Algorithme du simplexe sous forme matricielle

Notations

• Soit un problème sous forme canonique matricielle à $n+m$ variables et m contraintes :

$$\max z = c \cdot x$$
$$\begin{cases} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{cases}$$

où x, c, A, b matrices réelles de dimensions

$$x : (n+m, 1),\ c : (1, n+m),\ A : (m, n+m),\ b : (m, 1).$$

• Si $I \subset \{1, \cdots, n+m\}$ les matrices c_I, A_I (resp. x_I) sont obtenus en ne gardant que les indices des colonnes (resp. lignes) qui sont dans I. On note B pour $A_{\mathcal{B}}$.
• $\mathcal{B} \subset \{1, \cdots, n+m\}$ est une base si $|\mathcal{B}| = m$ et $B = A_{\mathcal{B}}$ inversible.

Initialisation

Trouver une base réalisable. Eventuellement à partir de la solution nulle du problème sous forme standard si elle est réalisable ($b \geq 0$) : base $\mathcal{B} = \{n+1, \cdots, n+m\}$ qui donne $x^*_{\mathcal{B}} = b$, sinon résoudre le problème auxiliaire associé. Dans tous les cas, calculer $x^*_{\mathcal{B}}$.

Etape du simplexe

• Dictionnaire associé à la base $\mathcal{B}$:

$$\boxed{\begin{array}{cccc} x_{\mathcal{B}} & = & x^*_{\mathcal{B}} & - & B^{-1}A_N x_N \\ \hline z & = & c_{\mathcal{B}} x^*_{\mathcal{B}} & + & (c_N - c_{\mathcal{B}} B^{-1} A_N) x_N \end{array} \quad \text{avec } x^*_{\mathcal{B}} = B^{-1} b}$$

◇ La solution de base associée est donnée par $x_N = 0$ et $x_{\mathcal{B}} = x^*_{\mathcal{B}}$;
◇ la base est réalisable si $x^*_{\mathcal{B}} \geq 0$;
◇ la valeur objectif associée est $z^*_{\mathcal{B}} = c_{\mathcal{B}} x^*_{\mathcal{B}}$.

• **Recherche d'une variable entrante x_{j_0}.**
1. Calculer $y := c_{\mathcal{B}} B^{-1}$ en résolvant le système $yB = c_{\mathcal{B}}$.
2. Calculer les coefficients de x_j dans z pour $j \in N$: $c_j - y \cdot a_j$:
   ◇ choisir une variable entrante j_0 parmi les j tels que $c_j - y \cdot a_j > 0$;
   ◇ s'il n'en existe pas, la base est optimale.

• **Recherche d'une variable sortante x_{i_0}.**
3. Calculer $d := B^{-1} a_{j_0}$ en résolvant $Bd = a_{j_0}$.
   ◇ $-d$ est la colonne des coefficients de x_j dans le dictionnaire.
4. Trouver la valeur maximale $t_{\max}$ de t telle que $x^*_{\mathcal{B}} - t \cdot d \geq 0$.
   ◇ choisir i_0 parmi les i tels que $x^*_i - t_{\max} d_i = 0$;
   ◇ si $t_{\max} = +\infty$ le problème est non borné.

• **Mise à jour.**
5. La nouvelle base est $\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B} \setminus \{i_0\} \cup \{j_0\}$. Mettre à jour $x^*_{\mathcal{B}}$:
   ◇ remplacer $x^*_{\mathcal{B}}$ par $x^*_{\mathcal{B}} - t_{\max} \cdot d$ sur les coordonnées $i \neq i_0$;
   ◇ remplacer dans $x^*_{\mathcal{B}}$ la valeur de $x^*_{i_0}$ par la nouvelle valeur de $x^*_{j_0} = t_{max}$.