Convex Opt Homework 4

1、 $\|x\|_M^* = \sup_x \{ x^T y \mid y^T M y \le 1 \}$

$$= \sup_x \{ (M^{-\frac{1}{2}}x)^T (M^{\frac{1}{2}}y) \mid (M^{\frac{1}{2}}y)^T (M^{\frac{1}{2}}y) \le 1 \}$$

令 $M^{\frac{1}{2}}y = z$

$$\overset{\text{令 } M^{\frac{1}{2}}y=z}{=\!=} \sup_x \{ \langle z, M^{-\frac{1}{2}}x \rangle \mid z^T z \le 1 \}$$

$$= \| M^{-\frac{1}{2}} x \|_2 = \sqrt{x^T M^{-1} x} = \|x\|_{M^{-1}}$$

故 $\|\cdot\|_M^* = \|\cdot\|_{M^{-1}}$

2、 对于 $(\vec{x}, \vec{y})$，定义内积 $\langle (\vec{x}_1, \vec{y}_1), (\vec{x}_2, \vec{y}_2) \rangle = x_1^T x_2 + y_1^T y_2$

（或看作 $\begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{bmatrix}$），记 $\left\| \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{a\|x\|_A^2 + \|y\|_B^2}$

则 $\left\| \begin{bmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \end{bmatrix} \right\|^* = \sup_{x,y} \{ x_0^T x + y_0^T y \mid \sqrt{a\|x\|_A^2 + \|y\|_B^2} \le 1 \}$

考虑问题：

$$\max_{x,y} \ x_0^T x + y_0^T y$$
$$\text{s.t. } a\|x\|_A^2 + \|y\|_B^2 \le 1$$

由此优化问题的结构特殊性，可转化为two-step optimization (dynamic programming)

step 1:

$$\max_{\lambda,\mu} \ f(\lambda) + g(\mu)$$
$$\text{s.t. } a\lambda + \mu = 1$$

，其中，

step 2:

$$f(\lambda) = \max_x \ x_0^T x, \ \text{s.t. } \|x\|_A^2 \le \lambda$$

$$g(\mu) = \max_y \ y_0^T y, \ \text{s.t. } \|y\|_B^2 \le \mu$$

由定义，$f(\lambda) = \sqrt{\lambda}\,\|x_0\|_A^*$，$g(\mu) = \sqrt{\mu}\,\|y_0\|_B^*$

故原问题转化为

$$\max_{\lambda,\mu} \ \sqrt{\lambda}\,\|x_0\|_A^* + \sqrt{\mu}\,\|y_0\|_B^*$$
$$\text{s.t. } a\lambda + \mu = 1$$

令 $\lambda = \frac{\sin^2\theta}{a}$，$\mu = \cos^2\theta$. 则得其最大值为 $\sqrt{\frac{1}{a}\|x_0\|_A^* + \|y_0\|_B^*}$

故：$\left\| \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \right\|^* = \sqrt{\frac{1}{a}\|x_0\|_A^* + \|y_0\|_B^*}$

3. $|\lambda|_{max}\left(\begin{bmatrix}1&2&3\\3&4&5\\5&6&9\end{bmatrix}\right)=14.1216$, $|\lambda|_{min}\left(\begin{bmatrix}1&2&3\\3&4&5\\5&6&9\end{bmatrix}\right)=0.4749$

故 $\operatorname{cond}\left(\begin{bmatrix}1&2&3\\3&4&5\\5&6&9\end{bmatrix}\right)=\left|\dfrac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}\right|=31.55$

4. $\langle y, AX\rangle = y(X_{11}+X_{12}-X_{31}+2X_{33})$

$= y\cdot \operatorname{tr}(M^T X)$, $M=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&0\\-1&0&2\end{bmatrix}$

$= \operatorname{tr}((yM)^T X)$

$= \langle yM, X\rangle$

故 $A^*(y) = yM = \begin{bmatrix}y&y&0\\0&0&0\\-y&0&2y\end{bmatrix}$

5. 对于 $Z\in\mathbb{R}^{3\times 2}$

$\langle Z, A(X)\rangle = \operatorname{tr}(Z^T A(X))$

$= X_{11}Z_{11}+X_{12}Z_{12}+X_{13}Z_{21}+X_{21}Z_{22}$

$+X_{22}Z_{31}+X_{23}Z_{32}$

若令 $B(Z)=\begin{bmatrix}Z_{11}&Z_{12}&Z_{21}\\Z_{22}&Z_{31}&Z_{32}\end{bmatrix}$

则 $\langle Z, A(X)\rangle = \operatorname{tr}(Z^T A(X))$

$=\operatorname{tr}(B(Z)^T\cdot X)$

$=\langle B(Z), X\rangle$

故 $A^*(Z)=B(Z)=\begin{bmatrix}Z_{11}&Z_{12}&Z_{21}\\Z_{22}&Z_{31}&Z_{32}\end{bmatrix}$