Suites Réelles

www.eleves.ens.fr/home/yhuang

11.1 Exercices

1) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée telle que $x_n + \frac{x_{2n}}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{2}{3}$.
2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réele. LASSE:
i) cette suite est convergente;
ii) cette suite est bornée et admet une seule valeur d'adhérence.
3) Montrer que la suite $x_n = \sin x_n$ est convergente. On pourra montrer qu'elle est de Cauchy.
4) Montrer qu'une suite convergente dans $\mathbb{Z}$ est stationnaire.
5) Suites homographiques.
6) Densité modulo 1 avec:
i) (u_n) diverge et $\Delta(u_n)$ tend vers 0;
ii) $\Delta(u_n)$ diverge et $\Delta(\Delta(u_n))$ tend vers 0.
7) Montrer qu'une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est convergente ssi elle est stationnaire.
8) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite convergente. La suite $(E(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente?

11.2 Produit de Cauchy

Soient deux suites réelles convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u \in \mathbb{R}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v \in \mathbb{R}$. Chercher $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}(u_0v_n + u_1v_{n-1} + \cdots + u_nv_0)$.

11.3 Suite extraite d'une suite de Cauchy

1) Montrer que toute suite extraite d'une suite de Cauchy est encore de Cauchy.
2) Montrer que de toute suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite telle que $\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}, q \geq p, |x_{n_p} - x_{n_q}| \leq \frac{1}{2^p}$.

11.4 Suite divergente de pas tendant vers 0

Pour une suite réelles (u_n), on définit sa suite différence $\Delta_n = u_n - u_{n+1}$.
Soit (u_n) une suite croissante tendant vers ∞, et on suppose de plus que Δ_n tend vers 0. Montrer alors l'ensemble $A := \{u_n - E(u_n) | n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0, 1]$.
On considère ensuite la suite différence de la suite différence (notée Δ^2)...

11.5 $\limsup$ et $\liminf$

On définit la $\limsup$ et la $\liminf$. Montrer que pour une suite réelle de pas tendant vers 0, l'ensemble de ses valeurs d'adhérences est $[\liminf, \limsup]$.

On pourra commencer par montrer que cet ensemble est un intervalle.

11.6 Compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{R}$

Montrer qu'une suite réelle positive admet ou bien une sous-suite convergente vers un nombre réel, ou bien une sous-suite tendant vers $+\infty$.

11.7 Autour du théorème de Cesaro

0) Montrer que si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle de limite $p \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{p_0 p_1 \dots p_n} = p$.
1) Transformation de Toeplitz, une CNS.
2) Applications.

11.8 Nombre d'or

1) Justifier les convergences, puis montrer que $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}$. On pourra penser à construire une suite (définie par récurrence) croissante et majorée par exemple.
2) Trouver cette valeur.
3*) Discuter la convergence de $\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\sqrt{a_3+\dots}}}$ selon la valeur de $\limsup\limits_{t\to\infty} \frac{\log\log a_n}{n}$.

11.9 Suites adjacentes

Soit u_0 un nombre naturel, et on considère la suite définie (par récurrence) par $u_{n+1} = u_n^2 + 1$. Montrer qu'il existe un nombre réel α tel que $u_n = E[\alpha^{2^n}]$.
On pourra penser au théorème de segments emboîtés ou méditer sur le titre de l'exercice.

11.10 "Que faire si on n'a rien préparé pour sa colle?" -W.W.

On sort le lemme sous-additif...
On dit qu'une suite réelles est sous-additive si $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, u_{n+m} \leq u_n + u_m$. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sous-additive, alors ou bien la suite $\frac{u_n}{n}$ décroît vers $-\infty$, ou bien la limite de la suite $\frac{u_n}{n}$ existe.

11.11 Développement en série de Engel

11.12 Fractions continues

cf. J.W.S. Cassels...

11.13 Suite de Perrin

On définit par récurrence la suite (u_n) par: $u_0 = 3, u_1 = 0, u_2 = 2$ et $u_{n+3} = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
1) Montrer que $2|u_{2k}$ si $k \in \mathbb{N}$.
2) Montrer que plus généralement, $p|u_{pk}$ pour tout p premier et k entier naturel.