TELECOM ParisTech

Institut Mines-Telecom

Ondelettes et analyse multi-résolution

Marco Cagnazzo,
cagnazzo@telecom-paristech.fr

Σ201

Plan

Plan

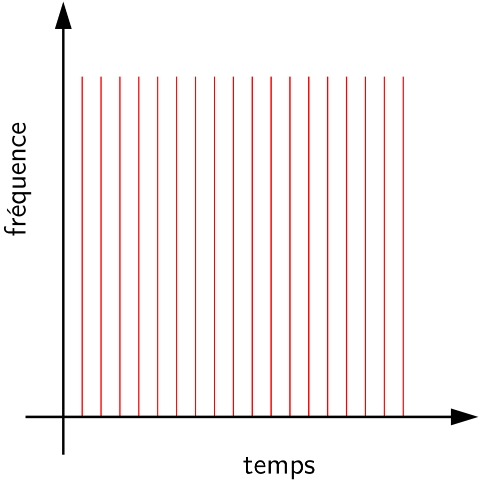
L'analyse des signaux

- Analyse: similitude à des “atomes” $\phi_n[k]$
- Similitude : produit scalaire

$$c[k] = \sum_n x[n]\phi_n[k]$$

- Projection sur un ensemble de signaux
- Changement de base
- Transformée linéaire

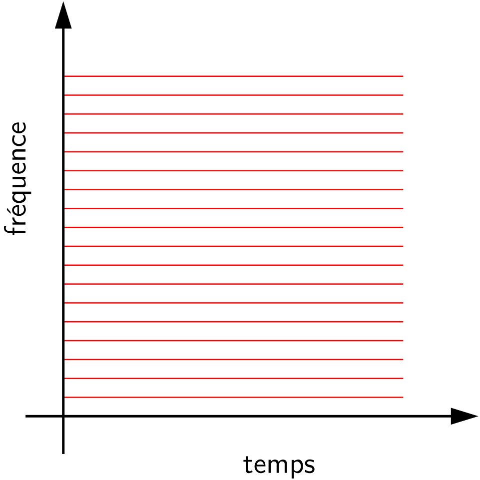
L'analyse des signaux



Analyse temporelle

$$\phi_n[k] = \delta[n-k]$$

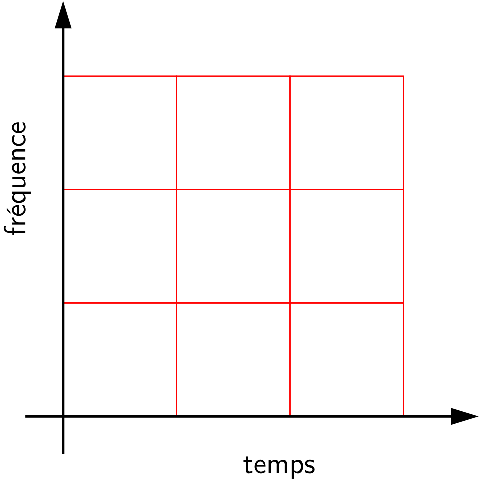
L'analyse des signaux



$$\phi_n[k] = e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$$

Analyse en fréquence

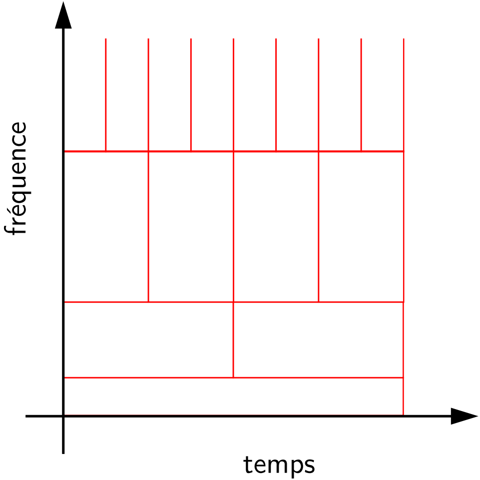
L'analyse des signaux



$$\phi_{n,t}[k] = e^{-j2\pi \frac{k}{N} n} w_t[k]$$

Transformée de Fourier à courte durée

L'analyse des signaux



$$\phi_{n,a}[k] = \phi(2^{-a}k - n)$$

Transformée en ondelettes

Plan

Représentations temps-échelle

Bancs de filtres 1D

Analyse Multirésolution

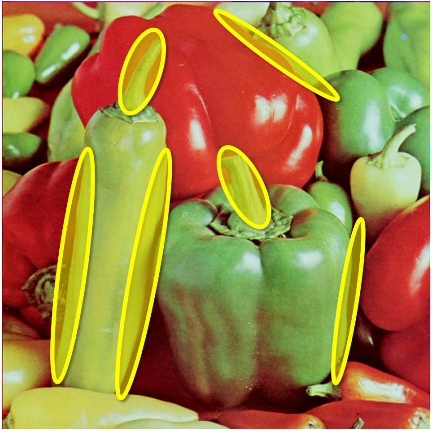
Ondelettes et débruitage

Ondelettes et images : Motivations

- Modèle d'images : *trends* + *anomalies*

Ondelettes et images : Motivations

- Modèle d'images : *trends* + *anomalies*



Ondelettes et images : Motivations

- Modèle d'images : *trends* + *anomalies*

Ondelettes et images : Motivations

- *Anomalies* :
  - Variations soudaines du signal, sur une courte durée
  - Contributions aux hautes fréquences
  - Contours des objets
  - Bonne résolution spatiale
  - Résolution en fréquence grossière
- *Trends* :
  - Variations lentes du signal, sur une longue durée
  - Contributions aux baisses fréquences
  - Intérieur des objets
  - Résolution spatiale grossière
  - Bonne résolution en fréquence

Ondelettes et images : Motivations

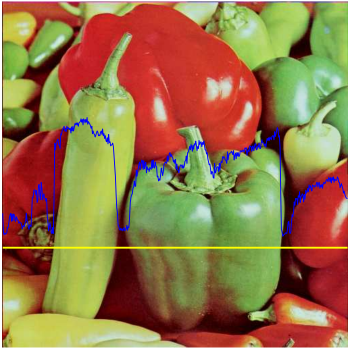
Modèle du signal : une ligne d'une image

Ondelettes et images : Motivations

Modèle du signal : une ligne d'une image

Ondelettes et images : Motivations

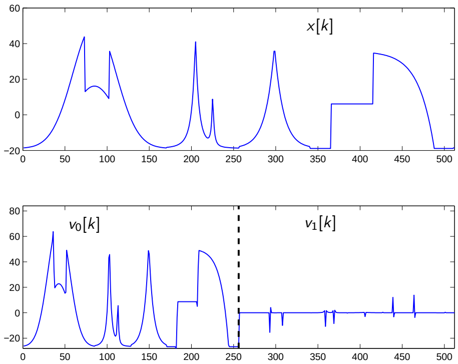
Modèle du signal : une ligne d'une image



Bancs de filtres 1D

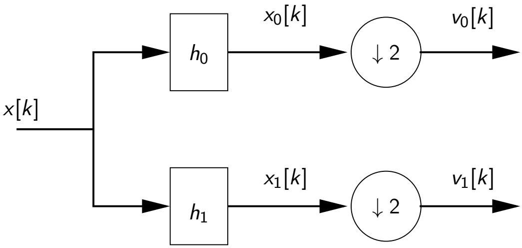
Caractéristiques de la transformée en ondelettes

- Concentration de l'énergie
- Représentation des contours
- Analyse à résolutions multiples
  - Version à baisse résolution
  - "Détails"



Bancs de filtres 1D

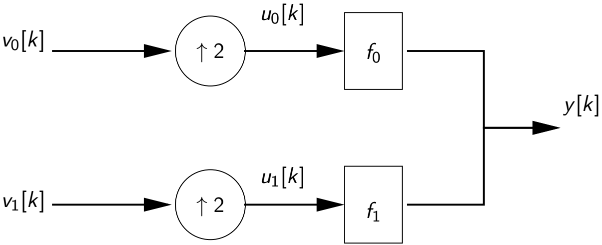
Décomposition



Banc de filtres d'analyse

$2 \downarrow$: opérateur de décimation : $v_0[k] = x_0[2k]$

Reconstruction



Banc de filtres de synthèse

$2 \uparrow$: opérateur d'interpolation, multiplie le nombre d'échantillons par 2

$$u_0[k] = \begin{cases} v_0[k/2] & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

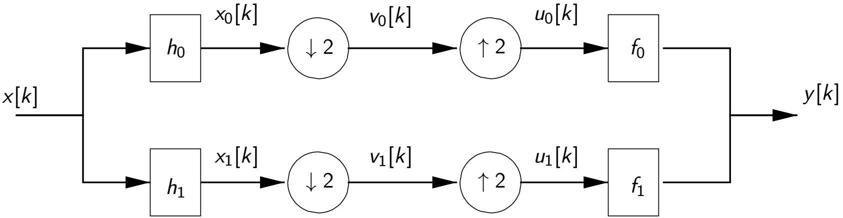
Propriétés des filtres

- Reconstruction parfaite
- RIF
- Orthogonalité
- Moments nuls
- Symétrie

Conditions de reconstruction parfaite

En cascadant bancs de filtres d'analyse et de synthèse, on veut la reconstruction parfaite (RP), c'est-à-dire, $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$y_k = x_{k+\ell} \Longleftrightarrow Y(z) = z^{-\ell} X(z)$$



Relations dans le domaine Z

filtre $X_0(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0[n] z^{-n} = H_0(z) X(z)$

décimateur $V_0(z) = \frac{1}{2}\left[X_0\left(z^{1/2}\right) + X_0\left(-z^{1/2}\right)\right]$

interpolateur $U_0(z) = V_0\left(z^2\right)$

sortie $Y(z) = F_0(z) V_0\left(z^2\right) + F_1(z) V_1\left(z^2\right)$

$$Y(z) = \frac{1}{2}\left[F_0(z) H_0(z) + F_1(z) H_1(z)\right] X(z) + \frac{1}{2}\left[F_0(z) H_0(-z) + F_1(z) H_1(-z)\right] X(-z)$$

Conditions de reconstruction parfaite

En cascadant bancs de filtres d'analyse et de synthèse, on veut la réconstrution parfaite (RP), c'est-à-dire que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$y_k = x_{k+\ell} \Longleftrightarrow Y(z) = z^{-\ell} X(z)$$

$$\Updownarrow$$

$$F_0(z) H_0(z) + F_1(z) H_1(z) = 2z^{-\ell} \qquad \text{Non distorsion}$$
$$F_0(z) H_0(-z) + F_1(z) H_1(-z) = 0 \qquad \text{Non aliasing}$$

Conditions de reconstruction parfaite

Forme matricielle

Pour simplicité on ignore le retard, $\ell = 0$

Si les filtres d'analyse sont assignés, les filtres de synthèse sont univoquement déterminés :

$$\begin{bmatrix} H_0(z) & H_1(z) \\ H_0(-z) & H_1(-z) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_0(z) \\ F_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On assume que la *matrice de modulation* soit inversible.

Conditions de reconstruction parfaite

Filtres de synthèse

Déterminant de la matrice de modulation :

$$\Delta(z) = H_0(z)\, H_1(-z) - H_1(z)\, H_0(-z)$$

$$F_0(z) = \frac{2}{\Delta(z)} H_1(-z)$$
$$F_1(z) = -\frac{2}{\Delta(z)} H_0(-z)$$

Conditions de reconstruction parfaite

Biorthogonalité

On a donc:

$$H_0(z)\,F_0(z) = \frac{2}{\Delta(z)} H_0(z)\,H_1(-z)$$

$$H_0(-z)\,F_0(-z) = -\frac{2}{\Delta(z)} H_0(-z)\,H_1(z)$$

$$H_1(z)\,F_1(z) = -\frac{2}{\Delta(z)} H_0(-z)\,H_1(z) = H_0(-z)\,F_0(-z)$$

En utilisant la condition de ND :

$$H_0(z)\,F_0(z) + H_0(-z)\,F_0(-z) = 2$$

dans le domaine du temps

$$\langle h_0[k], f_0[2m-k]\rangle = \delta(m)$$

Conditions de reconstruction parfaite

Biorthogonalité

On a encore :

$$H_1(z)\,F_0(z) = \frac{2}{\Delta(z)} H_1(z)\,H_1(-z)$$

$$H_1(-z)\,F_0(-z) = -\frac{2}{\Delta(z)} H_1(-z)\,H_1(z)$$

Donc :

$$H_1(z)\,F_0(z) + H_1(-z)\,F_0(-z) = 0$$

dans le domaine du temps

$$\langle f_1[k], h_0[2m-k]\rangle = 0$$

Conditions de reconstruction parfaite

Biorthogonalité

On peut donc montrer que :

$$\langle h_0[k], f_0[2m-k] \rangle = \delta(m)$$
$$\langle h_1[k], f_1[2m-k] \rangle = \delta(m)$$
$$\langle f_1[k], h_0[2m-k] \rangle = 0$$
$$\langle f_0[k], h_1[2m-k] \rangle = 0$$

Donc les conditions de PR sont équivalentes aux conditions de *biorthogonalité* de la base :

$$\{h_0[2\ell-k], h_1[2\ell-k]\}_{\ell \in \mathbb{Z}}$$

Filtres RIF

On peut montrer que dans ce cas $\Delta(z) = 2^{\dagger}$, donc :

$$F_0(z) = H_1(-z)$$
$$F_1(z) = -H_0(-z)$$

C'est équivalent à imposer la condition de signes alternes pour les filtres.
Exemple:

$h_0(k) = \boxed{a}\boxed{b}\boxed{c}$ $\quad f_0(k) = \boxed{p}\boxed{-q}\boxed{r}\boxed{-s}\boxed{t}$

$h_1(k) = \boxed{p}\boxed{q}\boxed{r}\boxed{s}\boxed{t}$ $\quad f_1(k) = \boxed{-a}\boxed{b}\boxed{-c}$

† Mais cela correnspond à un retard $\ell \neq 0$.

TELECOM ParisTech

Orthogonalité

Tous les vecteurs de la base sont orthogonaux entre eux :

$$\langle h_0[k], h_0[k-2m] \rangle = \delta(m)$$
$$\langle h_1[k], h_1[k-2m] \rangle = \delta(m)$$

ou, ce qui est équivalent, la base d'analyse coïncide avec la base de synthèse :

$$h_0[k] = f_0[-k]$$
$$h_1[k] = f_1[-k]$$

Dans les domains Z et Fourier on a donc :

$$H_0(z) = F_0\left(z^{-1}\right) \qquad H_0\left(e^{j\omega}\right) = F_0^*\left(e^{j\omega}\right)$$
$$H_1(z) = F_1\left(z^{-1}\right) \qquad H_1\left(e^{j\omega}\right) = F_1^*\left(e^{j\omega}\right)$$

Orthogonalité

En utilisant les conditions de PR on montre alors que les filtres orthogonaux sont les filtres conjugués en quadrature (QMF):

$$\left|H_0(e^{j\omega})\right|^2 + \left|H_0(e^{j(\omega+\pi)})\right|^2 = 2$$

L'orthogonalité assure la conservation d'énergie :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}(x_k)^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(v_0)^2 + \sum_{k=-\infty}^{\infty}(v_1)^2$$

$\Rightarrow$ erreur de reconstruction = erreur de quantification sur les coefficients d'ondelettes (propriété pas généralisable au cas biorthogonal !)

Filtres orthogonaux

Filtre de Haar

$$H_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + z^{-1}\right) \qquad H_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - z^{-1}\right)$$

$$F_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + z) \qquad F_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - z)$$

- Symétrique
- Orthogonal
- Nombre de moments nul $= 1$
  - Nombre MN $= p \Rightarrow$ capacité de représenter des polynômes jusqu'au dégrée $p - 1$
  - Un filtre avec p MN a un support non inférieur à $2p$

Filtres orthogonaux

Filtres de Daubechies

- Filtres de support $2p$ et avec p MN (c'est le mieux qu'on puisse faire !)
- Reponse en fréquence :

$$|H_0(\omega)|^2 = 2\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2p} P\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)$$

- Les filtres sont déterminés en imposant la condition d'orthogonalité sur le polynôme P
- Si $p = 1$ on retrouve Haar
- Filtres asymétriques

Orthogonalité et biorthogonalité

- Les filtres biorthogonaux sont simplement tous les filtres à RP
- Les filtres orthogonaux ont en plus la propriété de conservation de l'énergie
- On peut penser aux filtres biorthogonaux comme aux matrices inversibles, et aux filtres orthogonaux comme aux matrices orthogonales
- L'orthogonalité est un propriété utile pour le codage

Moments nuls

- Le moments nuls (MN) représentent la capacité du filtre à reconstruire les polynômes
- Un filtre avec p MN peut représenter des polynômes de degré strictement inférieur à p
- Si l'entrée du banc est un polynôme de grade au plus $p-1$ *la sortie du filtre passe haut est strictement nulle*
- Alors toute l'information est représentée avec la moitié des échantillons (signal d'approximation)
- Un filtre avec p MN a un support non inférieur à $2p$

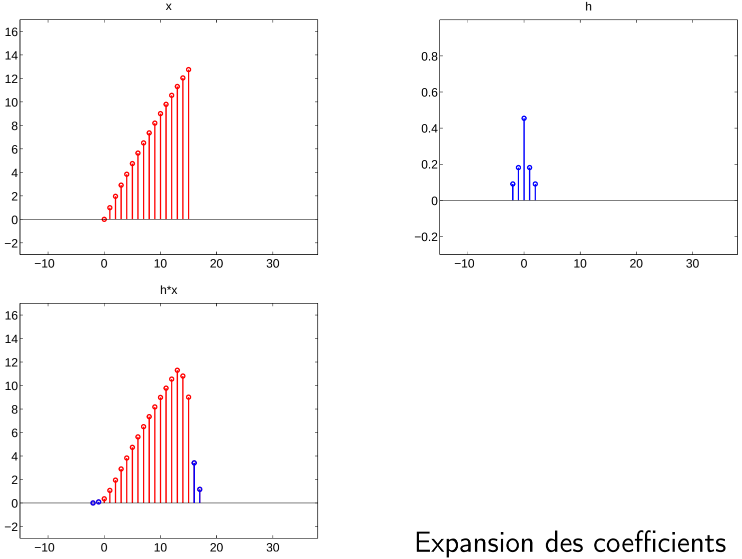
Problème des bords

- Les propriétés des bancs de filtres telles qu'on les a vues sont valables pour signaux de durée infinie
- Pour éviter d'augmenter le nombre de coefficients, un signal fini est périodisé avant d'entrer dans le banc d'analyse
- Le résultat est périodique de la même période
  - Une période suffit pour effectuer la synthèse
  - Création de sauts (effet de bord)

Symétrie

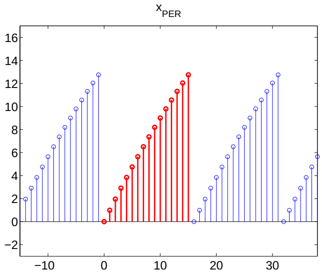
- Pour éviter de créer des coefficients à haute fréquence, on peut penser à symétriser le signal avant de le périodiser (comme pour la TCD)
- Mais on double le nombre de coefficients
- À moins que les filtres ne soient symétriques
  - Dans ce cas le résultat du filtrage est une suite symétrique et périodique : une demi-période suffit pour la reconstruction
  - Contrainte supplémentaire sur les filtres

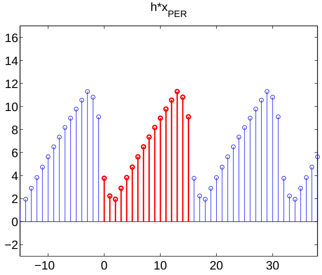
Problème des bords



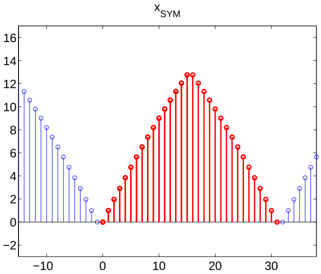
Expansion des coefficients

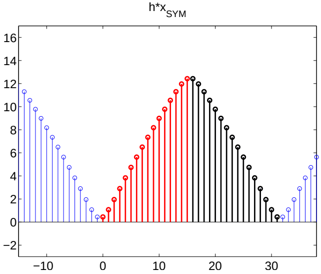
Problème des bords





Problème des bords





Orthogonalité et biorthogonalité

Reconstruction parfaite pour signaux de durée finie

- Problème de l'expansion des coefficients (convolution)
- Solution : convolution circulaire
  - La convolution circulaire permet de reconstruire un signal de N échantillons avec N coefficients d'ondelettes
  - Mais elle engendre des discontinuité aux bordes : "fausses" fréquences qui demandent beaucoup de ressources mais ne contiennent pas d'information
- Solution : Périodisation symétrique
  - Pas de discontinuités introduites
  - Mais ça double le nombre de coefficients !
  - Sauf si le filtre est symétrique

Le seul filtre orthogonal, RIF et symétrique est celui de Haar !

Filtre de Haar

$h_0(k) = \boxed{1}\boxed{1}$ $\quad f_0(k) = \boxed{1}\boxed{1}$

$h_1(k) = \boxed{1}\boxed{-1}$ $\quad f_1(k) = \boxed{-1}\boxed{1}$

- Symétrique
- Orthogonal (normalisation)
- Nombre de moments nuls = 1
  - Capable de représenter uniquement les signaux constants par morceaux

Filtres biorthogonaux

Filtres Cohen-Daubechies-Fauveau

Pour les filtres biorthogonaux, si h_0 a p MN et f_0 a $\widetilde{p}$ MN, le support est au moin $p + \widetilde{p} - 1$.
Ils existent des filtres biorthogonaux (CDF) qui :

- Sont symétriques (phase linéaire)
- Ont le maximum de MN pour une durée fixée
- Sont "quasi" orthogonaux (conservation de l'énergie) : filtres h_0 et f_0 similaires

Ces filtres sont les plus communément utilisés dans le codage d'image

Filtres biorthogonaux 9/7

Coefficients du filtre :

n	0	± 1	± 2	± 3	± 4
$h_0[l]$	0.852699	0.377403	-0.110624	-0.023849	0.037828
$f_0[l]$	0.788486	0.418092	-0.040689	-0.064539	

Réponses impulsionnelles des filtres passe-bas d'analyse et de synthèse biorthogonaux 9/7. On a pour les filtres passe-haut :

$$h_1[l] = (-1)^{l+1} f_0[l-1] \text{ et } f_1[l] = (-1)^{l-1} h_0[l+1].$$

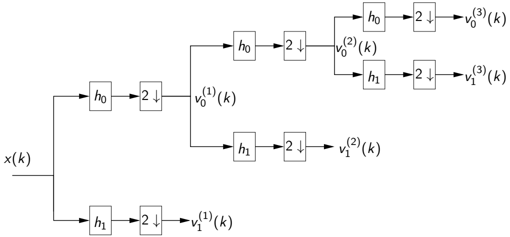
TELECOM ParisTech

Plan

TELECOM ParisTech

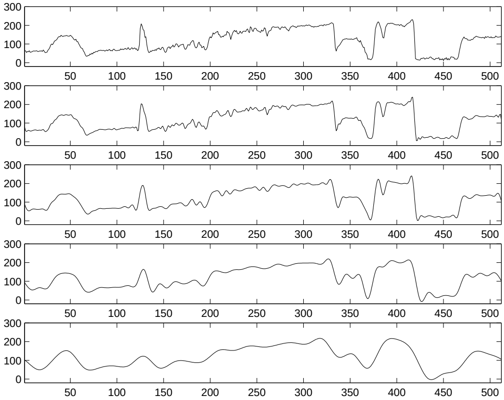
Analyse multirésolution 1D

Décomposition



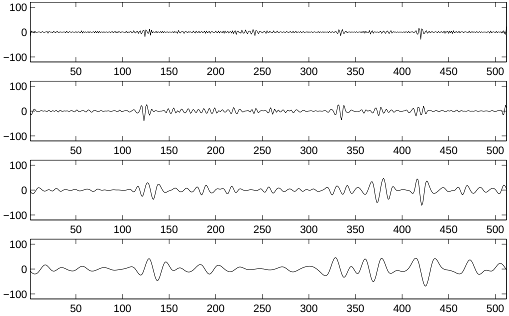
Structure de décomposition en ondelettes sur 3 niveaux de résolution

Exemple



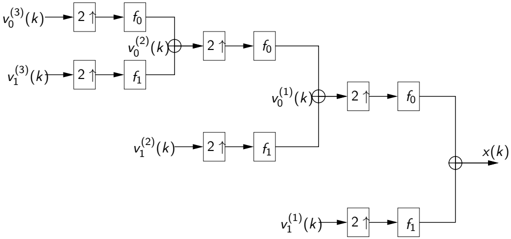
Un signal et ses approximations successives sur 4 niveaux de résolution

Exemple



Les détails, de la plus fine vers la plus grossière résolution

Reconstruction

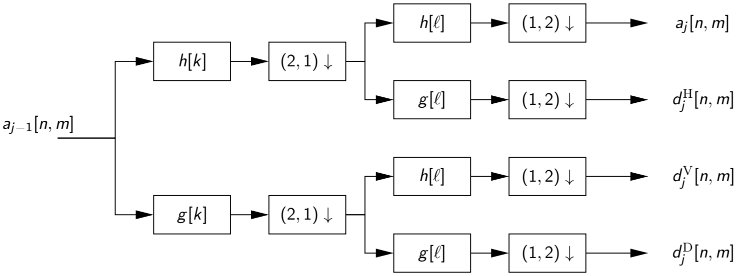


Reconstruction à partir des coefficients d'ondelettes

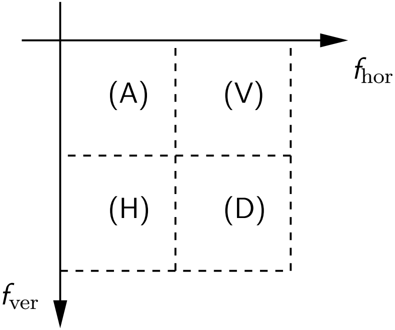
AMR 2D

Bancs de filtres 2D séparables

Pour 1 niveau de décomposition

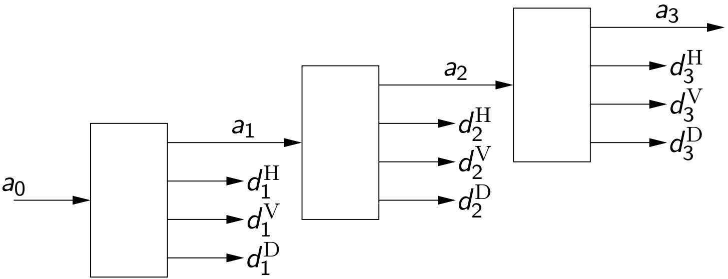


Interprétation fréquentielle



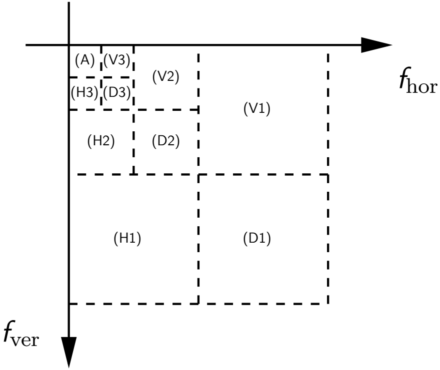
Les zones (A), (H), (V) et (D) correspondent effectivement aux coefficients d'approximation, de détails horizontaux, verticaux et diagonaux.

AMR 2D

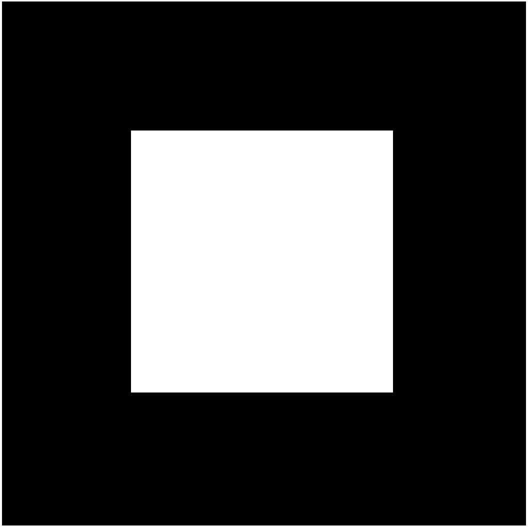


Mise en oeuvre d'une AMR 2D séparable sur 3 niveaux de résolution.

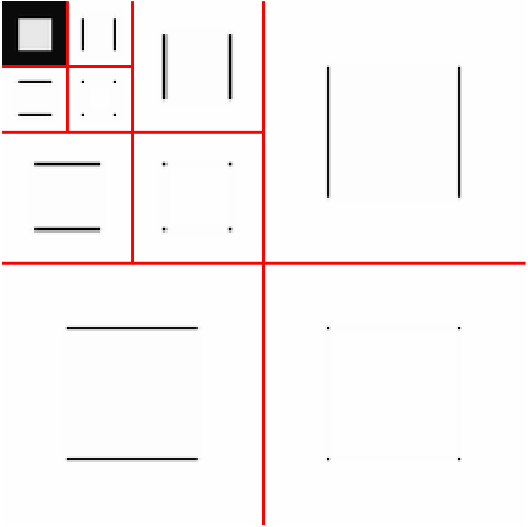
AMR 2D - interprétation fréquentielle



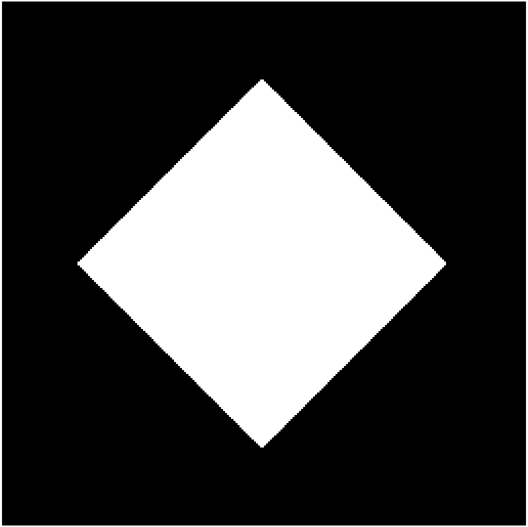
Exemple



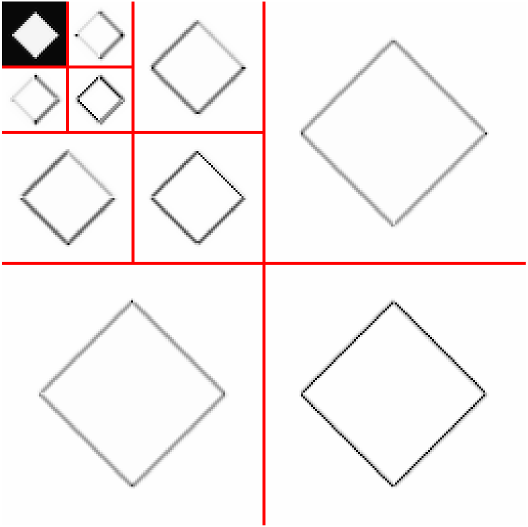
Exemple



Exemple

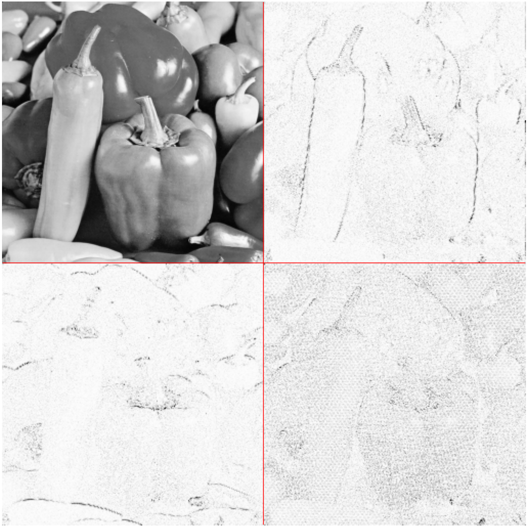


Exemple

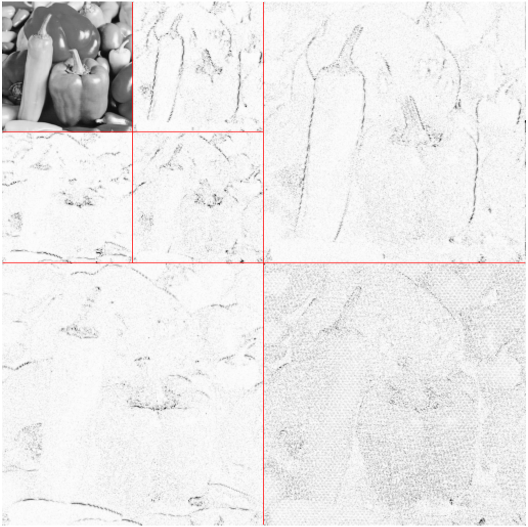


Exemple

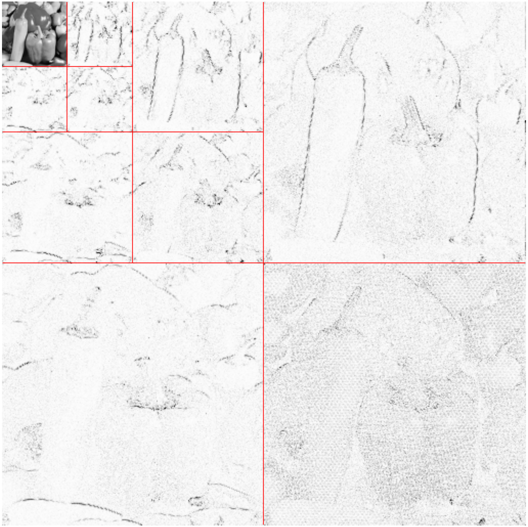
Exemple



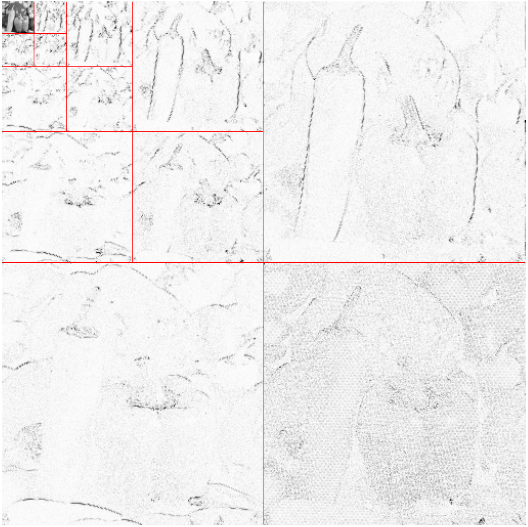
Exemple



Exemple



Exemple



Plan

Débruitage

Principes

Modèle : Observation : $r(t)$; somme d'un signal utile inconnu $s(t)$ et d'un bruit aléatoire $b(t)$.
Après décomposition sur un base d'ondelettes :

$$c_j^r[k] = c_j^s[k] + c_j^b[k]$$

Hypothèses :

- Base orthonormale, décomposition périodique
- Signal original (résolution $j = 0$) de taille multiple de $2^{j_{\max}}$
- RSB élevé en bande d'approximation : $a_{j_{\max}}^s \approx a_{j_{\max}}^r$

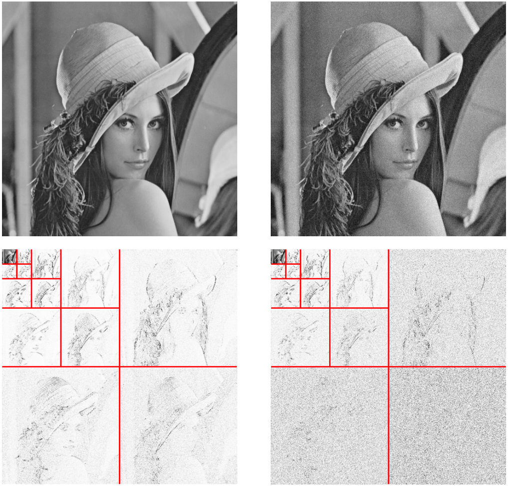
Estimateur : $\hat{s}$
Critère : minimisation de l'EQM : $\mathcal{E}^2(s) = \mathrm{E}\{\|s - \hat{s}\|^2\}$

Débruitage

Principes

- Signal utile régulier
  - Énergie concentré dans les basses fréquences
  - Signal creux dans les hautes fréquences
  - Beaucoup de coefficients très petits
  - Quelques coefficients de grande amplitude (information !)
- Le bruit est souvent blanc et stationnaire
  - Modèle : blanc, stationnaire, centré et de puissance σ^2
  - Puissance équi-repartie entre les sous-bandes
- Qu'est-ce qu'on retrouve dans les différentes sous-bandes ?

Exemples

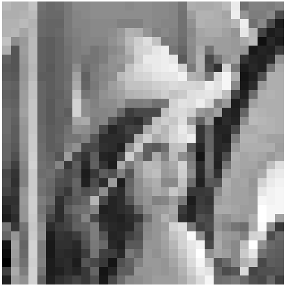
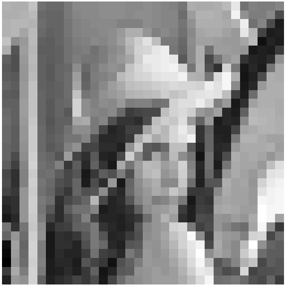


SNR: 22.4 dB;

$\sigma = 10$

Exemples

Sousbande d'approximation

SNR: 46.4 dB

Exemples

Sousbande de détail

SNR: 15.2 dB

Estimateur par atténuation

Il est défini par :

$$c_j^{\hat{s}}[k] = \theta_j[k] c_j^r[k]$$

EQM:

$$\mathcal{E}_a^2(s) = \sum_{j=1}^{j_{\max}} \sum_{k=0}^{K2^{-j}-1} \mathrm{E}\left[\left(c_j^s[k] - \theta_j[k] c_j^r[k]\right)^2\right]$$

$$(c^s - \theta c^r)^2 = (c^s(1-\theta) - \theta c^b)^2$$

$$\mathcal{E}_a^2(s) = \sum_{j=1}^{j_{\max}} \sum_{k=0}^{K2^{-j}-1} (c^s)^2 (1-\theta)^2 + \sigma^2 \theta^2$$

Estimateur par atténuation

Le terme de la somme précédente est :

$$J = (c^s)^2(1 - 2\theta + \theta^2) + \sigma^2\theta^2$$

En minimisant par rapport à θ :

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = -2(c^s)^2 + 2\theta((c^s)^2 + \sigma^2)$$

Donc :

$$\theta^* = \frac{(c^s)^2}{(c^s)^2 + \sigma^2}$$

Estimateur par atténuation

Oracle

$$\theta^* = \frac{(c^s)^2}{(c^s)^2 + \sigma^2}$$

Oracle: l'estimateur dépend du signal. C'est utile pour évaluer les bornes théoriques.

$$J = (c^s)^2(1-\theta)^2 + \sigma^2\theta^2 \qquad = \frac{\sigma^2 (c^s)^2}{\sigma^2 + (c^s)^2}$$

$$\mathcal{E}_a^2(s) = \sum_{j=1}^{j_{\max}} \sum_{k=0}^{K2^{-j}-1} \frac{\sigma^2 (c_j^s[k])^2}{\sigma^2 + (c_j^s[k])^2}$$

Estimateur par atténuation

Oracle binaire

- **Si** on contraint θ à être binaire : $\theta_j[k] \in \{0, 1\}$, **alors**
  - $J = (c^s)^2$ si $\theta = 0$; sinon $J = \sigma^2$
  - donc on choisi $\theta = 0$ si $(c^s)^2 < \sigma^2$
- Dans ce cas l'EQM est :

$$\mathcal{E}_o^2(s) = \sum_{j=1}^{j_{\max}} \sum_{k=0}^{K2^{-j}-1} \min\left[\sigma^2, (c_j^s[k])^2\right]$$

Estimateur par atténuation

Oracle binaire

$$\mathcal{E}_o^2(s) = \sum_{j=1}^{j_{\max}} \sum_{k=0}^{K2^{-j}-1} \min\left[\sigma^2, (c_j^s[k])^2\right]$$

$$\mathcal{E}_a^2(s) = \sum_{j=1}^{j_{\max}} \sum_{k=0}^{K2^{-j}-1} \frac{\sigma^2 (c_j^s[k])^2}{\sigma^2 + (c_j^s[k])^2}$$

$$0 < x \leq y \Rightarrow \frac{xy}{x+y} \geq \frac{xy}{2y} = \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\min(x,y)$$

$$\frac{1}{2}\mathcal{E}_o^2(s) \leq \mathcal{E}_a^2(s)$$

$$\mathcal{E}_a^2(s) \leq \mathcal{E}_o^2(s) \leq 2\mathcal{E}_a^2(s)$$

Estimateur par atténuation

Oracle binaire

- L'EQM de l' oracle binaire est (au plus) le double de l'oracle par atténuation
- En conclusion : il faut retenir les coefficients d'ondelettes ou le signal est censé avoir une valeur élevée, et mettre à zéro les autres.
- Modèle simplifié : il y a Q coefficients c^s non zéro et supérieurs à σ ; les autres sont zéros
- L'oracle binaire a dans ce cas une erreur $Q\sigma^2$
- Sans débruitage l'EQM est $K_m\sigma^2$, ou $K_m = K(1 - 2^{-j_{\max}})$ est le nombre de coefficients d'ondelettes disponibles

Estimateur par atténuation

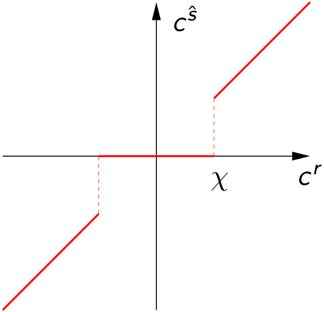
Oracle binaire

- En conclusion, l'oracle binaire permet de réduir l'erreur d'un facteur :

$$\frac{K_m}{Q}$$

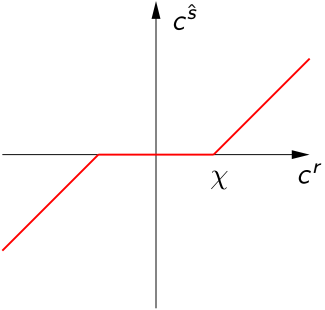
- Donc une *bonne* base d'ondelettes est une base qui rend Q petit
- La base d'ondelettes doit générer peu de grands coefficients et beaucoup de petits
- En autres mots, la base doit concentrer l'énergie en peu de coefficients

Notion de seuillage



Hard Thresholding

$$c^{\hat{s}} = \begin{cases} c^r & \text{si } |c^r| > \chi \\ 0 & \text{si } |c^r| \leq \chi \end{cases}$$



Soft Thresholding

$$c^{\hat{s}} = \begin{cases} c^r - \chi & \text{si } c^r > \chi \\ 0 & \text{si } |c^r| \leq \chi \\ c^r + \chi & \text{si } c^r < \chi \end{cases}$$

Notion de seuillage

- Le seuillage dur a un comportement discontinu au voisinage du seuil $\pm\chi$
- Le seuillage doux introduit un biais $\mp\chi$ sur l'estimation des coefficients de grande amplitude
- Problème principale : **choix du seuil** χ
  - Approche *minimax*
  - Approche *visushrink* (seuil universel)
  - Approche *SURE*
  - Approche *hybride*