Nombres Complexes

—

1 Formule de De Moivre

Démontrer la formule de De Moivre: $(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos n\phi + i\sin n\phi$.
Rappeler les interprétations graphiques pour les additions et multiplications complexes.
Faire l'interprétation graphique de la formule de De Moivre.

2 Racines de l'unité

Soit n un entier strictement positif. Situer les racines n-ième de l'unité sur la boule unité du plan complexe.
À l'aide de la figure, conjecturer la somme de toutes les racines de l'unité.
Démontrer proprement la conjecture.
Que peut-on dire de leur produit?

3 Racines complexes d'un polynôme réel de degré impair

Soit P un polynôme à coefficients réels.
Soit x une racine complexe de P, i.e. $P(x) = 0$.
Montrer que le conjugué de x, $\overline{x}$, est aussi une racine complexe de P.
Que peut-on dire sur le nombre de racines complexes non réels de ce polynôme?
On admet le théorème fondamental de l'algèbre, alors un polynôme de degré $n \neq 0$ admet n racines complexes éventuellement confondues.
Montrer que P admet une racine réelle.

4 Exponentielle complexe

Montrer que l'exponentielle complexe n'est pas injective.

—

5 Inégalité de Bell

Montrer qu'il existe des points a, a', b, b' sur la sphére unité de l'espace tels que $(< a, b > + < b, a' > + < a', b' > - < b', a >) \geq 2$ (on confond ici les points avec leurs coordonées).
Intérêt: Pour montrer que Monsieur Einstein a eu tort quand il a postulé l'existence de variables cachées.

6 Demi-plan complexe

On définit $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid Im\ z > 0\}$ le demi-plan du plan complexe.
Montrer que $z \in \mathbb{H}$ ssi $-\frac{1}{z} \in \mathbb{H}$.
On se donne z, a deux nombres complexes.
Montrer que $|1 - z\overline{a}|^2 - |z - a|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |a|^2)$.
En déduire que si $|a| < 1$, alors $|z| = 1$ ssi $f(a, z) = |\frac{z-a}{\overline{a}z-1}| = 1$.
Que se passe-t-il si $|z| < 1$?

7 Identité de Lagrange et l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Page 20, Complex Analysis, Eberhard Greitag & Rolf Busam