Continuité, Uniforme continué

www.eleves.ens.fr/home/yhuang

16.1 Vrai ou faux

Les fonctions sont-elles uniformément continues?
1) $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$.
2) $x \mapsto \ln x$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

16.2 Exo Classique

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrer que la suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ avec $x_0 \in [0,1]$ converge ssi $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}}(x_n - x_{n+1}) = 0$.
On pourra montrer d'abord qu'une suite bornée non convergente admet au moins deux valeurs d'adhérences.

16.3 Fonction uniformément continue et fonction affine

Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est affinement bornée.

16.4 Caractérisation séquentielle

L'espace considéré ici est $\mathbb{R}$.
1) Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est uniformément continue ssi pour tout couple de suites $((x_n),(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n) - f(y_n)| = 0$.
2) Montrer que l'image d'une suite de Cauchy par une fonction uniformément continue est une suite de Cauchy.

16.5 "Recollement"

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite à l'infini. Montrer que f est uniformément continue.

16.6 Module de continuité