Coniques*

www.eleves.ens.fr/home/yhuang

24 Novembre, 2011

1 Visual Sieve

On considère l'ensemble C des droites passant par deux points entiers $(-a, a^2), (b, b^2)$ sur la parabole $y = x^2$ avec $a, b \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$.
Montrer que C évite tous les points $(0, p)$ avec p premier et rencontre tous les points $(0, q)$ avec q non premier à deux exceptions $(0, 0)$ et $(0, 1)$ près.
Cette méthode est due à Yuri Matiyasevich et Boris Stechkin.

2 Coffin Problem[1]

Il n'existe pas d'ensemble formé d'un nombre infini de points dans le plan tels que la distance entre deux points quelconques soit un entier.

3 Triangle sur une hyperbole

Montrer que l'orthocentre d'un triangle dont les sommets appartiennent à l'hyperbole $xy = 1$ l'appartient. Montrer que le cercle circonscrit de ce triangle va intersecter l'hyperbole en un point symétrique de l'orthocentre par rapport à l'origine.

4 Exercice Classique

Soit H une hyperbole dont les asymptote se coupent en O. Soit M un point sur H, alors la tangente en M coupe les asymptotes en deux points P, Q. Montrer que l'aire de MPQ ne dépend pas de M.

5 Billards Elliptiques

On se donne une table de billard elliptique et une balle située en un foyer. Après un rebond, la balle passe par l'autre foyer. Essayer de retrouver ce résultat à l'aide du principe de Fermat.

*Un bouquin qui n'utilise "aucune" équation pour démontrer pas mal de propriétés sur les coniques: A treatise on geometrical conics [Arthur Cockshott, F.B. Walters]. http://ebook.lib.hku.hk/CADAL/B31395533/
[1] Pour une brève histoire, consulter http://www.tanyakhovanova.com/coffins.html

6 Suite de l'exercice précédent: billards elliptiques[2]

Fixons une trajectoire dans un billard elliptique.
Cas 1): La trajectoire ne passe jamais par le segment reliant les deux foyers. Alors il existe une ellipse (de même foyers) telle qu'elle soit tangente aux tous les segments entre deux rebonds, et qui ne dépend que de la trajectoire. Pour bien démarrer, on pourra se rappeler du théorème de Poncelet.
Cas 2): La trajectoire passe toujours par le segment reliant les deux foyers. Alors il existe une hyperbole (de même foyers) telle qu'elle soit tangente aux tous les segments entre deux rebonds, et qui ne dépend que de la trajectoire.
On pourra, pour simplifier, faire d'abord le cas d'une ellipse d'excentricité 0, i.e. un cercle.

7 Théorème de Pascal

8 Théorème du papillon généralisé

9 Exercice Calculatoire

Réduire la conique d'équation: $\cosh(t)(x^2+y^2) - 2\sinh(t)xy + e^t\cos(t)(x-y) + \frac{e^t}{4} = 0$ avec $t \in \mathbb{R}$.

10 Exercice "Hors-Programme"[3]

Montrer que pour tout triangle, il existe une ellipse tantgente aux trois côtés en leur milieu.

11 Suite de l'exercice précédent: polynôme, racines et ellipse[4]

Cas simple: prenons le polynôme $P(X) = (X^2+X+1)(X-\frac{3}{2}) = X^3 - \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{3}{2}$. Trouver le triangle T de sommets les racines de P dans le plan complexe. Trouver les racines de P' dans le plan complexe. Trouver une ellipse E ayant pour foyers les racines de sa dérivée et tangente aux trois côtés du triangle T. Remarques sur $E \cap T$?
Cas général: Soit P un polynôme séparable (i.e. ses racines sont deux à deux distinctes) de degré 2. Refaire l'exercice précédent.
On pourra admettre le théorème fondamental de l'algèbre, même si le cas de degré 2 (donc a fortiori de degré 3) a déjà été vu dans le cours.

[2] Merci à Weikun pour m'avoir communiqué cet exercice.
[3] Cet exercice n'est pas difficile du tout, mais il demande un peu de connaissance sur les applications affines.
[4] Merci à Miguel pour m'avoir communiqué cet exercice.