Méthode MVDR (Capon).

Peut-on trouver un filtre RIF qui extrait une sinusoïde à la fréquence f_0.

$X_t = A e^{j2\pi f_0 t} + V_t$ où V_t est un bruit.

Filtre RIF : $Y_t = \sum_{k=0}^{p} \varphi_k X_{t-k}$ (ressemble à la prédiction linéaire) mais $\varphi_0 \neq 1$

Minimiser $E(|Y_t|^2)$ MV = minimum variance

Respecter la sinusoïde :

si $\tilde{X}_t = A e^{j2\pi f_0 t}$

on veut que $\sum_{k=0}^{p} \varphi_k \tilde{X}_{t-k} = A \sum_{k=0}^{p} \varphi_k e^{+j2\pi f_0 (t-k)}$

soit égal à $A e^{j2\pi f_0 t} = \tilde{X}_t$

d'où la contrainte : $1 = \sum_{k=0}^{p} \varphi_k e^{-j2\pi f_0 k}$ → Distortionless Response

MVDR = Minimum Variance Distortionless Response.

$$C = E(|Y|^2) = E|\Phi^H \mathbb{X}_t|^2 \quad \text{avec} \quad \Phi = \begin{bmatrix} \varphi_0^* \\ \varphi_1^* \\ \vdots \\ \varphi_p^* \end{bmatrix} \quad \mathbb{X}_t = \begin{bmatrix} X_t \\ X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-p} \end{bmatrix}$$

$$C = \Phi^H E(\mathbb{X}_t \mathbb{X}_t^H) \Phi = \Phi^H \Gamma_p \Phi$$

$$\Gamma_p = \begin{bmatrix} \gamma(0) & \gamma(-1) & \cdots & \gamma(-p) \\ \gamma(1) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \gamma(-1) \\ \gamma(p) & \cdots & \gamma(1) & \gamma(0) \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \gamma(k) = E(X_t X_{t-k}^*)$$

posons $e_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j2\pi f_0} \\ e^{-j2\pi 2 f_0} \\ \vdots \\ e^{-j2\pi p f_0} \end{bmatrix}$

la contrainte s'écrit $1 = e_0^H \Phi$

Multiplieur de Lagrange λ pour minimiser

$$\begin{cases} \Phi^H \Gamma_p \Phi + \lambda (1 - e_0^H \Phi) \\ e_0^H \Phi = 1 \end{cases}$$

Peut-on dériver $\Phi^H \Gamma_p \Phi$ par rapport à Φ ?

Pas directement car la forme quadratique n'est pas holomorphe

Exemple : $f(x) = x^* x$ $\qquad \exists ? \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} f(x+\delta) - f(x)$

$$\frac{1}{\delta}\left[(x+\delta)^*(x+\delta) - x^* x\right] = \frac{1}{\delta}\left[x^*\delta + \delta^* x + \delta^*\delta\right]$$
$$= x^* + \frac{\delta^*}{\delta} x + \delta^*$$

Le premier terme est la dérivée attendue.
Le troisième terme tend vers 0
Mais le second n'a pas de limite définie.

On ne dérivera donc pas par rapport à Φ, mais par rapport à $Re(\Phi)$ et $Im(\Phi)$

Posons $\Phi = A + jB$ et $\Gamma = R + jQ$

$$\begin{aligned} \Phi^H \Gamma \Phi &= (A+jB)^H (R+jQ)(A+jB) \\ &= (A^T - jB^T)(RA - QB + j(QA + RB)) \\ &= A^T RA - A^T QB + B^T QA + B^T RB \\ &\quad + j(-B^T RA + B^T QB + A^T QA + A^T RB) \\ &= A^T RA + B^T RB + j(A^T QA + B^T QA) \end{aligned}$$

C3

Notons que $\Gamma = \Gamma^H \Rightarrow \begin{cases} R = R^T \\ Q = -Q^T \end{cases}$

donc $A^T Q A = (A^T Q A)^T = A^T Q^T A = -A^T Q A = 0$

Mais nous conservons ces termes dans le calcul ...

$$\mathrm{Grad}_A(\Phi^H \Gamma \Phi) = 2RA + 2jQA$$
$$\mathrm{Grad}_B(\Phi^H \Gamma \Phi) = 2RB + 2jQB$$

Ecrire que ces deux vecteurs réels sont nuls équivaut à écrire $0 = \mathrm{Grad}_A() + j\,\mathrm{Grad}_B()$

soit:

$$\mathrm{Grad}_A(\Phi^H \Gamma \Phi) + j\,\mathrm{Grad}_B(\Phi^H \Gamma \Phi) = 2\left[RA - QB + j(QA + RB)\right]$$
$$= 2(R + jQ)(A + jB)$$
$$= 2\Gamma\Phi$$

La dérivation est donc possible.

$\mathrm{Min}\ \Phi^H \Gamma \Phi + \lambda(1 - e_0^H \Phi)$ avec $e_0^H \Phi = 1$

$$0 = 2\Gamma\Phi - \lambda e_0$$
$$\Rightarrow \Phi = \frac{\lambda}{2}\Gamma^{-1} e_0$$

puis $e_0^H \Phi = 1 \Rightarrow \frac{\lambda}{2} e_0^H \Gamma^{-1} e_0 = 1 \Rightarrow \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{e_0^H \Gamma^{-1} e_0}$

d'où $\Phi = \frac{\Gamma^{-1} e_0}{e_0^H \Gamma^{-1} e_0}$

et $\Phi^H \Gamma \Phi = \frac{(e_0^H \Gamma^{-1})\Gamma(\Gamma^{-1} e_0)}{(e_0^H \Gamma^{-1} e_0)^2} = \frac{e^H \Gamma^{-1} e_0}{(e^H \Gamma^{-1} e_0)^2} = \frac{1}{e_0^H \Gamma^{-1} e_0}$

L'estimateur spectral MVDR est:

$$\hat{S}_{XX}(f) = \frac{1}{e_0^H(f)\Gamma^{-1} e_0(f)}$$

Variante (Lagunas)

rapporter la puissance trouvée à celle d'un bruit blanc filtré par Φ.

$$\Phi^H I \Phi = \frac{e_0^H \Gamma^{-1}}{e_0^H \Gamma^{-1} e_0} \times \frac{\Gamma^{-1} e_0}{e_0^H \Gamma^{-1} e_0} = \frac{e_0^H \Gamma^{-2} e_0}{(e_0^H \Gamma^{-1} e_0)^2}$$

$$\frac{\Phi^H R \Phi}{\Phi^H I \Phi} = \frac{1}{e_0^H \Gamma^{-1} e_0} \times \frac{(e_0^H \Gamma^{-1} e_0)^2}{e_0^H \Gamma^{-2} e_0} = \frac{e_0^H \Gamma^{-1} e_0}{e_0^H \Gamma^{-2} e_0}$$

d'où $\hat{S}_{xx}(f) = \dfrac{e_0^H \Gamma^{-1} e_0}{e_0^H \Gamma^{-2} e_0}$

Remarque : calcul $e_0^H \Gamma^{-1} e_0$

Γ est Toeplitz, mais Γ^{-1} ne l'est pas.

Posons $\Gamma^{-1} = [\, g_{km} \,]$ $\quad g_{km}$ = élément en ligne k et colonne m de Γ^{-1}

$$e_0^H \Gamma^{-1} e_0 = \sum_{k=0}^{p} \sum_{m=0}^{p} e^{j2\pi f_0 k} g_{km} e^{-j2\pi f_0 m} \qquad \tilde{k} = m - k$$

$$= \sum_{\tilde{k}=-p}^{p} e^{-j2\pi f_0 \tilde{k}} \sum_{m=\max(0,\tilde{k})}^{\min(p,p+\tilde{k})} g_{m-\tilde{k},m}$$

On peut donc calculer $e_0^H \Gamma^{-1} e_0$ par Transformée de Fourier de la séquence $[\alpha_{-p} \dots \alpha_0 \dots \alpha_p]$

avec $\alpha_k = \displaystyle\sum_{m=\max(0,k)}^{\min(p,p+k)} g_{m-k,m}$
