Nombres Réels

www.eleves.ens.fr/home/yhuang

Draft!

10.1 Quelques inégalités classiques

10.1.1 Inégalité de Schur

Soient a, b, c, k réels positifs. Montrer que $a^k(a-b)(a-c)+b^k(b-c)(b-a)+c^k(c-a)(c-b)\geq 0$.

10.1.2 Inégalité de Tchebychev

1) Soient $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$, $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq 0$. Alors $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k b_k) \geq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k}{n}$.

2) Soient $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$, $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$.Alors $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k b_k) \leq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k}{n}$.

10.1.3 Exemples

1) Montrer que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq \frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}$.
2) Montrer que si a, b, c sont les longueurs des côtés d'un triangle, alors ....

10.2 Quelques exercices sur la fonction partie entière

10.2.1 Une égalité

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(\sqrt{n})+E(\sqrt{n+1})=E(\sqrt{4n+2})$.

10.2.2 Une autre égalité

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} E(x+\frac{k}{n}) = E(nx)$.

10.3 $(1+\sqrt{2})^n$

Montrer qu'il existe un couple unique de suites à valeurs entières (a_n) et b_n telles que:
1) $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.
2) Montrer que $|a_n^2 - 2b_n^2| = 1$.

10.4 Construction de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$

10.5 Parties entières et divisibilité

Montrer que $\frac{(2m)!(2n)!}{(m+n)!m!n!}$ est un entier.

10.6 Exemple de partie dense dans $\mathbb{R}$

Montrer que l'ensemble des nombres 2-adiques est dense dans $\mathbb{R}$.

10.7 Approximation d'un irrationnel par un rationnel

On note, pour un nombre réel α, $||\alpha||$ la distance entre α et l'ensemble des entiers. Concrètement, $||\alpha|| = \min\{\alpha - E(\alpha), E(\alpha) + 1 - \alpha\}$.
1) Montrer que $\forall z \in \mathbb{Z}, ||\alpha + z|| = ||\alpha||$.
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $Q \in \mathbb{R}$.
2) Montrer que $\exists q \in \mathbb{Z}, 0 < q < Q$, $||q\alpha|| < Q^{-1}$.

10.8 Compléments

10.8.1 Valuations p-adiques et ultramétrique

On dit qu'une fonction de $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$ est une fonction valeur absolue si:
i)
ii)
iii)
iv) , et si on plus ..., on dit que cette fonction valeur absolue est ultramétrique.
Soit p un nombre premier. On définit, pour tout $z \in \mathbb{Z}$, la valuation p-adique $\sup\{i \in \mathbb{N}, p^i | z\}$. Cet entier est alors unique et on le note $val_p(z)$.
On étend ensuite cette définition aux nombres rationnels en définissante, pour un nombre rationnel $\frac{u}{v}$, $val_p(\frac{u}{v}) = val_p(u) - val_p(v)$.
Montrer que val_p est une fonction valeur absolue ultramétrique.

10.8.2 Théorème d'Ostrowski

On définit sur l'ensemble des fonctions valeur absolue sur $\mathbb{Q}$ la relation d'équivalence suivante: $|.| \sim ||.||$ ssi $\exists c \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{c}|.| \leq ||.|| \leq c|.|$ (et on admet que c'est une relation d'équivalence).
Monter que toute fonction valeur absolue sur $\mathbb{R}$ non triviale est soit équivalente à la valeur absolue usuelle, soit à une valeur absolue p-adique ci-dessus.