Estimation spectrale paramétrique - I

(B1)

Rappel et notations

$\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ $\quad \gamma_h = E(X_h, X_0)$ $\quad$ centré, réel stationnaire

$$\hat{X}_t = \sum_{k=1}^{p} \varphi_{k,p} X_{t-k}$$

Eq. Normales :

$$\sum_{k=1}^{p} \varphi_{k,p}\, \gamma(k-m) = \gamma(m) \qquad m = 1 .. p$$

$$\Gamma_p = \begin{bmatrix} \gamma(0) & & \gamma(p-1) \\ & \ddots & \\ \gamma(p-1) & & \gamma(0) \end{bmatrix} \qquad \gamma_p = \begin{bmatrix} \gamma(1) \\ \vdots \\ \gamma(p) \end{bmatrix} \quad \Phi_p = \begin{bmatrix} \varphi_{1,p} \\ \vdots \\ \varphi_{p,p} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_p \Phi_p = \gamma_p$$

Polynôme prédicteur

$$\varphi_p(z) = 1 - \sum_{k=1}^{p} \varphi_{k,p} z^k$$

$$\sigma_p^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\varphi_p(e^{j2\pi f})|^2 \, \nu_X(df)$$

$$S_{XX}(f) = \frac{\sigma_p^2}{|\varphi_p(e^{j2\pi f})|^2}$$

Programme du cours
1) rappels AR
2) Max Ent
3) rappels MA
4) dsp AR + correction
5) dsp ARMA avec Durbin
6) critères d'ordre (si le temps le permet)

Entropy

$$H = \frac{1}{2} \log(\det(R_X))$$

Haykin-Kessler, p66 $\quad \sigma_\infty^2 = \exp\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \log S_{XX}(f)\, df \right)$

① montrer que $\Gamma_{p+1} = A_{p+1}^{-1} D_{p+1} (A_{p+1}^T)^{-1}$ $\quad (D_p = \mathrm{diag}(\sigma_0^2 \sigma_1^2 \dots \sigma_p^2))$

② en déduire $\det(\Gamma_{p+1}) = \prod_{m=0}^{p} \sigma_m^2$

puis $\log \sigma_\infty^2 = \lim \log (\det R_p)^{\frac{1}{p+1}}$

avec Szego : λ_i = valpr de $\det(R_p)$

$$\lim \frac{1}{m+1} \left(g(\lambda_0) + \dots g(\lambda_m) \right) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(S_X(f))\, df$$

ce qui donne $\lim_{m\to\infty} \det(R_m)^{\frac{1}{m+1}} = \exp \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \log S_X(f)\, df$ (B2)

avec $g(\cdot) = \log(\cdot)$

Démonstration :

1) $$A_{p+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\varphi_{1,1} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -\varphi_{p,p} & \cdots & -\varphi_{1,p} & 1 \end{bmatrix} \qquad D_{p+1} = \begin{bmatrix} \sigma_0^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_p^2 \end{bmatrix}$$

$$X_{p+1} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_{p+1} \end{bmatrix}^T$$

$$A_{p+1} X_{p+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\varphi_{1,1} & 1 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ -\varphi_{p,p} & \cdots & -\varphi_{1,p} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_{p+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 - \mathrm{Proj}(X_2 | \mathcal{H}_1) \\ \vdots \\ X_{p+1} - \mathrm{Proj}(X_{p+1} | \mathcal{H}_p) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow E\left(A_{p+1} X_{p+1} X_{p+1}^T A_{p+1}^T\right) = D_{p+1}$$

$$\Rightarrow A_{p+1} E\left(X_{p+1} X_{p+1}^T\right) A_{p+1}^T = D_{p+1}$$

$$\Rightarrow A_{p+1} \Gamma_{p+1} A_{p+1}^T = D_{p+1}$$

$$\Rightarrow \Gamma_{p+1} = (A_{p+1})^{-1} D_{p+1} (A_{p+1}^T)^{-1}$$

(en effet $\exists A_{p+1}^{-1}$, et $\mathrm{Det}(A_{p+1}) = 1$)

Conséquence $\mathrm{Det}(\Gamma_{p+1}) = \prod_{m=0}^{p} \sigma_m^2$

B3

2) <u>Entropie</u> (annexe B, Haykin, Kessler)
pour une variable avec M valeurs

$$H = \sum_{k=1}^{M} p_k \log_2\left(\frac{1}{p_k}\right) = \frac{1}{\log(2)} \sum_{k=1}^{M} p_k \log\left(\frac{1}{p_k}\right)$$

pour N variables continues $x_1 \dots x_N$

$$H = -\int p(x_1 \dots x_N) \log\left[p(x_1 \dots x_N)\, c^{2N}\right] dx_1 \dots dx_N$$

Variables gaussiennes $\Rightarrow$

$$p(x_1 \dots x_N) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \mathrm{Det}(R_N)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\underline{x} - \underline{\mu}) R_N^{-1} (\underline{x} - \underline{\mu})\right]$$

Si on choisit $c = (2\pi)^{1/4}$ alors

$$H = \frac{1}{2} \log(\mathrm{Det}(R_N))$$

Pour un process de durée infinie : (Haykin, Kessler, page 96)

$$h = \lim_{M \to \infty} \frac{H}{M+1} = \lim_{M \to \infty} \frac{1}{2} \log\left(\mathrm{Det}(R_{xx})\right)^{\frac{1}{M+1}}$$

3) montrons que $\lim\limits_{M \to \infty} \mathrm{Det}(R_{xx})^{1/M+1} = \exp\left[\int_{-1/2}^{1/2} \log S_{xx}(f)\, df\right]$

Théorème de Szegö (à admettre)

$$\lim_{M \to \infty} \frac{1}{M+1}\left[g(\sigma_0^2) + g(\sigma_1^2) + \dots + g(\sigma_M^2)\right] = \int_{-1/2}^{1/2} g(S_{xx}(f))\, df$$

si $g(\cdot) \longrightarrow \log(\cdot)$

$$\lim \frac{1}{M+1}\left[\log(\sigma_0^2) + \dots + \log(\sigma_M^2)\right] = \int_{-1/2}^{1/2} \log(S_{xx}(f))\, df$$

$$\lim \frac{1}{M+1} \log\left(\prod_{m=0}^{M} \sigma_m^2\right) = \int_{-1/2}^{1/2} \log S_{xx}(f)\, df$$

$$\lim_{M \to \infty} \log\left[\mathrm{Det}(\Gamma_{M+1})^{1/M+1}\right] = \int_{-1/2}^{1/2} \log S_{xx}(f)\, df$$

$$\lim_{M \to \infty} \mathrm{Det}(\Gamma_{M+1})^{\frac{1}{M+1}} = \exp \int_{-1/2}^{1/2} \log S_{xx}(f)\, df$$

et $h = \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} \log S_{xx}(f)\, df$

Méthode du Maximum d'Entropie. (BG)

$\gamma(k)$ $|k| \leq p$ fixés.

Parmi tous les processus acceptant ces $\gamma(k)$ comme autocorrélation, lequel maximise l'entropie?

Réponse : le processus AR(p)!

Dem.

Soit $\{X\}$ t.q. $\gamma_{XX}(k) = \gamma(k)$

On cherche $\{Y\}$ t.q. :

$\gamma_{YY}(k) = \gamma_{XX}(k) = \gamma(k)$

$h = \int_{-1/2}^{1/2} \log S_{YY}(f)\, df$ est maximale.

On veut donc $\dfrac{\partial h}{\partial \gamma_{YY}(k)} = 0 \quad \forall |k| > p$ $\longrightarrow$ notons $\gamma_{YY}(k) = r(k)$

$$\frac{\partial h}{\partial \gamma_{YY}(k)} = \int \frac{\partial \log S_{YY}(f)}{\partial r(k)}\, df$$

$$= \int \frac{1}{S_{YY}(f)} \frac{\partial S_{YY}(f)}{\partial r_k}\, df$$

$$= \int \frac{1}{S_{YY}(f)} e^{-j2\pi f k}\, df \qquad \left(\text{car } S_{YY}(f) = \sum_k r(k) e^{-j2\pi f k}\right)$$

donc $\displaystyle\int \frac{1}{S_{YY}(f)} e^{-j2\pi f k}\, df = 0 \quad \forall |k| > p$

donc $\displaystyle\frac{1}{S_{YY}(f)} = c_1 \left|\varphi_p(e^{j2\pi f})\right|^2$ où φ_p est un RIF

$$\varphi_p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{p} \varphi_{n,p} z^{-n}$$

et enfin $\displaystyle S_{YY}(f) = \frac{c}{\left|\varphi_p(e^{j2\pi f})\right|^2}$

donc Y est AR(p).

Modélisation ARMA

B5

$$X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \cdots - \varphi_p X_{t-p} = \Theta_0 Z_t + \Theta_1 Z_{t-1} + \cdots \Theta_q Z_{t-q}$$

$$Z = BB(0, \sigma^2 = 1)$$

a) comment identifier l'ARMA
b) comment en deduire le spectre estimé)

Premier cas : on n'estime que la partie AR.

a) $E(X_{t-n} Z_{t-q}) = 0 \quad \forall n > q$.

$$\begin{bmatrix} X_{t-q-1} \\ \vdots \\ X_{t-q-p-1} \end{bmatrix} X_t = \begin{bmatrix} X_{t-q-1} \\ \vdots \\ X_{t-q-p-1} \end{bmatrix} [X_{t-1} \cdots X_{t-p}] \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_p \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} X_{t-q-1} \\ \vdots \\ X_{t-q-p-1} \end{bmatrix} \Sigma \Theta Z}_{E() = 0}$$

Puis en prenant l'espérance

$$\begin{bmatrix} \gamma(q+1) \\ \vdots \\ \gamma(q+p+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(q) & \gamma(q-1) & & \gamma(q-p+1) \\ \gamma(q+1) & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma(q-1) \\ \gamma(q+p-1) & & \gamma(q+1) & \gamma(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_p \end{bmatrix}$$

b) soit $Y_t = X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \cdots \varphi_p X_{t-p} = \Theta_0 Z_t + \cdots \Theta_q Z_{t-q}$

$$\gamma_{YY}(k) = \begin{cases} \Theta_0 \Theta_k + \Theta_1 \Theta_{k+1} + \cdots + \Theta_{q-k} \Theta_q & \text{si } k \leq q \\ 0 \quad \text{si } k > q \end{cases}$$

$$S_{YY}(f) = S_{XX}(f) \left| \varphi(e^{j2\pi f}) \right|^2 = \sum_{k=-q}^{q} \gamma_{YY}(k) e^{-j2\pi f k}$$

$$\boxed{\hat{S}_{XX}(f) = \frac{\sum \hat{\gamma}_{YY}(k) e^{-j2\pi f t}}{\left| \hat{\varphi}(e^{j2\pi f}) \right|^2}}$$

problème : le numérateur n'est pas nécessairement positif

Second cas = estimons aussi la partie MA (B6)

a) $\gamma_{YY}(k)$ $k = 0 .. L >> q$

Méthode de Durbin.

On voudrait trouver $\theta_0 .. \theta_q$ t.q. $S_{YY}(f) = |\theta(e^{j2\pi f})|^2$

Appliquer Levinson pour trouver un AR(L) sur les $\gamma_{YY}(k)$ $\longrightarrow [\bar{\varphi}_{1,L} \cdots \bar{\varphi}_{L,L}]$ t.q. :

$$\hat{S}_{YY}(f) = \frac{\sigma_1^2}{|\bar{\varphi}_L(e^{j2\pi f})|^2}$$

puis $|\bar{\varphi}_L(e^{j2\pi f})|^2 = \sum_{k=-L}^{L} \gamma_L(k)\, e^{-j2\pi f k}$

Sur les $\gamma_L(k)$, estimer par Levinson un AR(q)

$\longrightarrow \psi_{1,q} \cdots \psi_{q,q}$ t.q :

$$|\bar{\varphi}_L(e^{j2\pi f})|^2 = \frac{\sigma_2^2}{|\psi_q(e^{j2\pi f})|^2} \quad \text{avec } \psi_q(z) = \sum_{k=0}^{q} \psi_{k,q} z^{-q}$$

donc $\hat{S}_{YY}(f) = \dfrac{\sigma_1^2}{|\varphi_L(e^{j})|^2} = \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \cdot |\psi_q(e^{j2\pi f})|^2$

et finalement $\hat{S}_{XX}(f) = \sigma_3^2 \dfrac{|\hat{\psi}_q(e^{j2\pi f})|^2}{|\hat{\varphi}_p(e^{j2\pi f})|^2}$