第7章 互连网络（ICN）

7.3 互连函数

7.3.1 互连函数

互连函数反映了网络输入数组和输出数组之间对应的置换关系或排列关系（置换函数或排列函数）。

变量x：输入（设x=0，1，...，N－1）

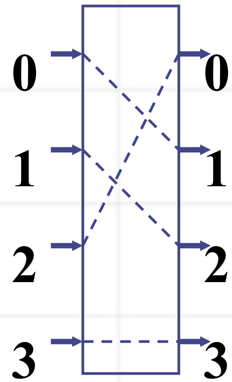
函数f(x)：输出

通过数学表达式描述输入端号与输出端号的连接关系。即在互连函数f的作用下，输入端x连接到输出端f(x)。

互连函数有多种表示方式，如下例所示：

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=2 \\ f(2)=0 \\ f(3)=3 \end{cases}$$

a.枚举法



b.开关状态图

$$f=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

c.列表法

$$f=(0,1,2)(3)$$

d.循环函数

一个网络通过开关切换可以形成多个映射关系，所以要用“互连函数族”来定义一个网络。

- 互连函数f(x) 采用循环表示

即：（x_0 x_1 x_2 … x_{j-1}）

表示：$f(x_0)=x_1$，$f(x_1)=x_2$，…，$f(x_{j-1})=x_0$

j称为该循环的长度。

- 设$n=\log_2 N$，则可以用n位二进制来表示N个输入端和输出端的二进制地址，互连函数表示为：

$$f(x_{n-1}x_{n-2}\ldots x_1x_0)$$

7.3.2 基本的互连函数

介绍几种常用的基本互连函数及其主要特征。

1. 恒等函数

- 恒等函数：实现同号输入端和输出端之间的连接。

$$I(x_{n-1}x_{n-2}\ldots x_1x_0)=x_{n-1}x_{n-2}\ldots x_1x_0$$

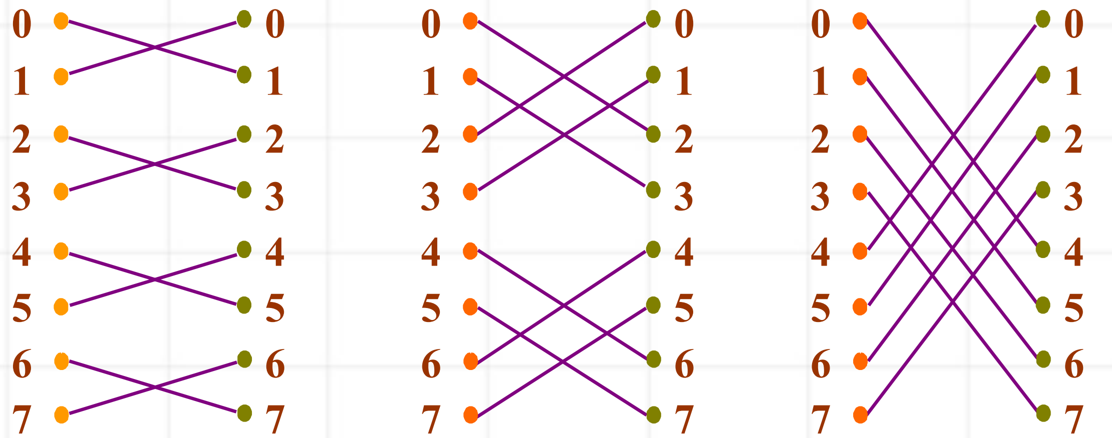
2. 交换函数

- 交换函数：实现二进制地址编码中第k位互反的输入端与输出端之间的连接。

$$E(x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_{k+1}x_kx_{k-1}\cdots x_1x_0)=x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_{k+1}\bar{x}_kx_{k-1}\cdots x_1x_0$$

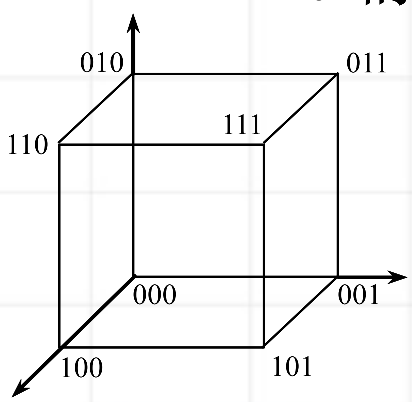
- 交换函数主要用于构造立方体互连网络和各种超立方体互连网络。
- 它共有$n=\log_2 N$种互连函数。（N为结点个数）
- 当N＝8时，n＝3，可得到常用的立方体互连函数：

$$Cube_0(x_2x_1x_0)=x_2x_1\bar{x}_0$$
$$Cube_1(x_2x_1x_0)=x_2\bar{x}_1x_0$$
$$Cube_2(x_2x_1x_0)=\bar{x}_2x_1x_0$$



(a) $Cube_0$ 函数　(b) $Cube_1$ 函数　(c) $Cube_2$ 函数

N=8 的立方体交换函数



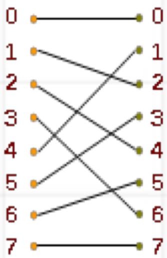
8结点的立方体网络

3. 均匀洗牌函数

- 均匀洗牌函数：将输入端分成数目相等的两半，前一半和后一半按类似均匀混洗扑克牌的方式交叉地连接到输出端（输出端相当于混洗的结果）。
  - 也称为**混洗函数（置换），shuffle函数**

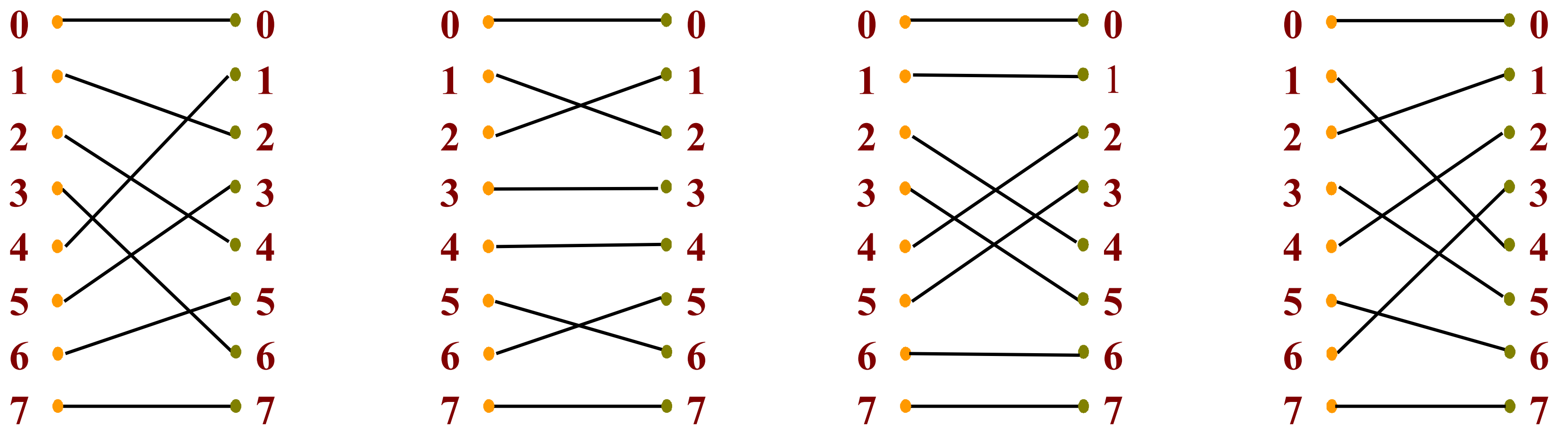
$$\sigma\left(x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_1x_0\right)=x_{n-2}x_{n-3}\cdots x_1x_0x_{n-1}$$

- 即把输入端的二进制编号循环左移一位。



(a) 均匀洗牌函数σ

- N=8 的均匀洗牌和逆均匀洗牌函数



(a) 均匀洗牌函数 σ **(b) 子洗牌函数 $\sigma_{(2)}$** **(c) 超洗牌函数 $\sigma^{(2)}$** **(d) 逆均匀洗牌函数 σ^{-1}**

N=8 的均匀洗牌函数

- 互连函数（设为s）的第k个子函数：把s作用于输入端的二进制编号的低k位。
- 互连函数（设为s）的第k个超函数：把s作用于输入端的二进制编号的高k位。

例如：对于均匀洗牌函数

第k个子函数：

$$\sigma_{(k)}(x_{n-1}\cdots x_k \mid x_{k-1}x_{k-2}\cdots x_0)=x_{n-1}\cdots x_k \mid x_{k-2}\cdots x_0x_{k-1}$$

即把输入端的二进制编号中的低k位循环左移一位。

第k个超函数：

$$\sigma^{(k)}(x_{n-1}x_{n-2}\ldots x_{n-k} \mid x_{n-k-1}\ldots x_1x_0)=x_{n-2}\ldots x_{n-k}\,x_{n-1} \mid x_{n-k-1}\ldots x_1x_0$$

即把输入端的二进制编号中的高k位循环左移一位。

- 对于任意一种函数f(x)，如果存在g(x)，使得

$$f(x)\times g(x)=I(x)$$

则称g(x)是f(x)的逆函数，记为$f^{-1}(x)$。

$$f^{-1}(x)= g(x)$$

- 逆均匀洗牌函数：将输入端的二进制编号循环右移一位而得到所连接的输出端编号。
  - 互连函数

$$\sigma^{-1}\left(x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_1x_0\right)=x_0x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_1$$

  - 逆均匀洗牌是均匀洗牌的逆函数

– 当N=8时，有：

$$\sigma(x_2x_1x_0)=x_1x_0x_2$$

$$\sigma_{(2)}(x_2x_1x_0)=x_2x_0x_1$$

$$\sigma^{(2)}(x_2x_1x_0)=x_1x_2x_0$$

$$\sigma^{-1}(x_2x_1x_0)=x_0x_2x_1$$

性质1：shuffle（$X_{n-1}X_{n-2}\cdots\cdots X_0$）= $X_{n-2}\cdots\cdots X_0X_{n-1}$（循环左移）

性质2：shuffle^n（j）= j

4. 碟式函数

- **蝶式互连函数：**把输入端的二进制编号的最高位与最低位互换位置，便得到了输出端的编号。

- 第k个子函数

$$\beta_{(k)}(x_{n-1}\ldots x_k x_{k-1} x_{k-2}\ldots x_1 x_0) = x_{n-1}\ldots x_k x_0 x_{k-2}\ldots x_1 x_{k-1}$$

- 第k个超函数

$$\beta^{(k)}(x_{n-1} x_{n-2}\ldots x_{n-k+1} x_{n-k} x_{n-k-1}\ldots x_1 x_0) = x_{n-k} x_{n-2}\ldots x_{n-k+1} x_{n-1} x_{n-k-1}\ldots x_1 x_0$$

- 蝶式变换与交换变换的多级组合是构成多级立方体网络的基础。

5. 反位序函数

- 反位序函数：将输入端二进制编号的位序颠倒过来求得相应输出端的编号。

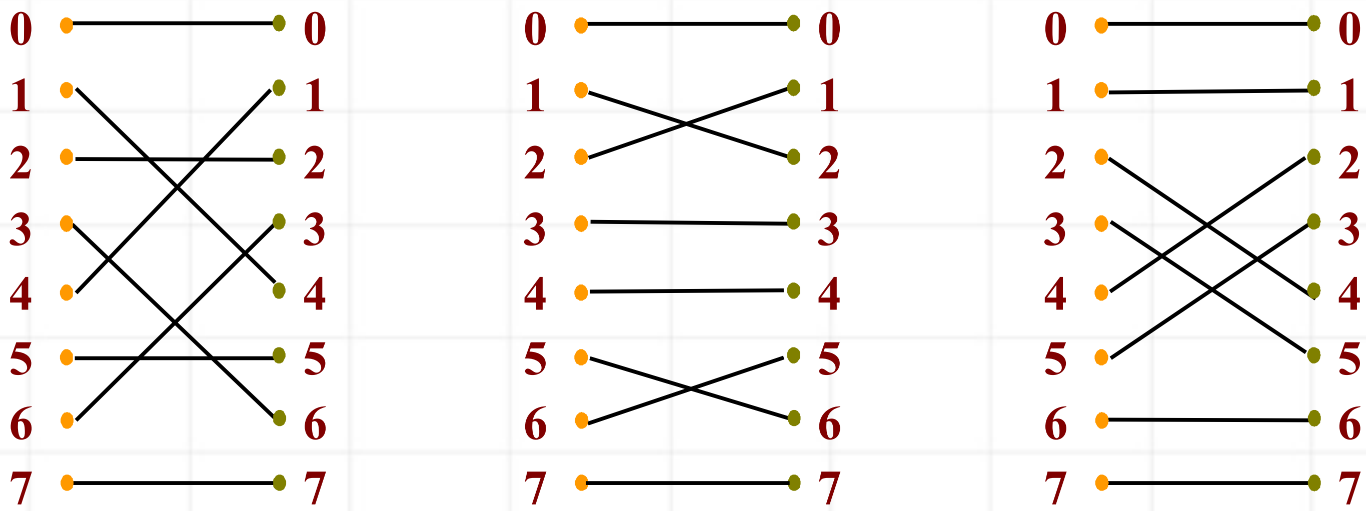
$$\rho\left(x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_1x_0\right)=x_0x_1\cdots x_{n-2}x_{n-1}$$

- 第k个子函数

$$\rho_{(k)}(x_{n-1}\ldots x_kx_{k-1}x_{k-2}\ldots x_1x_0)=x_{n-1}\ldots x_kx_0x_1\ldots x_{k-2}x_{k-1}$$

- 第k个超函数

$$\rho^{(k)}(x_{n-1}x_{n-2}\ldots x_{n-k+1}x_{n-k}x_{n-k-1}\ldots x_1x_0)=x_{n-k}x_{n-k+1}\ldots x_{n-2}x_{n-1}x_{n-k-1}\ldots x_1x_0$$



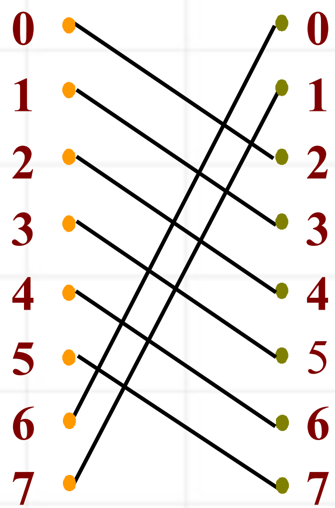
(a) $\beta = \rho$　　(b) $\beta_{(2)} = \rho_{(2)}$　　(c) $\beta^{(2)} = \rho^{(2)}$

N=8 的蝶式函数和反位序函数

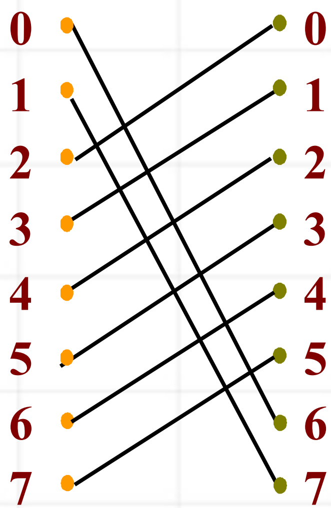
6. 移数函数

➢ 移数函数：将各输入端都错开一定的位置（模N）后连到输出端。

- $\alpha(x) = (x \pm k) \bmod N \quad 1 \le x \le N-1, \ 1 \le k \le N-1$



(a) 左移移数函数 k＝2



(b) 右移移数函数 k＝2

7. PM2I函数 （加减2i”函数）

- P和M分别表示加和减，2I表示2^i。
- PM2I函数：一种移数函数，将各输入端都错开一定的位置（模N）后连到输出端。
- 互连函数

$$PM2_{+i}(x) = x + 2^i \bmod N$$

$$PM2_{-i}(x) = x - 2^i \bmod N$$

其中：$0 \leqslant x \leqslant N-1$，$0 \leqslant i \leqslant n-1$，$n = \log_2 N$，N为结点数。

- PM2I互连网络共有2n个互连函数。

➢ 当N＝8时，有6个PM2I函数：

$PM2_{+0}$ ： (0 1 2 3 4 5 6 7)

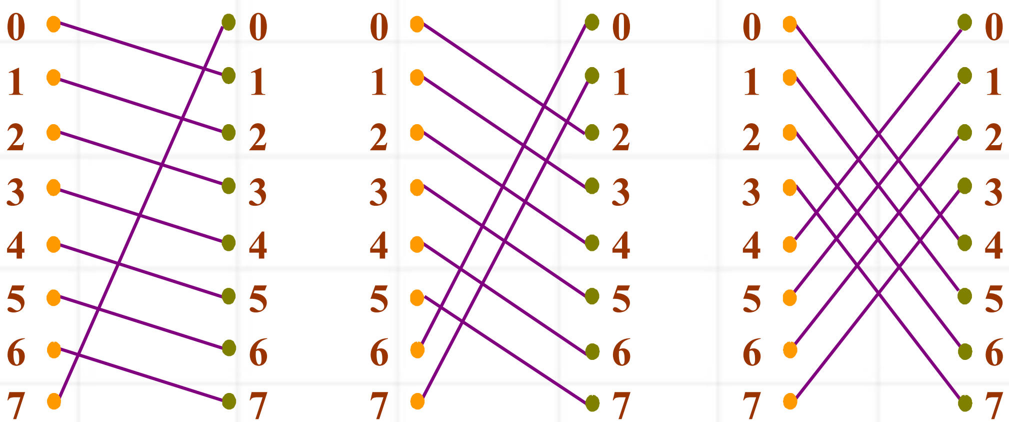
$PM2_{+1}$ ： (0 2 4 6)(1 3 5 7)

$PM2_{+2}$ ： (0 4)(1 5)(6)(3 7)

$PM2_{-0}$ ： (7 6 5 4 3 2 1 0)

$PM2_{-1}$ ： (6 4 2 0)(7 5 3 1)

$PM2_{-2}$ ： (4 0)(5 1)(6 2)(7 3)



(a) $PM2_{+0}$ (b) $PM2_{+1}$ (c) $PM2_{+2}$

N=8 的PM2I函数