

第三章 电路定理

知识结构

齐次性定理和叠加原理

戴维南定理

互易定理



置换定理

诺顿定理

最大功率传递定理

3.1 齐次性定理和叠加原理

齐次性定理和叠加原理是线性网络具有的基本性质。在线性电路中激励和响应之间具有线性性质。

线性系统：假设系统的描述为 L ，对任意两个输入变量（标量/向量） w_1 、 w_2 以及任意两个非零常数 c_1 、 c_2 ，则必有 $L(c_1 w_1 + c_2 w_2) = c_1 L(w_1) + c_2 L(w_2)$ 。

齐次性：在线性系统 L 中，对任意一个输入变量 w 以及任意非零常数 c ，则必有 $L(c w) = c L(w)$ 。

叠加性：在线性系统 L 中，对任意两个输入变量 w_1 、 w_2 ，则必有 $L(w_1 + w_2) = L(w_1) + L(w_2)$ 。

3.1.1 齐次性定理 网络函数

由线性元件及独立电源组成的线性电路中：

独立电源对电路起激励作用；

线性元件上的电压、电流是激励引起的响应；

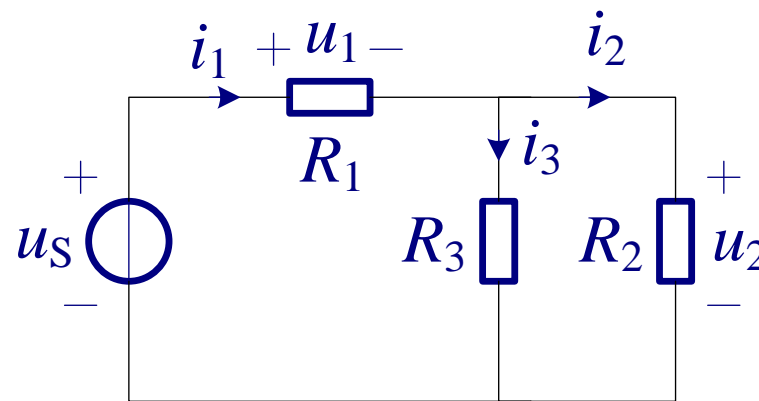
响应与激励间存在着线性（比例）关系。

齐次性定理：在只有一个激励（电压源和电流源） w 的线性电阻电路中，取电路中任意支路电流或支路电压为响应 y ，当激励增大或缩小 a 倍（ a 为实数）时，响应也将同样增大或缩小 a 倍。

定义：对单一激励的线性、非时变电路，指定响应对激励之比定义为**网络函数**，记为 H ，即

$$H = \frac{\text{响应}}{\text{激励}}$$

$$\frac{i_1}{u_S} = \frac{R_2 + R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$$
$$\frac{u_1}{u_S} = \frac{(R_2 + R_3) R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$$



若响应与激励在同一端口，则 H 属**策动点函数**；若响应与激励不在同一端口，则 H 属**转移函数**。

网络函数 H 的分类

	响应	激励	名称
策动点函数	电流	电压	策动点电导 G_i
	电压	电流	策动点电阻 R_i
转移函数	电流	电压	转移电导 G_T
	电压	电流	转移电阻 R_T
	电流	电流	转移电流比 H_i
	电压	电压	转移电压比 H_u

注：对线性电阻电路，网络函数是实数，具有不同的量纲。

练习：如图， $u_S=64V$ ，则 1Ω 电阻两端的电压 u 为[提示：可先求网络函数]

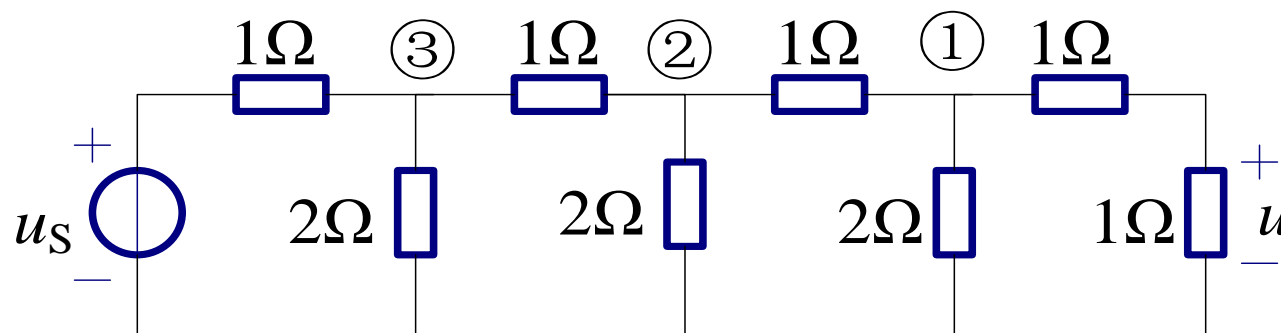
A. 1V

B. 2V

C. 4V

D. 8V

E. 16V



电路实例：等比例步进衰减电路

Pub. No.: US 2011/0140812 A1

如图所示电路可实现对输入信号进行任意等比例步进衰减。现要求从理想电压源 u_S 两端看出去的等效电阻为 $R_i=500\Omega$ ，步进衰减比例为 $k=1/3$ ，试求电阻 R_1 、 R_2 、 R_3 。

$$\begin{cases} R_1 + R_3 = R_i = 500 \\ R_2 \parallel (R_1 + R_3) = R_3 \end{cases}$$

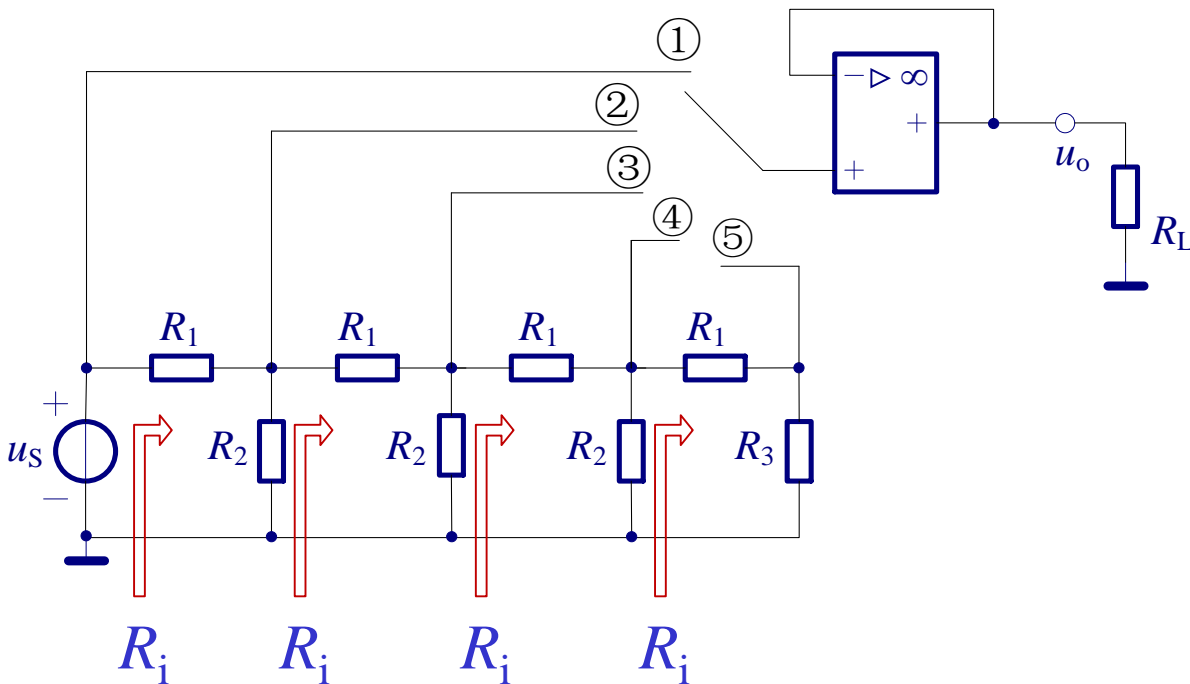
等效电阻条件

等比例条件

$$\frac{R_3}{R_1 + R_3} = k = \frac{1}{3}$$

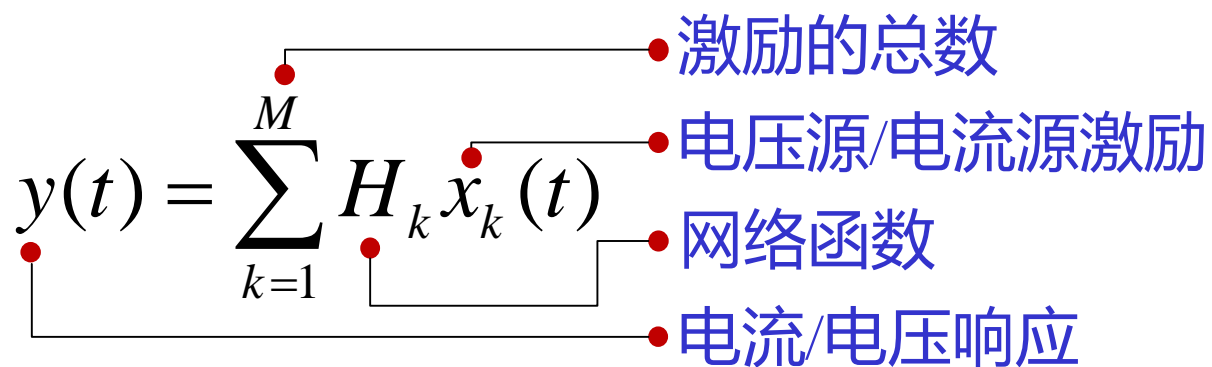
比例条件

$$\Rightarrow R_1 = \frac{1000}{3}\Omega, R_2 = 250\Omega, R_3 = \frac{500}{3}\Omega$$



3.1.2 叠加定理

叠加定理：在线性电路（由线性电阻、线性受控源、独立源组成）中，任一支路电流（或电压）都是电路中各个独立电源单独作用时，在该支路产生的电流（或电压）的代数和。

$$y(t) = \sum_{k=1}^M H_k x_k(t)$$


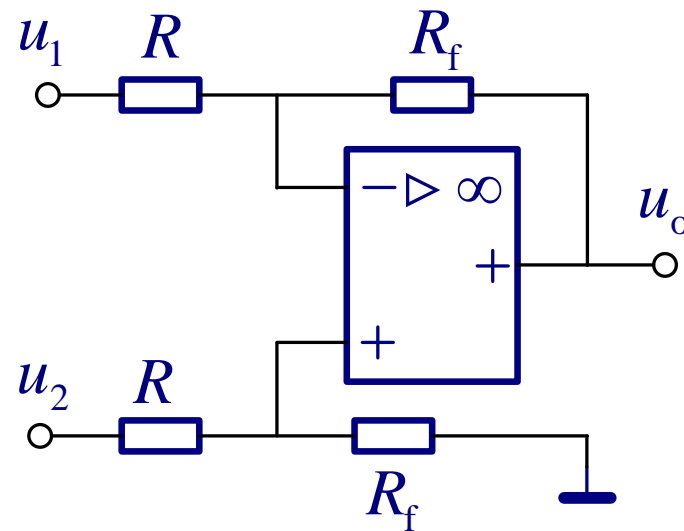
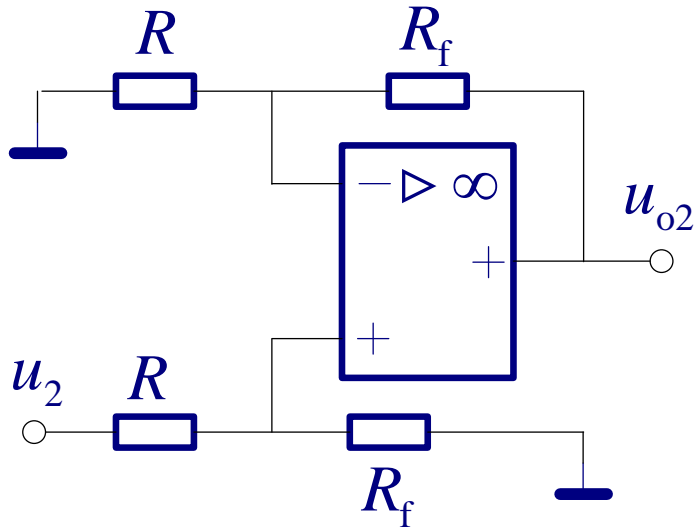
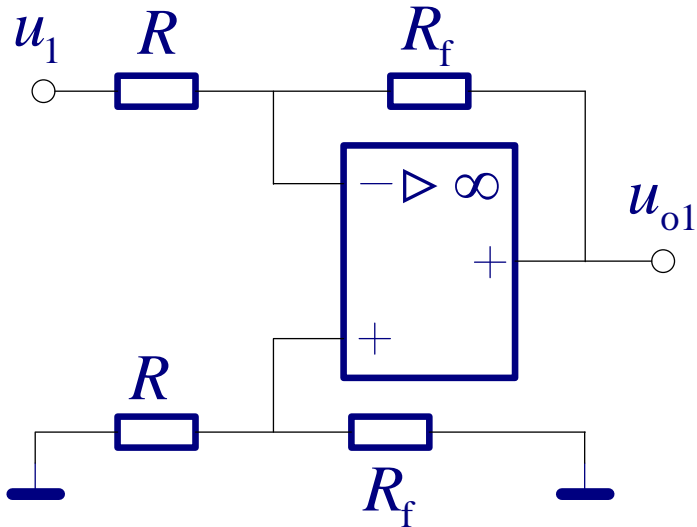
- 激励的总数
- 电压源/电流源激励
- 网络函数
- 电流/电压响应

讨论:

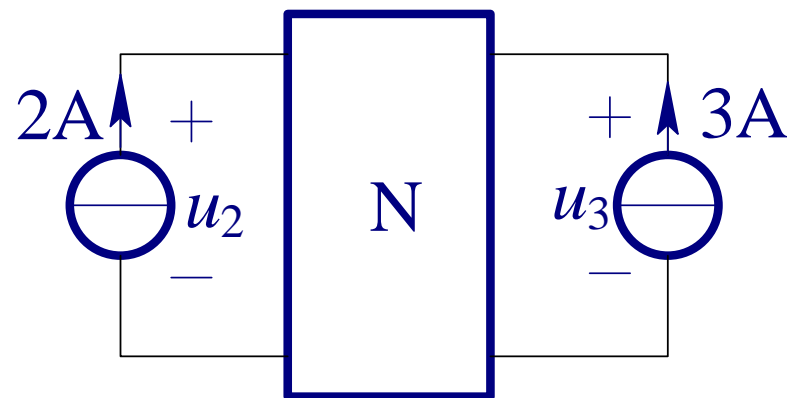
- 单独作用：一个电源作用，其余不作用；不作用的电压源短路($u_S=0$)；不作用的电流源开路($i_S=0$)。
- 叠加原理只适用于线性电路求电压和电流；不能求功率(功率为 u 、 i 的二次函数)。
- 电路的结构参数必须前后一致。含受控源(线性)电路亦可用叠加，受控源应始终保留。
- 叠加原理只在电路具有惟一解的假定下才能成立。
- 叠加性是线性电路的基本性质，利用叠加原理可使复杂激励问题简化为单一激励问题。

例：图所示为一个由运算放大器和电阻构成的电路。已知输入电压分别为 u_1 和 u_2 ，试求输出电压 u_o 。

解：图示电路有两个电压源激励 u_1 和 u_2 ，可画出两个电压源单独作用的分电路。



例：如图，N为线性电阻网络，当3A电流源不作用时，2A电流源对电路提供的功率为28W，且 u_3 为8V；当2A电流源不作用时，3A电流源对电路提供的功率为54W，且 u_2 为12V。问两电源同时作用时，向电路提供的总功率为多少？



当2A电流源单独作用时

$$u_2^{(1)} = \frac{28}{2} = 14\text{V}, u_3^{(1)} = 8\text{V}$$

当3A电流源单独作用时

$$u_2^{(2)} = 12\text{V}, u_3^{(2)} = \frac{54}{3} = 18\text{V}$$

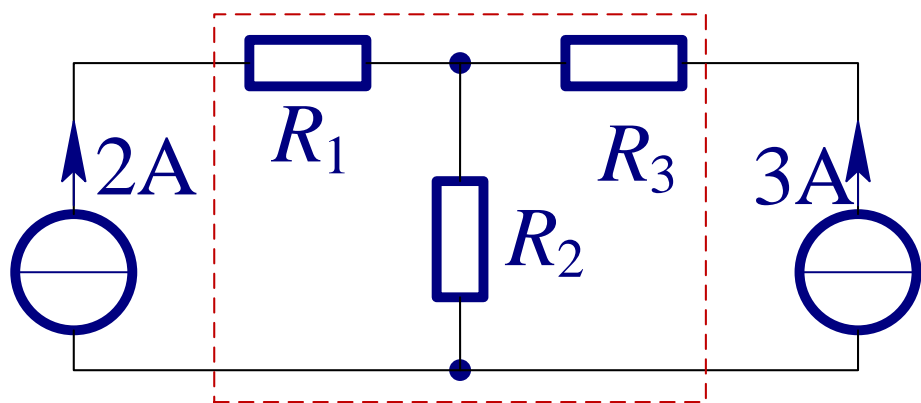
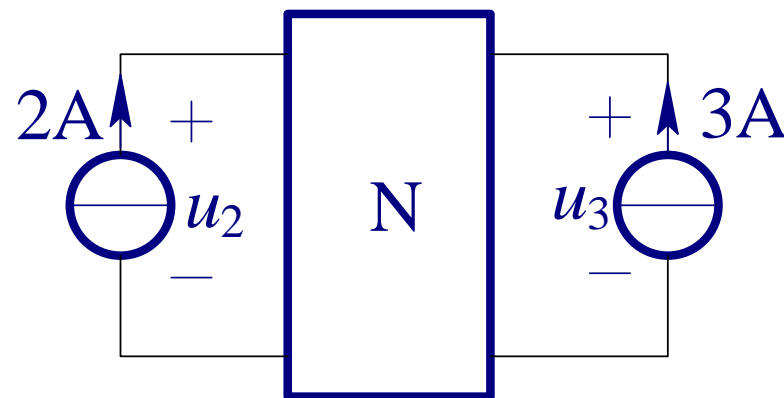
当两个电流源共同作用时

$$u_2 = 26\text{V}, u_3 = 26\text{V}$$

$$\Rightarrow P_T = (-2 \times 26 - 3 \times 26)\text{W} = -130\text{W}$$

例：如图，N为线性电阻网络，当3A电流源不作用时，2A电流源对电路提供的功率为28W，且 u_3 为8V；当2A电流源不作用时，3A电流源对电路提供的功率为54W，且 u_2 为12V。问两电源同时作用时，向电路提供的总功率为多少？

讨论：求解问题的特例法。

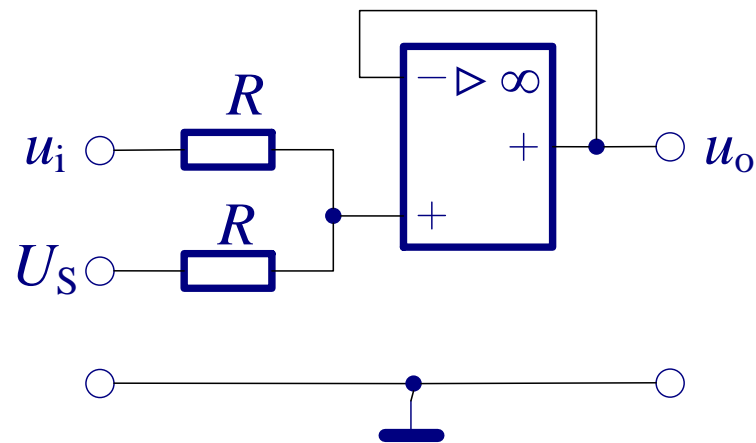


$$\begin{cases} \begin{cases} 2^2(R_1 + R_2) = 28 \\ 2R_2 = 8 \end{cases} \\ \begin{cases} 3^2(R_2 + R_3) = 54 \\ 3R_2 = 12 \end{cases} \end{cases}$$

练习：电路实例-电平平移电路

如图所示电路为电平平移电路，其作用是将信号的基线（或称“零点”）抬高或降低一定幅值，它在单一电源（如5V）工作的电路中具有广泛的应用。已知 $U_S=5V$ ， $u_i=5\sin(\omega t)$ ，试求输出电压 u_o 。

- A. $(5+5\sin\omega t)V$
- B. $(5-5\sin\omega t)V$
- C. $(-5-5\sin\omega t)V$
- D. $(-2.5+2.5\sin\omega t)V$
- E. $(2.5+2.5\sin\omega t)V$



小结

齐次性定理和叠加原理

戴维南定理

互易定理



$$y(t) = \sum_{k=1}^M H_k x_k(t)$$

作业与答疑：完成慕课网站上对应章节的习题；在QQ群中答疑

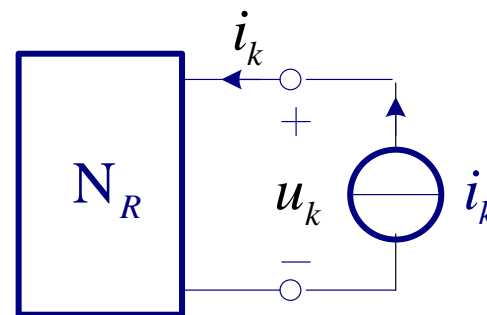
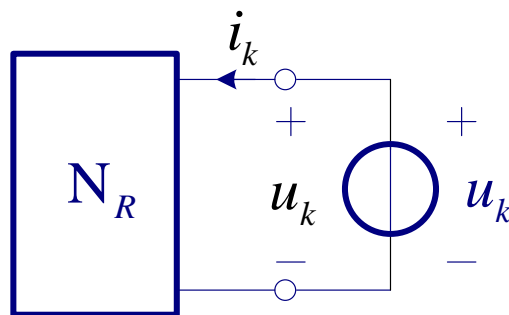
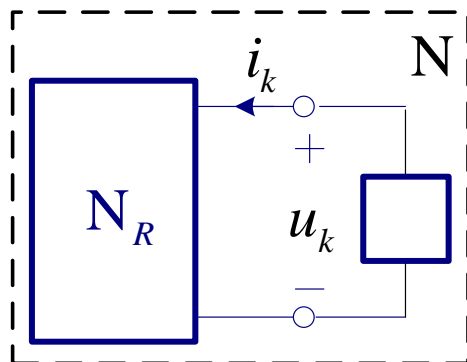
3.2 置换定理

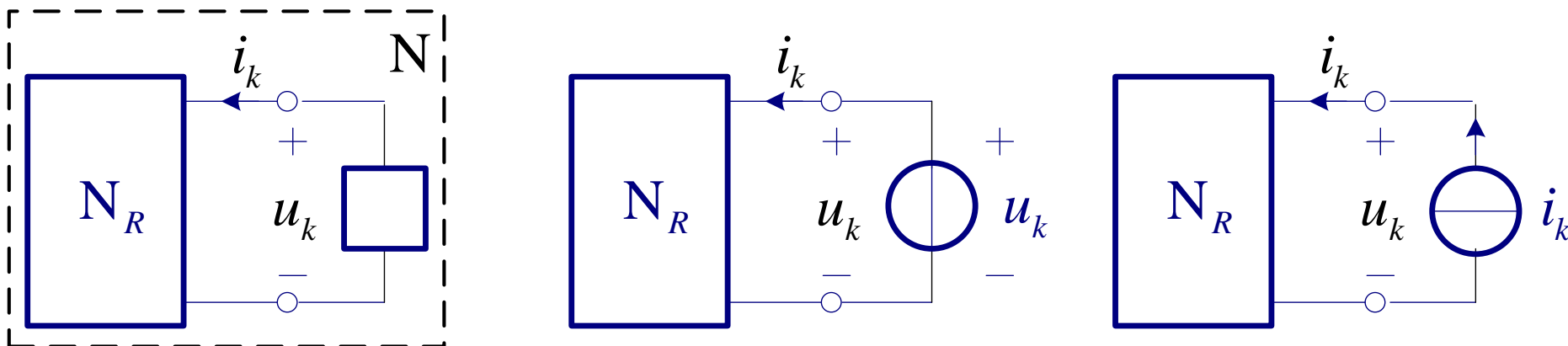
我也叫替代定理，呵呵！

置换定理：在具有惟一解的任意线性或非线性网络中，若已知第 k 条支路的电压和电流为 u_k 和 i_k ，则不论该支路是什么元件组成的，总可以用下列的任何一个元件去置换：

- 1) 电压值为 u_k 的电压源；
- 2) 电流值为 i_k 的电流源；

置换后电路的全部电压和电流都保持原值不变。

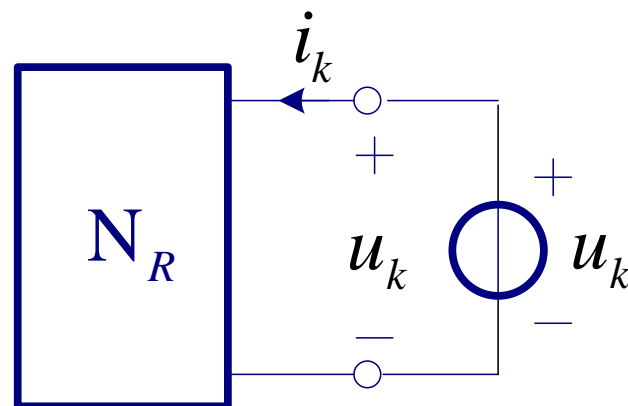
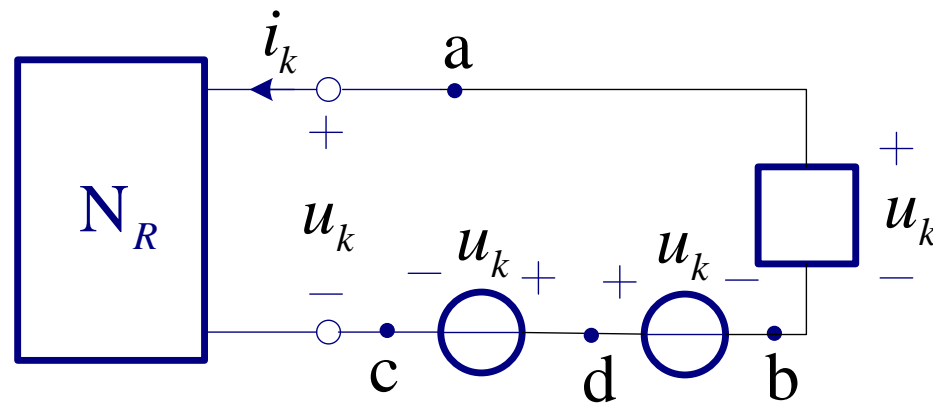
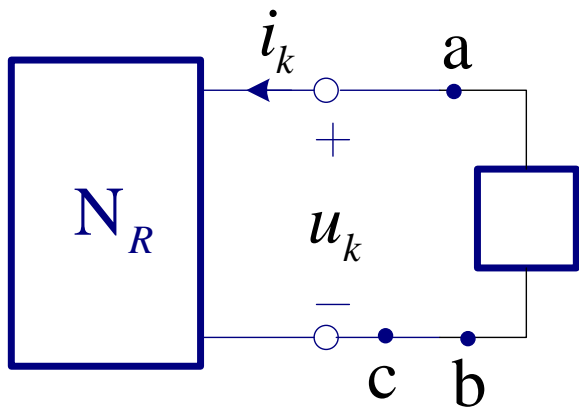




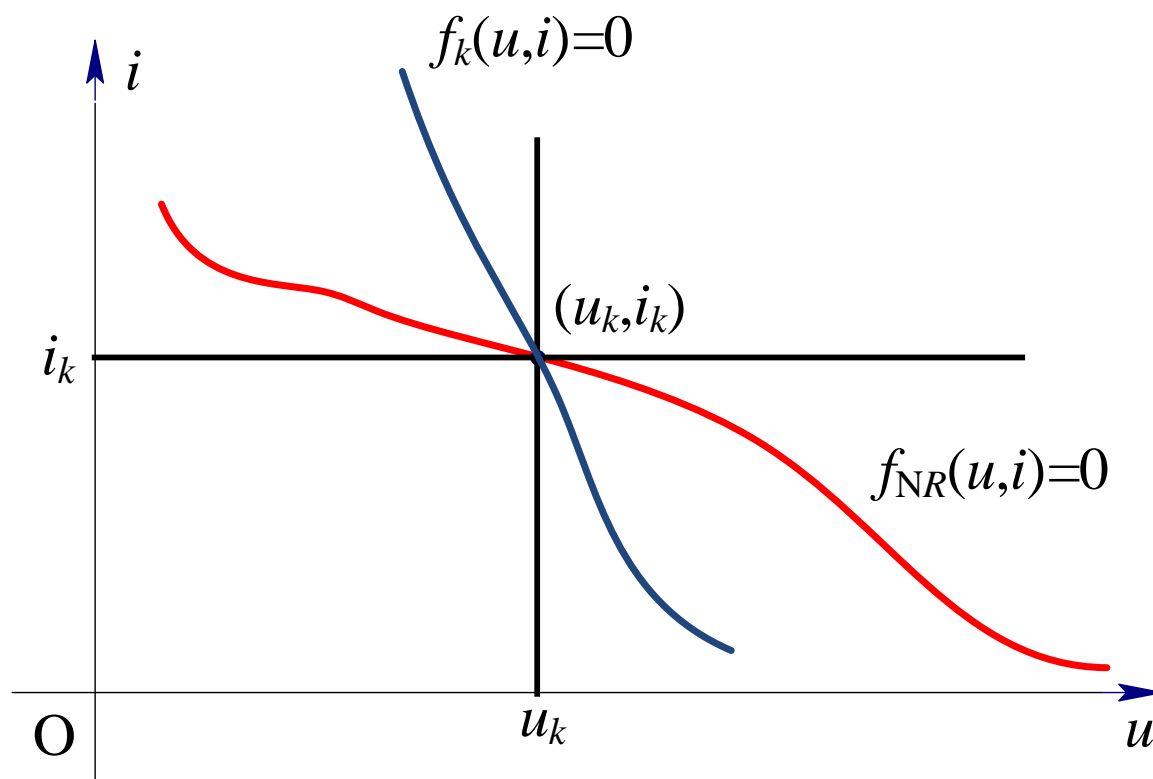
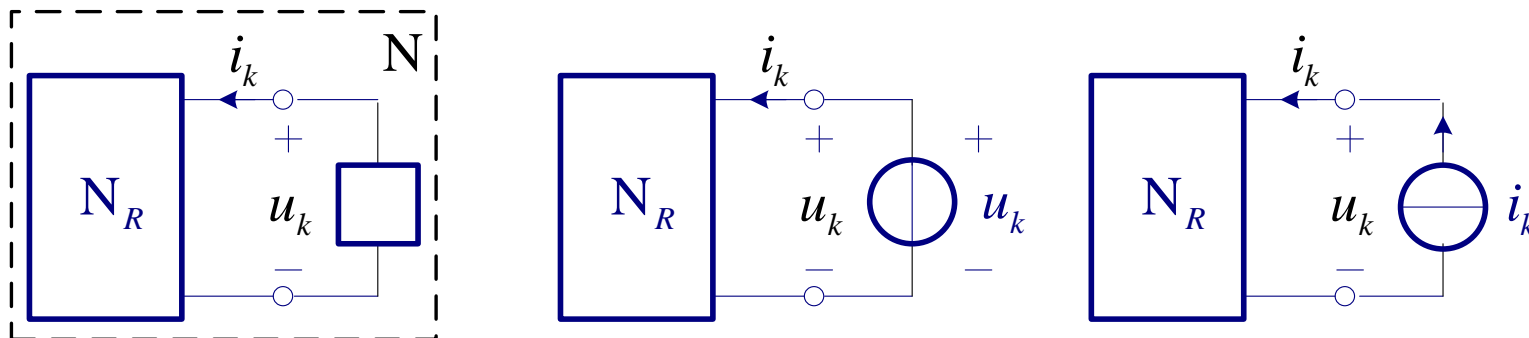
证明:

- (1) 置换前后网络的结构未变, 因此描述该网络的KCL、KVL方程前后保持不变。
- (2) 除第 k 条支路外, 支路VCR也未变。
- (3) 当第 k 条支路由电流源 i_k 来置换, 其两端电压为任意值, 但由于电路具有惟一解, 因此, 该电压必为 u_k 。

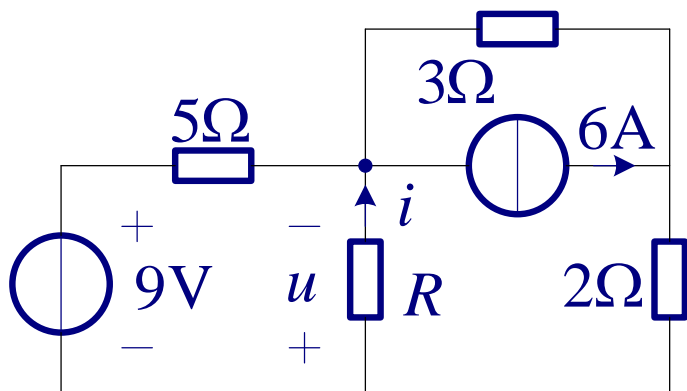
直觉证明



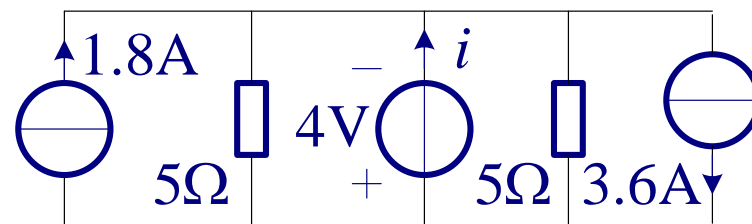
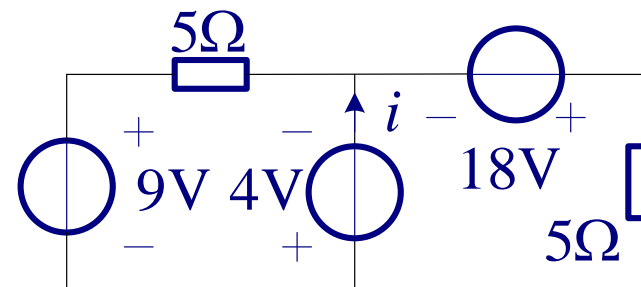
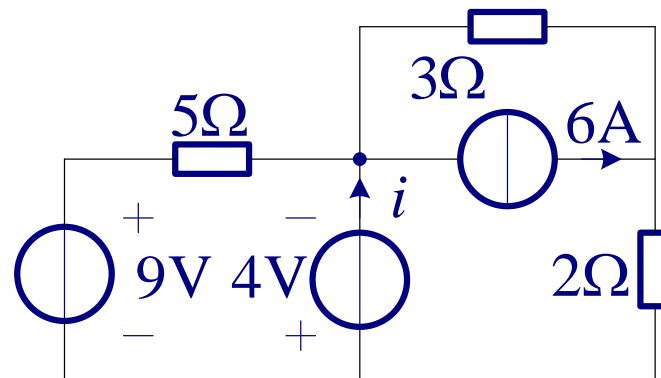
直觉证明



例： 图所示电路中，已知 $u=4\text{V}$ ，试求线性电阻 R 的电阻值。



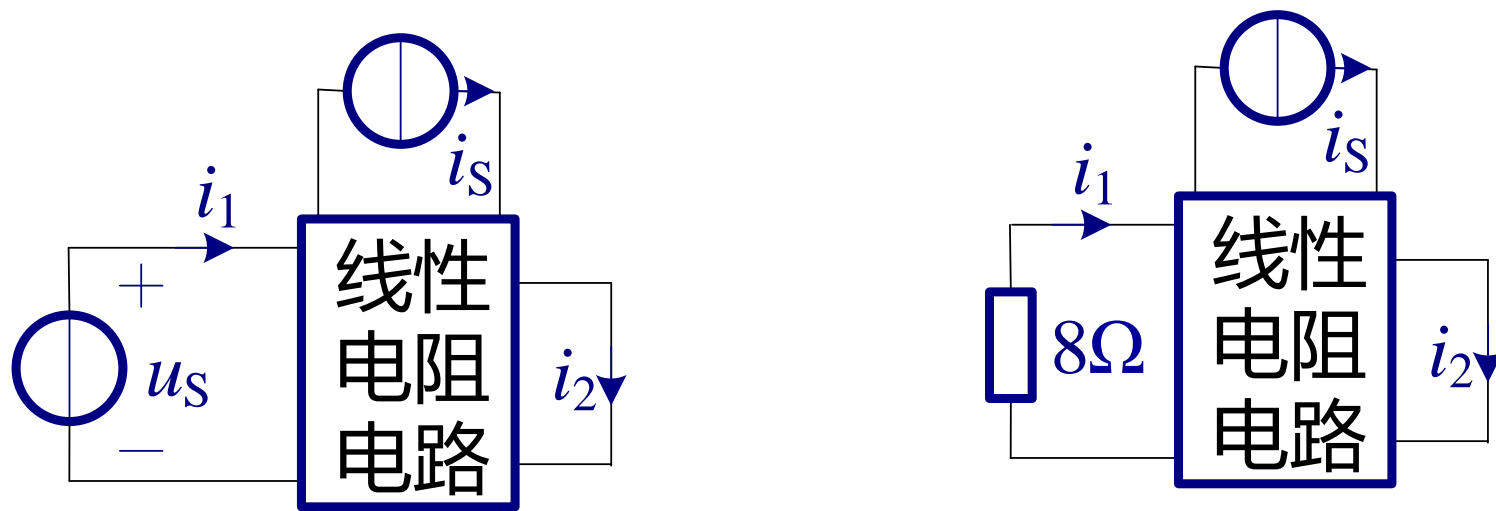
可以用4V电压源置换该支路，再用等效变换方法，求得置换支路的电流 i 。



$$i = (3.6 - 1.8 - 4/5 - 4/5)\text{A} = 0.2\text{A}$$

$$R = u / i = 4 / 0.2\Omega = 20\Omega$$

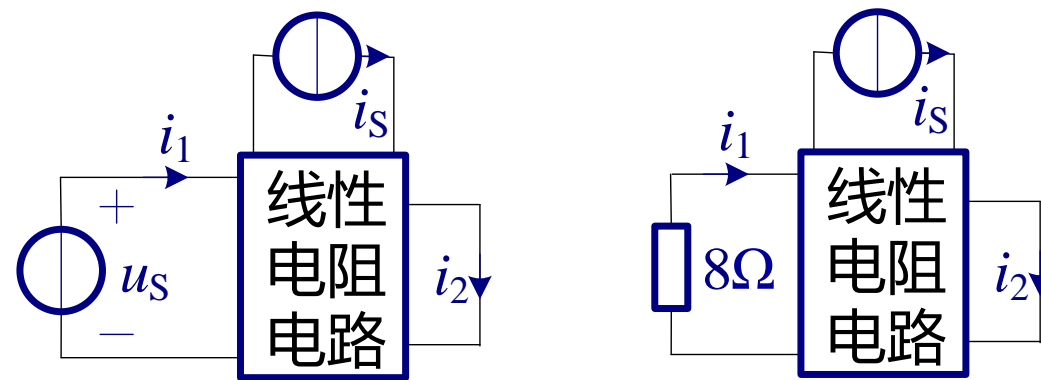
例：图示电路，当 $u_S=10\text{V}$ ， $i_S=4\text{A}$ 时， $i_1=4\text{A}$ ， $i_2=2.8\text{A}$ 。当 $u_S=0\text{V}$ ， $i_S=2\text{A}$ 时， $i_1=-0.5\text{A}$ ， $i_2=0.4\text{A}$ 。求：当 $i_S=10\text{A}$ 时，用 8Ω 电阻置换 u_S 时的 i_1 、 i_2 。



思路分析： (1) 先求 i_1 、 i_2 随 u_S 、 i_S 变化的关系；
(2) 再将 8Ω 支路替代为电压源支路。

当 $u_S = 10\text{V}$, $i_S = 4\text{A}$ 时, $i_1 = 4\text{A}$, $i_2 = 2.8\text{A}$ 。当 $u_S = 0\text{V}$, $i_S = 2\text{A}$ 时, $i_1 = -0.5\text{A}$, $i_2 = 0.4\text{A}$ 。求：当 $i_S = 10\text{A}$ 时, 用 8Ω 电阻置换 u_S 时的 i_1 、 i_2 。

(1) 先求 i_1 、 i_2 随 u_S 、 i_S 变化的关系。



$$\begin{cases} i_1 = k_{11}u_S + k_{12}i_S \\ i_2 = k_{21}u_S + k_{22}i_S \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 = 10k_{11} + 4k_{12} \\ -0.5 = 0 + 2k_{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_{11} = 0.5 \\ k_{12} = -0.25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2.8 = 10k_{21} + 4k_{22} \\ 0.4 = 0 + 2k_{22} \end{cases}$$

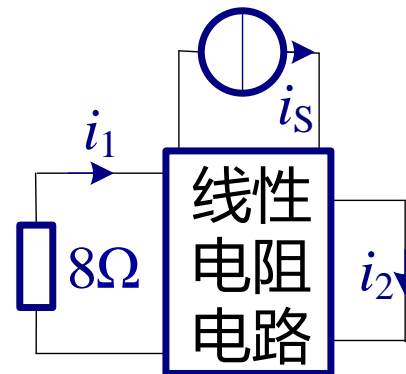
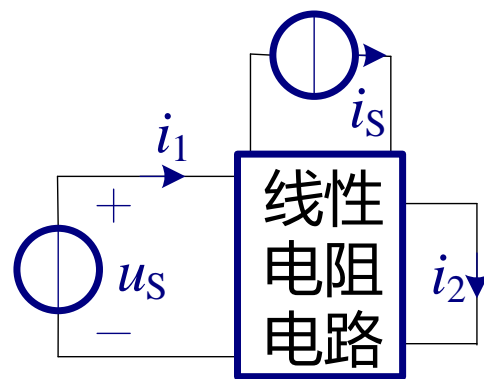
$$\begin{cases} k_{21} = 0.2 \\ k_{22} = 0.2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i_1 = 0.5u_S - 0.25i_S \\ i_2 = 0.2u_S + 0.2i_S \end{cases}$$

当 $u_S=10\text{V}$, $i_S=4\text{A}$ 时, $i_1=4\text{A}$, $i_2=2.8\text{A}$ 。当 $u_S=0\text{V}$, $i_S=2\text{A}$ 时, $i_1=-0.5\text{A}$, $i_2=0.4\text{A}$ 。求: 当 $i_S=10\text{A}$ 时, 用 $8\ \Omega$ 电阻置换 u_S 时的 i_1 、 i_2 。

(1) 先求 i_1 、 i_2 随 u_S 、 i_S 变化的关系。

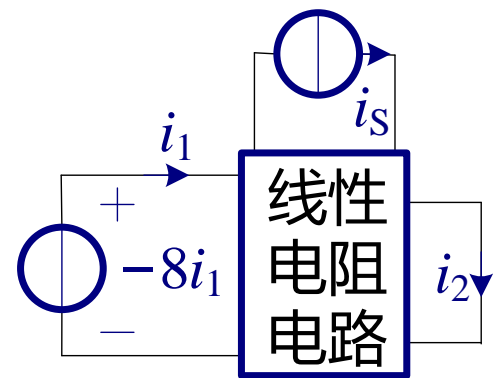
$$\begin{cases} i_1 = 0.5u_S - 0.25i_S \\ i_2 = 0.2u_S + 0.2i_S \end{cases}$$



(2) 应用置换定理

$$\begin{cases} i_1 = 0.5 \times (-8i_1) - 0.25 \times 10 \\ i_2 = 0.2 \times (-8i_1) + 0.2 \times 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i_1 = -0.5\text{A} \\ i_2 = 2.8\text{A} \end{cases}$$



练习：下面描述**错误**的是

- A. 置换定理适用于线性、非线性电路、非时变和时变电路。
- B. 置换定理要求原电路和替代后的电路必须有唯一解。
- C. 被替代的支路和电路其它部分应无耦合关系。
- D. 当被置换支路的电压已知而电流未知时也可应用置换定理。
- E. 置换定理可以扩充为：若已知第 k 条支路的电压和电流为 u_k 和 i_k ，则不论该支路是什么元件组成的，则该支路可用电阻为 $R_k = u_k / i_k$ 的支路置换。

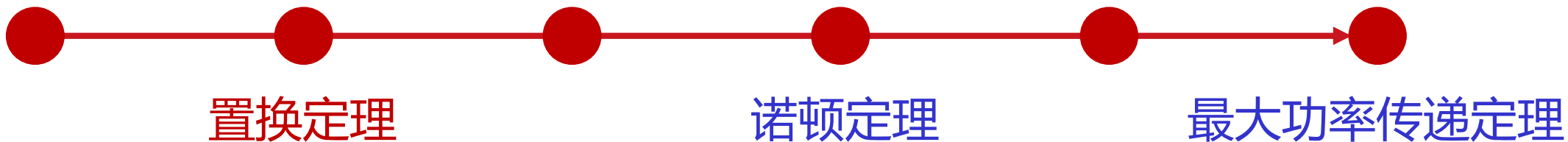


小结

齐次性定理和叠加原理

戴维南定理

互易定理



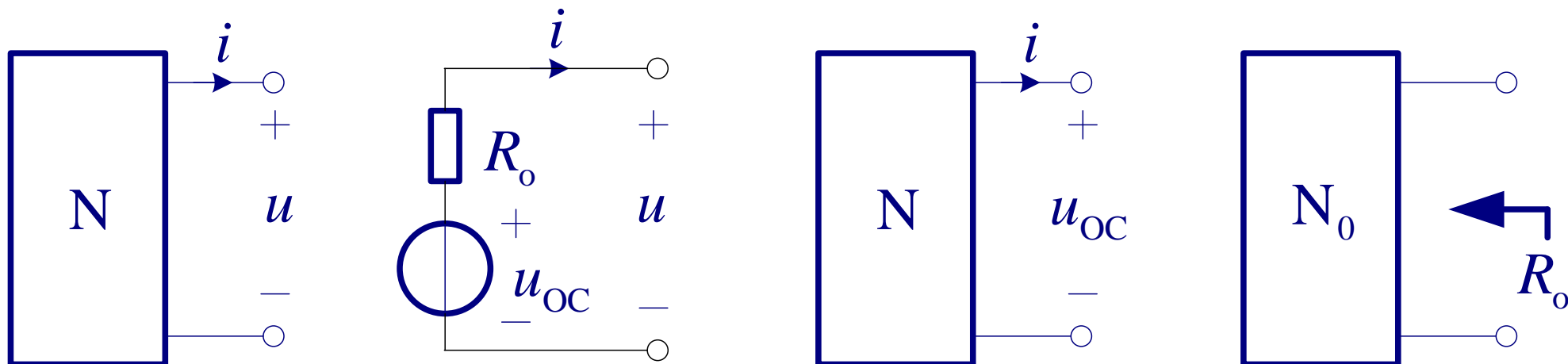
- 替换什么?
- 用什么替换?
- 替换条件?

作业与答疑：完成慕课网站上对应章节的习题；在QQ群中答疑

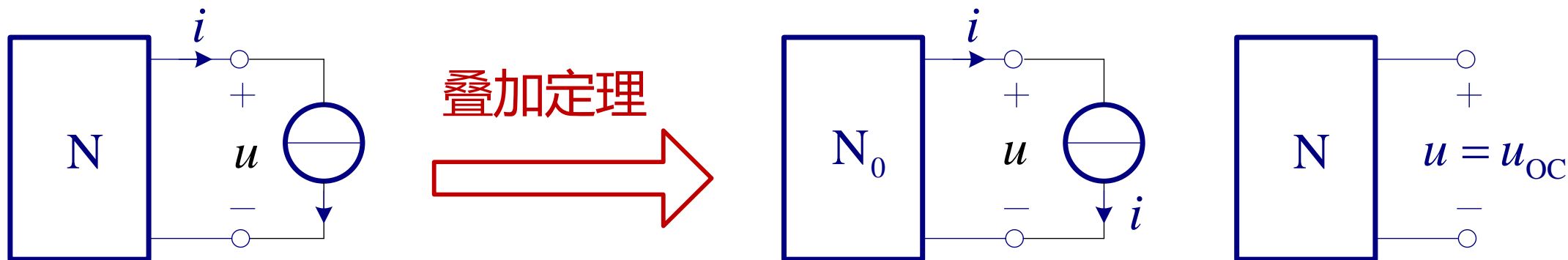
3.3 戴维南定理

戴维南定理：任何一个含电源和线性电阻、受控源的一端口电路，就其端口来说，都可以等效为一个电压源串联电阻支路。

我晓得啦，一端口线性非时变电路的端口VCR就是 $u=Ai+B$ 嘛。



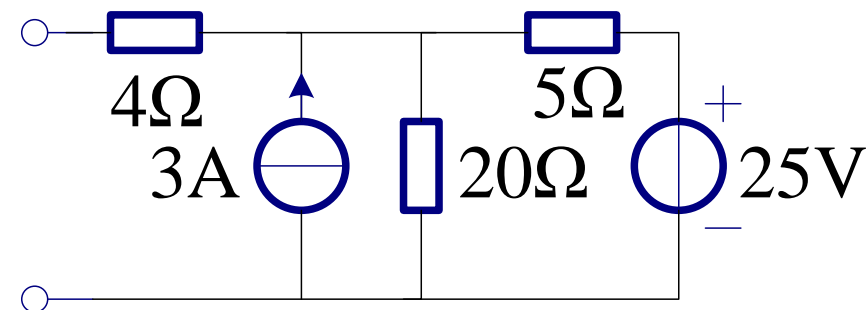
戴维南定理的证明:



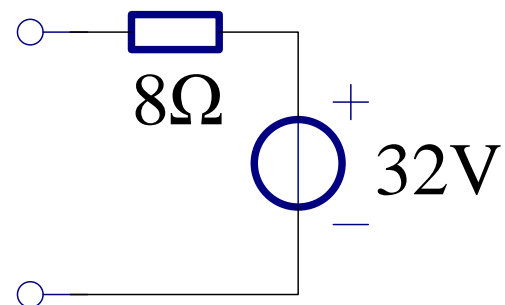
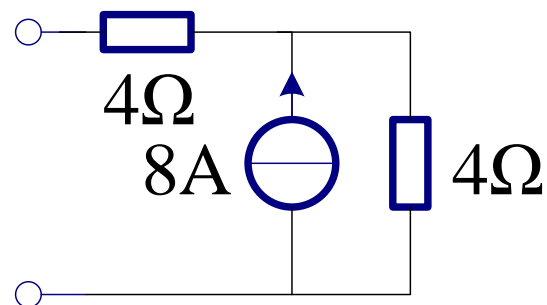
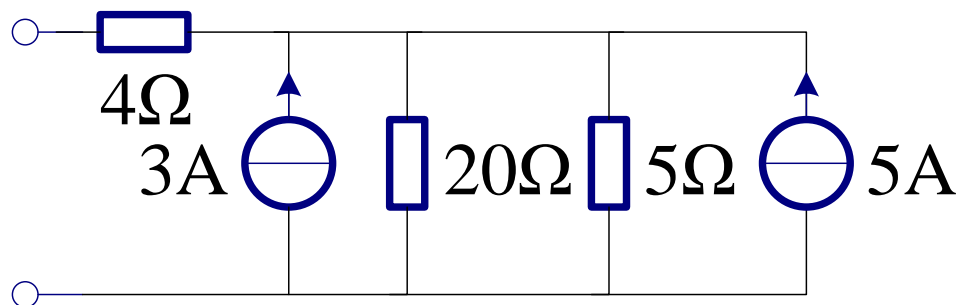
思路：在 N 的端口接入电流为 i 的电流源，求电流源两端的电压 u 。

$$u = Hi + \sum_{k=1}^n H_k w_k$$

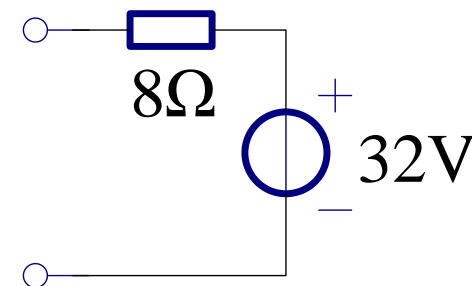
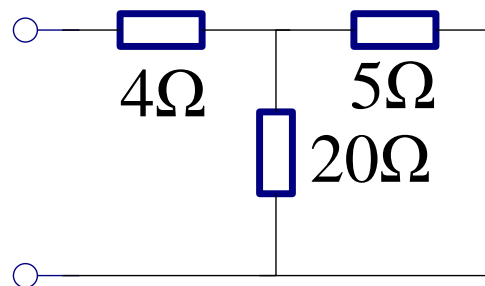
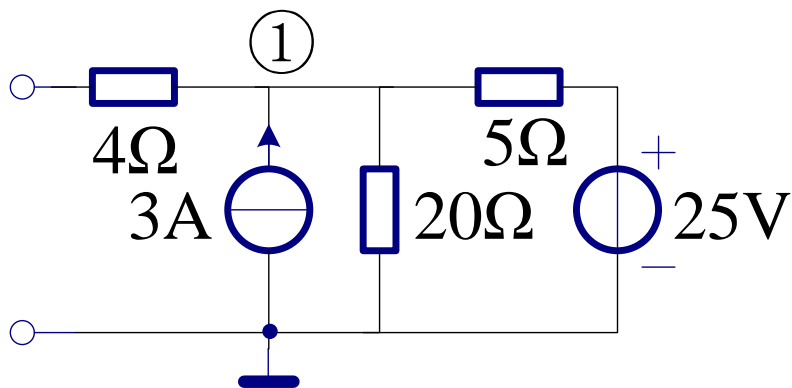
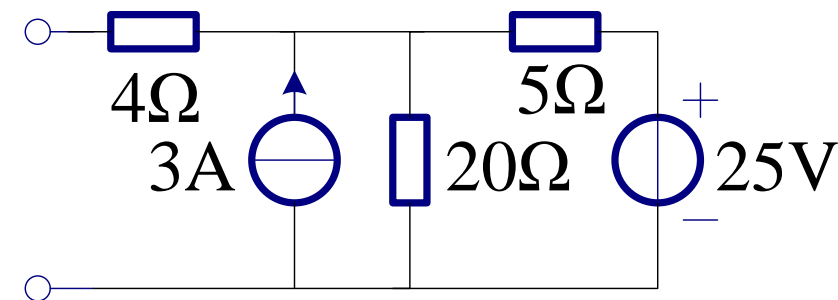
例：求图示电路的戴维南等效电路。



解1：应用等效变换方法求解。



解2：应用支路分析法、网孔分析法、节点分析法、叠加定理等电路分析方法求解。这里采用节点分析法来求解。



$$\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{20}\right) u_{oc} = 3 + \frac{25}{5} \Rightarrow u_{oc} = 32V \quad R_o = (4 + 5 // 20)\Omega = 8\Omega$$

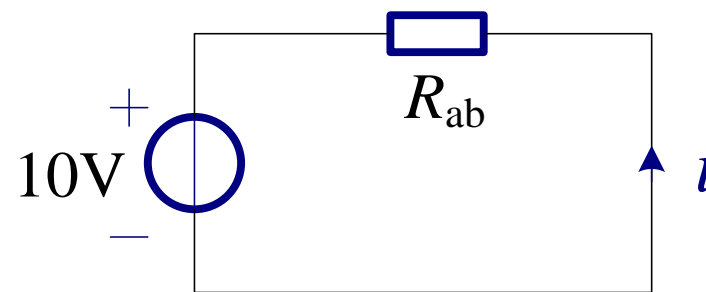
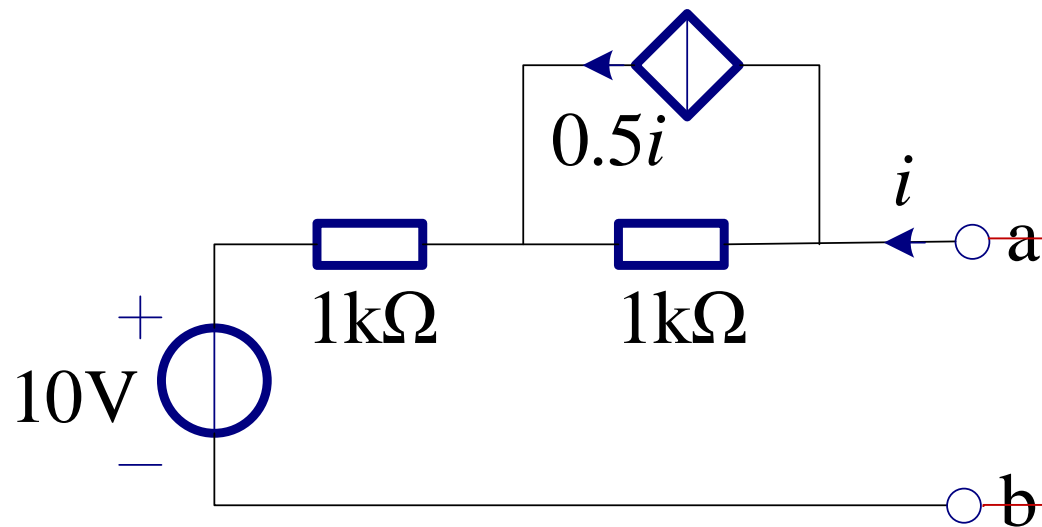
例：求图示电路的戴维南等效电路。

(1) 求开路电压： $u_{OC} = u_{ab} = 10V$

(2) 求等效电阻

方法一：外施电流源、电压源法。

方法二：短路法。



$$R_{ab} = -\frac{10}{i} = ?$$

$$10 + 1000i + 1000(i - 0.5i) = 0$$

$$\Rightarrow i = -1/150A$$

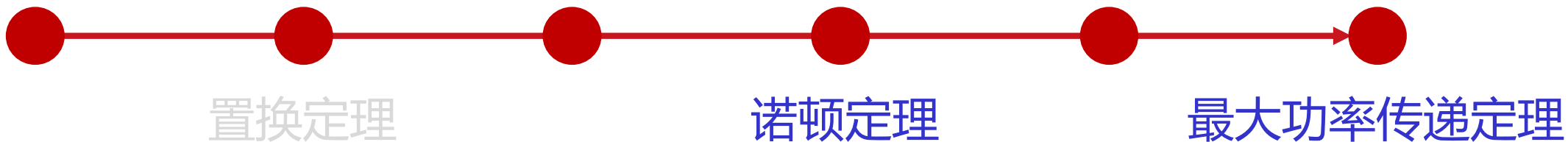
$$\Rightarrow R_{ab} = -10 / i = 1500\Omega$$

小结

齐次性定理和叠加原理

戴维南定理

互易定理



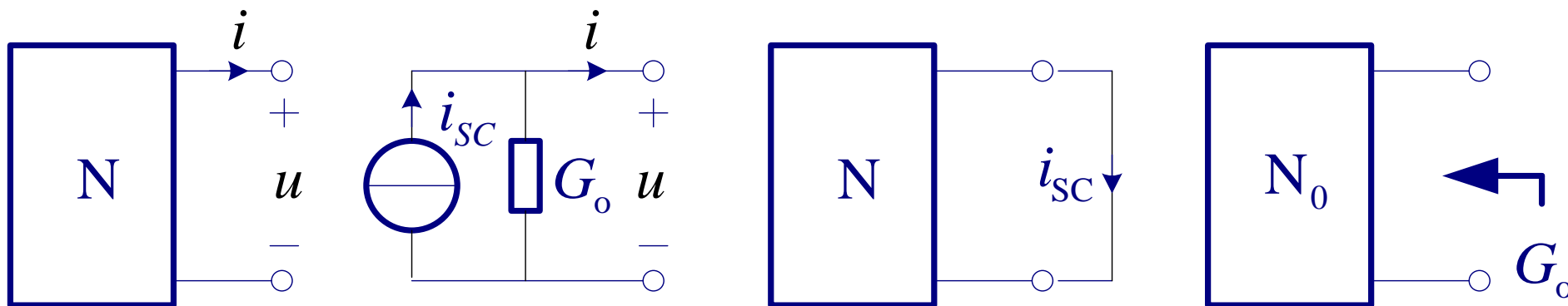
- 戴维南支路:
- 开路电压、等效电阻的求法
- 应用场合:

作业与答疑: 完成慕课网站上对应章节的习题; 在QQ群中答疑

3.4 诺顿定理(直觉方法)

诺顿定理: 任何一个含独立源的线性一端口电路，就其端口来说，都可以等效为一个电流源并联电阻组合。

好简单哎，诺顿定理和戴维南定理对偶哦。



电流源的电流 i_{SC} = 该网络的短路电流

并联电阻 R_o = 该网络中所有独立源为零值时得到的网络两端之间的等效电阻

例：求图示电路的诺顿等效电路。

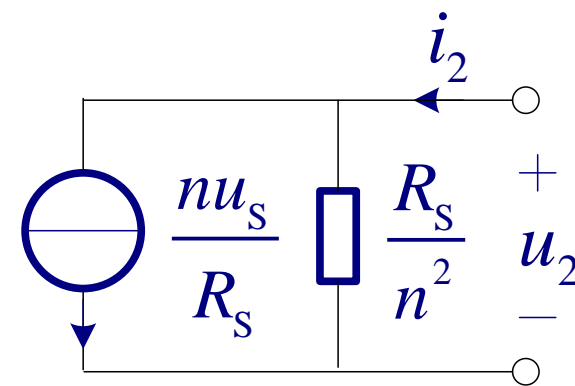
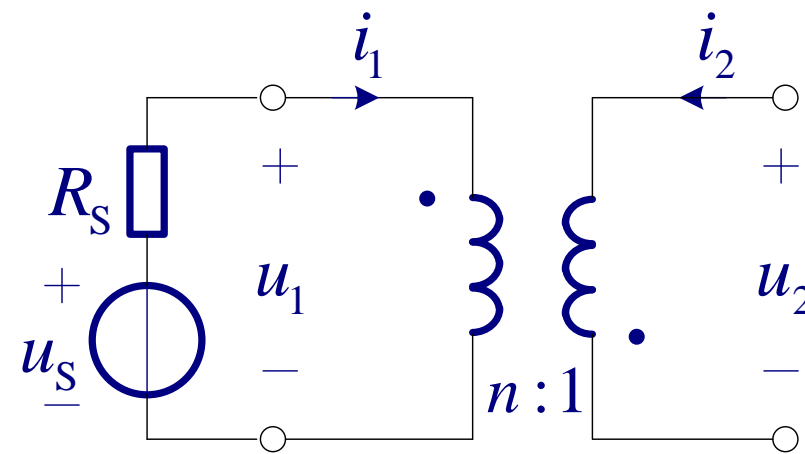
由理想变压器的电阻变换性质，从输出端口看进去的等效电阻为

$$R_o = \left(\frac{1}{n}\right)^2 R_S = \frac{R_S}{n^2}$$

将输出端短路，则有 $u_2=0$ 。由理想变压器的VCR得

$$u_2 = -\frac{1}{n} u_1 = -\frac{1}{n} (u_S - R_S i_1) = 0$$

$$\Rightarrow i_1 = \frac{u_S}{R_S} \Rightarrow i_{SC} = i_2 = n i_1 = \frac{n u_S}{R_S}$$



练习：应用戴维南定理和诺顿定理时，表述**错误**的是

- A. 两定理都是简化含有独立电源二端线性网络的重要定理。它们对求复杂电路的某一支路的电压/电流非常有效。
- B. 求戴维南等效电阻时应将网络中独立源置零，受控源必须保留。
- C. 作戴维南等效电路时，电压源的**极性**应该与所求开路电压保持一致。
- D. 被等效部分与负载间不应有任何联系
- E. 对一个戴维南电路，一定存在对应的诺顿电路。



小结

齐次性定理和叠加原理

戴维南定理

互易定理



- 与戴维南定理的比较[对偶]

作业与答疑：完成慕课网站上对应章节的习题；在QQ群中答疑

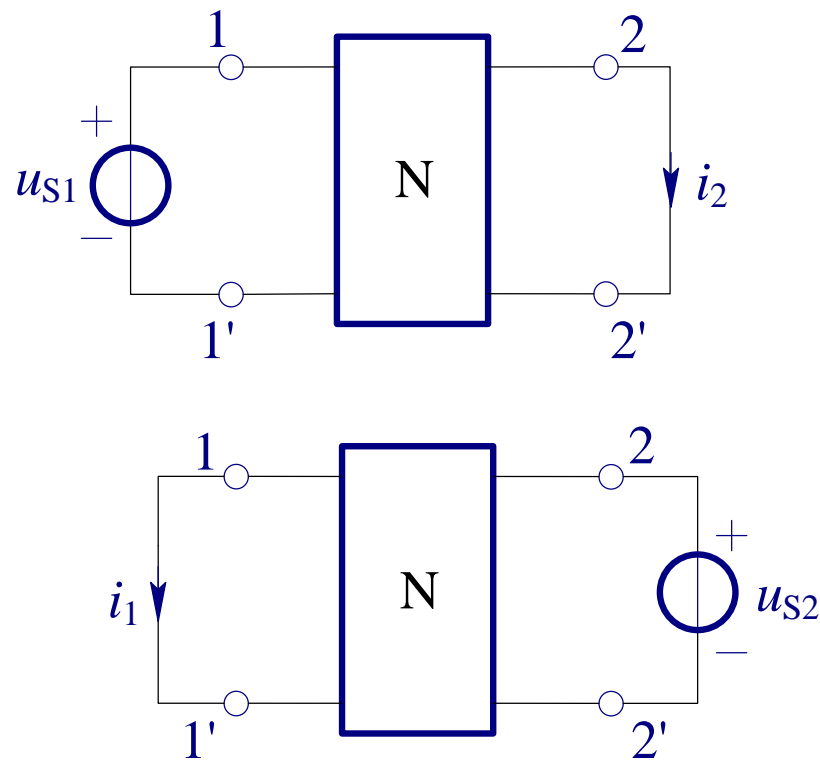
3.5 互易定理

互易电路：对于不含独立电源的电路，其激励端口和响应端口互易后描述该电路端口特性的**响应特性**不变。

互易定理1：

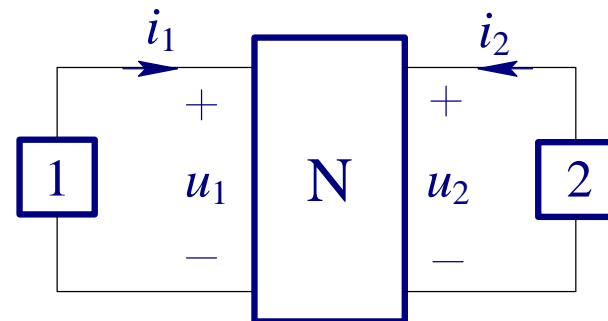
图示电路中N为互易电路，如果在端口11'施加电压源激励 u_{S1} ，在端口22'得到电流响应 i_2 ；反之，在端口22'施加电压源激励 u_{S2} ，在端口11'得到电流响应 i_1 。在电路具有唯一解的情况下，有

$$\frac{i_2}{u_{S1}} = \frac{i_1}{u_{S2}}$$

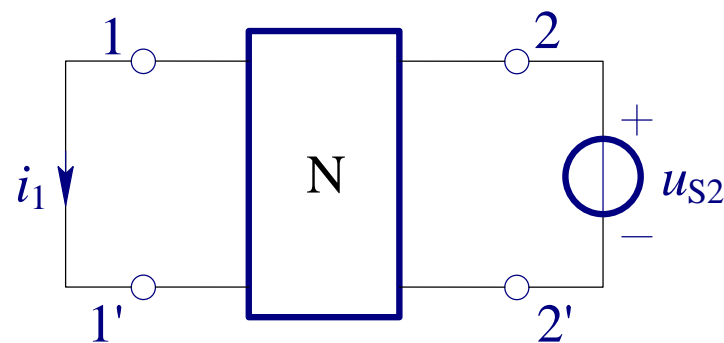
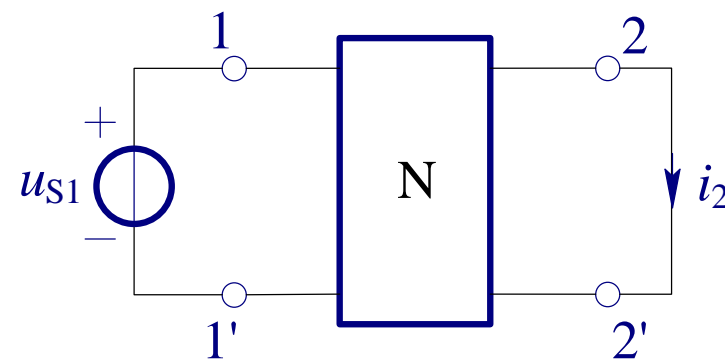


证明:

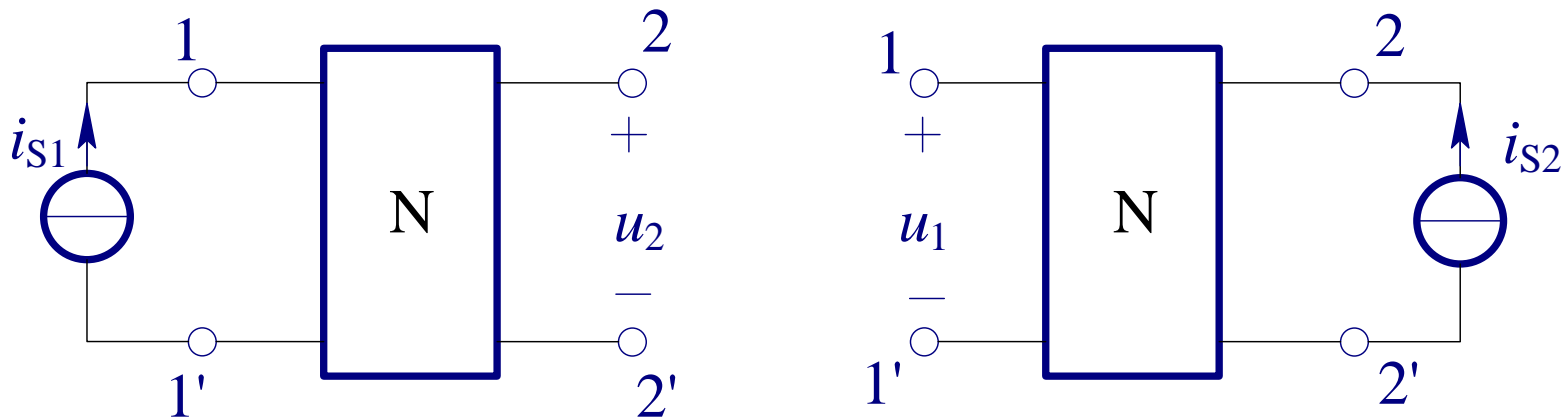
$$u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 = \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2$$



$$-u_{S1} i_1 + 0 = 0 - u_{S2} i_2$$



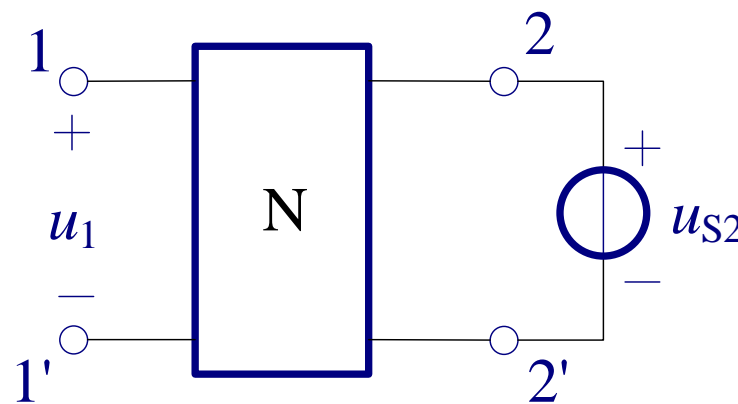
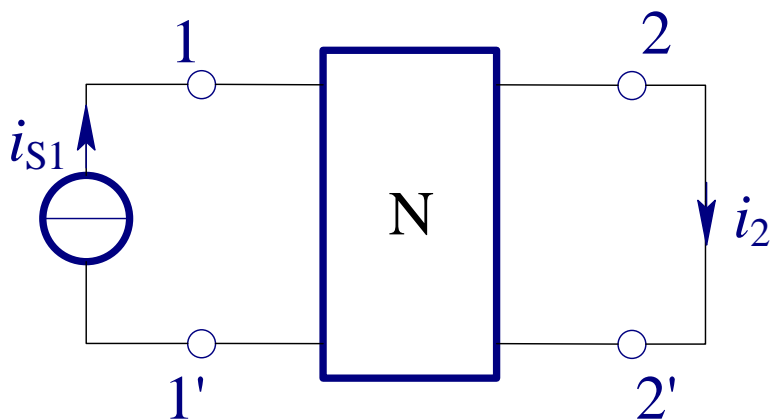
互易定理2: 图示电路中N为互易电路，如果在端口11' 施加电流源激励 i_{S1} ，在端口22' 得到电压响应 u_2 ；在端口22' 施加电流源激励 i_{S2} ，可在端口11' 得到电压响应 u_1 。在电路具有唯一解的情况下，有



$$\frac{u_2}{i_{S1}} = \frac{u_1}{i_{S2}}$$

我会证明，用特勒根定理呗。

互易定理3: 图示电路中N为互易电路，如果在端口11'施加电流源激励 i_{S1} ，在端口22'得到电压响应 i_2 ；在端口22'施加电流源激励 u_{S2} ，可在端口11'得到电压响应 u_1 。在电路具有唯一解的情况下，有

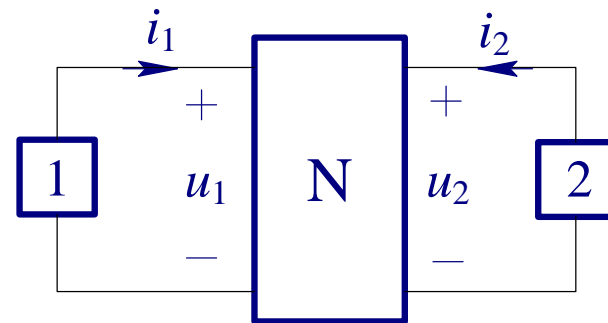


$$\frac{i_2}{i_{S1}} = \frac{u_1}{u_{S2}}$$

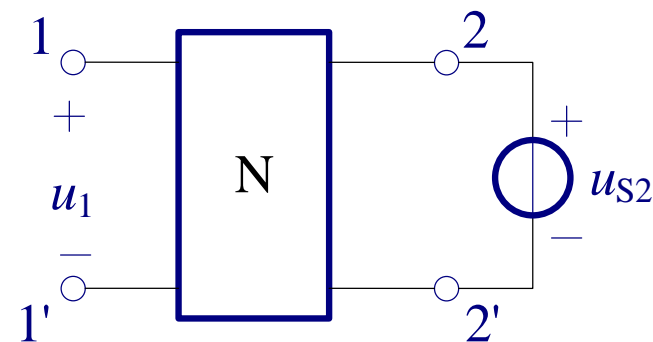
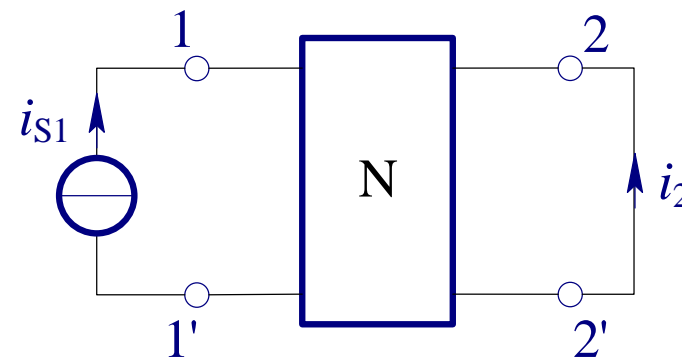
我会证明，就是不好意思说...

复习:

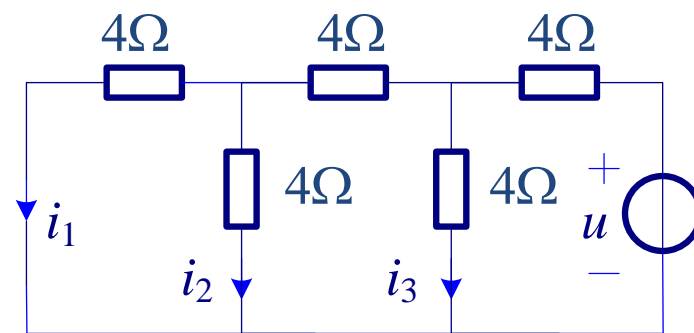
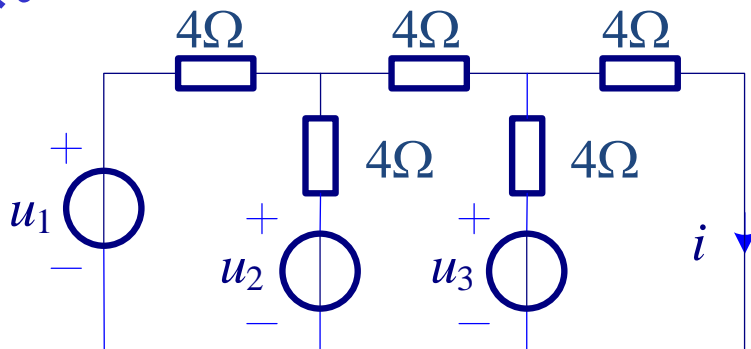
$$u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 = \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2$$



$$0 + 0 = u_1 i_{S1} + u_{S2} i_2$$



例：试用互易定理求图 所示电路中电流*i*与电压源电压 u_1 、 u_2 、 u_3 之间的关系。



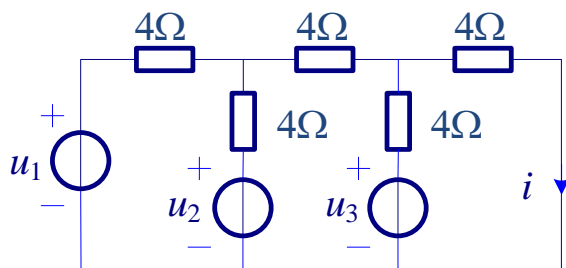
由叠加定理可知，电流*i*可表示为：

$$i = k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3$$

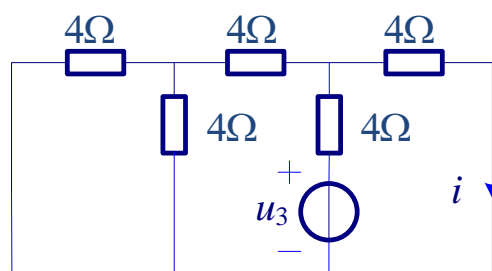
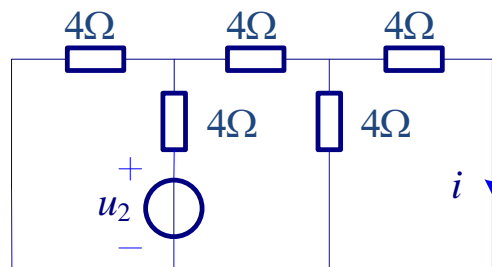
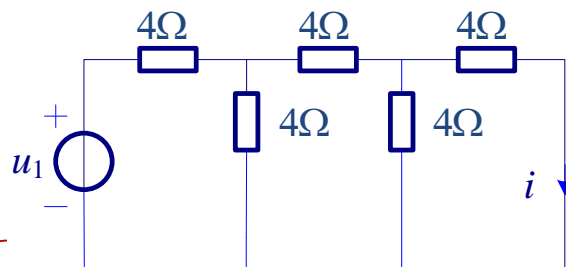
$$\begin{cases} i_2 = i_1 \\ i_3 = [4(i_1 + i_2) + 4i_2] / 4 = 3i_1 \\ u = 4(i_1 + i_2 + i_3) + 4i_3 = 32i_1 \end{cases}$$

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{32} \text{ S}, k_3 = \frac{3}{32} \text{ S}$$

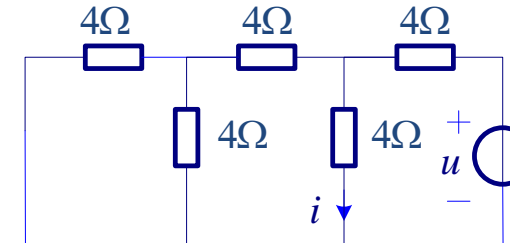
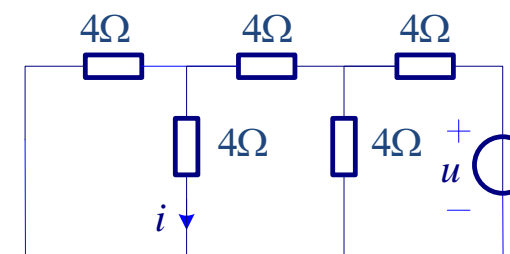
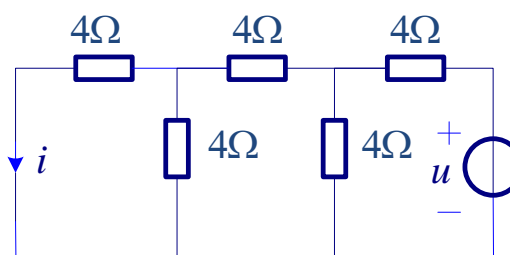
$$i = \frac{1}{32} \times u_1 + \frac{1}{32} \times u_2 + \frac{3}{32} \times u_3$$



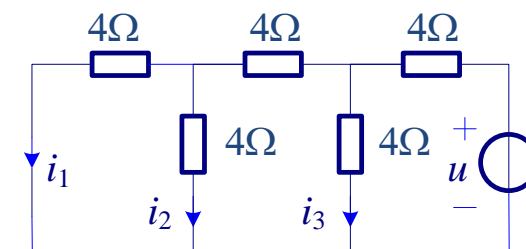
(1) 求 i 与激励的关系，可以分解为三个电路求。



(2) 应用三次互易定理1。



(3) 三个实际上对应同一个电路。



练习：下面表述**错误**的是

- A. 互易定理适用于任意不含独立源、仅含电阻的线性非时变的互易电路。
- B. 互易性与无源性是互不相干的，回转器是无源器件，但不能互易。
- C. 应用互易定理时，要特别注意电压、电流的方向，也要特别注意激励和响应的形式。
- D. 包含受控源的电路一定**不是**互易的。
- E. 一个对称的仅含电阻的电路必定是互易的。



小结

齐次性定理和叠加原理

戴维南定理

互易定理



置换定理

诺顿定理

最大功率传递定理

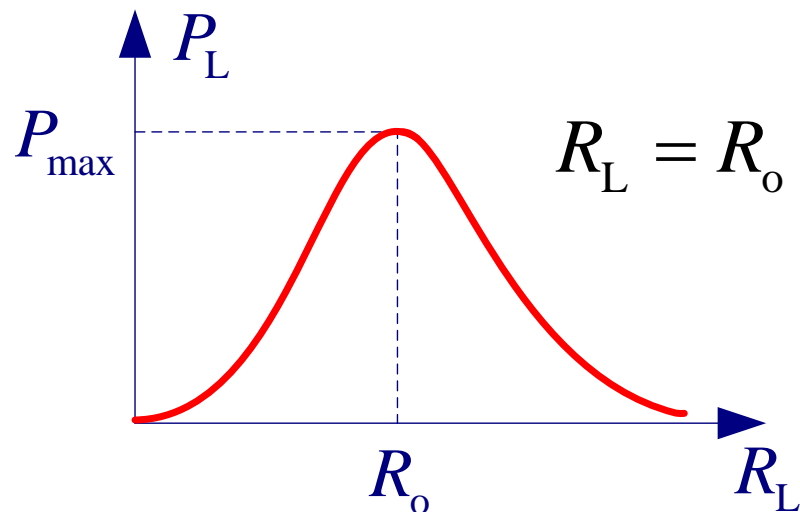
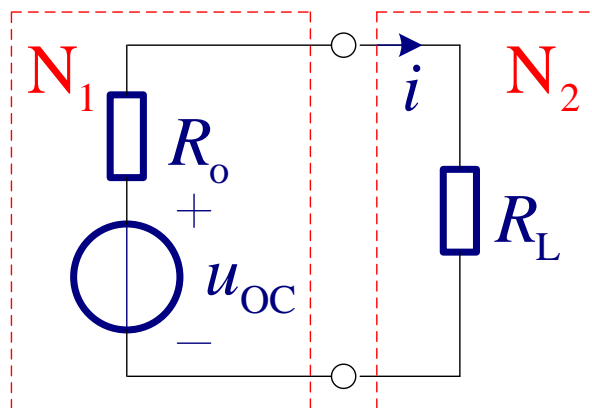
- 互易电路：
- 互易定理的三种表达形式：

作业与答疑：完成慕课网站上对应章节的习题；在QQ群中答疑

3.6 最大功率传递定理

问题： 给定一含独立电源线性单口网络N，接在其两端的负载电阻不同，在什么条件下，负载得到的功率最大？

最大功率传递定理： 由含独立电源线性单口网络传递给负载 R_L 的功率为最大的条件是：负载 R_L 应与戴维南（或诺顿）等效电阻相等。

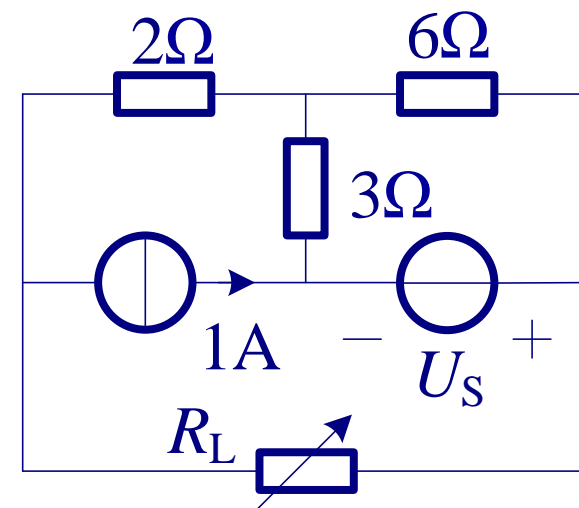


$$P_L = \frac{u_{OC}^2}{4R_o}$$

例：如图， R_L 获得的最大功率6.25W，试求 U_S 的大小。

方法讨论：

1. 与最大功率传递定理关联
2. R_L 能够求得吗？
3. u_{OC} 可求吗？
4. 如何求从 R_L 看出去的戴维南电路？
5. 选取什么方法？列写方程？等效变换？

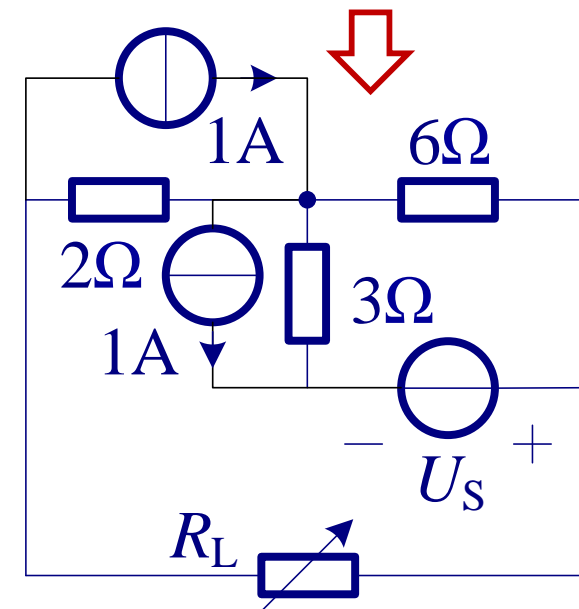
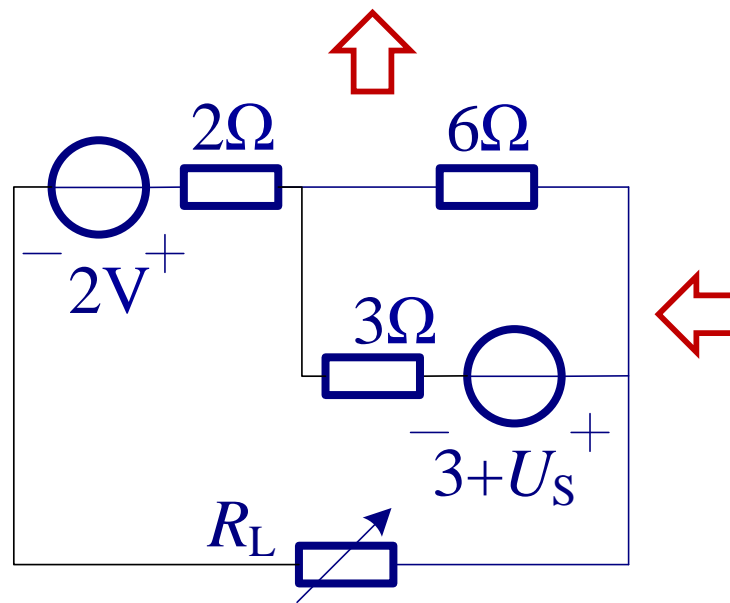
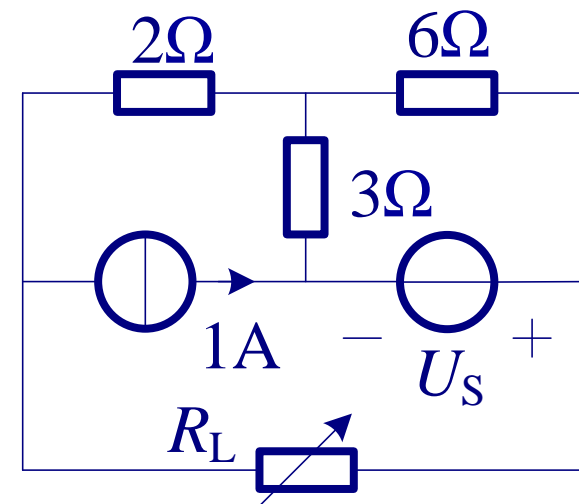
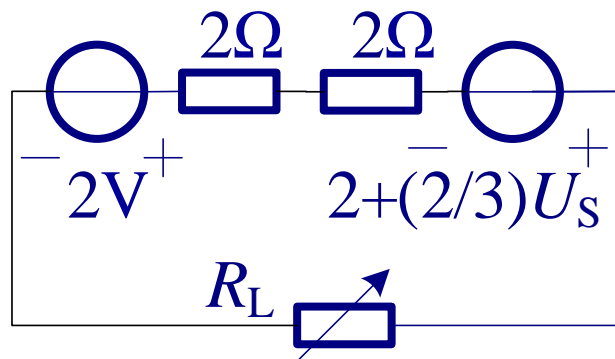


例：如图， R_L 获得的最大功率6.25W，试求 U_S 的大小。

$$\frac{[2 + 2 + (2/3)U_S]^2}{4 \times (2 + 2)} = 6.25$$

$$\Rightarrow 4 + (2/3)U_S = \pm 10$$

$$\Rightarrow U_{S1} = 9V; U_{S1} = -21V$$

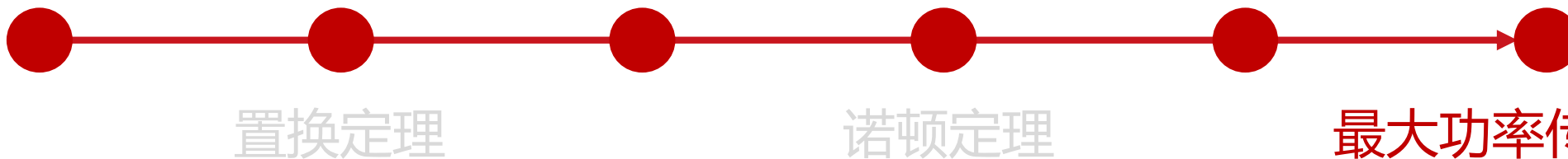


小结

齐次性定理和叠加原理

戴维南定理

互易定理



- 最大功率传递定理：戴维南定理的应用

作业与答疑：完成慕课网站上对应章节的习题；在QQ群中答疑

练习：请选择**不**正确的表述。

- A. 对线性非时变电阻电路，网络函数一定是实常数。
- B. 应用置换定理时，被置换电路可以是单一元件的支路，也可以是一般的一端口电路。
- C. 任意线性非时变一端口电路必定存在戴维南和/或诺顿等效电路。
- D. 最大功率匹配时，能量传输效率也达到最大。
- E. 对互易二端口电路，端口互易后，其转移电阻不变。



齐次性定理和叠加原理

戴维南定理

互易定理



置换定理

诺顿定理

最大功率传递定理

前出塞九首·其六

杜甫

挽弓当挽强，用箭当用长。

射人先射马，擒贼先擒王。

杀人亦有限，列国自有疆。

苟能制侵陵，岂在多杀伤。