Entiers naturels

www.eleves.ens.fr/home/yhuang

La notation C_n^k désigne le nombre de sous-ensembles à k éléments dans un ensemble à n éléments.

18.1 $n = 2^m(2k+1)$

Tout entier naturel non nul n s'écrit de manière unique sous la forme $2^m(2k+1)$ avec $(m,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$. On pourra faire une récurrence forte sur $|n|$, ou bien considérer l'ensemble $\{m \in \mathbb{N}, 2^m|n\}$.

18.2 $\sum\limits_k n_k k!$

Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $0 \leq n \leq (p+1)! - 1$ un entier naturel. Montrer qu'il existe une unique suite $(n_k)_{0\leq k\leq p}$ avec $\forall k, 0 \leq n_k \leq k$ telle que $n = \sum\limits_k n_k k!$.

18.3 Une somme binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}, 0\leq 2k\leq n} C_n^k$. On pourra penser à former son "complémentaire".

18.4 Une identité

Soit $(n,p,q) \in \mathbb{N}^3$ avec $n \leq p+q$. En regardant $(1+x)^p(1+x)^q$, montrer que $C_{p+q}^n = \sum\limits_{0\leq k\leq n} C_p^k C_q^{n-k}$.

Proposer une interprétation combinatoire.

18.5 Un calcul

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum\limits_{0\leq k\leq n} (-1)^k C_{2n+1}^k$.

18.6 Formule d'inversion de Pascal

Soient (u_n), (v_n) deux suites telles que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \sum\limits_{0\leq k\leq n} C_n^k u_k$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum\limits_{0\leq k\leq n} (-1)^k C_n^k v_k$.

18.7 Une équation binomiale

Considérons l'équation diophantienne $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+2}$ d'inconnues $(k, n) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que si F_i est le i-ième nombre de Fibonacci, alors le couple $(n = F_{2i+2}F_{2i+3} - 1, k = F_{2i}F_{2i+3} - 1)$ est une solution d'équation pour tout $i \in \mathbb{N}$.[1]

[1] Ceci permet de montrer certaines propriétés sur le triangle de Pascal, cf. Wikipédia.