin{cases}\theta_i \ge 0\\ \sum\theta_i=1.\end{cases}$ 即证：$X_0\in \operatorname{conv}(S_0)$

故：$\operatorname{conv}(S_0)=\{X\in S : \|X\|_* \le 1\}$

3. 即为：$\{y \mid \forall \vec{x} \geq 0,\ y^T A x \geq 0\}$

$= \{y \mid \forall \vec{x} \geq 0,\ (A^T y)^T x \geq 0\}$

若 $A^T y \geq 0$ 不满足，则有：$(A^T y)_i < 0$，则取 $x = e_i$，有 $(A^T y)^T x < 0$

若有 $A^T y \geq 0$，则显然：$(A^T y)^T x \geq 0$

故：$K^* = \{y \mid A^T y \geq 0\}$

4. 我们断言，$K_{m+}^* = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n \mid y_1 \geq 0,\ y_1 + y_2 \geq 0,\ y_1 + y_2 + y_3 \geq 0, \cdots, y_1 + \cdots + y_n \geq 0\}$

$= \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^{i} y_k \geq 0,\ \forall i = 1, \cdots, n\}$

下证：

Lemma: ① 若 $\vec{y} \in K_{m+}^*$，则 $x^T y \geq 0$：

proof: $\because \vec{x} = x_n \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + (x_{n-1} - x_n) \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (x_{n-2} - x_{n-1}) \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + (x_1 - x_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

$\therefore x^T y = x_n \left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right) + (x_{n-1} - x_n) \sum_{k=1}^{n-1} y_k + \cdots + (x_1 - x_2) \sum_{k=1}^{1} y_k \geq 0$

Lemma: ② 若 $\vec{y} \notin K_{m+}^*$，则 $\exists x \in K_{m+}$ s.t. $x^T y < 0$

Proof: 若 $\vec{y} \notin K_{m+}^*$，则 $\exists i$, s.t. $y_1 + \cdots + y_i < 0$

则令 $x = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\ i\text{个}1 \\ \}\ n-i\text{个}0 \end{matrix}$，则 $x^T y = \sum_{k=1}^{i} y_i < 0$.

综上，得证.

5. 其为：$\bigcap_{x_0} \{X \mid \langle X - X_0, S \rangle \leq 0\}$

其中 $\|X_0\|_2 = 1$，令 X_0 的 SVD 为 $X_0 = U \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{bmatrix} V^T$

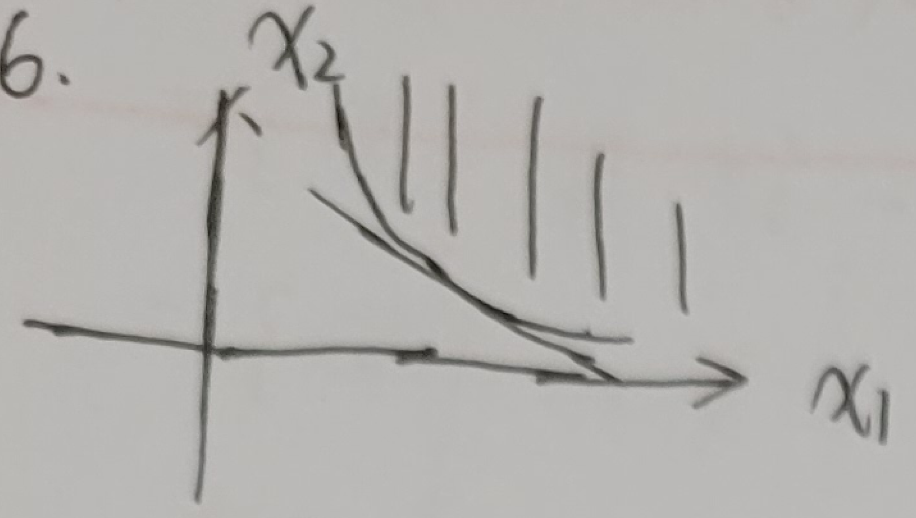
则 $S = U \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix} V^T = u_1 v_1^T$，$u_1, v_1$ 是对应的左、右特征向量

（构造方式：由于其为凸集，

故按照 $\bigcap \{x \mid \langle x - x_0, \frac{\partial f}{\partial x} \rangle \leq 0\}$

的形式构造. $S \in \frac{\partial \|X\|_2}{\partial X}$ ）

6.



令 $\{x \in \mathbb{R}_+^2 \mid x_1 x_2 \geq 1\} = S$

由几何,易知:

$$S = \bigcap_{a>0} \left\{ x \in \mathbb{R}_+^2 \;\middle|\; \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a \\ \frac{1}{a} \end{bmatrix} \right)^T \cdot \begin{bmatrix} 1/a \\ a \end{bmatrix} \geq 0 \right\}$$

即为包络。