Fondements II

www.eleves.ens.fr/home/yhuang

9.1 Question du cours un peu longue

Soit E un ensemble (fini). On note G l'ensemble des relations d'équivalence sur E. On dit qu'une relation d'équivalence $\sim$ est plus fine que $\cong$ si $\forall x, y \in E$, $x \sim y$, alors $x \cong y$.
Montrer que la relation "est plus fine que" est une relation d'ordre sur G.
Élément maximal? Élément minimal?

9.2 Quotienter pour s'en sortir

On se donne une relation $\mathcal{R}$ réflexive et transitive, mais non nécessairement antisymétrique sur un ensemble E. Le but de cet exercice est de construire une relation d'équivalence telle qu'en quotientant par cette équivalence, la relaion $\mathcal{R}$ devienne une relation d'ordre.
Exemple: Considérons l'ensemble $\mathbb{Z}$ muni d'une relation définie par $a\mathcal{R}b$ ssi $|a| \leq |b|$, avec a, b entiers.
Montrer que cette relation est réflexive et transitive, mais non nécessairement antisymétrique.
On définie ensuite la relation $\sim$ par $a \sim b$ ssi $|a| = |b|$, avec a, b entiers.
Montrer que cette relation est une relation d'équivalence. Commenter ses classes d'équivalence.
Montrer que la relation $\mathcal{R}$ devient une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}/\sim$.
Dans le cas général, on peut définir une relation d'équivalence (vérifier-le) $x \sim y$ ssi $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$.
Montrer alors que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $E/\sim$. On devrait d'abord décrire la forme de $\mathcal{R}$ sur $E/\sim$ (la relation induite), et montrer qu'elle est indépendente des représentants choisis.

9.3 Partitions et relations d'équivalence

Montrer qu'une relation d'équivalence définit une partition sur un ensemble par ses classes d'équivalence.
Montrer qu'en se donnant une partition, on peut trouver une relation d'équivalence telle que ses classes d'équivalence fassent exactement la partition donnée.

9.4 Cauchy-Schwarz, le retour

1) Dans cette question, on va représenter une relation binaire par un tableau. Soient donc E un ensemble muni d'un relation binaire $\mathcal{R}$, et le tableau $E \times E$ que je vais dessiner au tableau.
Maintenant pour chaque case, on peut soit mettre un 0, soit mettre un 1.
Dire pourquoi ce tableau détermine complètement la relation binaire et réciproquement.
Quelle serait la tête du tableau d'une relation réflexive? D'une relation symétrique? D'une relation symétrique et transitive? D'une relation d'équivalence?
2) Maintenant, supposons que $\mathcal{R}$ soit une relation d'équivalence. On note $|\mathcal{R}|$ la somme de toutes

les cases du tableau de $\mathcal{R}$, i.e. le nombre de 1 dans le tableau. On note aussi $|E/\mathcal{R}|$ le nombre de classes d'équivalence de $\mathcal{R}$[1]. Montrer alors que $|E|^2 \leq |E/\mathcal{R}| \times |\mathcal{R}|$.

9.5 Propriété universelle du quotient

Soient E, F deux ensembles et $\sim$ une relation d'équivalence sur E. On note, pour $a \in E$, $[a]$ sa classe d'équivalence, et $\pi : a \mapsto [a]$ l'application qui a un élément associe sa classe d'équivalence.
On suppose de plus qu'on a une application $f : E \to F$ qui est constante sur chaque classe d'équivalence, i.e. si $a, b \in E$, $a \sim b$ alors $f(a) = f(b)$.
Montrer qu'il existe une unique application g telle que $f = g \circ \pi$.

9.6 Pièges...

1) L'application qui à deux ensembles E et F associe $E \cup F$ est-elle une loi de composition interne?
2) Dans la définition d'une relation d'équivalence, il y a trois conditions.
Alice dit que la réflexivité est une conséquence de la symétrie et la transitivité. Elle dit que si $a \sim b$, alors $b \sim a$ par symétrie et $a \sim b \sim a$ donc $a \sim a$ par transitivité.
A-t-elle raison? Peut-on retirer la réflexivité dans la définition?

9.7 $(E^E)^E$ et $E^{E\times E}$

Montrer que se donner une loi de composition interne sur un ensemble E, c'est la même chose que de se donner une application de E dans E^E.

9.8 Équivalence sur de relations d'équivalence

Soient E un ensemble fini et G l'ensemble des relations d'équivalences sur E. Pour une relation d'équivalence u, on note $[u]$ l'ensemble de ses classes d'équivalence (non vides).
On dit dans cette colle que la relation v est un "(1-)raffinement" de u s'il existe $e \in E$ et $X \in [u]$ tels que $e \in X$, $\{e\} \neq X$ et $[v] = \{C, \{e\}, X - \{e\} | C \in [u], C \neq X\}$.
Ceci engendre une relation d'équivalence $\sim$ sur G. Plus précisément, on dit que $u \sim v$ ssi il existe une suite $\{u = u_0, \ldots, u_n = v\}$ telle que $\forall 1 \leq i \leq n$, u_{i-1} est un (1-)raffinement de u_i ou u_i est un (1-)raffinement de u_{i-1}.
Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence triviale.

9.9 $\mathbb{C}$

On considère $\mathbb{R}[X]$, l'ensemble des polynômes à une variable X à coefficient dans $\mathbb{R}$.
On définit la relation d'équivalence suivante: $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $P \sim Q$ ssi $X^2 + 1 | P - Q$. On note l'ensemble quotient $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$.
0) Vérifier que c'est une relation d'équivalence.
1) Montrer que tout polynôme est équivalent à un polynôme de degré au plus 1.
2) Calculer $(a + bX) + (c + dX)$, $(a + bX)(c + dX)$ dans le quotient.
3) Que dire de l'application $[X] \mapsto i$, $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1) \to \mathbb{C}$?

[1] La définition du cardinal n'a pas encore été vue...