Géométrie Plane & Géométrie Spatiale

www.eleves.ens.fr/home/yhuang

20 Octobre, 2011

1 Autour du théorème de Ptolémée

Démonstration 1
Lemme: **La loi des sinus**
1) Rappeler la définition du déterminant. L'interpréter géométriquement.
2) En déduire la loi des sinus: dans un triangle non réduit ABC, on a toujours $\frac{|AB|}{\sin c} = \frac{|BC|}{\sin b} = \frac{|CA|}{\sin a}$.
On pourrait s'amuser à trouver d'autres preuves, sans doute plus simples. Consulter Wikipédia par exemple...
3) Démontrer le théorème.

Ind:
Il ne reste qu'à exprimer les rapports entre les longeurs en terme du rapport entre les sinus. Puis en utilisant la proposition au tout début, les sinus se simplifient.

Démonstration 2
Lemme: La loi des cosinus

Ind:
Exprimer les diagonales à partir de la loi de cosinus puis éliminer les termes en cos.

Démonstration 3
Lemme: Une identité trigonométrique
Démontrer d'abord le lemme suivant (qui porte lui aussi le nom du théorème de Ptolémée...)
Soient a, b, c trois réels quelconques. Montrer que $\sin(a)\sin(b) + \sin(c)\sin(a + b + c) = \sin(a + c)\sin(b + c)$.
Maintenant, en exprimant par exemple $|AB| = 2\sin(\alpha/2)$ avec α un angle bien choisi, démontrer le théorème de Ptolémée.

Ind:
Pour la formule trigonométrique, il n'y a pas de difficulté majeure: il suffit d'utiliser l'identité bien connue: $2\sin(x)\sin(y) = \cos(x - y) - \cos(x + y)$. Il reste à exprimer les côtés par les angles en utilisant le théorème de l'angle inscrit (ce qui fournit d'ailleurs une autre preuve de la loi des sinus).

Démonstration 4
Une astuce: Les triangles semblables, transformations du plan

Cette preuve est astucieuse.

Ind:
L'astuce consiste à choisir judicieusement un point sur un diagonal, disons un point P sur AC, à ce que $\triangle DBC \sim \triangle ABP$ et $\triangle ABD \sim \triangle PBC$.

Démonstration 5
Nombres complexes, coordonées polaires

Cela revient à exprimer l'une des démonstration en termes de nombres complexes...

Démonstration 6
Rapport anharmonique

Démonstration 7
Démonstration par inversion
On fixe un point A sur le plan et un nombre réel positif k. On appelle l'inversion de pôle A et de puissance k l'application qui à chaque point M autre que A de l'espace associe l'unique point M' tel que $det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = 0$ et $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM'} = k$.
0) Montrer que le point M' à pour expression: $M' = A + \frac{k.\overrightarrow{AM}}{||\overrightarrow{AM}||^2}$.
1) On démontre un résultat préliminaire: si A, B, C, D étaient cocycliques, l'images de B, C, D par l'inversion de pôle A et de puissance quelconque seraient alignées.
Pour s'en convaincre, on utilise par exemple les nombres complexes. On suppose, quitte à faire une homothétie et une translation que $A = 0$ et $(B, C, D) = (1 + e^{i\theta_1}, 1 + e^{i\theta_2}, 1 + e^{i\theta_3})$.
Montrer alors que l'images de B, C, D par l'inversion de pôle $A = 0$ et de puissance 1 et bien une droite.
2) Utiliser ce résultat pour démontrer le théorème de Ptolémée.
On pourra, si on est perdu dans les calculs, utiliser l'identité suivante: $P'Q' = \frac{r^2.PQ}{OP.OQ}$.

Ind:
Pour 1), on peut démontrer que les parties réelles des images sont égales à $\frac{1}{2}$.
Pour 2), c'est un calcul en utilisant les relation sur les triangles semblables.

Démonstration 8
Partant de l'égalité $(a - b)(c - d) + (a - d)(b - c) = (a - c)(b - d)$ dans $\mathbb{C}$, on obtient **l'inégalité de Ptolémée**.
On obtient ensuite l'égalité de Ptolémée.

Ind:
Il suffit d'utiliser l'inégalité triangulaire.
En outre, on a l'égalité dans l'inégalité précédente ssi $Arg\frac{a-b}{a-d} = -Arg\frac{c-d}{c-b}$ (i.e. $\angle A + \angle C = 2\pi$), ce qui revient à dire que les points A, B, C, D sont cocycliques.

Démonstration 9
Inversion muette.

On se propose de démontrer l'inégalité de Ptolémée en utilisant l'inégalité triangulaire.
1) Soient x, y trois vecteurs quelconques du plan. Montrer que $|\frac{x}{|x|^2} - \frac{y}{|y|^2}| = \frac{|x-y|}{|x|.|y|}$.
C'est en fait une inversion de pôle 0 et de puissance 1...
2) Appliquons l'inégalité triangulaire pour les vecteurs $b = \overrightarrow{AB}$, $c = \overrightarrow{AC}$, $d = \overrightarrow{AD}$ et en déduire l'inégalité de Ptolémée. Interpréter ce résultat géométriquement.
3) Discuter le cas d'égalité et conclure.

2 Corollaires & Applications

Corollaire 1
Cas où ABC est un triangle équilatéral
Corollaire 2
(Difficile) Montrer que pour tout entier n, on peut trouve n points sur le plan euclidien tels que la distance entre n'importe quels deux points soit un entier.
Corollaire 3
(Difficile *2) **Théorème de Casey** & **Théorème de Euler-Feuerbach**

3 Notes Historiques

Ptolomée (90? - 168) était un astronome et astrologue grec qui vécut en Égypte.

4 Bonus: Théorème de Sylvester-Gallai

On se donne un ensemble fini de points dans le plan non tous alignés. Montrer qu'il existe une droite passant par exactement deux de ces points.
On pourra penser à utiliser l'argument de descente infinie.

Solution (Kelly):
On note notre ensemble fini $\mathcal{F}$.
On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites passant par deux points dans $\mathcal{F}$. Alors $\mathcal{D}$ est fini par un argument combinatoire.
Par un argument combinatoire du même type, l'ensemble des distances non nulles d'un point dans F à une droite dans $\mathcal{D}$ est fini. On peut donc choisir un couple $(P \in \mathcal{F}, D \in \mathcal{D}$ tel que la distance entre eux soit minimale.
Montrons qu'on peut alors trouver un autre couple tel que la distance entre ses deux éléments soit plus petite que la distance entre P et D, ce qui sera absurde.
Par hypothèse, D contient au moins 3 points. Donc si on note H le point obtenu en projectant P orthogonalement sur D, sans perte de généralité, on peut supposer que les points $A, B \in \mathbb{F}$ sont sur le même coté, avec $|PA| < |PB|$. Alors on vérifie que A et la droite passant pas B et P est un couple qui convient.

5 Géométrie Spatiale

Ex: Formule du double produit vectoriel
Établir la formule suivante dans l'espace: $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})\overrightarrow{w}$, où $\wedge$ désigne le produit vectoriel dans l'espace.
En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ avec $\overrightarrow{a} \neq 0$.
On pourra traiter d'abord le cas où $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont orthogonaux.

6 Autres

X 2007
Soient $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les sommets d'un polygone dans le plan complexe. Exprimer son aire.
—
Ex: X 2007
À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur les trois réels α, β, γ existe-t-il un triangle ABC pour lequel les trois égalités $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \alpha$, $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \beta$, et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \gamma$ soient vérifiées?

Ind:
Utiliser le fait que $2|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{BC}|^2$.