Limites, continuité

www.eleves.ens.fr/home/yhuang

15.1 IMC

15.1.1 IMC 2009, 1

Soient f et g deux fonctions réelles telles que $f(r) \leq g(r)$ pour tout nombre rationnel r. Est-ce que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ si on suppose de plus que:
1) f et g sont croissante.
2) f et g sont continues.

15.1.2 IMC 2011, 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit qu'un point x est “sombre” s'il existe une point $y \in \mathbb{R}, y > x$ tel que $f(y) > f(x)$. Soient $a < b$ deux nombres réels, et supposons que:
1) Tous les points dans l'intervalle $]a, b[$ sont sombres;
2) a et b ne sont pas sombres.
Montrer que $f(a) = f(b)$.

15.1.3 IMC 2006, 2

Prérequis: une fonction 1-lipschizienne est continue.
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout couple réel (a, b), l'image de $f([a, b])$ soit un intervalle fermé de longueur $b - a$.

15.2 Une famille de fonctions continues

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Montrer que f est continue.

15.2.1 Si f^n admet un point fixe...

Soit f une fonction réelle continue telle que f^n admette un point fixe. Montrer que f admet un point fixe.

15.3 Fonction dilatante

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dilatante si $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$.
1. Donner un exmple de fonction dilatante non monotone.
Dans la suite, on suppose de plus que f est continue.
2. Montrer que f est strictement monotone, puis f est bijective.

3. On suppose qu'il existe un intervalle réel $[a, b]$ stable par f. Montrer que f admet un point fixe. Si f est croissante, montrer que f est identité sur $[a, b]$.
4. Soit A l'ensemble des points fixes de f. Montrer que si A est un intervalle fermé ou vide. Supposons A non vide. On se donne ensuite une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f^{-1}(x_n)$. Montrer que (x_n) est constante ou elle converge vers une extrémité de A.

15.4 Fonction continue de [0,1] dans [0,1]

Montrer qu'une fonction continue f de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ admet un point fixe.
Les deux questions suivantes sont indépendantes.
Montrer que si f, g sont deux telles fonctions telles que $f \circ g = g \circ f$, alors il existe un point $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = g(x)$.
Montrer qu'il exite une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $f(u_n) = u_n^n$. Si on suppose de plus que f est strictement décroissante, montrer que $\forall n \geq 1$, u_n est unique et limite de $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$.

15.5 Conjugaison des homéomorphismes de [0,1] dans [0,1] (X-ENS)

Soit G l'ensemble des homómorphismes de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$. Soit f (resp. g) un élément de G tels que les seuls points fixes pour f (resp, g) sont $\{0, 1\}$. Montrer que f et g sont conjugués dans G, i.e. il existe un élément h de G tel que $f \circ h = h \circ g$.

15.6 Module de continuité[1]

On note $\omega_f(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)|, |x - y| \leq \delta\}$ si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. Montrer que ω_f est une fonction continue.

15.7 Nombres de rotation du tore (X-ENS)

0) Montrer qu'une application continue de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{Z}$ est constante.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue croissante, telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + 1) = f(x) + 1$. On va montrer que $\frac{f^n(x)}{n}$ admet une limite indépendante de x.
α) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f^n(x) - f^n(y)| \leq k$.
β) Montrer que pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, $f^n(0) + f^m(0) - 1 \leq f^{n+m}(0) \leq f^n(0) + f^m(0) + 1$.
γ) Vérifier que la limite de la suite $(u_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ existe et appartient à $[f(0) - 1, f(0) + 1]$. Conclure.

15.8 Courbe de Peano

[1]Un peu de connaissance sur l'uniforme continuité aidera à mieux comprendre la situation.