Groupes, Anneaux, Corps: I*

www.eleves.ens.fr/home/yhuang

12.1 Exemples généraux

• **Une bijection.** Soit G un groupe et $g \in G$. Montrer que l'application $a \mapsto ga$ est une bijection, que l'on appelle la translation (à gauche) par g.
• **Un automorphisme.** Soit G un groupe et $g \in G$. Montrer que l'application $a \mapsto gag^{-1}$ est un endomorphisme, que l'on appelle plus souvent l'automorphisme intérieur (associé à g).
Montrer que si H est un sous-groupe de G, alors $H' = gHg^{-1}$ est aussi un sous-groupe de G. On dit dans ce cas que H et H' sont conjugués.
• **Un sous-groupe.** Soit G un groupe et $g \in G$. Montrer que l'ensemble des éléments de G qui commutent avec g est un sous-groupe de G. Voir 12.3.3.
• **Un autre sous-groupe.** Soit G un groupe et $g \in G$. Montrer que l'ensemble $\{g^n | n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de G.
• **Groupes d'ordres petits.** Décrire tous les groupes d'ordre inférieur à 6.

12.2 Exemples de groupes

12.2.1 Groupes cycliques

1) Montrer que tout groupe cyclique est un groupe abélien.
2) Lang, P24. . .

12.2.2 Groupes diédraux

12.2.3 Groupes libres (Cayley?)

12.3 Exemples de sous-groupes

12.3.1 Centre

*) $G/Z(G) \cong Int(G)$.

12.3.2 Centralisateurs

Propriétés. . .

*Les anneaux sont supposés commutatifs unitaires.

12.3.3 Normalisateurs

12.4 Exercices sur les groupes

12.4.1 Construction d'un groupe à partir d'un monoïde

12.4.2 Théorème de Lagrange

12.4.3 Théorème de factorisation

Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes.
1) Montrer que $Ker(f)$ est un sous-groupe distingué de G.
Soient H un sous-groupe distingué de G et un morphisme de groupes $f : G \to G'$ tel que $f(H) = e_{G'}$ (autrement dit $H \subset Ker(f)$).
2) Montrer qu'il existe un morphisme de groupe $g : G/H \to G'$ tel que $f = g \circ p$, où $p : G \to G/H$ est la projection canonique.

12.5 Exemples de morphismes de groupes

12.6 Exercices sur les morphismes de groupes

12.6.1 Théorème de factorisation

1) Montrer que si $f : G \to G'$ est un morphisme de groupes, alors $Ker(f)$ est un sous-groupe de G.
1,5) Montrer que si G' est abélien, alors le noyau de f est un sous-groupe distingué de G.
2) Montrer que si H est un sous-groupe de G, alors il existe un morphisme de groupes $f : G \to G/H$ canonique tel que H soit le noyau de f.

12.6.2 Diagrammes commutatifs et suites exactes

Définitions.
0) Montrer que si on a une suite exacte courte $0 \to E \to F \to 0$, alors E et F sont isomorphes.
1) Considérons un diagramme commutatif de groupes abéliens... [1]

12.6.3 Lemme des cinq

Dessin.
Montrer que si la première, la seconde, la quatrième et la cinquième flèches sont des isomorphismes, alors la troième flèche l'est aussi.

[1] Bourbaki, Algèbre commutatives, P17.

12.7 Exemples d'anneaux

12.7.1 Anneaux des polynômes

12.7.2 Anneaux des entiers quadratiques

12.7.3 Entiers de Gauss

12.8 Exemples de sous-anneaux

12.9 Exercices sur les anneaux

12.9.1 Un anneau euclidien est factoriel

1) Montrer qu'un anneau euclidien est principal.
2) Montrer qu'un anneau principal est factoriel.

12.10 Exemples de corps

12.10.1 Idéal maximal et corps

1) Montrer que le quotient d'un anneau par un idéal maximal est un corps. Réciproque?
2) Montrer que le quotient d'un anneau par un idéal premier est un anneau intègre. Réciproque?

12.10.2 Anneaux intğre fini

12.11 Exercices sur les corps

12.12 Compléments

12.12.1 Groupes Dualisants