Nombres Complexes & Fonctions Usuelles

www.eleves.ens.fr/home/yhuang

29 Septembre, 2011

1 Somme de cos

Calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$, où $\theta \in \mathbb{R}$.
Indication: Utiliser la technique de l'angle moitié.

2 Demi-plan complexe

On définit $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid Im\ z > 0\}$ le demi-plan du plan complexe.
Montrer que $z \in \mathbb{H}$ ssi $-\frac{1}{z} \in \mathbb{H}$.
On se donne z, a deux nombres complexes.
Montrer que $|1 - z\overline{a}|^2 - |z - a|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |a|^2)$.
En déduire que si $|a| < 1$, alors $|z| = 1$ ssi $f(a, z) = |\frac{z-a}{\overline{a}z-1}| = 1$.
Que se passe-t-il si $|z| < 1$?

3 Formule de De Moivre

Montrer qu'on a l'identité suivante:
$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos n\phi + i\sin n\phi$ avec $\phi \in \mathbb{R}$.
Solution: On remarque que $(e^{i\phi})^n = e^{in\phi}$, puis on identifie les parties réelles et imaginaires.

4 Théorème de Napoléon

5 Triangle équilatéral

Montrer qu'il n'existe pas de triangle équilatéral à coordonées entières (non réduit à un point) dans $\mathbb{R}^2$.
(Indication: $a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) = 0$)
Solution: Cette indication n'est pas bonne. C'est plutôt une étape dans la démonstration de cette indication qu'il faudrait utiliser.
En effet, quitte à réorienter, on peut supposer que $\frac{a-c}{b-c} = j$ où j est une racine 3-ième primitive de l'unité. On vérifie que $j = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ ou $j = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. Alors en identifiant les parties réelles et les parties imaginaires et en utilisant l'irrationalité de $\sqrt{3}$, on obtient le résultat.

6 Polynôme et racines n-ièmes de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit p un entier.
1) Calculer $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^p$.
2) Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. Montrer que $a_k = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{P(\omega)}{n\omega^k}$.
Solution: C'est un cas explicite de l'interpolation de Lagrange...
Il s'agit dans la question 1) d'une somme géométrique.
Dans 2), il s'agit d'une somme double: on fait un Fubini, et on voit que tous les termes, à part celui de x^k, sont annulés par symétrie. Finalement on retrouve la valeur de a_k.

7 Arithmétique?

Montrer que si a, b peuvent s'écrire comme la somme de deux carrés dans $\mathbb{N}$, alors leur produit ab l'est aussi.
Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $(a+bi)(c+di) = 1$. Exhiber tous les cas possibles.

8 Noyau du Féjer

On introduit le noyau de Dirichlet d'ordre n la fonction sur $\mathbb{R}$ défini par: $D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$.
1) Montrer que $D_n(x) \in \mathbb{R}$.
2) Montrer que $D_n(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$.
3) Montrer que D_n est 2π-périodique, i.e. $D_n(x) = D_n(x+2\pi)$.
4) Simplifier cette somme. (En discutant selon la divisibilité de x par 2π.)
On introduit le noyan de Féjer d'ordre n la fonction sur $\mathbb{R}$ défini par: $F(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x)$.
5) Montrer que $F(x) = \frac{1}{2n\pi}(\frac{\sin nx/2}{\sin x/2})^2$.
On donne ensuite sans démonstration quelques propriétés sympas de ce noyau, en particulier c'est une approximation de Dirac sur $[-\pi, \pi]$.

9 Extrait de "Un lemme de confinement" (X-ENS)

Soient $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ et a_i des nombres complexes de module 1.
Montrer:
1) On peut choisir ϵ_1 et ϵ_2 de sorte que $|\epsilon_1 a_1 + \epsilon_2 a_2| \leq \sqrt{3}$. Exhiber un cas où l'égalité est atteinte.
2) Montrer la même assertion pour trois nombres.

10 Arctan

Résoudre l'équation: $\arctan 2x + \arctan 3x = \frac{\pi}{4}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
(Réponse: $x = \frac{1}{6}$. Penser à bien préciser l'injectivité de arctan sur un intervalle approprié.)

11 Ruse de substitution

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Il existe alors $u, v \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,
$a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta+u) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+v)$.

12 Approximeation de $\frac{\pi}{4}$

Montrer que $4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$.

13 Une somme téléscopique déguisée

Soit $x \in \mathbb{R}*$.
Montrer que $\tanh x = 2\coth x - \coth x$. Conjecturer la somme de la série de terme $\frac{1}{2^n}\tanh\frac{x}{2^n}$.
Calculer la somme de $\frac{1}{\sinh(2^n x)}$.
(Ind: $\frac{1}{\sinh x} = \coth\frac{x}{2} - \coth x$.)

14 Somme de arctan

Montrer que $\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{2} + \arctan 1 = \frac{\pi}{2}$.

15 La fonction sin n'est pas rationnelle (X-ENS)

Montrer que la fonction sin n'est pas rationnelle sur aucun intervalle réel $[a, b]$.
On admettra le résultat suivant: une fonction rationnelle n'a qu'un nombre fini de zéro sur un intervalle non vide $]a, b[$.
On rappelle que le degré d'une fonction rationnelle $\frac{P}{Q}$ est défini par $deg(P) - deg(Q)$ si $P \neq 0$ et $-\infty$ sinon. Cette définition ne dépend pas de la représentation choisie.