

CHAOS MULTIPLICATIF GAUSSIEN CRITIQUE :
CONSTRUCTION DE LA MARTINGALE
DÉRIVÉE, CAS DU CHAMP LIBRE GAUSSIEN
MASSIF SUR LE PLAN

Mémoire de M2 de Yichao HUANG
sous la direction de Rémi RHODES et Vincent VARGAS

Septembre 2013

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Un très bref historique du chaos multiplicatif gaussien	1
1.2	Un petit aperçu du chaos multiplicatif gaussien	2
1.3	Organisation du manuscript	4
1.4	Remerciements	4
2	La théorie de Kahane	5
2.1	Construction de l'opérateur du chaos multiplicatif	5
2.1.1	Définitions	5
2.1.2	Fonction de type sigma-positif	6
2.1.3	Martingale des poids partiels	7
2.2	Théorèmes principaux	8
2.2.1	Unicité de la construction	8
2.2.2	Critère de non-dégénérescence	10
2.3	Quelques propriétés	11
2.3.1	Existence des moments positifs	11
2.3.2	Non-linéarité du spectre puissance	19
3	Étude du cas critique	20
3.1	Construction de la martingale dérivée	20
3.2	Preuve du théorème 3.2	22
3.3	Sur le supremum d'un champ gaussien log-corrélé	30
4	Un petit résultat	37
4.1	Énoncé du théorème dans le cas du champ libre gaussien massif . .	37
4.2	Discussion sur le cut-off	38
4.3	Preuve du théorème 4.1	40
5	Quelques rappels de probabilités	48
5.1	Quelques théorèmes sur les martingales et les mouvements browniens	48
5.2	Quelques inégalités gaussiennes	49
5.3	Rappels sur les champs gaussiens	56
5.3.1	Définition du champ gaussien	56
5.3.2	Fonction de Green	57
5.3.3	Champ libre gaussien (GFF)	58
5.3.4	Champ libre gaussien massif (MGFF)	59
5.4	Un lemme sur le processus du branchement	60

1 Introduction

1.1 Un très bref historique du chaos multiplicatif gaussien

La théorie du chaos multiplicatif gaussien a été introduite par J.P. Kahane dans les années 80 dans [11], motivée par la modélisation statistique de l'énergie de dissipation dans l'étude de la turbulence [17]. Cette théorie a été révisée et étudiée récemment et s'est avérée aujourd'hui importante dans beaucoup de domaines variés, par exemple en finance ou encore en physique (gravité quantique de Liouville et formule de KPZ, [8], [7], voir [6] pour plus de discussions), turbulence en dimension 3 (voir [24] pour plus de références). L'article [22] fournit une liste impressionnante d'applications directes de la théorie, y compris une collection de généralisations de cette théorie qui est en plein développement.

Comme fil conducteur de cette présentation, nous avons choisi de présenter brièvement son intervention (dans un contexte historique) dans l'étude de la turbulence. On veut comprendre le transfert d'énergie dans un écoulement turbulent, par une voie statistique. Une propriété classique est le processus dit cascade d'énergie : un grand tourbillon peut être divisé en tourbillons plus petits, permettant un transfert d'énergie des grandes échelles vers les petites échelles.

Un objet important dans la compréhension du transfert d'énergie est la dissipation locale que l'on note ϵ (qui à chaque région A associe une énergie $\epsilon(A)$). En 1941, Kolmogorov proposa une étude statistique de cette quantité, appelée théorie K41. Sous quelques hypothèses convenables (par exemple si le nombre de Reynolds est suffisamment grand), il postula que la dissipation locale d'énergie devrait être :

- 1) spatialement homogène : la loi de ϵ est invariante par translations spatiale ;
- 2) statistiquement isotrope : la loi de ϵ est invariante par rotations ;
- 3) autosimilaire : il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $\lambda > 0$, on a $\epsilon(\lambda A) = \lambda^\alpha \epsilon(A)$ en loi.

Une conséquence de ces critères est la linéarité du spectre de loi puissance :

$$\mathbb{E}[\epsilon(B(0, r))^q] = Cr^{\xi(q)}$$

où ξ est une fonction linéaire en q .

Cette théorie féconde d'un point de vue mathématique fut toutefois contestée par Landau, en raison de la non-linéarité du spectre de loi puissance observée dans les études expérimentales relevant un phénomène plus général dit d'intermittence. En 1962, Kolmogorov et Obukhov révisèrent la théorie et formulèrent la théorie KO62, dans laquelle la troisième hypothèse fut remplacée par :

- 3) log-normalité : la variable $\epsilon(A)$ est log-normale, i.e. " $\ln \epsilon(A)$ suit une loi normale" ;
- 4) non-linéarité du spectre de loi puissance.

L'objet de la construction du chaos multiplicatif gaussien a été, entre autres, de donner un objet (probabiliste) satisfaisant les critères de la théorie KO62.

Mais depuis, de bonnes propriétés manifestées par le chaos multiplicatif gaussien (multifractalité, autosimilarité etc.) ont fait de lui un modèle important dans des domaines très variés.

1.2 Un petit aperçu du chaos multiplicatif gaussien

L’objet principal dans la théorie du chaos multiplicatif gaussien est le suivant :

$$A \mapsto \int_A \exp(X(x) - \frac{1}{2}\mathbb{E}[X(x)^2])dx$$

où A est un borélien (dans \mathbb{R}^d par exemple) et X un champ gaussien centré (défini sur \mathbb{R}^d par exemple).

Nous essayons d’expliquer maintenant de façon informelle, sans trop entrer dans les détails, pourquoi cette définition est intéressante.

C’est une “exponentielle renormalisée” d’un champ gaussien (i.e. en chaque point c’est l’exponentielle renormalisée d’une variable aléatoire gaussienne, avec une certaine structure de covariance entre les gaussiennes). Pourquoi est-il naturel d’étudier cet objet pour la modélisation de l’énergie de dissipation ?

Pour cela, réfléchissons un peu comment on peut modéliser de façon agréable le “transfert d’énergie des grandes échelles vers les petites échelles”. Une solution élégante a été proposée par Mandelbrot dans [17], où l’on a étudié un modèle dit des cascades. Pour une présentation heuristique, on se place maintenant dans le demi-plan supérieur.

- Prenons le segment $(0, 1) - (1, 1)$ et regardons l’aire de la région en-dessous de ce segment. Méditons un peu et imaginons pendant quelques minutes que ça représente un bloc d’énergie dans une grande échelle ;

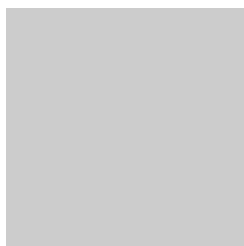


FIGURE 1 – Un pavé

- Divisons le segment en deux parties, $(0, 1) - (\frac{1}{2}, 1)$ et $(\frac{1}{2}, 1) - (1, 1)$. Numérotions-les en binaire, disons la partie 0 et la partie 1. Nous voudrions maintenant changer un peu l’aire sous chaque petit segment : on multiplie indépendamment la hauteur de chaque partie par une variable aléatoire normalisée, i.e. d’espérance 1 (pour des

raisons de conservation d'énergie). Notons alors W_0, W_1 deux variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (selon la loi d'un W disons), et changeons les petits segments en $(0, W_0) - (\frac{1}{2}, W_0)$ et $(\frac{1}{2}, W_1) - (1, W_1)$. Contentons de dire pendant quelques minutes que ça représente le transfert d'énergie d'une grande échelle vers une petite échelle ;

– Et comme il n'y a visiblement aucune difficulté à continuer cette démarche, on la fait une fois de plus. Regardons les quatre petits segments $(0, W_0) - (\frac{1}{2^2}, W_0)$, $(\frac{1}{2^2}, W_0) - (\frac{1}{2^1}, W_0)$, $(\frac{1}{2^1}, W_1) - (\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2}, W_1)$, $(\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2}, W_1) - (1, W_1)$, numérotés respectivement 00, 01, 10, 11. Prenons quatre variables aléatoires $W_{00}, W_{01}, W_{10}, W_{11}$ ayant la même loi que W , indépendantes entre elles et indépendantes de W_0, W_1 . Multiplions la hauteur de chaque partie par la variable aléatoire associée de façon évidente, et on obtient quatre rectangles, chacun ayant pour base $\frac{1}{2^2}$ et pour hauteur W_*W_{**} ;



FIGURE 2 – Les trois premières divisions (simulation avec $\mathcal{U}([\frac{1}{2}, \frac{3}{2}])$)

– Et on continue, mais dans la tête. Et ce jusqu'à l'infini. À la fin, il n'y aura probablement plus de rectangle, mais des segments (un peu comme le mouvement brownien selon la construction de Lévy, à la fin on ne voit plus de segments en zigzag). Intuitivement, si l'on choisit un point x uniformément au hasard dans l'intervalle $[0, 1[$, presque sûrement¹, la hauteur au-dessus de x devrait être sous la forme d'un produit infini de copies indépendantes de W . Mais alors le théorème central limite classique nous dit que, en prenant le logarithme, c'est une gaussienne (quoique de variance infinie, on en discutera proprement dans la suite).

Maintenant si l'on prend un borélien A et on s'intéresse à l'énergie de A , on fait une intégrale, qui nous donne la forme de l'expression au début de la discussion. Il s'avère que c'est une bonne définition en passant par une intégrale, car on a du mal à manipuler une gaussienne de variance infinie comme une fonction classique, mais comme distribution (donc on s'intéresse à sa valeur moyenne), il n'y a plus de

1. Il va falloir avoir beaucoup de chance pour que l'on tombe sur un nombre dont le développement en base 2 est fini, car c'est un ensemble dénombrable donc de mesure de Lebesgue nulle.

souci au niveau théorique.

Reste, par exemple, à imposer des conditions sur la loi de W . Ceci revient, si nous oublions un instant l'intuition au-dessus et gardons juste en esprit le formalisme "l'exponentielle d'un champ gaussien", à imposer des structures de covariances sur le champ gaussien X sous-jacent. Un bon choix de la fonction de covariance nous mènera à un objet qui répond à la théorie KO62, on verra cela rigoureusement dans la section qui suit.

1.3 Organisation du manuscript

- Section 2 : nous rappelons la théorie de Kahane en 1985, en particulier la construction du chaos multiplicatif gaussien comme la limite d'une martingale ;
- Section 3 : nous suivons de près l'article de Duplantier, Rhodes, Scheffeld et Vargas [6] sur la construction de la martingale dérivée dans le cas critique ;
- Section 4 : nous fournissons les calculs pour la construction de la martingale dérivée dans le cas d'un champ libre gaussien massif dans le cas critique ;
- Section 5 : nous rassemblons quelques résultats en probabilités qui nous sont utiles.

1.4 Remerciements

J'aimerais remercier chaleureusement M. Rémi Rhodes et M. Vincent Vargas d'avoir accepté de me proposer ce sujet de mémoire stimulant, de leur disponibilité, leurs conseils précieux et leur enthousiasme dont je suis très reconnaissant tout au long de ce travail.

J'aimerais aussi remercier M. Wendelin Werner pour m'avoir orienté vers ce domaine fort intéressant.

2 La théorie de Kahane

Dans un premier temps, nous rappelons la construction du chaos multiplicatif gaussien, en nous appuyant sur le texte original de Kahane [11] ainsi que les surveys [24], [22]. Ce qui suit dans cette section est très largement inspiré de [21].

Remarque 2.1. *Avertissement*

Dans la suite, certaines conditions que l'on exige sur le noyau pour construire le chaos multiplicatif gaussien pour être affaiblies (et en pratique c'est important de pouvoir les relaxer), voir [24].

2.1 Construction de l'opérateur du chaos multiplicatif

Dans cette section on va donner la construction d'un modèle qui répond aux critères de la théorie KO62. Le but est de construire une sorte de "l'exponentielle d'un champ gaussien" vu l'hypothèse de log-normalité imposée par la théorie KO62. Informellement, l'objet mathématique que l'on veut construire devrait ressembler à

$$A \mapsto \int_A \exp(X_x - \frac{1}{2}\mathbb{E}[X_x^2])dx$$

où A désigne un borélien de \mathbb{R}^d et X un processus gaussien réel centré (stationnaire) sur \mathbb{R}^d . Ceci est une "mesure aléatoire" sur l'ensemble des boréliens de \mathbb{R}^d .

On se réfère à la section 5 pour les définitions et les terminologies sur le champ gaussien. Souvent dans la pratique, le champ X possède en plus le caractère log-corrélé, à savoir que son noyau de covariance $f_X(s, t)$ se comporte comme $\ln \frac{1}{|s-t|} + O(1)$ quand $|s - t| \rightarrow 0$. Un exemple célèbre du champ gaussien log-corrélé est le champ libre gaussien (massif) que l'on traite dans la section 4. Dans ce cas, on manipule plutôt les distributions (au sens de Schwartz) que les fonctions au sens classique.

2.1.1 Définitions

On se place dans \mathbb{R}^d avec $d \geq 1$. M_+ désignera l'espace des mesures de Radon positives sur \mathbb{R}^d .

Définition 2.1. *Poids aléatoire*

Soit p une fonction réelle de type positif continue sur \mathbb{R}^d et X un processus gaussien réel centré stationnaire associé à p .

Le poids aléatoire P associé au processus X est défini par

$$P(x) = \exp(X_x - \frac{1}{2}\mathbb{E}[X_x^2]) = \exp(X_x - \frac{1}{2}p(0))$$

et l'action de P sur M_+ est définie par

$$\forall \sigma \in M_+, P\sigma(dx) = P(x)\sigma(dx)$$

2.1.2 Fonction de type sigma-positif

On se donne une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions réelles **positives**² de type positif et **continues** sur \mathbb{R}^d . On se donne ensuite une suite de processus gaussiens stationnaires indépendants $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ associés à $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On pose

$$q_n(x) = \sum_{i=1}^n p_i(x)$$

comme la somme partielle des p_n , et

$$Y^n(x) = \sum_{i=1}^n X^i(x)$$

la somme partielle des X^n .

Remarquons que q_n et Y^n sont associés. Le poids Q^n associé à Y^n n'est autre que le produit partiel des poids $P^1 \times \dots \times P^n$.

On pose

$$q = \sum_{n=1}^{\infty} p_n$$

Définition 2.2. *Fonction de type sigma-positif*

Une telle fonction q est dite de type sigma-positif. On dira également que q est un noyau de type sigma-positif.

Remarque 2.2. *Sur le spectre puissance de l'opérateur*

On explique maintenant pourquoi l'on a voulu prendre une suite de fonctions de type-positif au lieu d'une seule.

Prenons une fonction p de type positif continu et un processus gaussien stationnaire associé X . On définit l'opérateur P qui agit sur l'espace \mathcal{M}_+ des mesures de Radon positives sur \mathbb{R}^d :

$$\forall \sigma \in \mathcal{M}_+, \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), P\sigma(dx) = P(x) \cdot \sigma(dx)$$

Ceci nous définit bien une sorte d'exponentielle du mouvement brownien dans \mathbb{R}^2 . Mais pour appliquer cela à notre problème de modélisation de l'énergie de dissipation locale, cette méthode n'est pas assez élaborée : on va se retrouver devant un spectre

2. Ceci n'est pas nécessaire, mais simplifiera les calculs de cette section, voir [22].

de loi puissance linéaire.

Voici un calcul du spectre puissance dans un cas simple. Pour $d = 1$, $\alpha > 0$ et t tendant vers 0 :

$$\mathbb{E}[(P\sigma[0, t])^\alpha] \rightarrow t^\alpha \exp\left(\frac{1}{2}(\alpha^2 - \alpha)p(0)\right)$$

car pour tout $\alpha > 0$, $\mathbb{E}[(P(x))^\alpha] = \exp(\frac{1}{2}(\alpha^2 - \alpha)p(0))$. On constate que le spectre de loi puissance est linéaire dans ce cas.

2.1.3 Martingale des poids partiels

Maintenant on va définir un opérateur limite associé à q .

Remarquons que pour tout borélien A de \mathbb{R}^d , la suite $(Q^n\sigma(A))_n$ est une martingale positive par rapport à la filtration \mathcal{F}_n engendrée par les variables $\{X_u^k; k \leq n, u \in \mathbb{R}^d\}$:

$$\mathbb{E}[Q^n\sigma(A)|\mathcal{F}_{n-1}] = \int_A Q^{n-1}(x)\mathbb{E}[P^n(x)]\sigma(dx) = Q^{n-1}\sigma(A)$$

par indépendance des X^k et le fait que le poids est normalisé.

En se rappelant qu'une martingale positive converge p.s., on peut alors définir un opérateur limite.

Définition 2.3. Opérateur du chaos multiplicatif gaussien

L'opérateur limite Q , qui à chaque $\sigma \in \mathcal{M}_+$ associe la limite de la suite $Q^n\sigma$ notée $Q\sigma$, est appelé l'opérateur du chaos multiplicatif associé au noyau q .

Remarque 2.3. Unicité de la construction

On verra dans la suite que cette définition ne dépend pas de la décomposition choisie. La définition est donc bien posée.

En récapitulatif, l'opérateur du chaos multiplicatif gaussien est donc construit comme la limite d'une martingale positive. Naturellement, on veut savoir un peu plus sur la dégénérescence de cette limite. Ceci est l'un des objets d'étude du reste de cette section.

On donne tout de suite quelques conséquences élémentaires de cette construction.

Proposition 2.1. Propriétés élémentaires

Voici quelques conséquences immédiates de la construction de l'opérateur du chaos multiplicatif gaussien :

- 1) - $\mathbb{E}[Q\sigma(A)] \leq \sigma(A)$. Ceci résulte du lemme de Fatou.
- 2) - La probabilité que la mesure $Q\sigma(A)$ soit nulle vaut 0 ou 1. Ceci est une conséquence de la loi du 0 – 1 de Kolmogorov : on constate que pour A borélien quelconque, l'évènement $Q(A) = 0$ est un évènement dans la tribu à l'infini.
- 3) - Si σ est la mesure de Lebesgue, la mesure aléatoire $Q\sigma$ associée est soit identiquement nulle, soit à support plein, i.e. \mathbb{R}^d tout entier. C'est une conséquence de l'invariance par translation du champ X .

2.2 Théorèmes principaux

2.2.1 Unicité de la construction

Théorème 2.2. Unicité de la construction

L'opérateur limite Q ne dépend pas de la décomposition (i.e. la suite p_n) choisie. Autrement dit, si l'on a deux décompositions d'un même noyau :

$$q(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} p_i(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} p'_i(x)$$

et l'on note Q (resp. Q') l'opérateur du chaos multiplicatif associé à la décomposition p (resp. p'), alors Q et Q' sont égaux en loi.

Démonstration. On montre ce théorème en plusieurs étapes :

- Chaque mesure σ se décompose en deux mesures de Radon, l'une est dégénérée et l'autre fortement non dégénérée.
- En utilisant le fait que les suites sont “proches” à la limite, on contrôle la différence des opérateurs limites à l'aide de l'inégalité de convexité de Kahane (voir théorème 5.4) et le théorème de De la Vallée Poussin (voir théorème 5.1), on montre que les mesures ont les mêmes mesures dégénérées (resp. fortement non-dégénérées).
- Enfin, encore en utilisant l'inégalité de convexité de Kahane, on montre que pour tout borélien A , $Q\sigma(A)$ et $Q'\sigma(A)$ ont la même loi. Ceci s'étend facilement à une famille de boréliens.

Voici la preuve.

- Étape 1) : Décomposition de la mesure σ .

Étant donnée une mesure de Radon σ positive, on définit

$$\sigma_0(A) = \mathbb{E}[Q\sigma(A)], \sigma_1(A) = \sigma(A) - \sigma_0(A)$$

de sorte que $(Q^n\sigma_0(A))_n$ soit une martingale qui converge dans \mathcal{L}^1 (car $\sigma_0(A) = \mathbb{E}[Q\sigma_0(A)]$).

Énonçons ceci sous forme de lemme pour fixer les notations.

Lemme 2.3. *Étant donné un opérateur du chaos multiplicatif gaussien Q , toute mesure $\sigma \in M_+$ peut-être décomposée en une somme de deux mesure $\sigma_0, \sigma_1 \in M_+$ telles que pour tout A borélien de \mathbb{R}^d :*

- $\mathbb{E}[Q\sigma_0(A)] = \sigma_0(A)$;
- $\mathbb{E}[Q\sigma_1(A)] = 0$.

Autrement dit,

- $(Q^n\sigma_0(A))_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale régulière ;
- Q est dégénérée en σ_1 .

On dit aussi que σ_0 (resp. σ_1) est la partie fortement non-dégénérée (resp. dégénérée) de σ .

• Étape 2) : Q et Q' ont les mêmes mesures fortement non-dégénérées (resp. dégénérées).

Montrons d'abord que Q et Q' ont les mêmes mesures fortement non-dégénérées : Remarquons que par positivité des suites p_n et p'_n , les sommes partielles sont proches uniformément à l'infini sur tout compact. Ceci est une conséquence du théorème de Dini : si K est un compact de \mathbb{R}^d et $N \in \mathbb{N}$, alors la partie négative $((q_n - q'_N)_-)_n$ décroît et converge vers 0 car la suite $(q_n - q'_N)_n$ converge en décroissant vers $q - q'_N$, et d'après le théorème de Dini, cette convergence est uniforme sur K .

On a donc pour $\epsilon > 0$ fixé,

$$q'_N(x) \leq q_n(x) + \epsilon \quad (1)$$

sur K pour n assez grand.

On a alors, grâce à l'inégalité de convexité de Kahane (théorème 5.4) et (1), pour toute fonction F convexe avec croissance au plus polynomiale à l'infini, tout $A \subset K$ borélien et toute Y variable aléatoire gaussienne centrée réduite indépendante de Q_n :

$$\mathbb{E}[F(Q'_N \sigma(A))] \leq \mathbb{E}[F(Q_n \sigma(A) e^{\sqrt{\epsilon} Y - \frac{\epsilon}{2}})] = \mathbb{E}[F(Q_n \sigma(A))] e^{\frac{(a^2 - a)\epsilon}{2}} \quad (2)$$

Supposons maintenant que $Q_n \sigma(A)$ soit uniformément intégrable et montrons que $Q'_n \sigma(A)$ l'est aussi. D'après le théorème de De la Vallée Poussin (théorème 5.1), il existe une fonction F qui est en particulier convexe et une constante positive α telle que $F(\lambda x) \leq \lambda^\alpha F(x)$. Combinant cela avec (2), on obtient

$$\sup_n \mathbb{E}[F|Q'_n|] \leq \sup_n \mathbb{E}[F|Q_n|] e^{\frac{(a^2 - a)\epsilon}{2}} < +\infty$$

Et d'après le théorème de De la Vallée Poussin, la martingale $(Q'_n \sigma(A))_n$ est aussi uniformément intégrable.

On vient de montrer :

Lemme 2.4. *Q et Q' ont les mêmes mesures fortement non-dégénérées.*

Montrons maintenant que Q et Q' ont les mêmes mesures dégénérées.

Supposons par l'absurde qu'il existe une mesure σ dégénérée pour Q et non dégénérée pour Q' . D'après le lemme de décomposition de mesure 2.3 appliqué à Q' , on peut décomposer σ en somme de deux mesure σ_0 et σ_1 avec σ_0 fortement non-dégénérée pour Q' et σ_1 dégénérée pour Q' . Alors d'après le lemme précédent, σ_0 est aussi fortement non-dégénérée pour Q , mais $Q\sigma_0 \leq Q\sigma = 0$, contradiction.

On vient de montrer :

Lemme 2.5. *Q et Q' ont les mêmes mesures dégénérées.*

• Étape 3) : $Q\sigma$ et $Q'\sigma$ sont égaux en loi.

On revient sur l'équation (2). De façon heuristique, il s'agit de faire tendre ϵ vers 0 pour que la première inégalité dans (2) devienne une égalité, puis se débarrasser de la fonction convexe F pour conclure. Voici maintenant les détails pour un borélien A par souci de simplicité, mais cette preuve se généralise facilement.

En vue de se débarrasser de la fonction convexe F , on va prendre une fonction F qui est en plus **lipschizienne**. D'après une version de l'inégalité de convexité de Kahane (théorème 5.7), on a :

$$\mathbb{E}[F(Q\sigma(A))] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \uparrow \mathbb{E}[F(Q_n\sigma(A))]$$

Combinant ceci avec (2) donne

$$\forall N, \mathbb{E}[F(Q'_N\sigma(A))] \leq \mathbb{E}[F(Q\sigma(A))]e^{\frac{a^2-a}{2}\epsilon}$$

En passant à la limite lorsque N tend vers ∞ et ϵ vers 0, on a :

$$\mathbb{E}[F(Q'\sigma(A))] \leq \mathbb{E}[F(Q\sigma(A))]$$

En inversant les rôles de Q et Q' on obtient une inégalité dans l'autre sens. Comme les combinaisons linéaires de toutes les fonctions convexes et lipschiziennes engendrent toutes les fonctions régulières à support compact, on vient de montrer :

Lemme 2.6. Égalité en loi

Pour tout borélien A , $Q\sigma(A)$ et $Q'\sigma(A)$ sont égaux en loi.

La preuve s'étend facilement à une famille de boréliens, on conclut que $Q\sigma$ et $Q'\sigma$ ont la même loi. \square

2.2.2 Critère de non-dégénérescence

On se limitera dans la suite au cas où σ est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d , et on suppose que g est de la forme $\gamma^2 \log_+ \frac{1}{|x|} + g(x)$ où g est une fonction continue bornée sur \mathbb{R}^d .

Ce théorème suivant dû à Kahane [11] est l'un des premiers théorèmes importants de la théorie. Une façon de comprendre l'énoncé est de le voir comme un phénomène de transition de phase.

Théorème 2.7. Sur la dégénérescence du chaos multiplicatif gaussien

On constate l'existence d'un point critique pour la dégénérescence du chaos multiplicatif gaussien :

- Si $\gamma \geq 2d$, le chaos multiplicatif est dégénéré ;
- Si $\gamma < 2d$, le chaos multiplicatif est fortement non-dégénéré sur la mesure de Lebesgue.

Remarque 2.4. *La preuve originale de Kahane en 1985 suppose que q est un noyau de type sigma-positif. Dans la pratique, l'hypothèse de sigma-positivité est délicate à vérifier à chaque fois. Cette généralisation a été traitée par Robert et Vargas dans [24].*

On démontrera ce théorème dans la section qui suit.

2.3 Quelques propriétés

2.3.1 Existence des moments positifs

Théorème 2.8. *Existence des moments positifs*

Dans le cas $\gamma^2 < 2d$, on a $\mathbb{E}[Q(K)^p] < \infty$ ssi $\gamma^2 < \frac{2d}{p}$.

On montre maintenant les théorèmes 2.7 et 2.8 en suivant l'article [11]. On montrera d'abord les résultats analogues dans un cas “discret” selon [12]. On y constate une intuition issue de la théorie de la turbulence, celle du transfert (ou de division) d'énergie de grandes échelles vers les petites échelles que l'on a esquissée au tout début du manuscrit.

Démonstration. Schéma de la preuve :

On introduit d'abord le modèle des cascades multiplicatives de Mandelbrot, ensuite on énonce un lemme analogue aux théorèmes précédents dans ce cadre. Puis des techniques d'approximation nous donneront les théorèmes.

- “Cas discret” :

Rappelons la construction du modèle des cascades de Mandelbrot.

Prenons un pavé, disons l'intervalle $[0, 1[$. Prenons un entier c plus grand ou égal à 2. On divise successivement le pavé en $c, c^2, \dots, c^n, \dots$ pavés semblables, en divisant chaque pavé de la n -ième génération en c pavés égaux. Par exemple, on pourrait penser à un arbre de Cayley ou bien à l'écriture c -adique d'un réel appartenant à $[0, 1[$.

Définition 2.4. *Intervalles c -adiques*

On se donne un entier c plus grand ou égal à 2. On note

$$I(j_1, j_2, \dots, j_n) = \left[\sum_{k=1}^n j_k c^{-k}, \sum_{k=1}^n j_k c^{-k} + c^{-n} \right[$$

les intervalles c -adiques (de l'intervalle $[0, 1[$), où $n = 1, 2, \dots$ désigne la “génération” et $j_k = 0, 1, \dots, c-1$ le $(j_k + 1)$ -ième descendant de la k -ième génération.

Maintenant on introduit des mesures aléatoires liées à cette division. Prenons la mesure de Lebesgue ν_0 sur le pavé initial. À chaque fois que l'on divise un pavé de la n -ième génération en c petits pavés égaux, on construit la mesure ν_{n+1} sur ces c pavés indépendamment de sorte que la densité de ν_{n+1} par rapport à ν_n soit donnée par la valeur d'un élément d'une suite de variables aléatoires i.i.d. positives d'espérances 1. Formellement :

Définition 2.5. Mesures aléatoires sur les pavés

On se donne une variable aléatoire W positive d'espérance 1. On désigne par $W(j_1, j_2, \dots, j_n)$ une suite de variables aléatoires indépendantes, chacune ayant la même distribution que W .

On définit alors ν_n la mesure sur $[0, 1[$ dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur l'intervalle $I(j_1, j_2, \dots, j_n)$ est

$$W(j_1)W(j_1, j_2) \cdots W(j_1, j_2, \dots, j_n)$$

Remarquons qu'alors ν_n est une martingale positive, donc converge p.s. vers une limite que l'on note ν . C'est ν que l'on veut étudier dans la suite. On commence par sa masse totale.

Notons

$$Y_n = \|\nu_n\| = c^{-n} \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} W(j_1)W(j_1, j_2) \cdots W(j_1, j_2, \dots, j_n)$$

la masse de la mesure aléatoire ν_n . C'est une martingale positive donc converge p.s. vers une variable aléatoire Y_∞ telle que $\mathbb{E}[Y_\infty] \leq 1$. Remarquons aussi que Y_∞ est la masse totale de ν au sens de la topologie faible.

Lemme 2.9. Équation fonctionnelle de cascades

Par Fubini (ou par construction même), les variables Y_n vérifient une équation récurrente :

$$Y_n = c^{-1} \sum_{j=1}^{c-1} W(j)Y_{n-1}(j)$$

Rappelons que les variables aléatoires $W(j)$ et $Y_{n-1}(j)$ sont mutuellement indépendantes, et les $Y_{n-1}(j)$ ont la même distribution que Y_{n-1} .

Alors Y_∞ est solution de l'équation fonctionnelle suivante :

$$Z = c^{-1} \sum_{j=0}^{c-1} W_j Z_j \tag{3}$$

où les variables aléatoires W_j et Z_j sont mutuellement indépendantes, les W_j ayant la même distribution que W et les Z_j la même distribution que Z .

Le lemme suivant donne un critère d'existence de solutions pour cette équation fonctionnelle. Il donne aussi une condition nécessaire et suffisante d'existence de moment pour Y_∞ .

Lemme 2.10. Analogues discrets

On a les résultats suivants :

- 1) Sur la non-dégénérescence :

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- a) $\mathbb{E}[Y_\infty] = 1$;
- b) $\mathbb{E}[Y_\infty] > 0$;
- c) Une solution Z existe avec $\mathbb{E}[Z] = 1$;
- d) $\mathbb{E}[W \ln W] < \ln c$.

- 2) Sur l'existence des moments :

Soit $h > 1$. Supposons que $\mathbb{P}[W = 1] \neq 1$. On a $\mathbb{E}[Y_\infty^h] < +\infty$ ssi $\mathbb{E}[W^h] < c^{h-1}$.

Démonstration. Avant de faire la preuve, introduisons une fonction convexe associée à W :

$$\phi(h) = \log_c \mathbb{E}[W^h] - (h - 1)$$

(où $\log_c x = \frac{\ln x}{\ln c}$) telle que $\phi(1) = 0$ et $\phi'_{gauche}(1) = \mathbb{E}[W \log_c W] - 1$.

Notons $D = 1 - \mathbb{E}[W \log_c W]$ l'opposé de cette valeur de dérivée, ainsi que α_0 (s'il existe) l'autre point d'annulation de la fonction ϕ .

- Pour 1) :

Visiblement a) implique b) et b) implique c).

Supposons alors c). Soit alors Z une solution de (3). Par récurrence sur n , il existe une suite de v.a. indépendantes $W(j_1, j_2, \dots, j_n)$ (comme dans la définition 2.5) ayant la même distribution que W et une suite de v.a. $Z(j_1, j_2, \dots, j_n)$ ayant chacune la même distribution que Z , indépendantes des $W(i_1, i_2, \dots, i_k)$ lorsque $k \leq n$, telles que, pour tout n :

$$Z = c^{-n} \sum_{j_1, \dots, j_n} W(j_1)W(j_1, j_2) \cdots W(j_1, j_2, \dots, j_n) Z(j_1, j_2, \dots, j_n)$$

Alors l'espérance conditionnelle de Z par rapport à la tribu engendrée par les $W(j_1, \dots, j_k)$ ($k \leq n$) est Y_n dans la définition 2.5. Il en découle que la martingale Y_n est uniformément intégrable et que $Z = Y_\infty$ p.s. (et donc $Z \geq 0$ p.s.).

On vient de montrer que c) implique a). Donc a), b), et c) sont équivalentes.

Supposons encore c) et montrons que ceci implique d). Partant de (3), on a par l'inégalité de Minkowski, pour $0 < h < 1$:

$$\mathbb{E}[c^h Z^h] \leq \sum_{j=0}^{c-1} \mathbb{E}[(W_j Z_j)^h] = c \mathbb{E}[W^h] \mathbb{E}[Z^h]$$

avec $0 < \mathbb{E}[Z^h] \leq 1$. La fonction $\phi(h)$ est par conséquent positive sur $[0, 1]$, donc $D \geq 0$.

On doit améliorer cette estimation pour avoir d). Voici quelques lemmes élémentaires :

Lemme 2.11. Amélioration de l'inégalité de Minkowski

$(x + y)^h \leq x^h + hy^h$ si $x \geq y > 0$ et $0 < h < 1$.

Ceci est une conséquence du théorème des accroissements finis.

Lemme 2.12. Soient X une variable aléatoire positive intégrable et X' une copie indépendante de X . Il existe alors un nombre $\epsilon_X > 0$ tel que

$$\mathbb{E}[X^h \mathbf{1}_{\{X' \geq X\}}] \geq \epsilon_X \mathbb{E}[X^h]$$

pour $0 \leq h \leq 1$.

C'est parce que $\frac{\mathbb{E}[X^h \mathbf{1}_{\{X' \geq X\}}]}{\mathbb{E}[X^h]}$ est une fonction continue positive de h strictement positive sur le compact $[0, 1]$.

Toujours par sous-additivité de $x \mapsto x^h$ pour $h \in [0, 1]$, on a, partant de (3), presque sûrement,

$$c^h Z^h \leq \sum_{j=0}^{c-1} W_j^h Z_j^h$$

Le premier des deux lemmes précédents nous dit que si $W_1 Z_1 \geq W_0 Z_0$ alors

$$c^h Z^h \leq h W_0^h Z_0^h + \sum_{j=1}^{c-1} W_j^h Z_j^h$$

donc

$$\mathbb{E}[c^h Z^h] \leq \sum_{j=0}^{c-1} \mathbb{E}[W_j^h Z_j^h] - (1 - h) \mathbb{E}[W_0^h Z_0^h \mathbf{1}_{\{W_1 Z_1 \geq W_0 Z_0\}}]$$

et alors le second des deux lemmes précédents nous apprend que

$$\mathbb{E}[c^h Z^h] \leq \mathbb{E}[W^h] \mathbb{E}[Z^h] - (1 - h) \epsilon_{WZ} \mathbb{E}[W^h] \mathbb{E}[Z^h]$$

et donc, en divisant par $\mathbb{E}[Z^h]$ et en prenant les logarithmes,

$$\phi(h) + \log_c \left(1 - \frac{(1 - c) \epsilon_{WZ}}{c}\right) \geq 0$$

valable pour $h \in [0, 1]$.

On en déduit que $D > 0$ en prenant les dérivées. Ceci nous montre que c) implique d).

Il ne reste qu'à montrer, par exemple $d)$ implique $b)$ pour terminer cette première partie de la preuve.

Voici une autre amélioration de l'inégalité de Minkowski :

Lemme 2.13. Amélioration de l'inégalité de Minkowski bis

$(x + y)^h \geq x^h + y^h - 2(1 - h)(xy)^{\frac{h}{2}}$ pour $x > 0$, $y > 0$ et $h_0 < h < 1$ (avec, par exemple, $h_0 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$).

Comme corollaire, on a

$$\left(\sum_{j=1}^c x_j\right)^h \geq \sum_{j=1}^c x_j^h - 2(1 - h) \sum_{i < j} (x_i x_j)^{\frac{h}{2}}$$

pour $x_j > 0$ ($j = 1, 2, \dots, c$) et $h_0 < h < 1$.

Le corollaire s'obtient par récurrence en utilisant la sous-additivité de la fonction $x \mapsto x^{\frac{h}{2}}$ pour $0 < h < 1$. En effet :

$$\left(\sum_{j=1}^c x_j\right)^h \geq x_1^h + \left(\sum_{j=2}^c x_j\right)^h - 2(1 - h)x_1^{\frac{h}{2}}\left(\sum_{j=2}^c x_j\right)^{\frac{h}{2}} \geq \sum_{j=1}^c x_j^h - 2(1 - h) \sum_{j>1} (x_1 x_j)^{\frac{h}{2}}$$

Montrons alors le lemme. Ceci est encore un exercice sur les fonctions élémentaires.

On pose $f(t) = e^{th} + e^{-th} - (e^t + e^{-t})^h$. En divisant par $(xy)^{\frac{h}{2}}$ de chaque côtés, on voit qu'il suffit de montrer que $\sup_t f_t \leq 2(1 - h)$ quand $h < 1$ est assez proche de 1. Il est facile de voir que $f(t)$ a un minimum local en $t = 0$ et tend vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$. Aux points $t \neq 0$ où f' s'annule, $f(t) = 2 \frac{e^{(1-h)t} - e^{-(1-h)t}}{e^t - e^{-t}}$.

On s'intéresse alors à la fonction $g(\epsilon) = e^{\epsilon t} - e^{-\epsilon t} - \epsilon(e^t - e^{-t})$. Il suffit de montrer que $g(\epsilon) \leq 0$ quand ϵ est proche de 0. En dérivant on voit que quand $\epsilon < \frac{\sqrt{3}}{3}$, $g(\epsilon) \leq 0$. D'où le lemme.

Appliquons le corollaire du lemme précédent avec $x_{j+1} = W_j X_j$ où $W_j = W(j)$ et $X_j = Y_{n-1}(j)$ à l'équation

$$Y = c^{-1} \sum_{j=0}^{c-1} W_j X_j \tag{4}$$

où $Y = Y_n$.

On obtient

$$c^h Y^h \geq \sum_{j=0}^{c-1} W_j^h X_j^h - 2(1 - h) \sum_{i < j} W_i^{\frac{h}{2}} W_j^{\frac{h}{2}} X_i^{\frac{h}{2}} X_j^{\frac{h}{2}}$$

et en prenant les espérances et en revenant aux notation initiales :

$$\mathbb{E}[Y_n^h] \geq c^{1-h} \mathbb{E}[W^h] \mathbb{E}[Y_{n-1}^h] - c^{1-h} (c-1)(1-h) (\mathbb{E}[W^{\frac{h}{2}}])^2 (\mathbb{E}[Y_{n-1}^{\frac{h}{2}}])^2$$

Or, on a $\mathbb{E}[Y_n^h] \leq \mathbb{E}[Y_{n-1}^h]$ par l'inégalité de Jensen, donc

$$\mathbb{E}[Y_n^h](c^{\phi(h)-1}) \leq c^{1-h}(c-1)(1-h)(\mathbb{E}[Y_{n-1}^{\frac{h}{2}}])^2$$

et en faisant tendre h vers 1, on obtient

$$D \ln c \leq (c-1)(\mathbb{E}[Y_{n-1}^{\frac{1}{2}}])^2$$

Par uniforme intégrabilité de la famille des $Y_n^{\frac{1}{2}}$ (car $\mathbb{E}[Y_n] = 1$), on a $\mathbb{E}[Y_\infty^{\frac{1}{2}}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Y_n^{\frac{1}{2}}]$.

Ainsi, $\mathbb{E}[Y_\infty^{\frac{1}{2}}] \neq 0$. Ceci entraîne bien $b)$ et on a terminé la première partie de la preuve.

• Pour 2) :

Supposons d'abord l'existence d'une solution Z à l'équation (3) telle que $\mathbb{E}[Z^h] < +\infty$ pour $h > 1$ donné.

Sous l'hypothèse $\mathbb{P}[W = 1] \neq 1$, on a

$$c^h Z^h \geq \sum_{j=0}^{c-1} (W_j Z_j)^h$$

où l'inégalité est stricte sur un évènement de probabilité non nulle. Sur cet évènement, on a

$$c^h \mathbb{E}[Z^h] > c \mathbb{E}(W^h) \mathbb{E}[Z^h]$$

soit $\mathbb{E}[W^h] < c^{h-1}$.

Réciproquement, supposons que $\mathbb{E}[W^h] < c^{h-1}$ (i.e. $\phi(h) < 0$) et soit k l'entier tel que $k < h \leq k+1$. Alors on a, pour $x_j \geq 0$,

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_c)^h \leq (x_1^{\frac{h}{k+1}} + \dots + x_c^{\frac{h}{k+1}})^{k+1} = x_1^h + \dots + x_c^h + \dots$$

Reprenons la formule (4). On obtient :

$$c^h \mathbb{E}[Y^h] \leq c \mathbb{E}[W^h] \mathbb{E}[X^h] + (c^{k+1} - c) \mathbb{E}[W^k] \mathbb{E}[X^k]$$

d'où, en utilisant $\mathbb{E}[Y_n^h] \geq \mathbb{E}[Y_{n-1}^h]$ (par Jensen) et en divisant par c^h :

$$\mathbb{E}[Y_n^h](1 - c^{1-h} \mathbb{E}[W^h]) \leq c \mathbb{E}[W^k] \mathbb{E}[Y_\infty^k]$$

car $\frac{c^{k+1}-c}{c^h} \leq c$.

En faisant tendre n vers l'infini, on voit que si $\mathbb{E}[Y_\infty^k] < +\infty$ alors $\mathbb{E}[Y_\infty^h] < +\infty$.

Donc pour $1 < h \leq 2$, c'est gagné.

Maintenant supposons que $h > 2$.

Par convexité, $\phi(h) < 0$ entraîne $\phi(l) < 0$ pour tout (entier) $l \leq h$. Donc $\mathbb{E}[Y_\infty^{l-1}] < +\infty$ implique $\mathbb{E}[Y_\infty^l] < +\infty$ pour tout $l = 2, \dots, k$. Ceci termine la preuve. \square

En voici une application dans un cas intéressant pour nous.
Prenons $T = \{1, 2, \dots, c\}^{\mathbb{N}}$ avec $c \in \mathbb{N}^*$ muni de la distance c -adique

$$d(s, t) = c^{-d. \sup\{N \in \mathbb{N} : \forall k \leq N, \pi_k(t) = \pi_k(s)\}}$$

avec

$$p_n(t, s) = \begin{cases} u & \text{si } \text{dist}(t, s) \leq c^{-nd} \\ 0 & \text{si } \text{dist}(t, s) > c^{-nd} \end{cases}$$

On remarque alors que le poids $p_n(t)$ est p.s. constant sur chacun des c^n cylindres prescrits par ses n -premieres coordonnées : on note dorénavant $I_n(t)$ celui parmi ces cylindres contenant t , les valeurs de $p_n(t)$ sur les cylindres disjoints sont indépendantes. On définit alors le noyau

$$q(t, s) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t, s) = -u \frac{\ln d(t, s)}{\ln c}$$

ainsi que l'opérateur Q associé.

Choisissons comme mesure σ la mesure équidistribuée sur T , i.e. telle que $\sigma(I_n(t)) = c^{-n}$. Le lemme précédent donne alors dans ce cas :

Lemme 2.14. *Cas de l'arbre*

Un tel opérateur Q est dégénéré en σ si $u \geq 2 \ln c$, et fortement non-dégénéré en σ si $u < 2 \ln c$.

De plus, $\mathbb{E}[Q(\sigma(T))^h] < +\infty$ ssi $uh < 2 \ln c$.

C'est cette version du lemme que l'on va utiliser dans la suite.

• “Cas continu” :

Revenons à notre chaos multiplicatif gaussien. Rappelons que l'on se place toujours dans le cas d'un noyau de la forme $u \ln^+ \frac{1}{|t-s|} + O(1)$ avec $u = \lambda^2$ et $t, s \in \mathbb{R}^d$.

On prend d'abord un ensemble totalement discontinu K dans \mathbb{R}^d contruit de façon analogue à l'ensemble de Cantor :

- On prend une suite décroissante de compacts emboîtés $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que chaque K_n admette exactement c^n composantes connexes, chacune ayant un diamètre plus petit que d_n , et les distances mutuelles sont plus grandes que δ_n .
- Chaque composante de K_n contient exactement c composantes de K_{n+1} .
- K est défini comme l'intersection des K_n .

On suppose de plus que (lorsque $n \rightarrow +\infty$ pour δ_n)

$$d_n \leq c^{-\frac{n}{\alpha}}, \delta_n \geq c^{-\frac{n}{\alpha+o(1)}} \tag{5}$$

Soit σ la mesure qui donne la masse c^{-n} à chaque composante de K_n .

On a, dans ce cas :

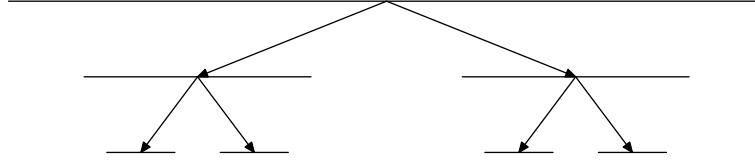


FIGURE 3 – Construction de la suite K_n à la Cantor

Lemme 2.15. *Cas cascades*

L'opérateur du chaos multiplicatif gaussien Q est dégénéré sur σ si $u \geq 2\alpha$ et fortement non dégénéré si $u \leq 2\alpha$.

On a en plus $\mathbb{E}[Q\sigma(K)^h] \leq +\infty$ ssi $uh \leq 2\alpha$.

Preuve du lemme :

La preuve est une réécriture du cas discret expliqué plus haut.

Supposons d'abord que $\delta_{n+1} \geq \lambda c^{-n}$ avec $\lambda > 0$ une constante (par exemple si K est réunion de c portions qui lui sont semblables dans le même rapport $c^{-\alpha}$ construites par auto-similarité).

Choisissons un tel compact noté K_α^c . On peut alors identifier le compact T précédent avec K_α^c , en transportant les cylindres prescrits par les n premières coordonnées sur les composantes de K_n . Or on peut comparer la distance ultra-métrique sur l'arbre T avec la distance euclidienne sur K :

$$\lambda(d(t, s))^\alpha \leq |t - s| \leq (d(t, x))^\alpha$$

Remarquons que σ est invariante par cette identification (car $\sigma(I_n(t)) = c^{-n}$). Le noyau $q(t, s)$ vérifie, via cette identification :

$$q(t, s) = \frac{u}{\alpha \ln c} \ln |t - s| + O(1)$$

et la conclusion dans ce cas en découle à cause de l'application dans le cas discret plus haut.

Maintenant dans le cas général, avec la condition 5, on voit que K s'obtient à partir de K_α^c par contraction, mais aussi que $K_{\alpha+\epsilon}^c$ s'obtient à partir de K par contraction locale. Ceci suffit pour établir le résultat énoncé.

Arrivant à la fin de la démonstration de ce lemme, on est en mesure de démontrer nos théorèmes. L'idée est de construire un ensemble de Cantor K proche de son "intervalle" de départ (au sens de la mesure) K_0 .

Sans perte de généralité, on prend $K_0 \subset [0, 1]^d$ et m la mesure de Lebesgue sur K . Prenons $c = 2^d$. On construit les K_n comme précédemment, de sorte que chacune de ses c^n composantes soit homothétique à K_0 dans le rapport $\rho_n = r_1 r_2 \cdots r_n$,

avec $r_k \in]0, \frac{1}{2}[$. Si chaque r_k est suffisamment proche de $\frac{1}{2}$ (mais pas trop pour que l'on ait toujours (5)), le compact K a pour mesure de Lebesgue arbitrairement proche de m , donc par le lemme précédent, on a obtenu le théorème. \square

2.3.2 Non-linéarité du spectre puissance

Théorème 2.16. *Caractère multifractal*

Pour tout $p \geq 0$ tel que Q admette un moment d'ordre p , il existe une constante $D_p > 0$ telle que, quand $t \rightarrow 0$,

$$\mathbb{E}[Q(tA)^p] \rightarrow D_p t^{\xi(p)}$$

où A est un ouvert borné non vide et pour tout $p \in \mathbb{R}$, $\xi(p) = (d + \frac{\gamma^2}{2})p - \frac{\gamma^2}{2}p^2$.

Démonstration. On peut supposer A est inclus dans $[0, 1]^d$.

Pour $0 < t < 1$, on note \bar{Q}^t le chaos associé au noyau $q(\cdot/t)$. Remarquons que $\bar{Q}^t(tA) = t^d Q(A)$ en loi.

On veut comparer les deux chaos Q et \bar{Q} . Définissons

$$g_t = \sup_{|r| \leq t} |g(r) - g(r/t)|$$

et remarquons que pour tout $|r| \leq t$,

$$q(r) \geq q(r/t) + \gamma^2 \log \frac{1}{t} - g_t$$

Soit $p \geq 1$. Grâce à l'inégalité de convexité de Kahane (théorème 5.4), on a

$$\mathbb{E}[Q(tA)^p] \geq \mathbb{E}[(e^{\sqrt{\gamma \log \frac{1}{t} - g_t}} Y - \frac{1}{2}(\gamma^2 \log \frac{1}{t} - g_t) \bar{Q}^t(tA))^p]$$

où Y suit une loi normale centrée réduite indépendante de \bar{Q}^t . On a alors

$$\mathbb{E}[Q(tA)^p] \geq \mathbb{E}[Q(A)^p] t^{dp} e^{\frac{(p^2 - p)(\gamma^2 \log \frac{1}{t} - g_t)}{2}} = \mathbb{E}[Q(A)^p] t^{\xi(p)} e^{-\frac{(p^2 - p)g_t}{2}}$$

En utilisant le fait que $g_t \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$, on a alors, quand $t \rightarrow 0$,

$$\mathbb{E}[Q(tA)^p] \geq \mathbb{E}[Q(A)^p] t^{\xi(p)}$$

Avec la même méthode mais en remplaçant g_t par $-g_t$, on peut montrer une inégalité du même type dans l'autre sens. D'où le résultat pour $p \geq 1$.

Le cas $p < 1$ se démontre en suivant exactement les mêmes idées. On remarque que comme $x \mapsto x^p$ est cette fois-ci concave, les inégalités changent de signes mais le résultat reste valable. \square

3 Étude du cas critique

Dans la suite de ce mémoire, on se place dans le cas suivant : σ est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d , et on considère, $\forall \gamma \geq 0$,

$$M^\gamma(dx) = \lim_{t \rightarrow \infty} M_t^\gamma(dx) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\gamma X_t(x) - \frac{\gamma^2}{2} \mathbb{E}[X_t(x)^2]} dx$$

avec X un processus gaussien centré stationnaire défini sur (un domaine ouvert de) \mathbb{R}^d avec X_t une suite de champs gaussiens approximant X (au sens où le noyau de covariance K de X et limite des noyaux K_t de X_t , voir la section précédente pour la définition du chaos multiplicatif gaussien).

On a vu dans la section précédente que le point $\gamma = \sqrt{2d}$ est un point critique (au sens où l'on y constate un phénomène de transition de phases) pour un noyau de la forme $\gamma^2 \log_+ \frac{1}{|x|} + g(x)$ où g est une fonction continue bornée sur \mathbb{R}^d . Il est souvent très intéressant d'étudier ce qui se passe lorsque l'on passe de l'un côté à l'autre du point critique, mais dans notre cas, la situation se simplifie car on sait déjà :

Théorème 3.1. *Rappel sur le cas de dégénérescence de la mesure limite*

Pour $\gamma \geq 2d$, p.s. $\lim_{t \rightarrow \infty} M_t^{\sqrt{2d}}(dx) = 0$.

En revanche pour $\gamma < 2d$, la mesure limite M^γ est p.s. non-triviale.

Dans l'article récent [6], Duplantier, Rhodes, Scheffield et Vargas ont réussi à contruire une théorie analogue à la théorie de Kahane dans le cas sous-critique. Ils se sont intéressés à la martingale dérivée “en faisant la différentielle par rapport au paramètre γ ” :

$$M'(A) = -\frac{\partial}{\partial \gamma} [M_\gamma(A)]_{\gamma=\sqrt{2d}} = \left[\int_A (\gamma \mathbb{E}[X(x)^2] - X(x)) e^{\gamma X(x) - \frac{\gamma^2}{2} \mathbb{E}[X(x)^2]} dx \right]_{\gamma=\sqrt{2d}}$$

Remarquons que cette martingale n'est pas a priori positive, l'existence même de la limite n'est pas évidente en soi.

Un exemple d'application spectaculaire a été l'article [7], dans lequel les mêmes auteurs, en étudiant les moments de cette martingale dérivée, ont réussi à établir la formule de Knizhnik-Polyakov-Zamolodchikov (KPZ) au point critique.

Le but de cette section est de rappeler la construction de la martingale dérivée pour la chaos multiplicatif gaussien au point critique de l'article [6]. Il est à noter qu'il y a de fortes connections avec le processus du branchement, malheureusement on ne traite pas cela spécifiquement dans ce rapport.

3.1 Construction de la martingale dérivée

On pose formellement la définition de la martingale dérivée :

Définition 3.1. Martingale dérivée du chaos multiplicatif gaussien

Au voisinage du point critique $\gamma = \sqrt{2d}$, on introduit la martingale dérivée

$$M'_t(dx) = (\sqrt{2d}\mathbb{E}[X_t(x)^2] - X_t(x))e^{\sqrt{2d}X_t(x) - d\mathbb{E}[X_t(x)^2]}dx$$

Dans [6], on se propose d'étudier une classe particulière de processus gaussiens centrés stationnaires à accroissements indépendants $((X_t(x))_{x \in \mathbb{R}})_{t \geq 0}$ dont les fonctions de covariance sont de la forme :

$$K_t(x) = \mathbb{E}[X_t(0)X_t(x)] = \int_1^{e^t} \frac{k(ux)}{u} du$$

avec k un noyau de covariance de classe C^1 à support compact satisfaisant $k(0) = 1$. Remarquons tout de suite que sous ces conditions, en chaque point x , le processus $X_t(x)$ est un mouvement brownien réel standard.

Dans [6], le résultat suivant a été démontré :

Théorème 3.2. Convergence de la martingale dérivée

Pour tout ouvert borné $A \in \mathbb{R}^d$, la martingale $(M'_t(A))_{t \geq 0}$ converge p.s. vers une variable aléatoire p.s. strictement positive que l'on notera $M'(A)$. En plus cette mesure limite est à support plein et sans atome.

Avant de faire la preuve, discutons un peu sur le noyau K et expliquons ainsi la méthode principale utilisée dans [6] dite de cut-off.

Le fait de pouvoir écrire le noyau K sous forme d'intégrale par rapport au temps nous dit immédiatement que le processus X est à accroissements indépendants, i.e. le processus $(X_t(x) - X_s(x))_{t > s}$ est indépendant de $((X_u(x))_{x \in \mathbb{R}^d})_{u \leq s}$. En plus, quand on impose la condition d'être à support compact à k , on observe un phénomène de décorrélation quand le temps t évolue, à savoir, pour $s < t$, les processus $(X_t(w) - X_s(w))_{w \in A}$ et $(X_t(x) - X_s(x))_{x \in B}$ sont indépendants dès que $\text{dist}(A, B) \geq e^{-s}$. Cette propriété nous apporte une information précieuse sur le comportement de notre processus, à savoir le fait de pouvoir trouver un moment de cut-off pour un couple de points (x, w) , c'est à dire un moment $s_0(x, w)$ au-delà duquel l'évolution au point w ne dépend plus de l'évolution au point x . Ceci nous permet ainsi d'écrire le processus $(X_s(w))_{s_0 \leq s \leq t}$ comme

$$X_s(w) = X_{s_0}(w) + W_{s-s_0}$$

où W est un mouvement brownien standard indépendant du processus $(X_s(x))_{0 \leq s \leq t}$ et du processus $(X_s(w))_{0 \leq s \leq s_0}$.

On va donc exploiter cette propriété et prouver ce théorème dans ce qui suit. Il est à noter que l'hypothèse d'être à support compact sur k n'est pas essentielle et peut être affaiblie, ce qui est l'objet de la section 4.

3.2 Preuve du théorème 3.2

On présente maintenant la preuve originale de [6].

Stratégie de la preuve :

La martingale dérivée n'est pas positive, on ne peut pas dire directement qu'elle converge vers une limite (aléatoire) positive. On définit, pour $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s(x); s \leq t, x \in \mathbb{R}^d\}$, $A \in \mathbb{R}^d$ borélien et $t, \beta > 0$, les variables aléatoires :

$$Z_t^\beta(A) = \int_A (\sqrt{2dt} - X_t(x) + \beta) \mathbf{1}_{\{\tau^\beta > t\}} e^{\sqrt{2d}X_t(x) - d\mathbb{E}[X_t(x)^2]} dx$$

et

$$\tilde{Z}_t^\beta(A) = \int_A (\sqrt{2dt} - X_t(x)) \mathbf{1}_{\{\tau^\beta > t\}} e^{\sqrt{2d}X_t(x) - d\mathbb{E}[X_t(x)^2]} dx$$

où τ^β est un $(\mathcal{F}_t)_t$ -temps d'arrêt défini pour tout $x \in A$ par

$$\tau^\beta = \inf\{u > 0, X_u(x) - \sqrt{2d}u > \beta\}$$

Remarquons tout de suite que l'intégrand dans l'expression de $Z_t^\beta(A)$ est positif. Ces variables aléatoires servent à contrôler les parties négatives de l'intégrand dans la définition de la martingale dérivée M' en le coupant au niveau β . Le but est de démontrer que $Z_t^\beta(A)$ qui est positive converge (en t) vers une variable aléatoire $Z^\beta(A)$ qui converge (en β) vers la limite (en t) de $M'_t(A)$. La preuve se fait en passant par $\tilde{Z}_t^\beta(A)$: en effet, on montre que

- La différence entre $Z_t^\beta(A)$ et $\tilde{Z}_t^\beta(A)$ converge p.s. vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$;
- $\tilde{Z}_t^\beta(A)$ et $M'_t(A)$ sont identiques pour β assez grand.

Entrons maintenant dans les détails de la preuve.

- Quelques vérifications et lemmes préparatoires :

On montre d'abord que $(Z_t^\beta(A))_{t \geq 0}$ est une \mathcal{F}_t -martingale continue positive. Elle converge donc p.s. vers une variable aléatoire positive que l'on note $Z^\beta(A)$.

Rappelons que $(X_t(x))_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard. Par le théorème de Girsanov, on peut éliminer la partie $\sqrt{2d}t$ (la partie drift) :

$$\mathbb{E}[(\sqrt{2dt} - X_t(x) + \beta) \mathbf{1}_{\{\tau^\beta > t\}} e^{\sqrt{2d}X_t(x) - d\mathbb{E}[X_t(x)^2]}] = \mathbb{E}[(-X_t(x) + \beta) \mathbf{1}_{\{\tau > t\}}]$$

où τ est un $(\mathcal{F}_t)_t$ -temps d'arrêt défini par

$$\tau = \inf\{u > 0, X_u(x) > \beta\}$$

Il suffit de montrer que

Lemme 3.3.

$$\mathbb{E}[(-X_t(x) + \beta) \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(-X_s(x) + \beta) \mathbf{1}_{\{\tau > s\}}]$$

Par la propriété de Markov (faible) du mouvement brownien, on a, en notant W un mouvement brownien standard indépendant de X ,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[(-X_t(x) + \beta)\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} | \mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[(-X_t(x) + \beta)\mathbf{1}_{\{\sup_{u \in [0, t]} X_u(x) \leq \beta\}} | \mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[(-X_s(x) - W_{t-s}(x) + \beta)\mathbf{1}_{\{\sup_{u \in [0, s]} X_u(x) \leq \beta\}} \mathbf{1}_{\{\sup_{u \in [s, t]} X_s(x) + W_{t-s}(x) \leq \beta\}} | \mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[(-X_s(x) + \beta)\mathbf{1}_{\{\tau > s\}}]
\end{aligned}$$

en appliquant le théorème d'arrêt à W (et la filtration associée) en considérant le temps d'arrêt $\tilde{\tau} = \inf\{W_{t-s} > \beta - X_s(w)\}$.

• Sur l'uniforme intégrabilité de la martingale $Z_t^\beta(A)$:

Sans perte de généralité, on fait quelques hypothèses qui simplifient les calculs :

On suppose que le support de k est dans $B(0, 1)$ et $A \subset B(0, \frac{1}{2})$ (car tout compact admet un recouvrement par des boules de rayon $\frac{1}{2}$).

On suppose aussi que $x \cdot \nabla k(x) \leq 0$. Cette dernière condition est vraie au moins sur un voisinage de 0 par le caractère défini positif du noyau k . Quitte à réduire la taille de A , on suppose que ceci est vrai sur tout ouvert A .

Écrivons pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$f_t^\beta(x) = (\sqrt{2dt} - X_t(x) + \beta)\mathbf{1}_{\{\tau^\beta > t\}} e^{\sqrt{2d}X_t(x) - d\mathbb{E}[X_t(x)^2]}$$

de sorte que $Z_t^\beta(A) = \int_A f_t^\beta(x) dx$.

On définit ensuite une nouvelle mesure de probabilité sur $\mathcal{B}(A) \otimes \mathcal{F}_t$:

$$d\Theta_t^\beta = \frac{1}{|A|\beta} f_t^\beta(x) dx d\mathbb{P}$$

et notons $\Theta(\cdot | \mathcal{G})$ (resp. $\Theta(\cdot | y)$) l'espérance conditionnelle par rapport à \mathcal{G} sous- σ -algèbre de $\mathcal{B}(A) \otimes \mathcal{F}_t$ (resp. la σ -algèbre engendrée par la variable aléatoire $\mathcal{B}(A) \otimes \mathcal{F}_t$ -mesurable y) de sorte que $d\Theta_t^\beta(\cdot | x) = \frac{1}{\beta} f_t^\beta(x) d\mathbb{P}$.

Rappelons que (voir le rappel 5.2) sous $\Theta_t^\beta(\cdot | x)$, la loi du processus $(X_s(x) - \sqrt{2ds} - \beta)_{s \leq t}$ est la même que celle de $(-\beta_s)_{s \leq t}$ avec $(\beta_s)_{s \leq t}$ un processus de Bessel en dimension 3 issu de β .

Pour montrer l'uniforme intégrabilité de $(Z_t^\beta(A))_t$, on souhaite établir :

$$\lim_{\delta \rightarrow +\infty} \limsup_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[Z_t^\beta(A) \mathbf{1}_{\{Z_t^\beta(A) > \delta\}}] = 0$$

Or, comme

$$\mathbb{E}[Z_t^\beta(A) \mathbf{1}_{\{Z_t^\beta(A) > \delta\}}] = \beta |A| \Theta_t^\beta(Z_t^\beta(A) > \delta)$$

il suffit de montrer que

$$\lim_{\delta \rightarrow +\infty} \limsup_{t \rightarrow +\infty} \Theta_t^\beta(Z_t^\beta(A) > \delta) = 0$$

Afin d'utiliser la propriété du cut-off, on écrit, en découpant A en $B(x, e^{-t})$ et son complémentaire :

$$\begin{aligned} \Theta_t^\beta(Z_t^\beta(A) > \delta) &= \frac{1}{|A|} \int_A \Theta_t^\beta(Z_t^\beta(A) > \delta | x) dx \\ &= \frac{1}{|A|} \int_A \Theta_t^\beta(\Theta_t^\beta(Z_t^\beta(A) > \delta | x, (X_s(x))_{s \leq t}) | x) dx \\ &\leq \epsilon + \frac{1}{|A|} \int_A \Theta_t^\beta(\Theta_t^\beta(Z_t^\beta(A) > \delta | x, (X_s(x))_{s \leq t}, \mathbf{B}) | x) dx \\ &\leq \epsilon + \frac{1}{|A|} \int_A \Theta_t^\beta(\Theta_t^\beta(Z_t^\beta(B(x, e^{-t})) > \frac{\delta}{2} | x, (X_s(x))_{s \leq t}, \mathbf{B}) | x) dx \\ &\quad + \frac{1}{|A|} \int_A \Theta_t^\beta(\Theta_t^\beta(Z_t^\beta(B(x, e^{-t})^c) > \frac{\delta}{2} | x, (X_s(x))_{s \leq t}, \mathbf{B}) | x) dx \\ &= \epsilon + \Sigma_1 + \Sigma_2 \end{aligned}$$

où \mathbf{B} est un évènement de probabilité au moins $1 - \epsilon$ (qui nous servira pour contrôler les chemins du processus de Bessel β) que l'on choisit grâce au lemme de Motoo, voir 5.3 :

$$\mathbf{B} = \{\forall t \geq 0, \frac{\sqrt{t}}{R(\ln(2+t))^2} \leq \beta_t \leq R(1 + \sqrt{t \ln(1+t)})\}$$

avec R assez grand.

Pour formaliser notre intuition sur le cut-off, on énonce un lemme de projection qui nous donne la loi conditionnelle de $(X_s(w))_{s \leq t}$ sachant celle de $(X_s(x))_{s \leq t}$.

Lemme 3.4. Un lemme de projection

Pour tout couple $w \neq x$ et pour t , $(X_s(w))_{s \leq t}$ s'écrit comme :

$$X_s(w) = P_s^{x,w} + Z_s^{x,w}$$

en loi, où

- $P_s^{x,w} = - \int_0^s g_{x,w}(u) X_u(x) du + \frac{\partial K_s(x-w)}{\partial s} X_s(x)$ est $\sigma\{(X_s(x))_{s \leq t}\}$ -mesurable avec $g_{x,w}(u) = \frac{\partial^2 K_u(x-w)}{\partial u^2}$;
- $(Z_s^{x,w})_{s \leq t}$ un processus gaussien centré indépendant de $\sigma\{(X_s(x))_{s \leq t}\}$ dont la structure de covariance est donnée par

$$q_{x,w}(s, s') = \mathbb{E}[Z_{s'}^{x,w} Z_s^{x,w}] = \min(s, s') - \int_0^{\min(s, s')} \left(\frac{\partial K_u(x-w)}{\partial u} \right)^2 du$$

On vérifie par un calcul de covariance la validité de cette décomposition.
Maintenant on explique comment contrôler Σ_1 et Σ_2 .

◦ Pour Σ_2 :

Rappelons que l'on a défini $s_0 = \ln \frac{1}{|x-w|}$ l'instant de cut-off : c'est l'instant à partir duquel l'évolution de $(X_s(w) - X_{s_0}(w))_{s_0 \leq s \leq t}$ devient indépendante du processus $(X_s(x))_{0 \leq s \leq t}$. On écrit donc, sous Θ_t^β , le processus $(X_s(w))_{s_0 \leq s \leq t}$ comme

$$X_s(w) = X_{s_0}(w) + W_{s-s_0}$$

où W est un mouvement brownien standard indépendant du processus $(X_s(x))_{0 \leq s \leq t}$ et du processus $(X_s(w))_{0 \leq s \leq s_0}$.

On a donc par le théorème d'arrêt (voir le lemme 3.3) :

$$\begin{aligned} \Theta_t^\beta(f_t^\beta(w)|x, (X_s(x))_{0 \leq s \leq t}) \\ = \frac{1}{\beta} \mathbb{E}[(\sqrt{2d}s_0 - X_{s_0}(w) + \beta) \mathbf{1}_{\{\sup_{u \in [0, s_0]} (X_u(w) - \sqrt{2d}u) \leq \beta\}} e^{\sqrt{2d}X_{s_0}(w) - ds_0} | x, (X_s(x))_{0 \leq s \leq t}] \end{aligned}$$

En utilisant le lemme de projection 3.4, on a :

$$\begin{aligned} \Theta_t^\beta(f_t^\beta(w)|x, (X_s(x))_{0 \leq s \leq t}) \\ = \frac{1}{\beta} \mathbb{E}[(\sqrt{2d}s_0 - P_{s_0}^{x,w} - Z_{s_0}^{x,w} + \beta) \mathbf{1}_{\{\sup_{u \in [0, s_0]} (P_u^{x,w} + Z_u^{x,w} - \sqrt{2d}u) \leq \beta\}} e^{\sqrt{2d}(P_{s_0}^{x,w} + Z_{s_0}^{x,w}) - ds_0} | x, (X_s(x))_{0 \leq s \leq t}] \\ \leq \frac{1}{2\beta} \mathbb{E}[(\sqrt{2d}s_0 - P_{s_0}^{x,w} - Z_{s_0}^{x,w} + \beta)^2 + 1] e^{\sqrt{2d}(P_{s_0}^{x,w} + Z_{s_0}^{x,w}) - ds_0} | x, (X_s(x))_{0 \leq s \leq t}] \\ = \frac{1}{2\beta} ((\sqrt{2d}(s_0 - q_{x,w}(s_0, s_0)) - P_{s_0}^{x,w} + \beta)^2 + q_{x,w}(s_0, s_0) + 1) e^{\sqrt{2d}P_{s_0}^{x,w} - d(s_0 - q_{x,w}(s_0, s_0))} \end{aligned}$$

La quantité $q_{x,w}(s_0, s_0)$ s'avère petite. En effet,

$$\begin{aligned} q_{x,w}(s_0, s_0) &= s_0 - \int_0^{s_0} \left(\frac{\partial K_u(x, w)}{\partial u} \right)^2 du \\ &= \int_0^{s_0} 1 - \left(\frac{\partial K_u(x, w)}{\partial u} \right)^2 du \\ &= \int_{|x-w|}^1 \left(1 - k\left(y \frac{x-w}{|x-w|}\right)^2 \right) \frac{1}{y} dy \\ &\leq C \end{aligned}$$

où C ne dépend que du noyau k ($C = \sup_{z \in B(0,1)} \frac{1-k(z)^2}{|z|}$ convient par exemple). Dans l'avant dernière ligne on a utilisé un changement de variables $y = e^{u-s_0}$.

Ceci nous dit que la partie $q_{x,w}(s_0, s_0)$ n'intervient pas dans les majorations qui suivent.

On utilise ensuite la représentation en processus de Bessel β , en utilisant le fait que l'on est sur l'évènement \mathbf{B} . On note

$$\begin{aligned} Y_{s_0}^{x,w} &= - \int_0^{s_0} g_{x,w}(u)(X_u(x) - \sqrt{2d}u - \beta)du \\ &= P_{s_0}^{x,w} - \sqrt{2d}K_{s_0}(x-w) + \beta(k(e^{s_0}(x-w)) - k(x-w)) \\ &= P_{s_0}^{x,w} - \sqrt{2d}s_0 + \theta_{x,w}(s_0) \end{aligned}$$

avec $\theta_{x,w}$ une fonction bornée indépendamment de x, w, t, A car k est bornée. On a donc

$$\begin{aligned} &\Theta_t^\beta(f_t^\beta(w)|x, (X_s(x))_{0 \leq s \leq t}, \mathbf{B}) \\ &\leq \frac{1}{2\beta}(((\theta_{x,w}(s_0) - Y_{s_0}^{x,w})^2 + q_{x,w}(s_0, s_0) + 1)e^{\sqrt{2d}Y_{s_0}^{x,w} + ds_0 + dq_{x,w}(s_0, s_0) - \sqrt{2d}\theta_{x,w}(s_0)})|_{\mathbf{B}} \\ &\leq \frac{1}{2\beta}((C - Y_{x_0}^{x,w})^2 + C)e^{\sqrt{2d}Y_{s_0}^{x,w} + ds_0 + C}|_{\mathbf{B}} \end{aligned}$$

où C ne dépend pas de x, w, t, A .

La suite de la preuve est technique : sauter pour l'instant quelques calculs et expliquons un peu les idées. Le fait que l'on est sur l'évènement \mathbf{B} (rappelons qu'il est de mesure presque pleine pour un paramètre R assez grand) nous permet de contrôler le processus $Y_{s_0}^{x,w}$:

$$-C_R(1 + \sqrt{\ln \frac{1}{|x-w|} \ln(1 + \ln \frac{1}{|x-w|})}) \leq Y_{s_0}^{x,w} \leq -C_R \frac{\sqrt{\ln \frac{1}{|x-w|}}}{\ln(2 + \ln \frac{1}{|x-w|})^2} \quad (6)$$

où C_R ne dépend que du paramètre R et du noyau k . On obtient :

$$\Theta_t^\beta(f_t^\beta(w)|x, (X_s(x))_{0 \leq s \leq t}, \mathbf{B}) \leq \frac{e^C}{\beta|x-w|^d} G(\ln \frac{1}{|x-w|})$$

où

$$G(y) = (1 + \sqrt{y \ln(1+y)})^2 e^{-\sqrt{2d}C \frac{\sqrt{y}}{\ln(2+y)^2}}$$

avec la constante C éventuellement modifiée.

Finalement en rassemblant toutes les estimations, on obtient, en notant V_d le

volume de la boule d'unité de \mathbb{R}^d :

$$\begin{aligned}\Sigma_2 &\leq \frac{2}{|A|\delta} \int_A \int_{B(x, e^{-t})^c} \frac{e^C}{\beta |x-w|^d} G(\ln \frac{1}{|x-w|}) dx dw \\ &\leq \frac{2V_d}{\delta} \int_{e^{-t}}^1 \frac{e^C}{\beta r^d} G(\ln \frac{1}{r}) r^{d-1} dr \\ &= \frac{2V_d e^C}{\delta \beta} \int_0^t G(u) du\end{aligned}$$

Or G est intégrable, ce dernier converge vers 0 quand $\delta \rightarrow +\infty$ uniformément par rapport à t .

– Il reste à expliquer l'équation (6).

Rappelons que

$$g_{x,w}(u) = \sum_{i=1}^d (x-w)_i e^u \partial_i k(e^u(x-w))$$

Alors

$$\begin{aligned}Y_{s_0}^{x,w} &= \int_0^{\ln \frac{1}{|x-w|}} g_{x,w}(u) du = \sum_{i=1}^d (x-w)_i e^u \partial_i k(e^u(x-w)) (\sqrt{2d} du + \beta - X_u(x)) du \\ &= \int_{|x-w|}^1 y \frac{x-w}{|x-w|} \cdot \nabla k(y \frac{x-w}{|x-w|}) (\sqrt{2d} \ln \frac{y}{|x-w|} + \beta - X_{\ln \frac{y}{|x-w|}}(x)) dy\end{aligned}$$

Or rappelons aussi que sur \mathbf{B} on a :

$$\forall u \geq 0, \frac{\sqrt{u}}{R(\ln(2+u))^2} \leq \beta - X_u(x) + \sqrt{2d} du \leq R(1 + \sqrt{u \ln(2+u)})$$

Combinons les deux dernières équations, on obtient (rappelons aussi l'hypothèse $x \cdot \nabla k(x) \leq 0$) :

$$Y_{s_0}^{x,w} \geq R \int_{|x-w|}^1 y \frac{x-w}{|x-w|} \cdot \nabla k(y \frac{x-w}{|x-w|}) (1 + \sqrt{\ln \frac{y}{|x-w|} \ln(1 + \ln \frac{y}{|x-w|})}) dy$$

et

$$Y_{s_0}^{x,w} \leq R \int_{|x-w|}^1 y \frac{x-w}{|x-w|} \cdot \nabla k(y \frac{x-w}{|x-w|}) \frac{\sqrt{\ln \frac{y}{|x-w|}}}{\ln(2 + \ln \frac{y}{|x-w|})^2} dy$$

Ceci donne (6).

◦ Pour Σ_1 :

Les calculs pour Σ_1 sont quasiment identiques que pour Σ_2 . En effet, on n'a plus

besoin de couper le processus à un instant s_0 , et les calculs restent valables car la quantité $q_{x,w}(t, t)$ est bornée indépendamment de t . Intuitivement, c'est parce que dans la boule $B(x, e^{-t})$, les processus $(X_s(w))_{0 \leq s \leq t}$ et $(X_s(x))_{0 \leq s \leq t}$ sont proches, donc la partie "orthogonale" à la projection devrait être petite.

Les lecteurs impatients peuvent donc survoler les calculs pour Σ_1 que l'on explicite maintenant dans les quelques lignes qui suivent.

En utilisant la projection 3.4, on a :

$$\begin{aligned}
& \Theta_t^\beta(f_t^\beta(w)|x, (X_s(x))_{0 \leq s \leq t}) \\
&= \frac{1}{\beta} \mathbb{E}[(\sqrt{2d}t - P_t^{x,w} - Z_t^{x,w} + \beta) \mathbf{1}_{\{\sup_{u \in [0,t]} (P_u^{x,w} + Z_u^{x,w} - \sqrt{2d}u) \leq \beta\}} e^{\sqrt{2d}(P_t^{x,w} + Z_t^{x,w}) - dt} | x, (X_s(x))_{0 \leq s \leq t}] \\
&\leq \frac{1}{2\beta} \mathbb{E}[(\sqrt{2d}t - P_t^{x,w} - Z_t^{x,w} + \beta)^2 + 1] e^{\sqrt{2d}(P_t^{x,w} + Z_t^{x,w}) - dt} | x, (X_s(x))_{0 \leq s \leq t}] \\
&= \frac{1}{2\beta} ((\sqrt{2d}(t - q_{x,w}(t, t)) - P_t^{x,w} + \beta)^2 + q_{x,w}(t, t) + 1) e^{\sqrt{2d}P_t^{x,w} - d(t - q_{x,w}(t, t))}
\end{aligned}$$

La quantité $q_{x,w}(t, t)$ s'avère d'être petite. En effet,

$$\begin{aligned}
q_{x,w}(t, t) &= t - \int_0^t \left(\frac{\partial K_u(x, w)}{\partial u} \right)^2 du \\
&= \int_0^t 1 - \left(\frac{\partial K_u(x, w)}{\partial u} \right)^2 du \\
&\leq \int_0^1 \left(1 - k(y \frac{x-w}{|x-w|})^2 \right) \frac{1}{y} dy \\
&\leq C
\end{aligned}$$

où C ne dépend que du noyau k .

Ceci montre que la partie $q_{x,w}(t, t)$ n'intervient pas dans les majorations qui suivent. On utilise ensuite la représentation en processus de Bessel β , en utilisant le fait que l'on est sur l'évènement \mathbf{B} . On note, pour $s \leq t$

$$\begin{aligned}
Y_s^{x,w} &= - \int_0^s g_{x,w}(u) (X_u(x) - \sqrt{2d}u - \beta) du \\
&= P_s^{x,w} - \sqrt{2d}K_s(x - w) + \beta(k(e^s(x - w)) - k(x - w)) \\
&= P_s^{x,w} - \sqrt{2d}t + \theta_{x,w}(s)
\end{aligned}$$

avec $\theta_{x,w}$ une fonction bornée indépendamment de x, w, s, t, A .

On a donc

$$\begin{aligned}
& \Theta_t^\beta(f_t^\beta(w)|x, (X_s(x))_{0 \leq s \leq t}, \mathbf{B}) \\
& \leq \frac{1}{2\beta}(((\theta_{x,w}(t) - Y_t^{x,w})^2 + q_{x,w}(t, t) + 1)e^{\sqrt{2d}Y_t^{x,w} + dt + dq_{x,w}(t,t) - \sqrt{2d}\theta_{x,w}(t)})|_{\mathbf{B}} \\
& \leq \frac{1}{2\beta}((C - Y_{x_0}^{x,w})^2 + C)e^{\sqrt{2d}Y_t^{x,w} + dt + C}|_{\mathbf{B}}
\end{aligned}$$

où C ne dépend pas de x, w, s, t, A .

Le fait que l'on est sur l'évènement \mathbf{B} (rappelons qu'il est de mesure presque pleine pour un paramètre R assez grand) nous permet de contrôler le processus $Y_t^{x,w}$:

$$-C_R(1 + \sqrt{t \ln(1+t)}) \leq Y_t^{x,w} \leq -C_R \frac{\sqrt{t}}{\ln(2+t)^2} \quad (7)$$

où C_R ne dépend que du paramètre R et du noyau k . On a :

$$\Theta_t^\beta(f_t^\beta(w)|x, (X_s(x))_{0 \leq s \leq t}, \mathbf{B}) \leq \frac{e^C}{\beta} G(t) e^{dt}$$

où

$$G(y) = (1 + \sqrt{y \ln(1+y)})^2 e^{-\sqrt{2d}C \frac{\sqrt{y}}{\ln(2+y)^2}}$$

avec la constante C éventuellement modifiée.

Finalement en rassemblant toutes les estimations, on obtient :

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 & \leq \frac{2}{|A|\delta} \int_A \int_{B(x, e^{-t})} \frac{e^C}{\beta} G(t) e^{dt} dx dw \\
& \leq \frac{2e^C}{\delta\beta} G(t)
\end{aligned}$$

Or G est bornée, ce dernier converge vers 0 quand $\delta \rightarrow +\infty$ uniformément par rapport à t .

• Identification des limites de martingales $Z_t^\beta(A)$ et $M'_t(A)$:

On passe par la variable aléatoire $\tilde{Z}_t^\beta(A)$. Rappelons sa définition :

$$\tilde{Z}_t^\beta(A) = \int_A (\sqrt{2d}t - X_t(x)) \mathbf{1}_{\{\tau^\beta > t\}} e^{\sqrt{2d}X_t(x) - d\mathbb{E}[X_t(x)^2]} dx$$

D'abord remarquons que $\tilde{Z}_t^\beta(A)$ et $Z_t^\beta(A)$ ont p.s. la même limite car

$$|\tilde{Z}_t^\beta(A) - Z_t^\beta(A)| = \beta \int_A \mathbf{1}_{\{\tau^\beta > t\}} e^{\sqrt{2d}X_t(x) - d\mathbb{E}[X_t(x)^2]} dx \leq \beta M_t^{\sqrt{2d}}(A)$$

et ce dernier converge vers 0 p.s. quand $t \rightarrow +\infty$ à cause du théorème de Kahane sur la dégénérescence de la mesure limite, voir le rappel 3.1.

Il reste donc à identifier $\tilde{Z}_t^\beta(A)$ et $M'_t(A)$ pour β assez grand. Pour ceci on utilise un résultat sur le supremum d'un champ gaussien log-corrélé, rappelé dans la partie suivante, qui implique notamment :

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} (\sup_{x \in A} X_t(x) - \sqrt{2dt}) < +\infty$$

presque sûrement.

En découle alors

$$\forall t, M'_t(A) = \tilde{Z}_t^\beta(A)$$

pour β assez grand.

On conclut donc par la positivité de la martingale $Z_t^\beta(A)$ et les raisonnements plus hauts que p.s. $(M'_t(dx))_{t \leq 0}$ converge en loi vers une mesure aléatoire positive.

Remarque 3.1. *En exploitant cette preuve, on arrive à montrer (voir [6] pour plus de détails) que la mesure limite est à support plein et sans atome. On utilise notamment le fait que la mesure limite M' est solution à une classe d'équations dite \star -équations étudiées dans [2].*

3.3 Sur le supremum d'un champ gaussien log-corrélé

Dans cette sous-section on démontre un résultat simple sur le supremum d'un champ gaussien log-corrélé. Il est à souligner que beaucoup de résultats plus forts et plus précis, notamment de type convergence en loi, ont été démontrés très récemment (voir [3] pour le cas du champ libre gaussien discret, [6] pour une liste de conjectures, et [16] pour la réponse apportée à une de ces conjectures).

On rappelle ici, pour finir la preuve, un résultat relativement simple démontré dans [6] :

Théorème 3.5. *Sur le maximum d'un champ gaussien log-corrélé*

Soit k un noyau de classe C^1 avec $k(0) = 1$ et l -lipschitzien en 0 avec $l > 0$. Soit X le champ gaussien associé au noyau k défini précédemment. Alors pour tout $a \in [0, \frac{1}{2}[$ et tout ouvert borné $A \subset \mathbb{R}^d$, on a p.s. :

$$\sup_{t \geq 0} (\sup_{x \in A} X_t(x) - \sqrt{2dt} + \frac{a}{\sqrt{2d}} \ln(t+1)) < +\infty$$

En particulier,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} (\sup_{x \in A} X_t(x) - \sqrt{2dt}) < +\infty$$

Remarquons d'abord qu'un noyau k de classe C^1 à support compact est clairement lipschitzien en 0, donc le théorème est valable dans le cas présent.

Démonstration. Cette preuve est basée sur la constuction du cône.

- Rappels sur la construction de la cascade multiplicative log-normale de Mendelbrot (voir aussi la preuve du théorème 2.7) :

On considère l'arbre $T = (\{0, 1\}^d)^{\mathbb{N}^*}$ muni d'une distance ultra-métrique

$$\forall s, t \in T, \text{dist}(s, t) = 2^{-d \cdot \sup\{N \in \mathbb{N} : \forall k \leq N, \pi_k(t) = \pi_k(s)\}}$$

où $\pi_k(t)$ désigne la k -ième composante de t , avec la convention que le supremum vaut 0 si l'ensemble est vide.

On définit ensuite une suite $((Y_n(t))_{t \in T})_n$ de processus gaussiens centrés deux à deux indépendants, définis sur T , de noyau p_n défini par

$$\forall s, t \in T, p_n(t, s) = \begin{cases} u & \text{si } \text{dist}(t, s) \leq 2^{-nd} \\ 0 & \text{si } \text{dist}(t, s) > 2^{-nd} \end{cases}$$

Remarquons qu'alors ce noyau est constant sur chacun des 2^{dn} cylindres prescrits selon les n premières coordonnées. On note dans la suite $I_n(t)$ le cylindre contenant t .

On définit ensuite

$$\forall t \in T, \overline{X}_n(t) = \sum_{k=1}^n Y_k(t)$$

de noyau $q_n = \sum_{k=1}^n p_k$.

On rappelle aussi que l'arbre $T = (\{0, 1\}^d)^{\mathbb{N}^*}$ peut être plongé naturellement dans la cube $[0, 1]^d$, en itérant la division d'une cube en 2^d cubes plus petites. Par exemple, quand $d = 1$, ceci n'est autre que l'écriture dyadique de l'intervalle $[0, 1]$. Dans la suite on écrit indifféremment $Y_n(t)$ (ou $\overline{X}_n(t)$) pour $t \in T$ ou $t \in [0, 1]^d$ en utilisant cette identification.

- Rappels sur la construction du cône :

En suivant les rappels dans [6], on esquisse rapidement la construction du cône.

La construction du cône est une façon agréable d'avoir des mesures gaussiennes aléatoires sur l'espace $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+))$, "spatialement" indépendantes. Le but est donc d'avoir une famille de variables aléatoires gaussiennes $(\mu(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+))$ telle que :

1) Pour tout ensemble mesurable $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, $\mu(A)$ est une variable gaussienne ayant pour fonction caractéristique :

$$\mathbb{E}[e^{iq\mu(A)}] = e^{-\frac{q^2}{2}\Gamma(A)}$$

où la mesure (déterministe) Γ est donnée par

$$\Gamma(dx, dy) = \frac{1}{y^2} dx dy$$

2) Pour toute suite d'ensembles mesurables $(A_n)_n$ deux à deux disjoints dans $\mathcal{B}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, les mesures $(\mu(A_n))_n$ sont deux à deux indépendantes et

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n)$$

presque sûrement.

On définit ensuite un processus gaussien stationnaire $(\omega_l(x))_{x \in \mathbb{R}}$ par, pour $0 < l \leq 1$,

$$\omega_l(x) = \mu(\mathcal{A}_l(x))$$

où $\mathcal{A}_l(x)$ est la région $\{(u, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* : l \leq y \leq 1, -\frac{y}{2} \leq x - u \leq \frac{y}{2}\}$.

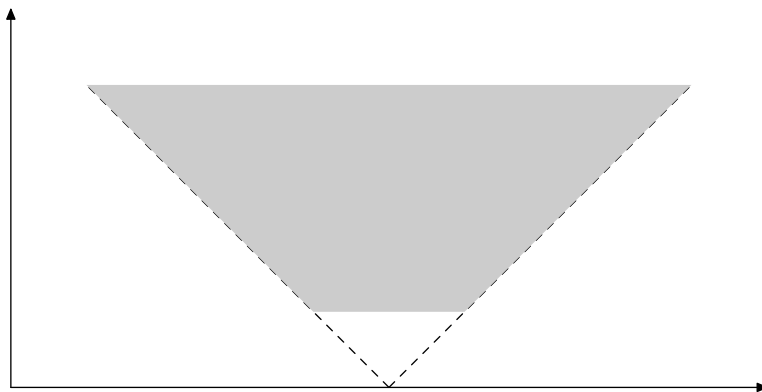


FIGURE 4 – Un cône

Le noyau de covariance du processus ω_l est donc

$$K_l(x) = \int_1^{\frac{1}{l}} \frac{(1 - |ux|)_+}{u} du$$

de sorte que $\omega_{e^{-t}}$ ait la même loi que X_t .

Maintenant on est en mesure d'énoncer un lemme de décomposition comme conséquence de la construction du cône :

Lemme 3.6. Un lemme de décomposition

On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on considère les intervalles $I_{i,n} = [\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}[$. On a la décomposition suivante pour tout $X_{s \ln 2}(x)$ avec $s \in [n, n+1]$ et $x \in I_{i,n}$:

$$X_{s \ln 2}(x) = X_{i,n} + Y_s^{i,n}(x)$$

qui vérifie :

– Il existe une constante $C > 0$ indépendante de n telle que

$$\mathbb{E}[X_{i,n}X_{j,n}] = n \ln 2 - (1 - \frac{1}{2^n})$$

si $i = j$ et

$$\mathbb{E}[X_{i,n}X_{j,n}] \geq \mathbb{E}[\bar{X}_n(\frac{i}{2^n})\bar{X}_n(\frac{j}{2^n})] - C$$

si $i \neq j$;

– Pour tout i , le processus $(Y_s^{i,n}(x))_{x \in [n, n+1], x \in I_{i,n}}$ est continu et indépendant de $X_{i,n}$;

– Pour tout i, j , tout $s, s' \in [n, n+1]$ et $x \in I_{i,n}$, $x' \in I_{j,n}$,

$$\mathbb{E}[Y_s^{i,n}(x)Y_{s'}^{j,n}(x')] \geq 0$$

– Pour tout i, j , tout $s \in [n, n+1]$ et $x \in I_{i,n}$,

$$\mathbb{E}[Y_s^{i,n}(x)X_{j,n}] \geq 0$$

Montrons ce lemme.

Prenons $i \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq i \leq 2^n - 1$. On décompose $\mathcal{A}_{2^{-s}}(x)$ en deux parties :

– Une partie commune à tous les cônes du type $\mathcal{A}_{2^{-s}}(x)$ pour $s \in [n, n+1]$ et $x \in I_{i,n}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{i,n} &= \bigcap_{s \in [n, n+1]} \bigcap_{x \in I_{i,n}} \mathcal{A}_{2^{-s}}(x) \\ &= \{(u, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* : 2^{-n} \leq y \leq 1, -\frac{y}{2} + \frac{i+1}{2^n} \leq u \leq \frac{y}{2} + \frac{i}{2^n}\} \end{aligned}$$

On lui associe le processus $X_{i,n} = \mu(\mathcal{A}_{i,n})$.

– La partie complémentaire

$$\mathcal{R}_s^{i,n}(x) = \mathcal{A}_{2^{-s}}(x) - \mathcal{A}_{i,n}$$

On lui associe le processus $Y_s^{i,n}(x) = \mu(\mathcal{R}_s^{i,n}(x))$.

On vérifie aisément par des calculs élémentaires que l'on obtient bien le lemme à l'aide de cette décomposition géométrique.

• La preuve :

Il suffit de faire le cas où $k(x) = (1 - \frac{|x|}{L})_+$. En effet, comme k est lipschzien en 0, il est plus grand que $(1 - \frac{|x|}{L})_+$ pour un certain L . Mais alors en utilisant le lemme de Slepian (lemme 5.6), on sait que

$$\mathbb{P}[\sup_{t \geq 0} (\sup_{x \in A} X_t(x) - \sqrt{2dt} + \frac{a}{\sqrt{2d}} \ln(t+1)) < +\infty]$$

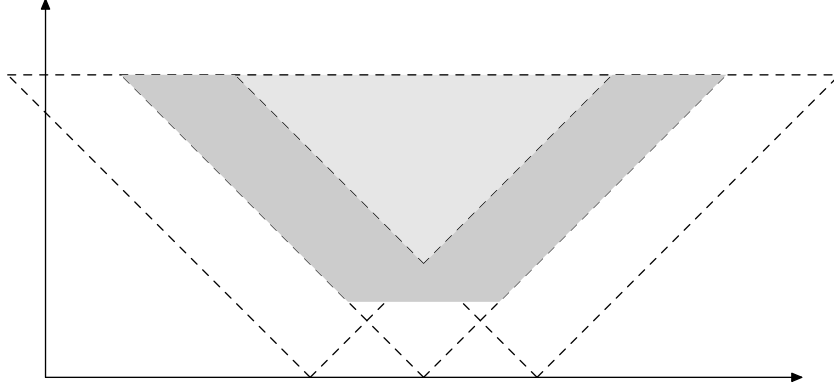


FIGURE 5 – Décomposition d'un cône

croît si l'on remplace $(1 - \frac{|x|}{L})_+$ par k .

Dans la suite pour simplifier la présentation, on fait la preuve dans le cas $d = 1$ et $k(x) = (1 - |x|)_+$.

Soient Z une variable aléatoire gaussienne standard indépendante du processus $(X_{s \ln 2}(x))_x$ et $(\bar{Z}_i)_{0 \leq i \leq 2^n - 1}$ une suite de variables aléatoires gaussiennes standards indépendantes. On se donne ensuite une suite de processus indépendants $(\bar{Y}_s^{i,n}(x))_{s \in [n, n+1], x \in I_{i,n}}$ qui ont les mêmes lois que $(Y_s^{i,n}(t))_{s \in [n, n+1], x \in I_{i,n}}$.

Par l'inégalité de convexité de Kahane (théorème 5.7), on a :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left[\sup_{0 \leq i \leq 2^n - 1} \sup_{s \in [n, n+1]} \sup_{x \in I_{i,n}} (X_{i,n} + \sqrt{1 - \frac{1}{2^n}} + CZ + Y_s^{i,n}(x) - \sqrt{2n \ln 2}) \geq x \right] \\ & \leq \mathbb{P} \left[\sup_{0 \leq i \leq 2^n - 1} \sup_{s \in [n, n+1]} \sup_{x \in I_{i,n}} (\bar{X}_n(\frac{i}{2^n}) + \sqrt{C} \bar{Z}_i + \bar{Y}_s^{i,n}(x) - \sqrt{2n \ln 2}) \geq x \right] \end{aligned}$$

En effet :

– Pour $i = j$, $x, x' \in I_{i,n}$ et $s, s' \in [n, n+1]$:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[(X_{i,n} + \sqrt{1 - \frac{1}{2^n}} + CZ + Y_s^{i,n}(x))(X_{i,n} + \sqrt{1 - \frac{1}{2^n}} + CZ + Y_{s'}^{i,n}(x'))] \\ & = n \ln 2 + C + \mathbb{E}[Y_s^{i,n}(x)Y_{s'}^{i,n}(x')] \\ & = \mathbb{E}[(\bar{X}_n(\frac{i}{2^n}) + \sqrt{C} \bar{Z}_i + \bar{Y}_s^{i,n}(x))(\bar{X}_n(\frac{i}{2^n}) + \sqrt{C} \bar{Z}_i + \bar{Y}_{s'}^{i,n}(x'))] \end{aligned}$$

– Pour $i \neq j$, $x \in I_{i,n}$, $x' \in I_{j,n}$ et $s, s' \in [n, n+1]$:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[(X_{i,n} + \sqrt{1 - \frac{1}{2^n} + CZ + Y_s^{i,n}(x)})(X_{i,n} + \sqrt{1 - \frac{1}{2^n} + CZ + Y_{s'}^{i,n}(x')})] \\
& \geq \mathbb{E}[X_{i,n}X_{j,n} + 1 - \frac{1}{2^n} + C] \\
& \geq \mathbb{E}[\bar{X}_n(\frac{i}{2^n})\bar{X}_n(\frac{j}{2^n})] \\
& = \mathbb{E}[(\bar{X}_n(\frac{i}{2^n} + \sqrt{C}\bar{Z}_i + \bar{Y}_s^{i,n}(x)))(\bar{X}_n(\frac{j}{2^n} + \sqrt{C}\bar{Z}_j + \bar{Y}_{s'}^{j,n}(x')))]
\end{aligned}$$

Maintenant on se donne $\beta > 1$ et $r < 1$ tels que $\beta r < 1$ et $(\frac{3}{2} - a)\beta r > 1$. Alors :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}[\sup_{0 \leq i \leq 2^n - 1} \sup_{x \in [n, n+1]} \sup_{x \in I_{i,n}} (\sqrt{2}\bar{X}_n(\frac{i}{2^n}) + \sqrt{2C}\bar{Z}_i + \sqrt{2}\bar{Y}_x^{i,n}(s) - 2n \ln 2 + a \ln(n+1)) \geq 1] \\
& = \mathbb{P}[\sup_{0 \leq i \leq 2^n - 1} (\sqrt{2}\bar{X}_n(\frac{i}{2^n}) + \sqrt{2C}\bar{Z}_i + \sqrt{2} \sup_{s \in [n, n+1], x \in I_{i,n}} \bar{Y}_s^{i,n}(x) - 2n \ln 2 + a \ln(n+1)) \geq 1] \\
& \leq (n+1)^{a\beta r} e^{-\beta r} \mathbb{E}[(\sum_{i=0}^{2^n-1} e^{\beta(\sqrt{2}\bar{X}_n(\frac{i}{2^n}) + \sqrt{2C}\bar{Z}_i + \sqrt{2} \sup_{s \in [n, n+1], x \in I_{i,n}} \bar{Y}_s^{i,n}(x) - 2n \ln 2)})^r] \\
& = (n+1)^{a\beta r} e^{-\beta r} \mathbb{E}[(\sum_{i=0}^{2^n-1} e^{\beta(\sqrt{2}\bar{X}_n(\frac{i}{2^n}) + \sqrt{2C}\bar{Z}_i + \sqrt{2} \sup_{s \in [n, n+1], x \in I_{i,n}} \bar{Y}_s^{i,n}(x) - 2n \ln 2)})^r | \bar{X}_n] \\
& \leq (n+1)^{a\beta r} e^{-\beta r} \mathbb{E}[(\mathbb{E}[\sum_{i=0}^{2^n-1} e^{\beta(\sqrt{2}\bar{X}_n(\frac{i}{2^n}) + \sqrt{2C}\bar{Z}_i + \sqrt{2} \sup_{s \in [n, n+1], x \in I_{i,n}} \bar{Y}_s^{i,n}(x) - 2n \ln 2)} | \bar{X}_n])^r] \\
& = (n+1)^{a\beta r} e^{-\beta r} \mathbb{E}[e^{\beta(\sqrt{2C}\bar{Z}_i + \sqrt{2} \sup_{s \in [n, n+1], x \in I_{i,n}} \bar{Y}_s^{i,n}(x))}]^r \mathbb{E}[(\sum_{i=0}^{2^n-1} e^{\beta(\sqrt{2}\bar{X}_n(\frac{i}{2^n}) - 2n \ln 2)})^r] \\
& \leq C_{\beta,r} (n+1)^{a\beta r} \mathbb{E}[(\sum_{i=0}^{2^n-1} e^{\beta(\sqrt{2}\bar{X}_n(\frac{i}{2^n}) - 2n \ln 2)})^r] \\
& \leq \frac{C_{\beta,r}}{n^{(\frac{3}{2}-a)\beta r + o(1)}}
\end{aligned}$$

Où la première inégalité résulte de l'inégalité de Markov, la deuxième de l'inégalité de Jensen et la dernière résulte d'un théorème démontré dans le contexte du processus du branchement (voir le théorème 5.14).

Expliquons un peu la dernière inégalité :

Considérons l'arbre binaire correspondant à l'écriture dyadique des nombres $\frac{i}{2^n}$, i.e. écrivons

$$\frac{i}{2^n} = \sum_{k=1}^n \frac{e_k}{2^k}$$

avec $e_k \in \{0, 1\}$. L'identification $\frac{i}{2^n} \mapsto e_1, \dots, e_n$ nous dit que l'on peut voir $\frac{i}{2^n}$ comme un individu dans la n -ième génération si l'arbre binaire est étiqueté convenablement. Dans l'avant dernière ligne du calcul précédent on peut remplacer chaque $\overline{X}_n(\frac{i}{2^n})$ par $\sum_{k=1}^n Y_k(\sum_{i=1}^k \frac{i}{2^i})$ car rappelons que le noyau de Y_k est constant sur chaque intervalle $[\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}]$. Si l'on attache à chaque arête de l'arbre la variable aléatoire $2 \ln 2 - Y_g(x)$ où g (resp. x) est la génération (resp. coordonnée) du fils de l'arête, on peut alors utiliser le résultat 5.14 (la constante $2 \ln 2$ sert aussi à renormaliser pour avoir l'hypothèse 3 dans l'énoncé de ce théorème). Il ne reste qu'à évoquer le lemme de Borel-Cantelli pour conclure. \square

4 Un petit résultat

Dans cette section nous tenterons de montrer rigoureusement une affirmation dans [7] (voir aussi [23] pour une autre formulation).

Liouville measure at criticality in dimension 2...

On peut obtenir des résultats analogues à ceux énoncés dans la section précédente sur la martingale dérivée du chaos multiplicatif gaussien au point critique dans le cas du champ libre gaussien, en modifiant légèrement la preuve dans [6].

Nous rappelons la définition d'un champ libre gaussien (massif) dans les sections 5.3.3, 5.3.4. Néanmoins discutons un peu de façon qualitative ce qui change dans cette nouvelle situation.

Remarque 4.1. Remarques préliminaires

Soulignons ici ce qui change par rapport à la section précédente :

- 1) *On constate que le champ libre gaussien n'est pas stationnaire ;*
- 2) *On constate que le champ libre gaussien est corrélé à toute distance (i.e. le noyau k n'est pas à support compact).*

En dépit du manque de décorrélation à grande échelle qui est un élément fondamental dans la preuve de la section précédente, on constate que la fonction de corrélation décroît très vite (exponentiellement), ce qui suggère que l'on pourrait éventuellement contrôler les corrélations à grande distance.

Ici nous répondons à cette question dans le cas du champ libre gaussien massif. Nous attaquons ce problème en utilisant, à nouveau, la méthode du cut-off. Le phénomène n'est pas très différent de celui dans la section précédente, cependant il faut être judicieux sur le choix du cut-off qui est au coeur de cette méthode.

4.1 Énoncé du théorème dans le cas du champ libre gaussien massif

On considère le champ libre gaussien massif X de masse m sur \mathbb{R}^2 .

On considère une approximation du champ X : prenons $((X_\epsilon(x))_{x \in \mathbb{R}^2})_{\epsilon > 0}$ une famille de processus gaussiens centrés stationnaires ayant pour fonction de covariance

$$K_\epsilon(x) = \mathbb{E}[X_\epsilon(0)X'_\epsilon(x)] = \int_1^{\frac{1}{\epsilon}} \frac{k_m(ux)}{u} du$$

avec $k_m(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{m}{v}|z|^2 - \frac{v}{2}} dv$ (voir la section 5.3.2 pour les rappels sur la fonction de Green massive). Dans la suite on va fixer un m et laisser l'indice.

On considère ensuite la martingale dérivée de façon analogue que dans la section 3 (mais avec un changement de variables pour le paramètre du temps) :

$$M'_\epsilon(dx) = (2 \ln \frac{1}{\epsilon} - X_\epsilon(x)) e^{2X_\epsilon(x) - 2 \ln \frac{1}{\epsilon}} dx$$

et on énonce le même résultat

Théorème 4.1. *Convergence de la martingale dérivée, cas du champ libre gaussien massif*

Pour tout ouvert borné $A \in \mathbb{R}^d$, la martingale $(M'_\epsilon(A))_{\epsilon \geq 0}$ converge p.s. vers une variable aléatoire p.s. strictement positive que l'on notera $M'(A)$.

Remarque 4.2. *Sur l'unicité de la construction*

On souligne encore une fois qu'il n'y a pas encore de choix canonique pour construire cet objet, et l'unicité de la construction n'est pas encore démontrée.

4.2 Discussion sur le cut-off

On a vu que dans [6], le noyau k que l'on a choisi pour faire les calculs était à support compact. Ici dans le cas du massif, on ne se retrouve pas devant exactement la même situation : le noyau k_m n'est plus à support compact, mais il admet une décroissance exponentielle à l'infini, ce qui suggère que, quitte à proposer un nouveau cut-off, les résultats du [6] devront restés valides dans le cas du champ libre gaussien massif.

Cependant, sur le choix du cut-off, il faudrait être judicieux : si on coupe brutalement le noyau k_m du champ libre gaussien massif (par exemple en considérant $\frac{k(u(x-w))}{u} \mathbf{1}_{\{u \geq 1\}}$), on ne peut pas transposer directement les méthodes du [6]. En effet, il faudrait plutôt considérer le noyau k (ou k_m) comme une fonction à plusieurs variables, par exemple de ux , uw et de u , voir la remarque 2.2 dans [13] pour plus de discussions.

S'inspirant des techniques employées dans l'article [23], on propose un nouveau cut-off en considérant $\frac{k(u(x-w))}{u} \mathbf{1}_{\{u|x-w| \geq 1\}}$. Le point à remarquer ici, c'est que les processus ne sont pas complètement décorrélés à grande distance, en revanche la fonction de corrélation devient "presque" constante à partir d'une certaine distance. Le rôle joué par le théorème d'arrêt dans [6] sera donc remplacé par cette propriété, qui permet elle aussi de ramener les calculs à grandes distances à une échelle constante.

Le théorème suivant, analogue à celui présenté dans la section 3, a été démontré dans [23].

Théorème 4.2. *Convergence de la martingale dérivée dans le cas de l'étude sur le mouvement brownien de Liouville critique*

On se donne $t > 0$, $x, z \in \mathbb{R}^2$, $\beta > 0$ et on définit

$$f_\epsilon^\beta(z) = (2 \ln \frac{1}{\epsilon} - X_\epsilon(z + B_u)) \mathbf{1}_{\{\tau_z^\beta < \epsilon\}} e^{2X_\epsilon(z+B_u) - 2 \ln \frac{1}{\epsilon}}$$

On s'intéresse à la martingale

$$F^{\beta, \epsilon}(x, t) = \int_0^t (2 \ln \frac{1}{\epsilon} - X_\epsilon(B_u^x)) \mathbf{1}_{\{\tau_{B_u^x}^\beta < \epsilon\}} e^{2X_\epsilon(B_u^x) - 2 \ln \frac{1}{\epsilon}} du = \int_0^t f_t^\beta(B_u^x) du$$

avec B_u^x un mouvement brownien plan issu de x et pour chaque $u \in [0, t]$, τ_u^β le $(\mathcal{F}_\epsilon)_\epsilon$ -temps d'arrêt défini par $\tau_z^\beta = \sup\{r \leq 1, X_r(z) - 2 \ln \frac{1}{r} > \beta\}$.

Alors pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $t > 0$ fixés, p.s. (par rapport à B^x), la martingale $(F^{\beta, \epsilon}(x, t))_{\epsilon > 0}$ est uniformément intégrable.

Rappelons l'idée géniale de la preuve de ce résultat dans l'article [23] : on décompose le champ en somme de trois mouvements browniens indépendants, avec une partie “commune” qui encode la corrélation. Formellement, si l'on écrit

$$h_1(s) = h_2(s) = \ln \frac{1}{s} - K_s(x - w), \bar{h}(s) = K_s(x - w)$$

et si l'on définit ensuite

$$P_s^{x,w} = B_{h_1(s)}^1, P_s^{w,x} = B_{h_2(s)}^2, Z_s = \bar{B}_{\bar{h}(s)}$$

avec B^1, B^2, \bar{B} trois mouvements browniens standards indépendants, on a

$$(X_s(x), X_s(w))_{0 \leq s \leq 1} = (P_s^{x,w} + Z_s, P_s^{w,x} + Z_s)_{0 \leq s \leq 1}$$

en loi. Il s'avère que l'on peut montrer une convergence dans \mathcal{L}^2 de la martingale $(F^{\beta, \epsilon}(x, t))_{\epsilon > 0}$, et en plus, ce qui compte vraiment dans les majorations, c'est la partie commune dans la décomposition.

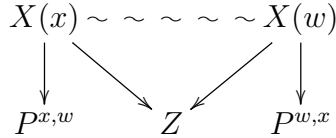


FIGURE 6 – Décomposition en trois mouvements browniens indépendants

Les grandes lignes de cette première partie de la preuve seront exactement les mêmes que dans [23]. De façon heuristique, un petit calcul à la main nous montre que la partie commune devient “presque” constante une fois la distance entre x et w dépasse ϵ . Donc on peut utiliser les mêmes méthodes de majorations, quitte à changer quelques constantes et la mesure³.

3. Dans [23], il s'agit d'intégrer par rapport à la mesure d'occupation, mais la preuve est quasi-identique, si ce n'est pas plus simple, si l'on travaille avec la mesure de Lebesgue.

4.3 Preuve du théorème 4.1

Démonstration. On montre d'abord l'uniforme intégrabilité de la martingale $Z_\epsilon^\beta(A)$.
Notons

$$f_\epsilon^\beta(z) = (2 \ln \frac{1}{\epsilon} - X_\epsilon(z)) \mathbf{1}_{\{\tau_z^\beta < \epsilon\}} e^{2X_\epsilon(z) - 2 \ln \frac{1}{\epsilon}}$$

avec $\tau_z^\beta = \sup\{r \leq 1, X_r(z) - 2 \ln \frac{1}{r} > \beta\}$.

Pour A un ouvert borné (disons inclus dans $B(0, \frac{1}{2})$) on définit :

$$Z_\epsilon^\beta(A) = \int_A f_\epsilon^\beta(z) dz$$

la martingale qui nous intéresse (on a déjà démontré que c'est une martingale dans la section précédente, voir le paragraphe 3.2).

On va montrer une convergence dans \mathcal{L}^2 de cette martingale.

On va représenter le champ X_ϵ à l'aide de plusieurs mouvements browniens indépendants comme l'on a expliqué précédemment :

On définit d'abord

$$K_s^{cut}(x-w) = \int_1^{\frac{1}{\epsilon}} \frac{k(u(x-w))}{u} \mathbf{1}_{\{u|x-w| \leq 1\}} du = \int_1^{\min(\frac{1}{\epsilon}, \frac{1}{|x-w|})} \frac{k(u(x-w))}{u} du$$

et

$$K_s^{off}(x-w) = \int_1^{\frac{1}{\epsilon}} \frac{k(u(x-w))}{u} \mathbf{1}_{\{u|x-w| \geq 1\}} du = \int_{\min(\frac{1}{\epsilon}, \frac{1}{|x-w|})}^{\frac{1}{\epsilon}} \frac{k(u(x-w))}{u} du$$

Rappelons alors que $K = K^{cut} + K^{off}$. Soulignons que les K^{cut} et K^{off} ne sont pas des noyaux gaussiens.

On définit ensuite

$$h_1(s) = h_2(s) = \ln \frac{1}{s} - K_s(x-w), h_{cut}(s) = K_s^{cut}(x-w), h_{off}(s) = K_s^{off}(x-w)$$

puis

$$P_s^{x,w} = B_{h_1(s)}^1, P_s^{w,x} = B_{h_2(s)}^2, Z_s^{cut} = B_{h_{cut}(s)}^{cut}, Z_s^{off} = B_{h_{off}(s)}^{off}$$

avec $B^1, B^2, B^{cut}, B^{off}$ quatre mouvements browniens standards indépendants.

On remarque que

$$(X_s(x), X_s(w))_{0 \leq s \leq 1} = (P_s^{x,w} + Z_s^{cut} + Z_s^{off}, P_s^{w,x} + Z_s^{cut} + Z_s^{off})_{0 \leq s \leq 1}$$

en loi.

Notons aussi $Z = Z^{cut} + Z^{off}$ en cohérence avec les notations de [23].

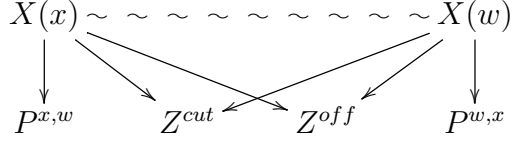


FIGURE 7 – Décomposition en quatre mouvements browniens indépendants

En vue d'utiliser le cut-off que l'on propose, on découpe l'espace de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_\epsilon^\beta(A)^2] &= \int_A \int_A \mathbb{E}^X[f_\epsilon^\beta(x)f_\epsilon^\beta(w)]dw dx \\
&= \int_A \int_{B(x,\epsilon)} \mathbb{E}^X[f_\epsilon^\beta(x)f_\epsilon^\beta(w)]dw dx + \int_A \int_{C(x,\epsilon)} \mathbb{E}^X[f_\epsilon^\beta(x)f_\epsilon^\beta(w)]dw dx \\
&= \Sigma_\epsilon^1 + \Sigma_\epsilon^2
\end{aligned}$$

avec $C(x, \epsilon) = A - B(x, \epsilon)$ pourvu que $B(x, \epsilon) \subset A$.

Discutons un peu sur le comportement du champ X_ϵ à l'intérieur de chaque région.

- Pour la partie Σ_ϵ^1 , on devrait observer une très forte corrélation, qui se traduit par le fait que dans la décomposition, la partie commune domine les autres. Heuristiquement, le processus $X_\epsilon(w)$ est donc très proche de $X_\epsilon(x)$ dans cette région.
- Pour la partie Σ_ϵ^2 , la fonction de corrélation est “presque” constante. Heuristiquement, que l'on soit à l'infini ou à une distance ϵ , la partie commune se comporte à peu près de la même façon. On verra que ce qui joue vraiment dans les majorations c'est cette partie commune.

On entre maintenant dans les détails du calcul.

Tout d'abord, rappelons une conséquence du théorème d'arrêt qui permet de ramener les calculs à grande échelle à une échelle constante égale à $|x - w|$ déjà démontrée dans [6] (voir aussi 3.3).

Lemme 4.3. *Pour $x \neq w \in \mathbb{R}^2$ et β constante, on a*

$$\mathbb{E}[f_\epsilon^\beta(x)f_\epsilon^\beta(w)] = \mathbb{E}[f_{\max(\epsilon, |x-w|)}^\beta(x)f_{\max(\epsilon, |x-w|)}^\beta(w)]$$

Dans notre cadre on ne peut pas appliquer directement ce théorème d'arrêt à cause de la partie Z^{off} . Cependant ce n'est pas un grand souci car la partie Z^{off} est à

variance finie. En effet :

$$\begin{aligned}
K_s^{off}(x-w) &= \int_1^{\frac{1}{s}} \frac{k(u(x-w))}{u} \mathbf{1}_{\{|x-w| \geq 1\}} du \\
&\leq \int_1^{+\infty} \frac{k(u(x-w))}{u} \mathbf{1}_{\{|x-w| \geq 1\}} du \\
&= \int_{|x-w|}^{+\infty} \frac{k(u)}{u} \mathbf{1}_{\{u \geq 1\}} du \\
&\leq \int_1^{+\infty} \frac{k(u)}{u} du \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

Maintenant on commence les calculs en suivant exactement les mêmes idées que dans [23].

• Pour Σ_ϵ^1 :

Par le théorème de Girsanov,

$$\begin{aligned}
\Sigma_\epsilon^1 &= \int_A \int_{B(x,\epsilon)} \mathbb{E}^X \left[\left(\beta - P_\epsilon^{w,x} - Z_\epsilon + 2 \ln \frac{1}{\epsilon} \right) \mathbf{1}_{\{\sup_{r \in [\epsilon,1]} P_r^{w,x} + Z_r - 2 \ln \frac{1}{r} \leq \beta\}} \right. \\
&\quad \left. \left(\beta - P_\epsilon^{x,w} - Z_\epsilon + 2 \ln \frac{1}{\epsilon} \right) \mathbf{1}_{\{\sup_{r \in [\epsilon,1]} P_r^{x,w} + Z_r - 2 \ln \frac{1}{r} \leq \beta\}} e^{2P_\epsilon^{x,w} + 4Z_\epsilon + 2P_\epsilon^{w,x} - 4 \ln \frac{1}{\epsilon}} \right] dw dx \\
&= \int_A \int_{B(x,\epsilon)} \mathbb{E}^X \left[\left(\beta - P_\epsilon^{w,x} - Z_\epsilon \right) \mathbf{1}_{\{\sup_{r \in [\epsilon,1]} P_r^{w,x} + Z_r \leq \beta\}} \right. \\
&\quad \left. \left(\beta - P_\epsilon^{x,w} - Z_\epsilon \right) \mathbf{1}_{\{\sup_{r \in [\epsilon,1]} P_r^{x,w} + Z_r \leq \beta\}} e^{2Z_\epsilon + 2K_\epsilon(x-w)} \right] dw dx
\end{aligned}$$

On définit

$$\beta_\epsilon^{x,w} = \beta - \min_{s \in [\epsilon,1]} P_s^{x,w}$$

Observons que pour $w \in B(x, \epsilon)$, $\sup_{s \in [\epsilon,1]} h_1(s), \sup_{s \in [\epsilon,1]} h_2(s) \leq c$ pour une constante $c > 0$ qui ne dépend que du noyau k . En effet, comme k est l -lipschitzien en 0, on a, pour tout $s \in [\epsilon, 1]$ et $w \in B(x, \epsilon)$,

$$\begin{aligned}
h_1(s) &= h_2(s) = \ln \frac{1}{s} - \int_1^{\frac{1}{s}} \frac{k(u(x-w))}{u} du \\
&= \int_1^{\frac{1}{s}} \frac{1 - k(u(x-w))}{u} du \\
&\leq \int_1^{\frac{1}{s}} \frac{l u |x-w|}{u} du \\
&\leq l(1 - |x-w|) \\
&\leq l
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\Sigma_\epsilon^1 \leq C \int_A \int_{B(x,\epsilon)} \mathbb{E}^X[(1 + (Z_\epsilon)^2) e^{2Z_\epsilon + 2K_\epsilon(x-w)} (\beta_\epsilon^{x,w} - Z_\epsilon) \mathbf{1}_{\{\sup_{r \in [\epsilon,1]} Z_r \leq \beta_\epsilon^{x,w}\}}] dw dx$$

On définit une nouvelle mesure de probabilité sur \mathcal{F}_ϵ :

$$\mathbb{P}^{\beta,x,w}(dz) = \frac{1}{\beta_\epsilon^{x,w}} \mathbb{E}^Z[\mathbf{1}_{\{dz\}}(\beta_\epsilon^{x,w} - Z_\epsilon(x)) \mathbf{1}_{\{\sup_{s \in [\epsilon,1]} Z_s(x) \leq \beta_\epsilon^{x,w}\}} | \beta_\epsilon^{x,w}]$$

Rappelons que sous cette nouvelle mesure de probabilité, le processus $(\beta_\epsilon^{x,w} - Z_s)_{\epsilon \leq s \leq 1}$ a la même loi que $(\beta_{K_s(x-w)})_{\epsilon \leq s \leq 1}$, où $(\beta_u)_u$ est un processus de Bessel en dimension 3 issu de $\beta_\epsilon^{x,w}$ (voir 5.2). On a donc :

$$\begin{aligned} \Sigma_\epsilon^1 &\leq C \int_A \int_{B(x,\epsilon)} \mathbb{E}^X[\beta_\epsilon^{x,w} \mathbb{E}^{\beta,x,w}[(1 + (\beta_\epsilon^{x,w} - \beta_{K_\epsilon(x-w)})^2) e^{2\beta_\epsilon^{x,w} - 2\beta_{K_\epsilon(x-w)} + 2K_\epsilon(x-w)}]] dw dx \\ &\leq C \int_A \int_{B(x,\epsilon)} \mathbb{E}^X[\beta_\epsilon^{x,w} \mathbb{E}^{\beta,x,w}[(1 + (\beta_\epsilon^{x,w})^2) e^{2\beta_\epsilon^{x,w}} (1 + (\beta_{K_\epsilon(x-w)})^2) e^{-2\beta_{K_\epsilon(x-w)} + 2K_\epsilon(x-w)}]] dw dx \end{aligned}$$

On souligne maintenant une propriété du champ libre gaussien massif (et aussi du champ libre gaussien si l'on n'est pas près du bord) que l'on peut facilement retrouver par le caractère lipschizien du noyau k : il existe une constante uniforme c ne dépendant que du noyau k telle que pour tout $w \in B(x, \epsilon)$,

$$\ln \frac{1}{\epsilon} - c \leq K_\epsilon(x-w) \leq \ln \frac{1}{\epsilon}$$

On calcule maintenant la partie $\mathbb{E}^{\beta,x,w}[(1 + (\beta_{K_\epsilon(x-w)})^2) e^{-2\beta_{K_\epsilon(x-w)}}]$.

La loi d'un processus de Bessel en dimension 3 est donné par le carré de la norme d'un mouvement brownien en dimension 3 (voir 5.2). On se donne donc trois mouvements browniens standards unidimensionnels indépendants M^1 , M^2 et M^3 , et on a :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^{\beta,x,w}[(1 + (\beta_{K_\epsilon(x-w)})^2) e^{-2\beta_{K_\epsilon(x-w)}}] \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} (1 + (u - \beta_\epsilon^{x,w})^2 + v^2 + w^2) e^{-\sqrt{(u - \beta_\epsilon^{x,w})^2 + v^2 + w^2}} e^{-\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2K_\epsilon(x-w)}} \frac{dudvdw}{(2\pi K_\epsilon(x-w))^{\frac{3}{2}}} \\ &\leq C(1 + (\beta_\epsilon^{x,w})^2) e^{\beta_\epsilon^{x,w}} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + u^2 + v^2 + w^2) e^{-\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} e^{-\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2K_\epsilon(x-w)}} \frac{dudvdw}{(2\pi K_\epsilon(x-w))^{\frac{3}{2}}} \\ &\leq C(1 + (\beta_\epsilon^{x,w})^2) e^{\beta_\epsilon^{x,w}} \int_0^{+\infty} (1 + r^2) e^{-r} e^{-\frac{r^2}{2 \ln \frac{1}{\epsilon}}} \frac{r^2 dr}{(\ln \frac{1}{\epsilon})^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

On trouve

$$\mathbb{E}^{\beta,x,w}[(1 + (\beta_{K_\epsilon(x-w)})^2) e^{-2\beta_{K_\epsilon(x-w)}}] \leq C(1 + (\beta_\epsilon^{x,w})^2) e^{\beta_\epsilon^{x,w}} H(\ln \frac{1}{\epsilon})$$

avec

$$H(a) = \int_0^{+\infty} (1+r^2)e^{-r} e^{-\frac{r^2}{2a}} \frac{r^2 dr}{a^{\frac{3}{2}}}$$

qui vérifie

$$H(a) \leq C(\max(1, a))^{-\frac{3}{2}}$$

pour tout $a \geq 0$.

Finalement

$$\Sigma_\epsilon^1 \leq CH(\ln \frac{1}{\epsilon})\epsilon^{-2} \int_A \int_{B(x, \epsilon)} dw dx \leq C|A|(\ln \frac{1}{\epsilon})^{-\frac{3}{2}}$$

qui tend vers 0 quand $\epsilon \rightarrow 0$.

On a utilisé le fait que $\mathbb{E}^X[C\beta_\epsilon^{x,w}(1+(\beta_\epsilon^{x,w})^2)^2 e^{3\beta_\epsilon^{x,w}}]$ est finie et ce indépendamment de x, w (voir 5.12).

• Pour Σ_ϵ^2 :

Remarquons d'abord, par définition même du cut-off, comme $\epsilon \leq |x-w|$ dans cette région, on a $Z_\epsilon^{cut} = Z_{|x-w|}^{cut}$ et rappelons aussi que la partie Z^{off} est à variance finie. Par le théorème de Girsanov,

$$\begin{aligned} \Sigma_\epsilon^2 &= \int_A \int_{C(x, \epsilon)} \mathbb{E}^X[(\beta - P_\epsilon^{w,x} - Z_\epsilon + 2 \ln \frac{1}{\epsilon}) \mathbf{1}_{\{\sup_{r \in [\epsilon, 1]} P_r^{w,x} + Z_r - 2 \ln \frac{1}{r} \leq \beta\}} \\ &\quad (\beta - P_\epsilon^{x,w} - Z_\epsilon + 2 \ln \frac{1}{\epsilon}) \mathbf{1}_{\{\sup_{r \in [\epsilon, 1]} P_r^{x,w} + Z_r - 2 \ln \frac{1}{r} \leq \beta\}}] e^{2P_\epsilon^{x,w} + 4Z_\epsilon + 2P_\epsilon^{w,x} - 4 \ln \frac{1}{\epsilon}}] dw dx \\ &= \int_A \int_{C(x, \epsilon)} \mathbb{E}^X[(\beta - P_\epsilon^{w,x} - Z_\epsilon) \mathbf{1}_{\{\sup_{r \in [\epsilon, 1]} P_r^{w,x} + Z_r \leq \beta\}} \\ &\quad (\beta - P_\epsilon^{x,w} - Z_\epsilon) \mathbf{1}_{\{\sup_{r \in [\epsilon, 1]} P_r^{x,w} + Z_r \leq \beta\}}] e^{2Z_\epsilon + 2K_\epsilon(x-w)}] dw dx \end{aligned}$$

On définit maintenant $\alpha_\epsilon^{off} = \sup_{s \in [\epsilon, 1]} |Z_s^{off}|$, alors

$$\begin{aligned} \Sigma_\epsilon^2 &\leq \int_A \int_{C(x, \epsilon)} \mathbb{E}^X[(\beta - Z_\epsilon^{cut} + \alpha^{off} - P_\epsilon^{w,x}) \mathbf{1}_{\{\sup_{r \in [\epsilon, 1]} Z_r^{cut} + P_r^{w,x} \leq \beta + \alpha^{off}\}} \\ &\quad (\beta - Z_\epsilon^{cut} + \alpha^{off} - P_\epsilon^{x,w}) \mathbf{1}_{\{\sup_{r \in [\epsilon, 1]} Z_r^{cut} + P_r^{x,w} \leq \beta + \alpha^{off}\}}] e^{2Z_{|x-w|}^{cut} + 2 \ln \frac{1}{|x-w|} + 2\alpha^{off}}] dw dx \\ &\leq \int_A \int_{C(x, \epsilon)} \mathbb{E}^X[(\beta - Z_{|x-w|}^{cut} + \alpha^{off} - P_{|x-w|}^{w,x}) \mathbf{1}_{\{\sup_{r \in [|x-w|, 1]} Z_r^{cut} + P_r^{w,x} \leq \beta + \alpha^{off}\}} \\ &\quad (\beta - Z_{|x-w|}^{cut} + \alpha^{off} - P_{|x-w|}^{x,w}) \mathbf{1}_{\{\sup_{r \in [|x-w|, 1]} Z_r^{cut} + P_r^{x,w} \leq \beta + \alpha^{off}\}}] e^{2Z_{|x-w|}^{cut} + 2 \ln \frac{1}{|x-w|} + 2\alpha^{off}}] dw dx \end{aligned}$$

par le théorème d'arrêt quand l'on a déjà utilisé dans un autre contexte, voir 3.3 (le point c'est que la partie P ne bouge pas entre $|x-w|$ et ϵ donc tout est constant à

part Z^{cut}).

Ce qui suit est exactement le même raisonnement que dans [23], on remplace simplement $\beta^{x,w}$ par $\beta^{x,w} + \alpha^{off}$. À la fin la constante ne sera plus la même, mais comme tout est à variance finie, elle reste finie.

On définit donc $\beta^{x,w} = \beta + \alpha^{off} - \min_{s \in [|x-w|, 1]} P_s^{x,w}$ de façon analogue.

Observons que pour $w \in C(x, \epsilon)$, $\sup_{s \in [|x-w|, 1]} h_1(s), \sup_{s \in [|x-w|, 1]} h_2(s) \leq c$ pour une constante $c > 0$ qui ne dépend que du noyau k (donc a fortiori pour h_{cut} aussi). En effet, comme k est l -lipschitzien en 0, on a, pour tout $s \in [|x-w|, 1]$ et $w \in C(x, \epsilon)$,

$$\begin{aligned} h_1(s) = h_2(s) &= \ln \frac{1}{s} - \int_1^{\frac{1}{s}} \frac{k(u(x-w))}{u} du \\ &= \int_1^{\frac{1}{s}} \frac{1 - k(u(x-w))}{u} du \\ &\leq \int_1^{\frac{1}{s}} \frac{l|u(x-w)|}{u} du \\ &\leq l(1 - |x-w|) \\ &\leq l \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\Sigma_\epsilon^2 \leq C \int_A \int_{C(x, \epsilon)} \mathbb{E}^X[(1 + (Z_{|x-w|}^{cut})^2) e^{2Z_{|x-w|} + 2K_{x-w}(x-w)} (\beta^{x,w} - Z_{|x-w|}^{cut}) \mathbf{1}_{\{\sup_{r \in [|x-w|, 1]} Z_r^{cut} \leq \beta^{x,w}\}}] dw dx$$

On définit une nouvelle mesure de probabilité sur $\sigma((Z_s^{cut})_{s \in [|x-w|, 1]})$:

$$\mathbb{P}^{\beta, x, w}(dz) = \frac{1}{\beta^{x, w}} \mathbb{E}^{Z^{cut}}[\mathbf{1}_{\{dz\}}(\beta^{x, w} - Z_{|x-w|}^{cut}(x)) \mathbf{1}_{\{\sup_{s \in [|x-w|, 1]} Z_s^{cut}(x) \leq \beta^{x, w}\}} | \beta^{x, w}]$$

Rappelons que sous cette nouvelle mesure de probabilité, le processus $(\beta^{x, w} - Z_s^{cut})_{|x-w| \leq s \leq 1}$ a la même loi que $(\beta_{K_s(x-w)})_{|x-w| \leq s \leq 1}$, où $(\beta_u)_u$ est un processus de Bessel en dimension 3 issu de $\beta^{x, w}$ (voir 5.2). On a donc :

$$\begin{aligned} \Sigma_\epsilon^2 &\leq C \int_A \int_{C(x, \epsilon)} \mathbb{E}^X[\beta^{x, w} \mathbb{E}^{\beta, x, w}[(1 + (\beta^{x, w} - \beta_{K_{|x-w|}(x-w)})^2) \\ &\quad e^{2\beta^{x, w} - 2\beta_{K_{|x-w|}(x-w)} + 2K_{x-w}(x-w) + 2\alpha^{off}}]] dw dx \\ &\leq C \int_A \int_{C(x, \epsilon)} \mathbb{E}^X[\beta^{x, w} \mathbb{E}^{\beta, x, w}[(1 + (\beta^{x, w})^2) e^{2\beta^{x, w}} (1 + (\beta_{K_{|x-w|}(x-w)})^2) \\ &\quad e^{-2\beta_{K_{|x-w|}(x-w)} + 2K_{x-w}(x-w) + 2\alpha^{off}}]] dw dx \end{aligned}$$

On souligne maintenant une propriété du champ libre gaussien massif (et aussi du champ libre gaussien si l'on n'est pas près du bord) que l'on peut facilement retrouver par le caractère lipschitzien du noyau k : il existe une constante uniforme c ne dépendant que du noyau k telle que pour tout $w \in C(x, \epsilon)$,

$$\ln \frac{1}{|x-w|} - c \leq K_{|x-w|}(x-w) \leq \ln \frac{1}{|x-w|}$$

En faisant les mêmes calculs que pour la partie Σ_ϵ^1 , on trouve

$$\mathbb{E}^{\beta, x, w}[(1 + (\beta_{K_{|x-w|}(x-w)})^2)e^{-2\beta_{K_{|x-w|}(x-w)}}] \leq C(1 + (\beta^{x, w})^2)e^{\beta^{x, w}} H(\ln \frac{1}{|x-w|})$$

Finalement

$$\sup_{\epsilon \in]0, 1]} \Sigma_\epsilon^2 \leq C' \int_A \int_{B(x, 1)} \frac{H(\ln \frac{1}{|x-w|})}{|x-w|^2} dw dx < +\infty$$

On a utilisé le fait que $\mathbb{E}^X[C\beta^{x, w}(1 + (\beta_\epsilon^{x, w})^2)^2 e^{3\beta^{x, w}} e^{2\alpha^{off}}]$ est finie indépendamment de x, w (voir 5.12).

En conclusion, on a donc démontré la convergence en \mathcal{L}^2 de notre martingale.

- Le reste de la preuve est identique que dans la section précédente.

En effet, comme le noyau k_m pour le champ libre gaussien massif est l -lipschitzien en 0, le résultat sur le maximum d'un champ libre gaussien log-corrélé (théorème 3.5) reste valable. En suivant exactement le même raisonnement que dans la section précédente, on conclut que la martingale dérivée M' peut être construite d'après cette méthode, et qu'elle est p.s. strictement positive. \square

Remarque 4.3. *Remarquons que cette preuve marche aussi pour les cut-offs qui vérifient les deux conditions suivantes :*

- **Noyau k localement lipschitzien** : À partir d'un certain ϵ_0 , la fonction de covariance K_ϵ est plus grand que

$$k_\epsilon(r) = \int_{|r|}^{\frac{|r|}{\epsilon}} \frac{k(u)}{u} du$$

avec $k(u) = (1 - \frac{|u|}{T})\mathbf{1}_{[0, T]}(|u|)$ quand ϵ tend vers 0.

- **Variance finie** : La partie “off” Z^{off} est à variance finie.

En plus, on n'a pas besoin que k soit un noyau gaussien pour avoir la décomposition en quatre mouvements browniens.

Il en résulte que la même preuve marche aussi pour un champ libre gaussien (on s'intéresse à une partie intérieure du champ, de distance au moins δ du bord). En effet, le comportement du noyau $p^D(t; x, y)$ quand t tend vers l'infini est “presque”

le même que le noyau d'un champ libre gaussien massif. On peut alors récupérer les deux propriétés précédentes dans le cas d'un champ libre gaussien défini à l'intérieur d'un domaine D borné dans le plan, ce qui nous permet de construire de la même façon la martingale dérivée dans le cas critique.

Reste à savoir si toutes les constructions de la martingale dérivée donne la même limite (en loi). Ceci est encore conjectural.

5 Quelques rappels de probabilités

5.1 Quelques théorèmes sur les martingales et les mouvements browniens

On rassemble ici, sans preuve, quelques résultats classiques de probabilités qui nous sont utiles.

Théorème 5.1. *Théorème de De la Vallée Poussin*

Soit $(M_n)_n$ une martingale. Elle est uniformément intégrable ssi il existe une fonction convexe $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ et un α fixé positif tels que

- 1) $\frac{F(x)}{x} \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$;
- 2) $F(\lambda x) \leq \lambda^\alpha F(x)$ pour tout $\lambda > 0$;
- 3) $\sup_n \mathbb{E}[F|M_n] < +\infty$.

Définition 5.1. *Bruit blanc*

On rappelle simplement ici la règle de calcul pour les bruits blancs :

Soit W un bruit blanc défini sur un espace E . Alors pour tout couple de fonctions réelles continues (f, g) définies sur E , on a

$$\mathbb{E}\left[\int_E f(x)W(dx) \int_E g(x)W(dx)\right] = \int_E f(x)g(y)d\delta(x, y)$$

où $\delta(x, y) = x$ si $x = y$ et $\delta(x, y) = 0$ si $x \neq y$.

Définition 5.2. *Processus de Bessel*

On considère un mouvement brownien standard d -dimensionnel ($d \geq 1$) B non issu de 0. Notons sa norme $Y_t = |B_t|$. Alors Y_t vérifie l'équation différentielle stochastique :

$$dY_t = \frac{a}{Y_t}dt + d\tilde{B}_t$$

avec $a = \frac{d-1}{2}$ et \tilde{B} un mouvement brownien standard.

On dit que Y est un processus de Bessel d -dimensionnel.

Théorème 5.2. *Mouvement brownien conditionné à rester positif*

Soit B un \mathbb{P} -mouvement brownien issu de x . On considère une nouvelle mesure de probabilité \mathbb{Q} telle que

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = x^{-1}B_t \mathbf{1}_{\{0 \notin B[0, t]\}}$$

Alors sous \mathbb{Q}_t , $(B_s)_{s \leq t}$ vérifie l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dB_s = \frac{1}{B_s}ds + d\tilde{B}_s$$

où \tilde{B} est un mouvement brownien standard sous \mathbb{Q}_t .

Autrement dit, sous \mathbb{Q}_t , $(B_s)_{s \leq t}$ est un processus de Bessel en dimension 3.

Théorème 5.3. Lemme de Motoo

Soit β un processus de Bessel en dimension 3 de loi de départ \mathbb{P}_x (i.e. ce processus part du point x avec probabilité \mathbb{P}_x). Alors :

– Soit ϕ une fonction croissante vers $+\infty$ à l'infini telle que $\int_1^{+\infty} \frac{\phi(t)^3}{t} e^{-\frac{1}{2}\phi(t)^2} dt < +\infty$. On a alors

$$\mathbb{P}_x(\limsup_{t \rightarrow +\infty} (\beta_t - \sqrt{t}\phi(t)) \geq 0) = 0$$

– Soit ψ une fonction décroissante vers 0 à l'infini telle que $\int_1^{+\infty} \frac{\psi(t)}{t} dt < +\infty$. On a alors

$$\mathbb{P}_x(\liminf_{t \rightarrow +\infty} (\beta_t - \sqrt{t}\psi(t)) \leq 0) = 0$$

Les réciproques sont aussi vraies.

On pourra trouver les preuves de ces résultats dans par exemple [4], [1], [14], [20] et [19].

5.2 Quelques inégalités gaussiennes

Les inégalités gaussiennes sont souvent extrêmement simples mais étonnamment puissantes. Nous rappelons quelques inégalités importantes sur les gaussiens qui nous sont utiles.

Théorème 5.4. Inégalité de convexité de Kahane

Soient $(X_i)_{i \in I}$ et $(Y_i)_{i \in I}$ deux familles finies de v.a. réelles gaussiennes. On suppose que $\forall i, j \in I$, $\mathbb{E}[X_i X_j] \leq \mathbb{E}[Y_i Y_j]$. Soit $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe avec croissance au plus polynomiale à l'infini. Alors

$$\forall p_i \geq 0, \mathbb{E}[F(\sum_{i \in I} p_i \exp(X_i - \frac{1}{2}\mathbb{E}[X_i^2]))] \leq \mathbb{E}[F(\sum_{i \in I} p_i \exp(Y_i - \frac{1}{2}\mathbb{E}[Y_i^2]))]$$

Démonstration. On commence la preuve avec un lemme simple et connu :

Lemme 5.5. Soient $X = (X_1, \dots, X_k)$ un vecteur gaussien centré, et $h : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , telle que h et ses dérivées premières sont à croissance au plus polynomiale à l'infini. Alors $\forall 1 \leq i \leq k$,

$$\mathbb{E}[X_i h(X)] = \sum_{j=1}^k \mathbb{E}[X_i X_j] \mathbb{E}[h_j(X)]$$

où $h_j = \frac{\partial h}{\partial x_j}$.

Montrons ce lemme. Supposons d'abord que la matrice de covariance de X est l'identité. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_i h(X)] &= \int_{\mathbb{R}^k} x_i h(x) e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} h_i(x) e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx \\ &= \mathbb{E}[h_i(X)]\end{aligned}$$

où l'on a utilisé simplement une intégration par parties.

Maintenant on suppose que $C = A^T A$ la matrice de covariance de X , et on définit $h'(x) = h(Ax)$. Soit alors $X' = (X'_1, \dots, X'_k)$ un vecteur gaussien de matrice de covariance la matrice identité. Alors $X = AX'$ en loi, et en notant a_{mn} (resp. a_{mn}^T) les éléments de A (resp. A^T), on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_i h(X)] &= \mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^k a_{im} X'_m h'(X')\right] \\ &= \sum_{m=1}^k a_{im} \mathbb{E}[h'_m(X')] \\ &= \sum_{m=1}^k a_{im} \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^k a_{jm} h_j(X)\right] \\ &= \sum_{j=1}^k \mathbb{E}[h_j(X)] \sum_{m=1}^k a_{im} a_{mj}^T \\ &= \sum_{j=1}^k \mathbb{E}[X_i X_j] \mathbb{E}[h_j(X)]\end{aligned}$$

Ce qui donne le lemme.

On définit

$$\phi(t) = \mathbb{E}\left[F\left(\sum_{i=1}^n p_i e^{Z_i(t) - \frac{1}{2}\mathbb{E}[Z_i^2(t)]}\right)\right]$$

avec $Z_i(t) = \sqrt{t}X_i + \sqrt{1-t}Y_i$.

On note aussi

$$W_{n,t} = \sum_{i=1}^n p_i e^{Z_i(t) - \frac{1}{2}\mathbb{E}[Z_i^2(t)]}$$

Maintenant pour établir le théorème, il suffit de remarquer que la dérivée $\phi'(t)$ est

positive :

$$\begin{aligned}
\phi'(t) &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i \left(\frac{1}{\sqrt{t}} X_i - \frac{1}{\sqrt{1-t}} Y_i \right) e^{Z_i(t) - \frac{1}{2} \mathbb{E}[Z_i^2(t)]} F' \left(\sum_{i=1}^n p_i e^{Z_i(t) - \frac{1}{2} \mathbb{E}[Z_i^2(t)]} \right) \right] \\
&\quad - \mathbb{E}\left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i (\mathbb{E}[X_i^2] - \mathbb{E}[Y_i^2]) e^{Z_i(t) - \frac{1}{2} \mathbb{E}[Z_i^2(t)]} F' \left(\sum_{i=1}^n p_i e^{Z_i(t) - \frac{1}{2} \mathbb{E}[Z_i^2(t)]} \right) \right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n p_i p_j \left(\frac{1}{\sqrt{t}} X_i - \frac{1}{\sqrt{1-t}} Y_i \right) Z_j \right] \mathbb{E}[e^{Z_j(t) - \frac{1}{2} \mathbb{E}[Z_j^2(t)]} e^{Z_i(t) - \frac{1}{2} \mathbb{E}[Z_i^2(t)]} F''(W_{n,t})] \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{t}} X_i - \frac{1}{\sqrt{1-t}} Y_i \right) Z_j \right] \mathbb{E}[e^{Z_i(t) - \frac{1}{2} \mathbb{E}[Z_i^2(t)]} F'(W_{n,t})] \\
&\quad - \mathbb{E}\left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i (\mathbb{E}[X_i^2] - \mathbb{E}[Y_i^2]) e^{Z_i(t) - \frac{1}{2} \mathbb{E}[Z_i^2(t)]} F' \left(\sum_{i=1}^n p_i e^{Z_i(t) - \frac{1}{2} \mathbb{E}[Z_i^2(t)]} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n p_i p_j (\mathbb{E}[X_i X_j] - \mathbb{E}[Y_i Y_j]) \mathbb{E}[e^{Z_i(t) + Z_j(t) - \frac{1}{2} \mathbb{E}[Z_i^2(t)] - \frac{1}{2} \mathbb{E}[Z_j^2(t)]} F''(W_{n,t})]
\end{aligned}$$

On conclut alors par la convexité de F . \square

On peut retrouver, à l'aide de l'inégalité de convexité de Kahane, le lemme de Slepian qui est une des (vieilles) inégalités classiques dites de comparaison pour les processus gaussiens.

Lemme 5.6. Lemme de Slepian

Soient $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ deux vecteurs gaussiens centrés tels que

$$\forall i, j \in [1, n], \mathbb{E}[X_i X_j] \leq \mathbb{E}[Y_i Y_j]$$

et

$$\forall j \in [1, n], \mathbb{E}[X_j^2] = \mathbb{E}[Y_j^2]$$

Alors pour toute fonction croissante $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{E}[F(\sup_{i \in [1, n]} Y_i)] \leq \mathbb{E}[F(\sup_{i \in [1, n]} X_i)]$$

Démonstration. Grâce à Fubini, il suffit de montrer cette inégalité pour les $F = \mathbf{1}_{]x, +\infty[}$ avec $x \in \mathbb{R}$ fixé, i.e. $\mathbb{P}(\sup_{i \in [1, n]} X_i < x) \leq \mathbb{P}(\sup_{i \in [1, n]} Y_i < x)$.

On choisit un $\beta \in \mathbb{R}_+$. On considère ensuite la fonction convexe $\phi(u) = e^{-e^{-\beta x} u}$, les vecteurs $(\beta X_i)_{i \in [1, n]}$, $(\beta Y_i)_{i \in [1, n]}$ et $(p_i)_{i \in [1, n]} = (e^{\beta^2 \frac{\mathbb{E}[X_i^2]}{2}})_{i \in [1, n]}$. En appliquant l'inégalité de convexité de Kahane, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[e^{-\sum_{i=1}^n e^{\beta(X_i - x)}}\right] \leq \mathbb{E}\left[e^{-\sum_{i=1}^n e^{\beta(Y_i - x)}}\right]$$

En faisant tendre β vers $+\infty$, on trouve :

$$\mathbb{P}\left(\sup_{i \in [1, n]} X_i < x\right) \leq \mathbb{P}\left(\sup_{i \in [1, n]} Y_i < x\right)$$

ce qui nous permet de conclure. \square

On énonce maintenant l'inégalité de convexité de Kahane sous forme d'intégrale, qui est une généralisation immédiate de la forme précédente (il suffit de considérer une discrétisation des intégrales en somme de Riemann).

Lemme 5.7. Inégalité de convexité de Kahane, cas continu

Soient $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ et $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}}$ deux processus gaussiens centrés tels que leur noyau de covariance f_X et f_Y soient continus et vérifient $\forall u, t \in \mathbb{R}, f_X(t, u) \leq f_Y(t, u)$. Soit μ une mesure de Radon positive sur \mathbb{R} . Alors, pour toute fonction convexe $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ avec croissance au plus polynomiale à l'infini, on a :

$$\mathbb{E}\left[F\left(\int_a^b e^{X_t - \frac{1}{2}\mathbb{E}[X_t^2]} \mu(dt)\right)\right] \leq \mathbb{E}\left[F\left(\int_a^b e^{Y_t - \frac{1}{2}\mathbb{E}[Y_t^2]} \mu(dt)\right)\right]$$

On rappelle un résultat classique d'une autre classe d'inégalités gaussiennes importantes dites inégalités de concentration.

Théorème 5.8. Inégalité de Borell-Tsirelson-Ibragimov-Sudakov

Soit f_t un processus gaussien centré p.s. borné défini sur un espace T séparable⁴. On définit

$$\|f\| = \|f\|_T = \sup_{t \in T} f_t$$

Alors $\mathbb{E}[\|f\|] < +\infty$ et pour tout $u > 0$, on a

$$\mathbb{P}[\|f\| - \mathbb{E}\|f\| > u] \leq e^{-\frac{u^2}{2\sigma_T^2}}$$

avec $\sigma_T^2 = \sup_{t \in T} \mathbb{E}[f_t^2]$.

Démonstration. Suivant [1], on présente une preuve simple basée sur plusieurs lemmes élémentaires.

Lemme 5.9. 1. Sur le calcul de covariance

Soient X et Y deux vecteurs gaussiens centrés k -dimensionnels indépendants, chacun ayant pour matrice de covariance Id . Soient $f, g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions bornées de classe \mathcal{C}^2 . Alors

$$Cov(f(X), g(X)) = \int_0^1 \mathbb{E}[\langle \nabla f(X), \nabla g(\alpha X + \sqrt{1 - \alpha^2} Y) \rangle] d\alpha$$

4. Une conséquence immédiate de cette hypothèse est $\sup_{t \in T} f_t = \sup_{t \in D} f_t$ si $D \subset T$ est un ensemble dénombrable dense.

Preuve du lemme 1 :

Il suffit de montrer ce lemme avec $f(x) = e^{i\langle t, x \rangle}$ et $g(x) = e^{i\langle s, x \rangle}$, avec $s, t, x \in \mathbb{R}^k$.

Notons $\phi(t) = \mathbb{E}[e^{i\langle t, X \rangle}] = e^{\frac{|t|^2}{2}}$ la fonction caractéristique de X .

On vérifie que $Cov(f(X), g(X)) = \phi(s+t) - \phi(s)\phi(t)$.

Or

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \mathbb{E}[\langle \nabla f(X), \nabla g(\alpha X + \sqrt{1-\alpha^2}Y) \rangle] d\alpha \\
&= \int_0^1 d\alpha \mathbb{E}[\langle (it_j e^{i\langle t, X \rangle})_j, (is_j e^{i\langle s, \alpha X + \sqrt{1-\alpha^2}Y \rangle})_j \rangle] \\
&= - \int_0^1 d\alpha \sum_j s_j t_j \mathbb{E}[e^{i\langle t+\alpha s, X \rangle}] \mathbb{E}[e^{i\langle s, \sqrt{1-\alpha^2}Y \rangle}] \\
&= - \int_0^1 d\alpha \langle s, t \rangle e^{\frac{|t|^2 + 2\alpha \langle s, t \rangle + |s|^2}{2}} \\
&= -\phi(s)\phi(t)(1 - e^{\langle s, t \rangle}) \\
&= \phi(s+t) - \phi(s)\phi(t)
\end{aligned}$$

D'où le lemme.

Lemme 5.10. 2. Une estimation sur le moment exponentiel

On garde le même X que dans le lemme précédent. Si $h : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe \mathcal{C}^2 1-lipschitzienne telle que $\mathbb{E}[h(X)] = 0$, alors pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{E}[e^{th(X)}] \leq e^{\frac{t^2}{2}}$$

Preuve du lemme 2 :

Soient Y une copie indépendante de X et α une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$.

On définit

$$(X, Z_\alpha) = (X, \alpha(X) + \sqrt{1-\alpha^2}Y)$$

En appliquant le lemme précédent avec $t \geq 0$ fixé et $g = e^{th}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[h(X)g(X)] &= \int_0^1 \mathbb{E}[\langle \nabla g(X), \nabla h(Z_\alpha) \rangle] d\alpha \\
&= t \int_0^1 \mathbb{E}[\langle \nabla h(X), \nabla h(Z_\alpha) \rangle e^{th(X)}] d\alpha \\
&\leq t \mathbb{E}[e^{th(X)}]
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le caractère lipschitzien de h . En définissant u de sorte que $e^{u(t)} = \mathbb{E}[e^{th(X)}]$, alors

$$\mathbb{E}[h(X)e^{th(X)}] = u'(t)e^{ut}$$

D'où $u'(t) \leq t$. Or $u(0) = 0$, on a donc $u(t) \leq \frac{t^2}{2}$, qui donne le lemme.

Lemme 5.11. 3. Sur la probabilité de déviation

On garde le même X que précédemment. Soit $h : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ σ -lipschitzienne. Alors $\forall u > 0$,

$$\mathbb{P}[h(X) - \mathbb{E}[h(X)] > u] \leq e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}$$

Preuve du lemme 3 :

Par scaling, on peut supposer que $\sigma = 1$. Quitte à prendre une approximation en \mathcal{C}^2 de f et d'appliquer le lemme de Fatou, on peut supposer que $f \in \mathcal{C}^2$.

Pour tout $t, u > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[h(X) - \mathbb{E}[h(X)] > u] &\leq \int_{h(x) - \mathbb{E}[h(X)] > u} e^{t(h(x) - \mathbb{E}[h(X)] - u)} d\mathbb{P}(x) \\ &\leq e^{-tu} \mathbb{E}[e^{th(X) - \mathbb{E}[h(X)]}] \\ &\leq e^{\frac{1}{2}t^2 - tu} \end{aligned}$$

En optimisant (prenons $t = u$), on obtient ce lemme.

On est maintenant en mesure de montrer l'inégalité de Borell-TIS.

On étudie d'abord le cas où T est fini. Disons $T = \{1, \dots, k\}$.

Le cas i.i.d. a déjà été traité : c'est le lemme 3 car la constante de lipschitz pour la fonction sup est 1.

Soit donc $C = A^T A$ la matrice de covariance ($k \times k$) de f sur T , de coefficients $c_{ij} = \mathbb{E}[f_i f_j]$, de sorte que

$$\sigma_T^2 = \max_{1 \leq i \leq k} c_{ii} = \max_{1 \leq i \leq k} \mathbb{E}[f_i^2]$$

On peut alors voir f comme une transformation affine d'un vecteur gaussien standard W de matrice de covariance Id_k : en effet, $f = AW$ en loi (donc $\max_i f_i = \max_i (AW)_i$ en loi).

Considérons ensuite $h(x) = \max_i (Ax)_i$, qui est de classe \mathcal{C}^2 . Le théorème en découle dans ce cas si l'on peut montrer que

$$|\max_i (Ax)_i - \max_i (Ay)_i| \leq \sigma_T |x - y|$$

Ceci est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En effet, en notant e_i les vecteurs élémentaires :

$$\begin{aligned} |\max_i (Ax)_i - \max_i (Ay)_i| &= |\max_i (e_i Ax) - \max_i (e_i Ay)| \\ &\leq \max_i |e_i A(x - y)| \\ &\leq \max_u |e_i A| \cdot |x - y| \\ &= \sigma_T |x - y| \end{aligned}$$

car $|e_i A|^2 = (e_i)^T C e_i = c_{ii}$.

Passons maintenant au cas général.

Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante vers un ensemble dense dans T . Par séparabilité

$$\sup_{t \in T_n} f_t \rightarrow \sup_{t \in T} f_t$$

presque sûrement.

Or cette convergence est monotone, on a donc

$$\mathbb{P}[\sup_{t \in T_n} f_t \geq u] \rightarrow \mathbb{P}[\sup_{t \in T} f_t \geq u]$$

et

$$\mathbb{E}[\sup_{t \in T_n} f_t] \rightarrow \mathbb{E}[\sup_{t \in T} f_t]$$

Comme $\sigma_{T_n}^2 \rightarrow \sigma_T^2 < +\infty$ (de façon monotone), il suffit de montrer, pour établir l'inégalité de Borell-TIS, que le membre de droite $\mathbb{E}[\sup_{t \in T} f_t]$ est fini.

On procède par l'absurde. Supposons que $\mathbb{E}[||f||] = +\infty$. On choisit alors $u_0 > 0$ tel que

$$e^{-\frac{u_0^2}{\sigma_T^2}} \leq \frac{1}{4}, \mathbb{P}[\sup_{t \in T} f_t < u_0] \geq \frac{3}{4}$$

Choisissons T_n tel que $\mathbb{E}[||f||_{T_n}] > 2u_0$. En appliquant l'inégalité de Borell-TIS (version T fini) à T_n , on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\geq 2e^{-\frac{u_0^2}{\sigma_T^2}} \geq 2e^{-\frac{u_0^2}{\sigma_{T_n}^2}} \geq \mathbb{P}[||f||_{T_n} - \mathbb{E}[||f||_{T_n}] > u_0] \geq \mathbb{P}[\mathbb{E}[||f||_{T_n}] - ||f||_T > u_0] \\ &\geq \mathbb{P}[||f||_T < u_0] \geq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Contradiction. Ceci finit d'établir l'inégalité de Borell-TIS. \square

On énonce maintenant une conséquence importante cette inégalité qui dit, *grosso modo*, que la bornitude du supremum assure l'existence de certaines moments exponentiels pour les processus gaussiens centrés.

Lemme 5.12. Sur les moments exponentiels d'une v.a. gaussienne

Soit f_t un processus gaussien centré. Alors

$$\mathbb{P}[||f|| < +\infty] = 1 \iff \mathbb{E}[||f||] < +\infty \iff \mathbb{E}[e^{\alpha ||f||^2}] < +\infty$$

pour un α suffisamment petit.

Démonstration. On sait déjà que l'existence d'un moment exponentiel entraîne l'existence de $\mathbb{E}[||f||]$, qui à son tour entraîne la finitude p.s. de $||f||$.

L'inégalité de Borell-TIS nous apprend directement que la finitude p.s. de $||f||$ entraîne celle de $\mathbb{E}[||f||]$. Il suffit donc de montrer que la finitude p.s. de $||f||$ entraîne l'existence des moments exponentiels.

Ceci résulte encore de l'inégalité de Borell-TIS. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{\alpha||f||^2}] &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}[e^{\alpha||f||^2} > u] du \\ &\leq e^\alpha + \mathbb{E}[||f||] + 2 \int_{\max(e^\alpha, \mathbb{E}[||f||])}^{+\infty} \mathbb{P}[||f|| > \sqrt{\ln u \frac{1}{\alpha}}] du \\ &\leq e^\alpha + \mathbb{E}[||f||] + 2 \int_{\max(e^\alpha, \mathbb{E}[||f||])}^{+\infty} \exp\left(\frac{-(\sqrt{\ln u \frac{1}{\alpha}} - \mathbb{E}[||f||])^2}{2\sigma_T^2}\right) du \\ &\leq e^\alpha + \mathbb{E}[||f||] + 4\alpha \int_0^{+\infty} u \exp\left(\frac{-(u - \mathbb{E}[||f||])^2}{2\sigma_T^2}\right) \exp(\alpha u^2) du\end{aligned}$$

et pour un α suffisamment petit, cette quantité est bornée. \square

On remarque que ce résultat est valable pour $\sup_{t \in T} |f_t|$ au lieu de $||f||$, car

$$\mathbb{P}[\sup_{t \in T} |f_t| > u] \leq 2\mathbb{P}[\sup_{t \in T} f_t > u]$$

par symétrie.

On pourra trouver les preuves et les extensions de ces résultats dans par exemple [11], [22], [1] et [15].

5.3 Rappels sur les champs gaussiens

5.3.1 Définition du champ gaussien

Un champ gaussien est un processus gaussien défini sur un espace ambiant. D'après [1], on dit "un champ gaussien" quand on s'intéresse davantage à ses propriétés géométriques.

Un champ gaussien défini sur \mathbb{R}^d est dit stationnaire si pour tout $z \in \mathbb{R}^d$, $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^d}$ et $(X_{z+t})_{t \in \mathbb{R}^d}$ ont la même loi. Lui est associé l'objet suivant :

Définition 5.3. *Fonction de type-positif*

Si X est un processus gaussien stationnaire, alors son noyau de covariance $f_X(u, v)$ ne dépend que de la différence $u - v$. On définit alors

$$g(u - v) = f_X(u, v)$$

Remarquons qu'alors g est de type positif (c'est le caractère défini positif du noyau f_X), i.e.

$$\forall n \geq 1, \forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}^d, \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}, \sum_{i,j=1}^n x_i \bar{x}_j g(t_i - t_j) \geq 0$$

On appelle aussi g la fonction de covariance du processus gaussien stationnaire X . Tout comme la matrice de covariance caractérise la structure d'un vecteur gaussien, la fonction de covariance caractérise la structure d'un champ gaussien stationnaire :

Théorème 5.13. *Soit g une fonction réelle paire de type positif sur \mathbb{R}^d . Alors il existe un processus stationnaire centré gaussien réel admettant g pour fonction de covariance.*

5.3.2 Fonction de Green

La fonction de Green est l'un des objets fondamentaux en mathématiques qui apparaît dans beaucoup de domaines. Pour la simplicité de la présentation on rappelle ici simplement une façon probabiliste d'introduire la fonction de Green largement inspirée du livre de [14], via la théorie du potentiel (cf. [5] par exemple). Dans la suite on se restreint au cas $d = 2$, mais la construction est valide (et plus simple) en dimension supérieure.

Définition 5.4. Mouvement brownien tué au bord

On se donne un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ ouvert connexe. Soit $x \in D$. On considère un mouvement brownien plan standard issu de x mais tué quand il touche le bord du domaine D noté \mathcal{B} .

On note, pour $y \in D$, $p_D(t; x, y)$ la densité de transition du \mathcal{B} , i.e.

$$p_D(t; x, y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \epsilon^2} \mathbb{P}^x(|\mathcal{B}_t - y| < \epsilon, \tau_D > t) = \mathbb{P}^x(\mathcal{B}_t \in dy, \tau_D > t)$$

où τ_D désigne le temps de sortie du mouvement brownien \mathcal{B} du domaine D , i.e. le premier instant qu'il atteint le bord du domaine D .

On dit que $p_D(t; x, y)$ est le semi-groupe de transition pour un mouvement brownien plan standard tué au bord de D .

Dans la suite on se restreint au cas où D est un domaine borné (pour assurer que $\mathbb{P}^x[\tau_D < +\infty]$, qui à son tour assure que la fonction de Green ne diverge pas en dehors de la diagonale, voir par exemple [10]).

Définition 5.5. Fonction de Green

La fonction de Green G_D définie sur un domaine D borné est donnée par

$$\forall x, y \in D, G_D(x, y) = \int_0^{+\infty} p_D(t; x, y) dt$$

Définition 5.6. Une autre définition équivalente

Une autre façon de définir la fonction de Green en dimension 2 (voir par exemple [10] pour une différente preuve) est de dire que c'est la plus petite fonction positive $G : D \times D \rightarrow \mathbb{R}_+$, $G = K + H$ parmi celles qui vérifie les conditions suivantes :

- 1) $G < +\infty$ en dehors de la diagonale ;
- 2) $G(a, b) = G(b, a)$;
- 3) $K = -\frac{1}{2\pi} \ln |b - a|$;
- 4) $\Delta_a H = \Delta_b H = 0$.

Sans vouloir entrer dans les détails techniques et de recopier les preuves classiques, expliquons de façon informelle comment on peut obtenir ces propriétés de façon probabiliste.

La positivité de G est immédiate car la densité de transition est positive.

La symétrie (propriété 2) résulte de la symétrie du noyau p^D . Intuitivement, il suffit d'«inverser» le chemin du mouvement brownien qui part de x et qui arrive sur le bord de $B(y, \epsilon)$, puis de faire une translation d'une distance ϵ pour obtenir un chemin du mouvement brownien qui part de y et qui arrive sur le bord de $B(x, \epsilon)$ tout en restant dans le domaine D . Le détail technique consiste à dire que pendant la translation la probabilité que le chemin touche le bord de D est petite : on évalue donc la probabilité que le tube de taille ϵ autour d'un chemin brownien de x vers y touche le bord de D , qui s'avère comporter comme un $o(\epsilon^2)$.

L'harmonicité (propriété 4) est assez simple, on peut la montrer par la propriété de la moyenne (en utilisant la propriété de Markov et de conditionner quand le mouvement brownien tué sort de $B(x, \epsilon)$ pour ϵ petit) par exemple.

Les propriétés 1 et 3 résultent par exemple de la comparaison de p^D avec la densité de transition p d'un mouvement brownien plan standard non tué, à savoir $p(t; x, y) = \frac{1}{2\pi t} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}$. On constate que $\int_0^{+\infty} p^D(t; x, y) dt$ n'est pas très loin de $\int_0^1 p(t; x, y) dt$ (en montrant la convergence de $\int_1^{+\infty} p^D(t; x, y) dt$, voir [14], lemme 2.29), et un calcul montre que $\int_0^1 p(t; x, y) dt$ est égal à $\frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{|x-y|}$ modulo une constante.

5.3.3 Champ libre gaussien (GFF)

On rappelle ici la définition et quelques propriétés du champs libre gaussien (ou *gaussian free field* en anglais) sur un domaine borné $D \subset \mathbb{R}^2$. Pour un traité plus complet sur le champ libre gaussien on pourra consulter l'article [25].

Définition 5.7. Une construction directe du champs libre gaussien

On considère un bruit blanc W distribué sur $D \times \mathbb{R}_+$. On définit alors

$$X(x) = \sqrt{\pi} \int_{D \times \mathbb{R}_+} p_D\left(\frac{s}{2}; x, y\right) W(dy, ds)$$

et on appelle X le champ libre gaussien défini sur le domaine D .

On vérifie tout de suite que la fonction de covariance pour ce champ est donnée par

$$\mathbb{E}[X(x)X(x')] = \pi \int_0^{+\infty} p_D(s; x, x') ds = G_D(x, x')$$

Autrement dit, le champ libre gaussien défini sur un domaine borné $D \subset \mathbb{R}^2$ est un champ gaussien dans \mathbb{R}^2 dont la fonction de covariance est donnée par la fonction de Green sur le domaine D . Mais attention, comme la fonction de Green diverge sur la diagonale, très souvent dans les calculs liés au champ libre gaussien, on manipule plutôt des distributions au sens de Schwartz que des fonctions au sens classique.

Remarque 5.1. Invariance conforme

Le champ libre gaussien possède la propriété remarquable d'invariance conforme, alors que le champ libre gaussien massif que l'on rappelle dans la suite n'en possède pas.

5.3.4 Champ libre gaussien massif (MGFF)

On rappelle ici la définition et quelques propriétés du champ libre gaussien massif (ou *massive gaussian free field* en anglais) sur \mathbb{R}^2 (on pourra consulter par exemple [8], [25] pour une définition rigoureuse et complète) :

- On fixe un paramètre m (la masse).
- On définit la fonction de Green massive sur \mathbb{R}^2 :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, G_m(x, y) = \int_0^\infty e^{-mu - \frac{|x-y|^2}{2u}} \frac{du}{2u}$$

Remarquons que cette fonction est finie en dehors de la diagonale. En effet, une autre façon de définir la fonction de Green massive analogue à celle présentée précédemment est d'utiliser un mouvement brownien tué en un temps suivant la loi exponentielle de paramètre m (au lieu d'un mouvement brownien tué au bord d'un domaine). On pourra consulter entre autres [18] pour plus de détails sur cette fonction.

- Le champ libre gaussien massif sur \mathbb{R}^2 est défini comme un champ gaussien ayant pour fonction de covariance la fonction de Green massive.
- On pourra réécrire G_m de la façon suivante :

$$G_m(x, y) = \int_1^\infty \frac{k_m(u(x-y))}{u} du$$

avec $k_m(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{m}{v}|z|^2 - \frac{v}{2}} dv$.

Cette écriture montre par ailleurs que le noyau est star-scale invariant, voir [2] par exemple.

5.4 Un lemme sur le processus du branchement

Ce théorème donne une estimation des petits moments de la fonction de partition d'un processus du branchement. Il a été démontré dans [9] (théorème 1.6).

Rappelons rapidement la situation. On considère un arbre de Galton-Watson \mathbb{T} . Écrivons $|u| = n$ si un individu u se trouve dans la n -ième génération.

Initialement, un individu se trouve au point 0. Ses enfants forment la première génération, et sont distribués sur \mathbb{R} selon la loi d'un processus ponctuel. Chacun de ces enfants vont avoir ses enfants (qui forment la génération suivante), et leurs déplacements relatifs se font selon le même processus ponctuel indépendamment. Et ainsi de suite. On note la position d'un individu $V(u)$. $V(u)$ est donc la somme des déplacements des ses ancêtres.

On définit la fonction génératrice (logarithmique)

$$\phi(t) = \ln \mathbb{E} \left[\sum_{|u|=1} e^{-tV(u)} \right]$$

et la fonction de partition

$$W_{n,\beta} = \sum_{|u|=n} e^{-\beta V(u)}$$

pour $\beta > 0$.

Théorème 5.14. *Sous les trois hypothèses suivantes :*

- 1) $\mathbb{E}[(\sum_{|u|=1} 1)^{1+\delta}] < +\infty$;
- 2) $\mathbb{E}[\sum_{|u|=1} e^{-(1+\delta_+)V(u)}] + \mathbb{E}[\sum_{|u|=1} e^{\delta_- V(u)}] < +\infty$;
- 3) $\phi(0) > 0$, $\phi(1) = \phi'(1) = 0$.

pour certains $\delta > 0$, $\delta_+ > 0$, $\delta_- > 0$.

On a, pour $\beta > 1$ et $0 < r < \frac{1}{\beta}$:

$$\mathbb{E}[W_{n,\beta}^r] = n^{-\frac{3r\beta}{2} + o(1)}$$

quand $n \rightarrow +\infty$.

Dans le cas qui nous intéresse, on considère un arbre de Cayley (ou plus simplement un arbre binaire), et on attache une variable aléatoire i.i.d. (dite potentiel) à chaque arête de l'arbre indépendamment les unes les autres. En réalité, on n'utilise que la partie "borne supérieure" dans ce théorème.

Références

- [1] R. J. ADLER et J. E. TAYLOR : *Random fields and geometry*, vol. 115. Springer, 2007.
- [2] R. ALLEZ, R. RHODES et V. VARGAS : Lognormal star-scale invariant random measures. *Probability Theory and Related Fields*, p. 1–38, 2013.
- [3] M. BRAMSON, J. DING et O. ZEITOUNI : Convergence in law of the maximum of the two-dimensional discrete gaussian free field. *arXiv preprint arXiv :1301.6669*, 2013.
- [4] C. DELLACHERIE et P.-A. MEYER : *Probabilities and Potential, B : Theory of Martingales*. Elsevier, 2011.
- [5] J. L. DOOB : *Classical potential theory and its probabilistic counterpart*, vol. 262. Springer, 2001.
- [6] B. DUPLANTIER, R. RHODES, S. SHEFFIELD et V. VARGAS : Critical gaussian multiplicative chaos : convergence of the derivative martingale. *arXiv preprint arXiv :1206.1671*, 2012.
- [7] B. DUPLANTIER, R. RHODES, S. SHEFFIELD et V. VARGAS : Renormalization of critical gaussian multiplicative chaos and kpz formula. *arXiv preprint arXiv :1212.0529*, 2012.
- [8] C. GARBAN, R. RHODES et V. VARGAS : Liouville brownian motion. *arXiv preprint arXiv :1301.2876*, 2013.
- [9] Y. HU et Z. SHI : Minimal position and critical martingale convergence in branching random walks, and directed polymers on disordered trees. *The Annals of Probability*, 37(2):742–789, 2009.
- [10] K. ITÔ et H. P. MACKEAN : *Diffusion Processes and Their Sample Paths*, vol. 1431. Springer, 1996.
- [11] J.-P. KAHANE : Sur le chaos multiplicatif. *Ann. Sci. Math. Québec*, 1985.
- [12] J.-P. KAHANE et J. PEYRIÈRE : Sur certaines martingales de benoit mandelbrot. *Advances in Mathematics*, 22(2):131 – 145, 1976.
- [13] H. LACONIN, R. RHODES et V. VARGAS : Complex gaussian multiplicative chaos. *arXiv preprint arXiv :1307.6117*, 2013.
- [14] G. F. LAWLER : *Conformally invariant processes in the plane*, vol. 114. AMS Bookstore, 2008.

- [15] M. LEDOUX et M. TALAGRAND : *Probability in Banach Spaces : isoperimetry and processes*, vol. 23. Springer, 1991.
- [16] T. MADAULE : Maximum of a log-correlated gaussian field. *arXiv preprint arXiv :1307.1365*, 2013.
- [17] B. B. MANDELROT : Intermittent turbulence in self-similar cascades- divergence of high moments and dimension of the carrier. *Journal of Fluid Mechanics*, 62(2):331–358, 1974.
- [18] P. MÖRTERS et Y. PERES : *Brownian motion*, vol. 30. Cambridge University Press, 2010.
- [19] M. MOTOO : Proof of the law of iterated logarithm through diffusion equation. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 10(1):21–28, 1959.
- [20] D. REVUZ et M. YOR : *Continuous martingales and Brownian motion*, vol. 293. Springer, 1999.
- [21] R. RHODES : Processus stochastiques multifractaux et applications. 2012.
- [22] R. RHODES et V. VARGAS : Gaussian multiplicative chaos and applications : a review. *arXiv preprint arXiv :1305.6221*, 2013.
- [23] R. RHODES et V. VARGAS : Liouville brownian motion at criticality. *en préparation*, 2013.
- [24] R. ROBERT et V. VARGAS : Gaussian multiplicative chaos revisited. *The Annals of Probability*, 38(2):605–631, 2010.
- [25] S. SHEFFIELD : Gaussian free fields for mathematicians. *Probability theory and related fields*, 139(3-4):521–541, 2007.