Dérivabilité (fonctions de classe $\mathcal{C}^1$)

www.eleves.ens.fr/home/yhuang

17.1 Vrai ou faux

1) Il existe fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f' = f \circ f$. (IMC 2002)
2) Si $f : [0,1] \to [0,1]$ dérivable telle que $f \circ f = f$, alors f est constante ou $f = Id_{[0,1]}$.
3) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f^2 + (1+f')^2 \leq 1$, alors $f = 0$. (X 2006)
4) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = l$, alors $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = l$. A-t-on la réciproque?

17.2 Théorème de Rolle

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que s'il existe un couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\ln(\frac{f(a)}{f(b)}) = b - a$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = f(c)$.
Généraliser cette question au cas d'une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

17.3 Fonctions usuelles revisitées (IMC 1994)

Soit $f \in \mathcal{C}^1]a,b[$ telle que $\lim\limits_{x\to a+} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to b-} = +\infty$ et $f' + f^2 \geq -1$. Montrer que $b - a \geq \pi$.
Trouver un exemple de $b - a = \pi$.
On pourra commencer par calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \arctan(f(x)) + x$.

17.4 Un bon exo (IMC 2002)

On va montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $y \in [0,1]$ l'équation $f(x) = y$ admet une infinité de solutions.
1) On fixe un $y_0 \in [0,1]$. Montrer que l'ensemble des solutions de $f(x) = y_0$ admet un point d'accumulation x_0.
2) Montrer que la dérivée de f en ce point est nulle.
3) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un intervalle ouvert I_{x_0} contenant x_0 tel que $\forall x \in I_{x_0}$, $|f'(x)| < \epsilon$.
4) Montrer que la longueur de l'intervalle $f(I_{x_0})$ est plus petite que $\epsilon.I_{x_0}$.
5) Montrer que $[0,1] \subset \bigcup\limits_{x\in[0,1]} I_x$.
6*) Montrer qu'on peut recouvrir $[0,1]$ par une sous-famille de $(I_x)_{x\in[0,1]}$ d'intervalles deux à deux disjoints. Conclure.

17.5 Courbe de Peano

Il existe une fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ de classe $\mathcal{C}^0$ telle que pour tout $y \in [0,1]$ l'équation $f(x) = y$ admet une infinité de solutions.
cf. par exemple Wikipédia.

17.6 Théorème de Liouville

Soit α une racine réelle d'un polynôme P à coefficients entiers de degré $d > 1$ irréductible. Le théorème de Liouville affirme qu'on peut trouver une constante réelle $c > 0$ telle que pour tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$ ($(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$), on a $|\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{c}{q^d}$.
I) Soit $d \in \mathbb{Z}$ non carré. Alors $\sqrt{d}$ est racine de $P(X) = X^2 - d$ et ce dernier est irréductible et $P'(X) = 2X$. Soit $\frac{p}{q} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.
1) Montrer que si $|\sqrt{d} - \frac{p}{q}| > 1$ alors tout $c > 1$ convient.
2) Supposons que $|\sqrt{d} - \frac{p}{q}| \leq 1$. Montrer que $|\sqrt{d} - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{max(|2(\sqrt{d}-1)|,|2(\sqrt{d}+1)|)}|P(\sqrt{d}) - P(\frac{p}{q})|$.
3) Conclure.
II) On revient au cas général. Adopter la preuve précédente (en remarquant que $q^d P(\frac{p}{q})$ est un entier non nul) pour démontrer le théorème de Liouville.