Compte rendu TP Estimation spectrale

WEI Chen & ZHU Yichen

12/01/2017

I. Processus AR

1. Voir le code Matlab « genAR.m »
2. On utilise trois différentes méthodes pour calculer le périodogramme : par définition, Barlett et Welsh.

Par définition (standard):

$$\boxed{\hat{\phi}_p(\omega) = \frac{1}{N}\left|\sum_{t=1}^{N} y(t)e^{-i\omega t}\right|^2 \qquad \text{(Periodogram)}}$$

Bartlett :

$$y_j(t) = y((j-1)M + t), \qquad \begin{array}{l} t = 1, \ldots, M \\ j = 1, \ldots, L \end{array}$$

denote the observations of the jth subsample, and let

$$\hat{\phi}_j(\omega) = \frac{1}{M}\left|\sum_{t=1}^{M} y_j(t)e^{-i\omega t}\right|^2$$

denote the corresponding periodogram. The Bartlett spectral estimate is then given by

$$\hat{\phi}_B(\omega) = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L}\hat{\phi}_j(\omega)$$

Welsh :

$$\hat{\phi}_j(\omega) = \frac{1}{MP}\left|\sum_{t=1}^{M} v(t)y_j(t)e^{-i\omega t}\right|^2$$

where P denotes the "power" of the temporal window $\{v(t)\}$:

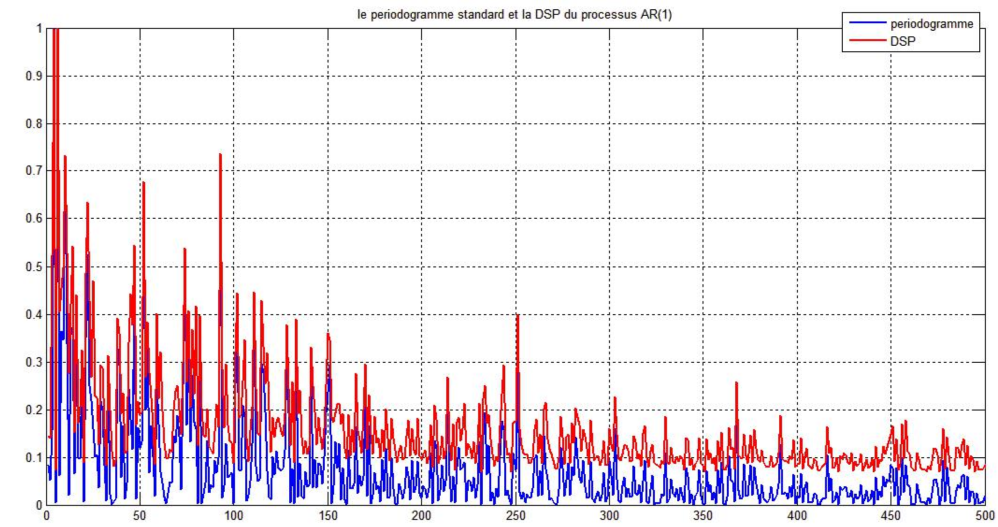
$$P = \frac{1}{M}\sum_{t=1}^{M}|v(t)|^2$$

The Welch estimate is found by averaging the windowed periodograms in (2.7.8):

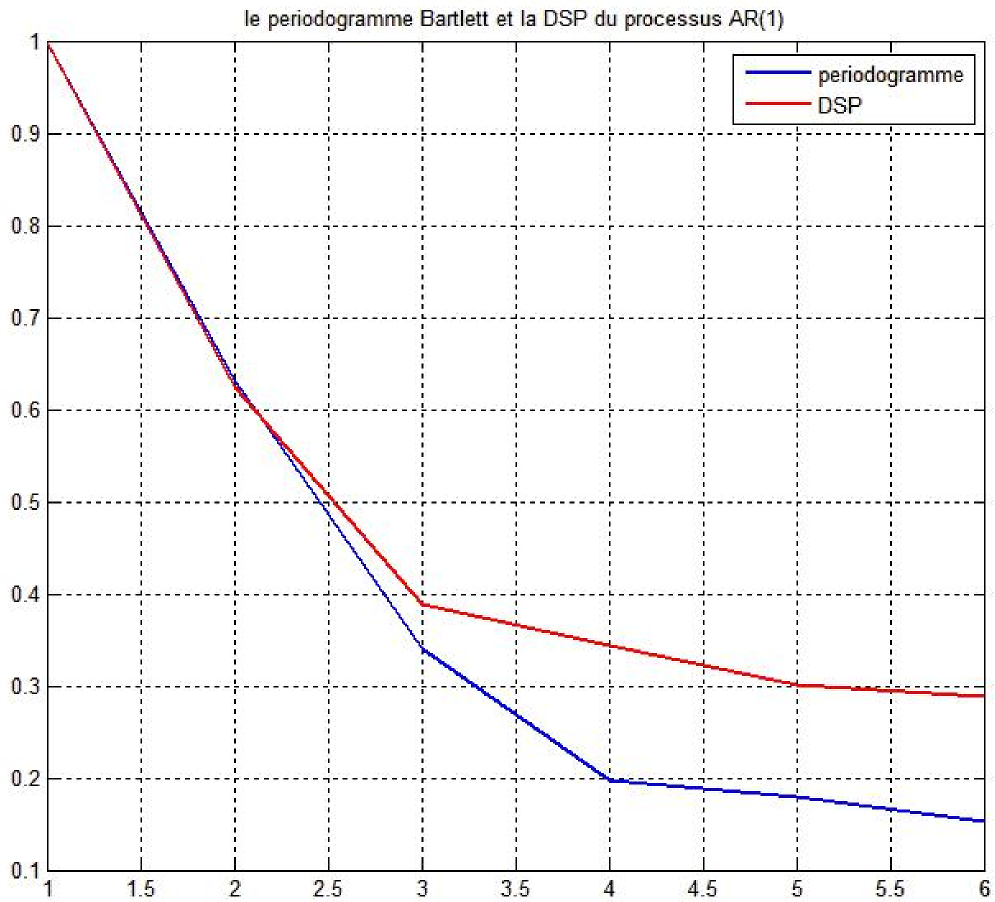
$$\hat{\phi}_W(\omega) = \frac{1}{S}\sum_{j=1}^{S}\hat{\phi}_j(\omega)$$

On code le périodogramme par ces trois méthodes en Matlab, on fait afficher les trois résultats obtenus.

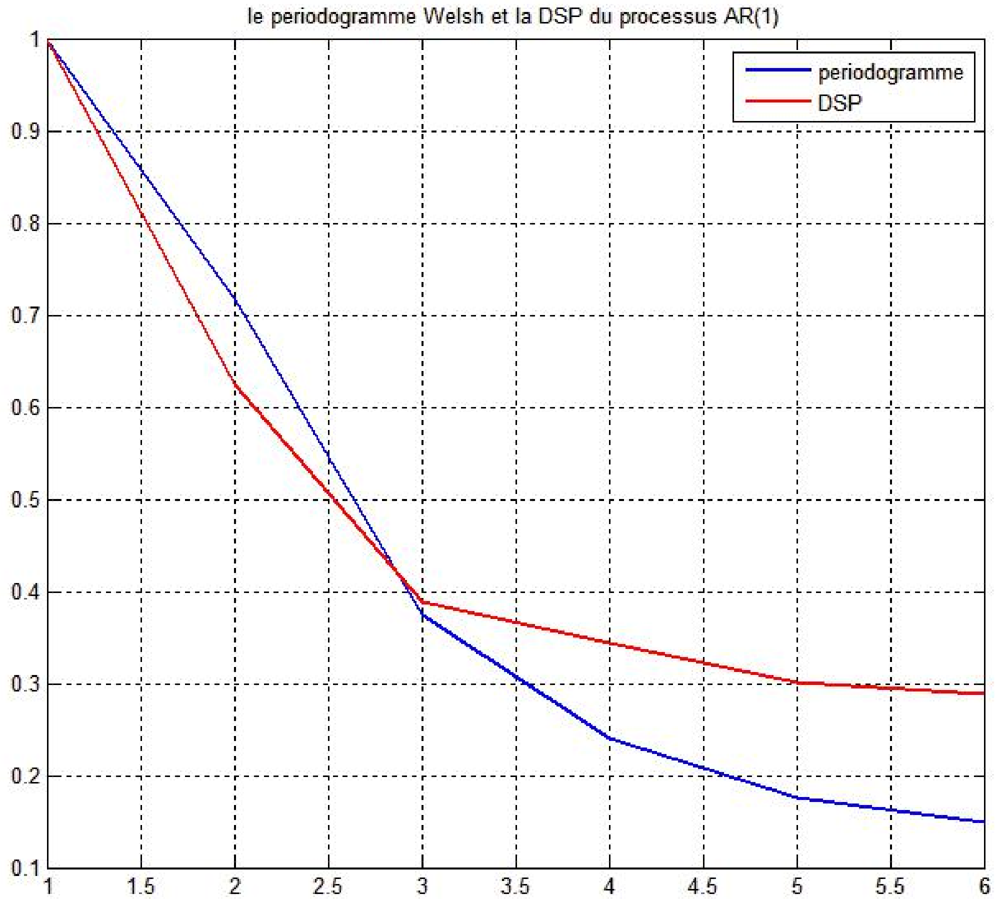
Standard :



Barlett :

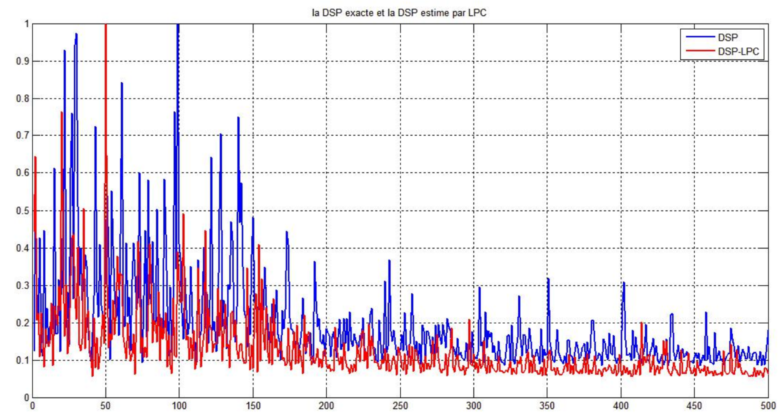


Welsh :

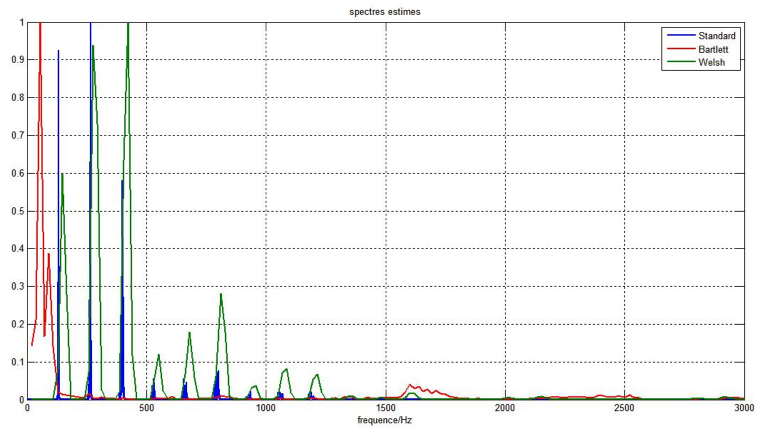


On voit bien que la méthode de Bartlett réduit la variance mais perd en résolution alors que la méthode Welsh réalise un meilleur compromis entre les deux.
On compare ensuite les biais et variances de ces estimateurs.
biaisB=biaisS=biaisW= -1.1610
varS =3.5811e-04
varB =8.5960e-05
varW =7.5104e-05
Avec S = Standard, B = Bartlett, W =Welsh.
On peut remarquer que les trois estimateurs sont biaisés de même niveau et la méthode Bartlett en découpant le processus réalise la plus petite de variance et la méthode de Welsh a aussi une variance assez petite.

3. On utilise la fonction lpc du Matlab pour la prédiction linéaire. On superpose AR estimé (en bleu) avec AR exacte (en rouge), on remarque qu'ils ont presque la même forme qui veut dire que l'éstimation est assez bonne.



4



On voit bien que ces trois enveloppes ont presque la même forme. Sur les pics importants, ils détectent tous bien des fréquences intéressantes.

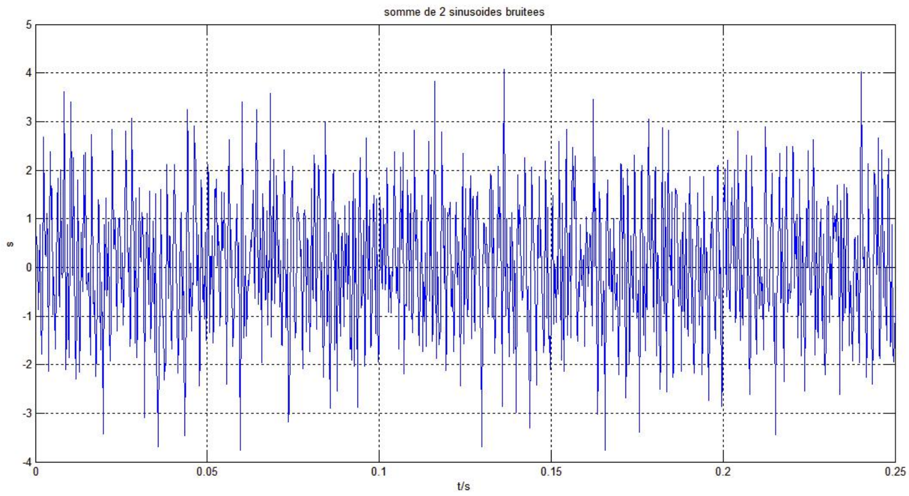
II. Somme de sinusoïdes bruitées

1. La somme de sinusoïdes bruitées s'écrit mathématiquement:

D'où est la fréquence de chaque component, est l'amplitude, est la phase ; est le bruit blanc.

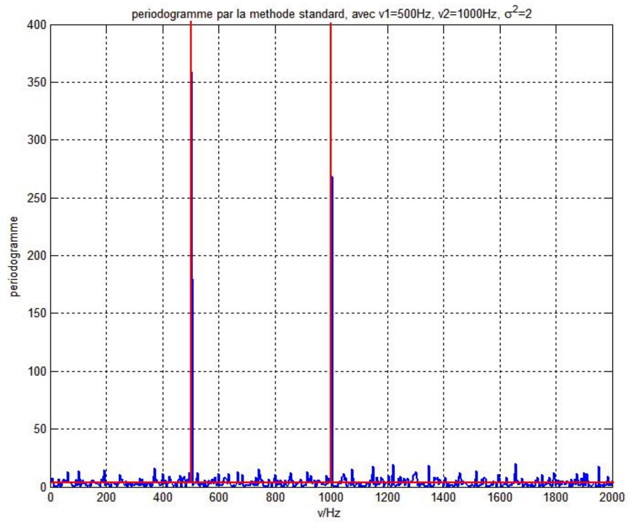
Ici, on génère un signal par K=2, v1=500Hz, v2=1000Hz, A1=A2=1, , , N=1000.

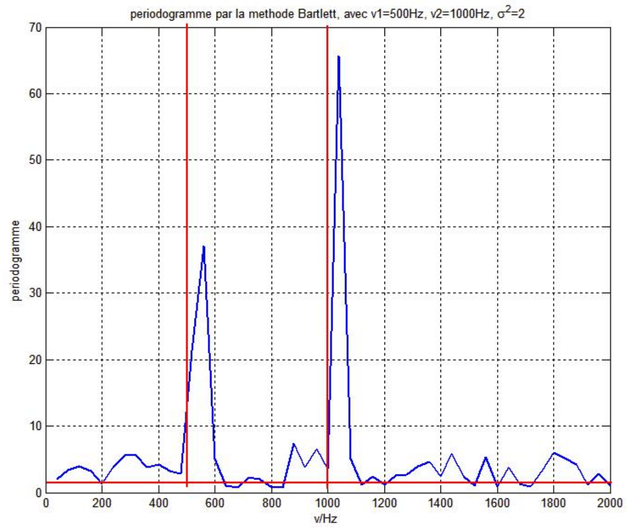
On calcule le RSB=-10.8521dB

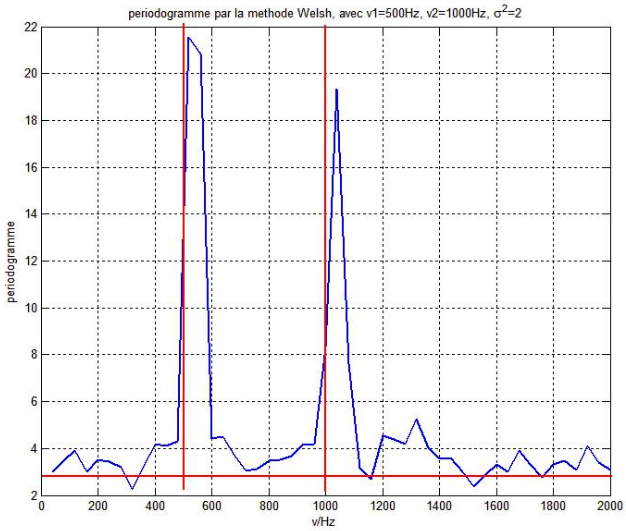


2.

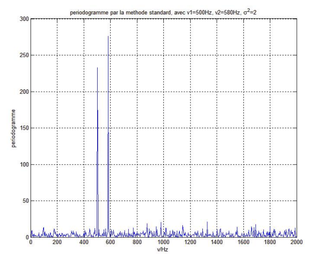
Les périodogrammes réalisés par les 3 méthodes sont affiches :

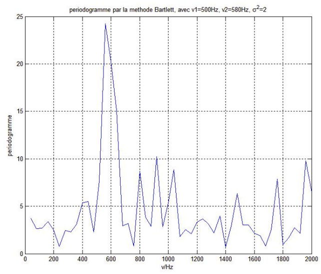


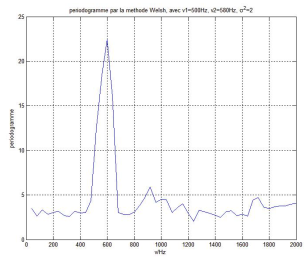




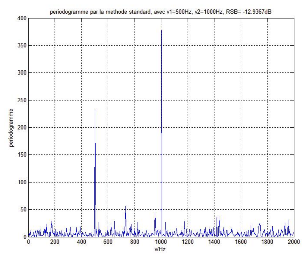
Si on change de l'écart , la resolution des methodes Bertlett et Welsh ne peuvent plus bien suivre les deux fréquences, parce qu'on voit ci-dessous qu'il y a seulement un «peak » sur les périodogrammes de Bartlett et Welsh. Mais dans ce cas, la méthode standard fonctionne bien quand même, c'est à dire que la résolution de périodogrammes standard est plus élevé que les autres.

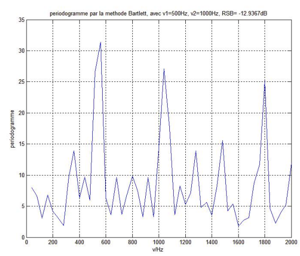


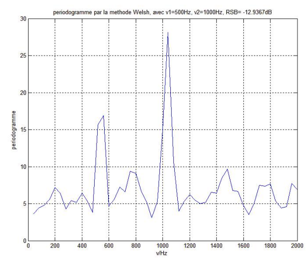




En maintenant , on varie le RSB=-12.9367dB. On observera difficilement avec la méthode Bartlett, parce qu'il y a plusieurs peaks dans la périodogrammes à cause du bruit plus fort.

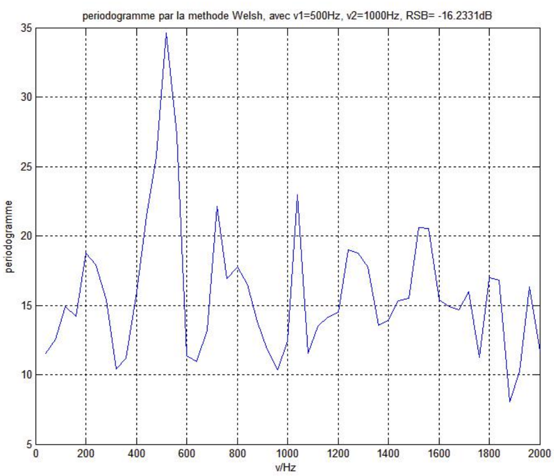






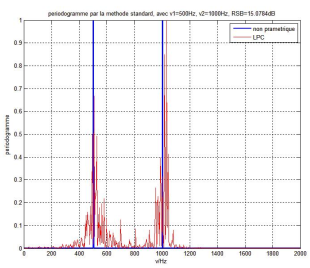
Si on diminue encore le RSB=-16.2331dB, on trouvera que la périodogrammes Welsh ne fonctionne plus également.

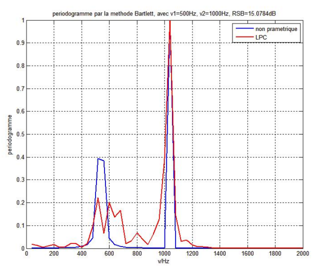
Ça prouve que la robustesse de la méthode standard est forte que celle de Bartlett et Welsh.

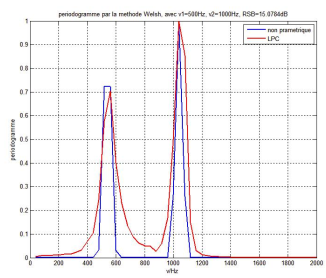


3.

Estimer un modèle AR d'ordre 4 par LPC, générer un signal AR par ce modèle, et puis calculer la périodogrammes du signal estime avec les trois méthodes précédentes, qui sont affiches ci-dessous, d'où , , RSB=15.0784dB

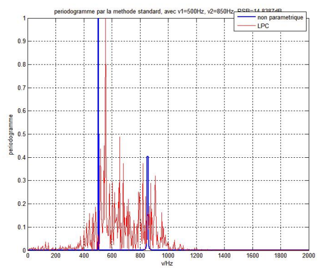


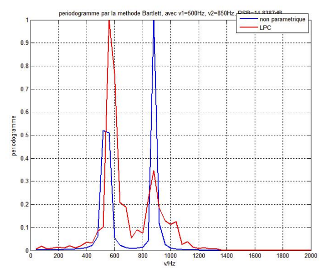


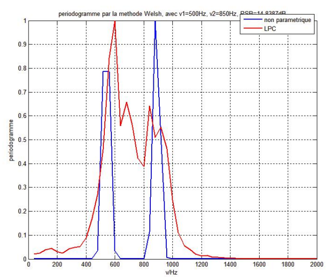


En variant l'écart des fréquences, , on obtient tous les trois périodogrammes ne peuvent plus suivre les fréquences fondamentales.

Compare l'écart dans Ex.2.2, la périodogrammes base sur le modèle AR est plus sensitive à l' écart des fréquences.

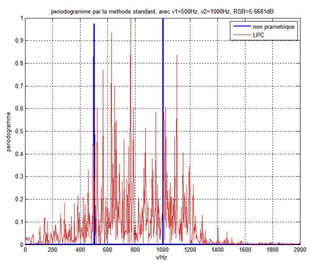


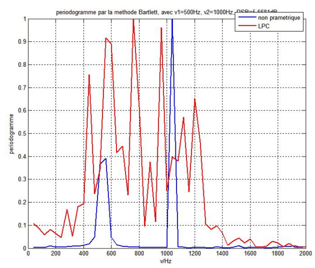


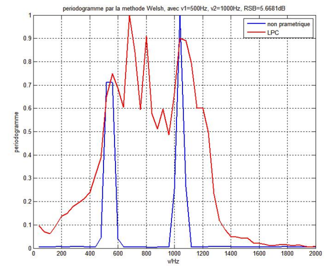


En variant l'écart des fréquences, 5.6681dB, on obtient tous les trois périodogrammes ne peuvent plus suivre les fréquences fondamentales.

Compare RSB applique dans Ex.2.2, la périodogrammes base sur le modèle AR est plus sensitive au bruit.

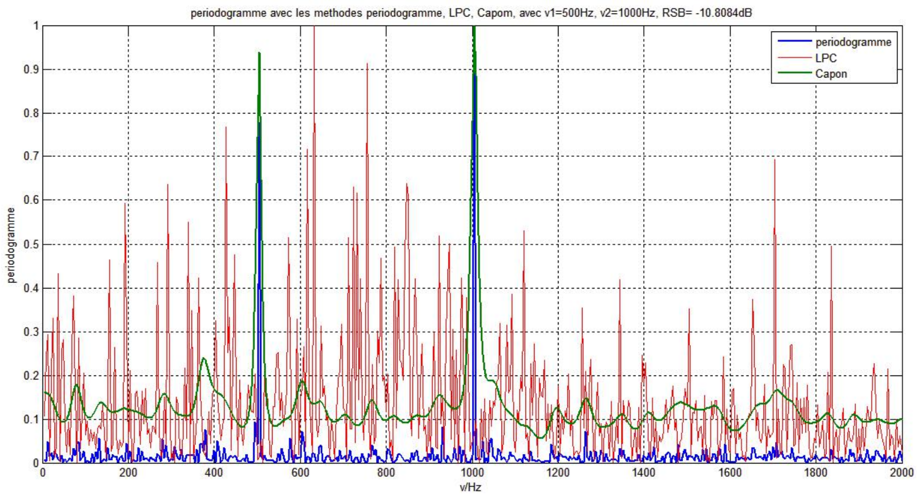






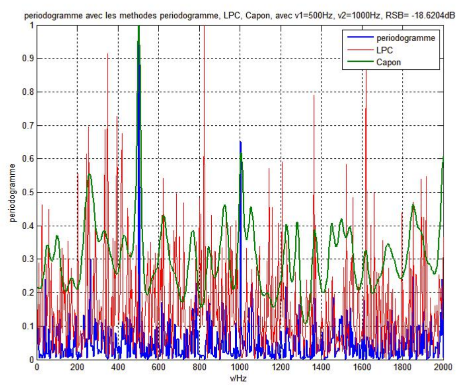
4.

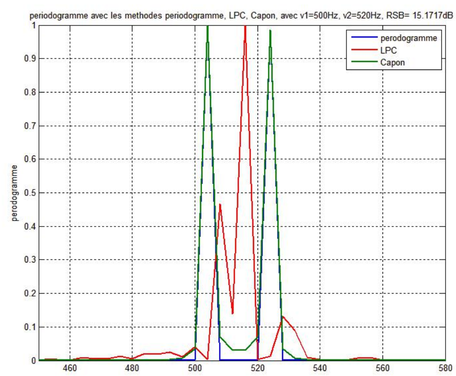
, RSB=-10.8084dB, les périodogrammes avec 3 méthodes sont affiches :



On diminue le RSB=-18.6204dB, la méthode capon fonctionne plus, qui signifie que l'estimateur Capon a une robustesse moins forte que la périodogramme standard, mais plus forte que LPC.

On diminue l'écart des fréquence a , on trouve que la périodogramme standard et Capon suivent bien les fréquences fondamentales. C'est à dire que ils ont presque la même résolution.



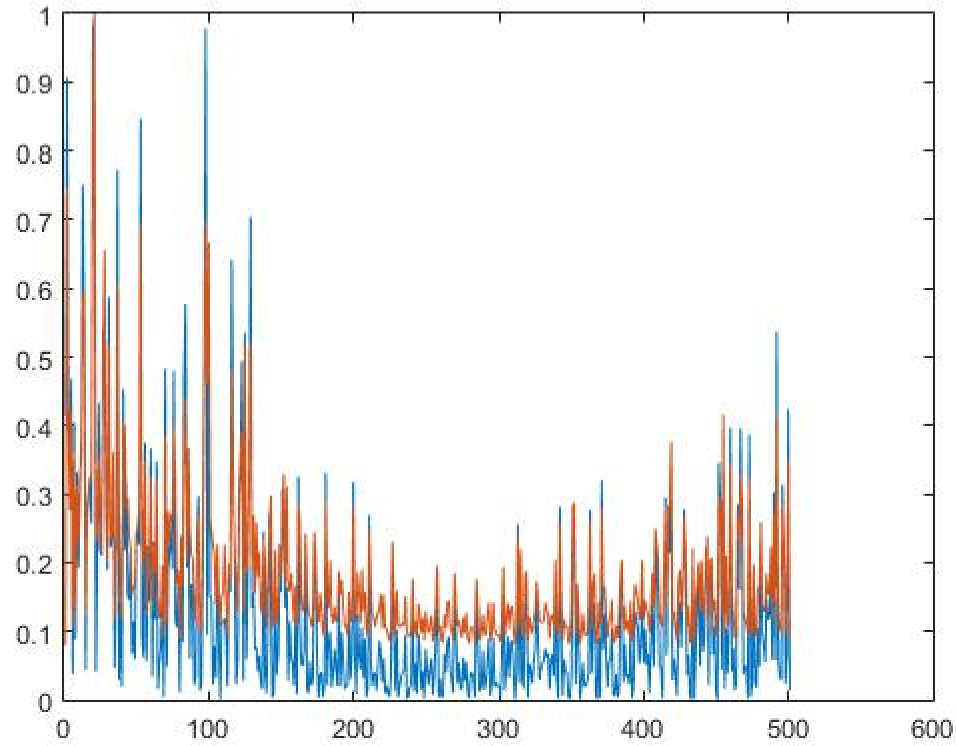


III. Processus ARMA

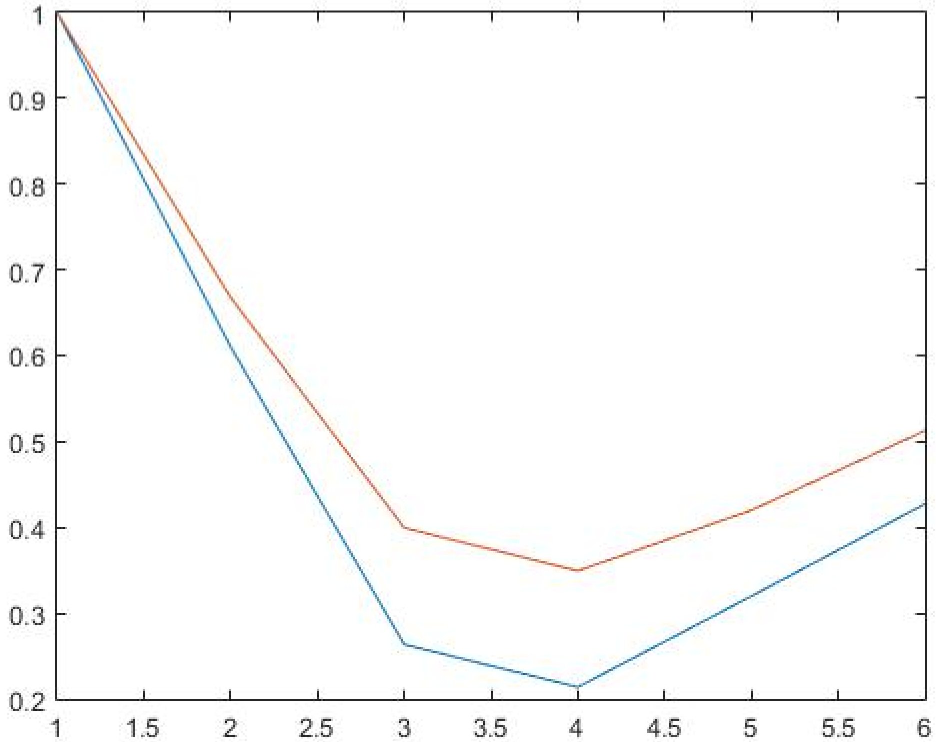
1. Voir le code Matlab genARMA.m

2. On fait afficher les périodogrammes estimés par différentes méthodes.

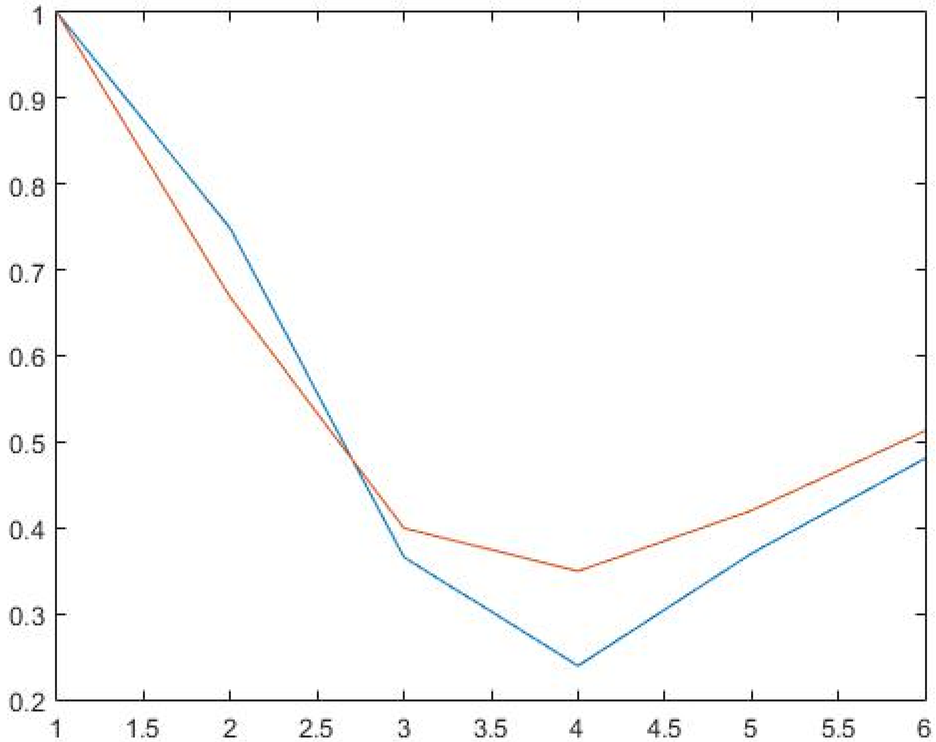
Standard:



Barlett:



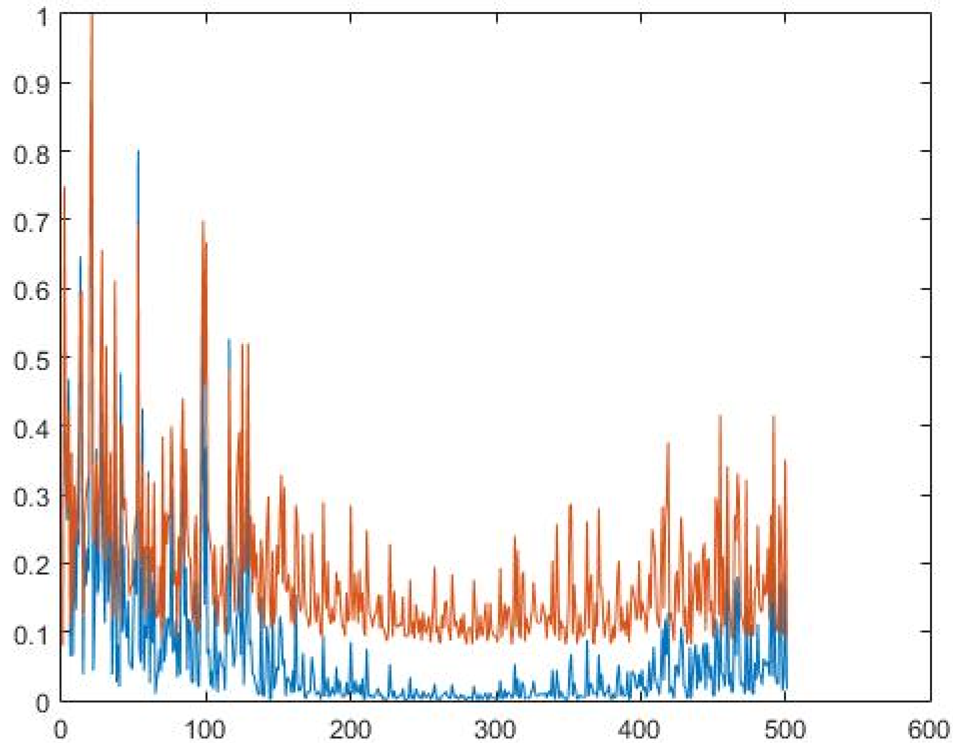
Welsh:



On remarque que la méthode de Bartlett réduit la variance mais perd en résolution alors que la méthode Welsh réalise un meilleur compromis entre les deux.
On regarde plus en détail en comparant les biais et les variances.

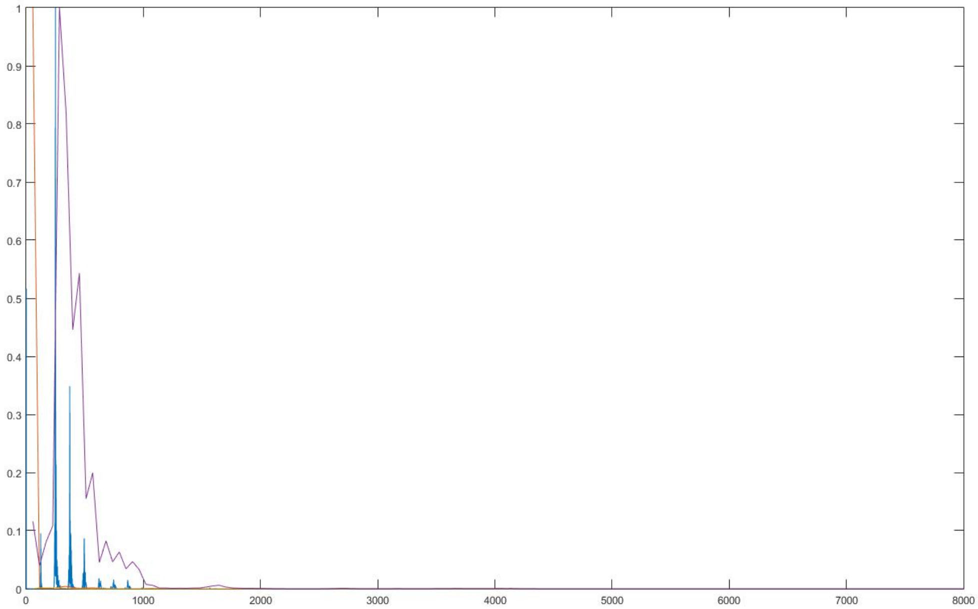
biaisS = -1,0229
biaisB = -1,0229
biaisW = -1,0263
VarS = 0,0222
VarB = 0,0052
VarW = 0,0038
On peut dire que les trois estimateurs sont biaisés du même niveau et contrairement à un processus AR, la méthode Welsh a la plus petite variance

3. On implément la méthode de Durbin en suivant les deux étapes : estimer la partie AR et puis L'erreur de AR prédicté pour la partie MA. (Voir le code Matlab)
On superpose la spectrale éstimée par cette méthode et la spectrale exacte pour voir L'efficacité del'estimation.



On remarque que les enveloppes se superposent qui dit que l'estimation est plutôt bonne.

4. On superpose les enveloppes de tous les estimateurs.



On peut voir que sur les fréquences importantes, tous les éstimateurs ont une bonne réaction. Les différence c'est la variance et la résolution, le meilleur estimateur possède le meilleur compromis entre la variance et la résolution.