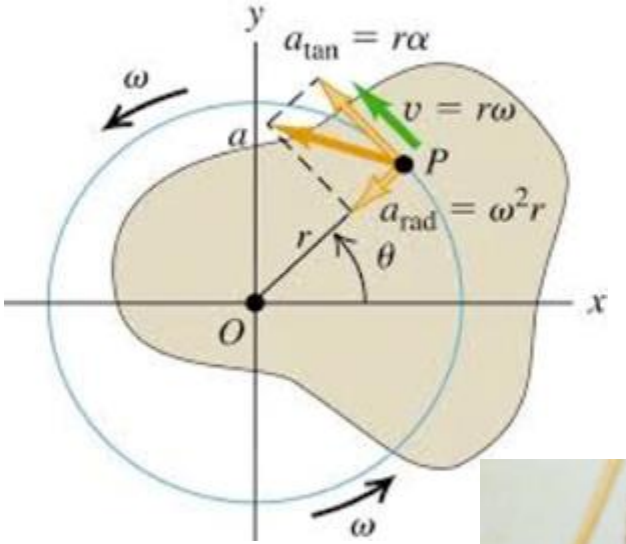
Bölüm: 10

KATI CİSMİN SABİT BİR EKSEN ETRAFINDA DÖNMESİ



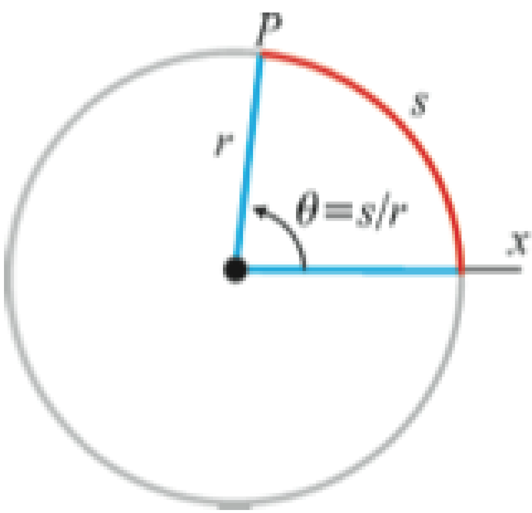
- **Açısal yerdeğiştirme (θ)**
- **Ortalama ve anlık açısal hız (*ω*)**
- **Ortalama ve anlık açısal ivme (*α*)**
- **Dönme eylemsizlik momenti (*I*)**
- **Tork (*τ*)**
- **Dönen katı cisimlerin kinetik enerjisi**
- **Dönme hareketi için iş-kinetik enerji teoremi**

Açısal Kinematik

Katı cismin her noktası farklı hızda dönüyor olsa da, herbiri aynı açısal miktarda dönmektedir.

O halde, katı cisimler doğal olarak açısal koordinatlarla incelenirler.

Açısal Konum (θ):



r yarıçaplı dairesel yörüngede dönen bir P noktası.

Açıların başladığı bir **referans çizgisi** (x-ekseni).

P noktasının referans çizgisinden itibaren aldığı yol s yayı ise,

$$\boxed{\theta = \frac{s}{r}} \quad \text{(açısal konum)}$$

Not: θ **radyan** cinsindendir.

- Yaygın kabul: *Saat ibreleri tersi yönündeki açılar pozitif, diğer yöndekiler negatif alınır.*

- Açı birimi **radyan**:

$$\boxed{1 \text{ devir} = 360^\circ = 2\pi \text{ radyan}}$$

- Kinematikte doğal açı birimi radyandır. Çünkü $\theta = s/r$ bağıntısını doğrudan sağlar.

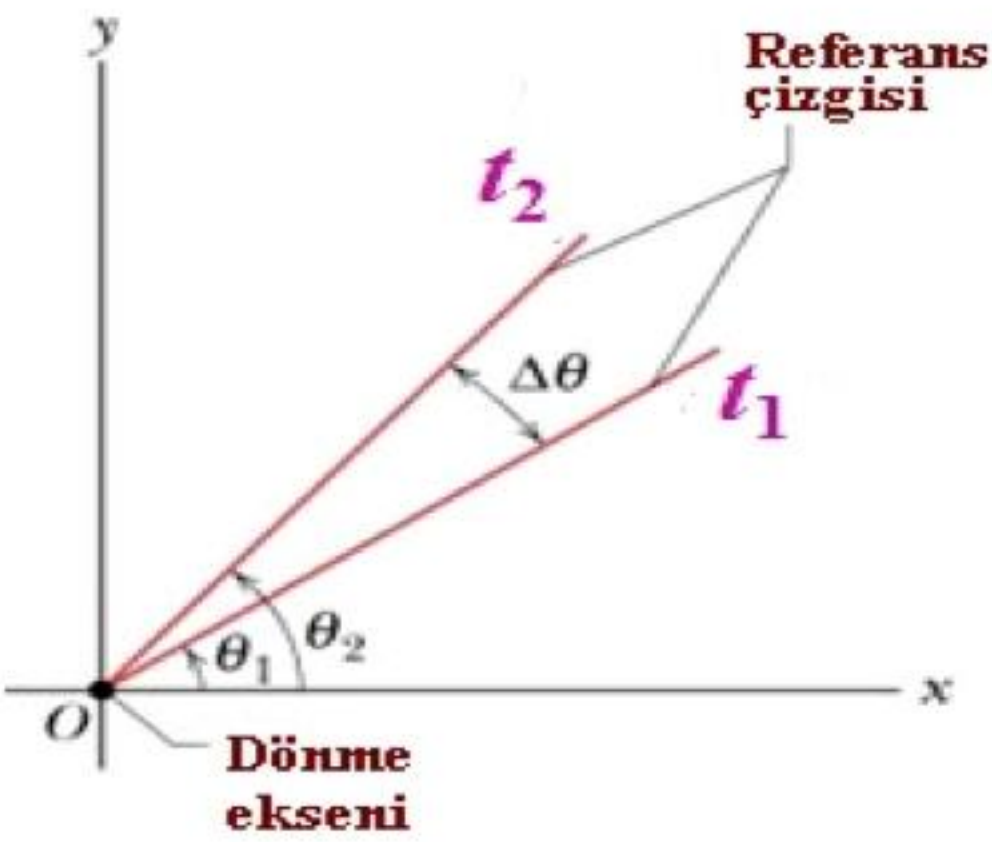
  Diğer derece $(^\circ)$ türünden birimler kullanmak yanlış sonuçlar verir.

- Bazı değerler:

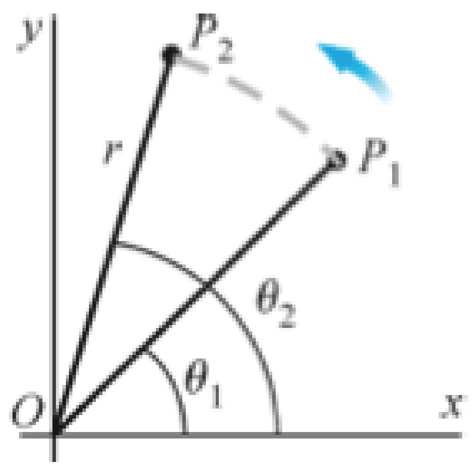
$$180^\circ = \pi \text{ radyan}, \quad 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ radyan}, \quad 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ radyan}$$

Açısal Yerdeğiştirme:

Şekilde t_1 ve t_2 anlarındaki referans çizgileri gösterilmiştir. Bu zaman aralığında katı cismin yaptığı açısal yer değiştirme $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ kadardır.



Açısal Hız:



r yarıçaplı çember üzerinde dönen P noktasının t_1 anındaki açısal konumu θ_1 ve daha sonraki bir t_2 anındaki açısal konumu θ_2 ise,

$$\boxed{\omega_{\text{ort}} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}} \qquad (1)$$

oranına **ortalama açısal hız** denir.

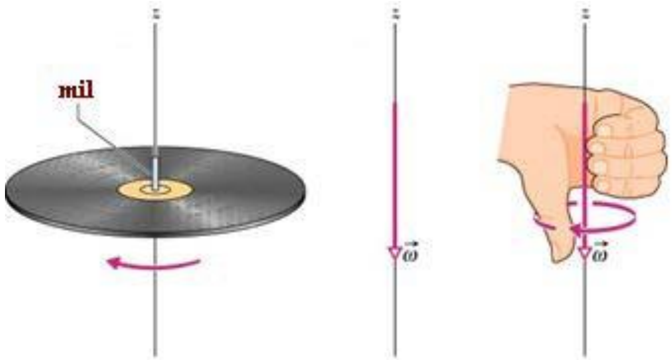
Birimi: radyan/saniye (rad/s). Sanayide kullanılan diğer birim: devir/dakika (rpm):

$$1 \text{ rpm} = 1 \text{ dev/dk} = \frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} \approx 0.1 \text{rad/s}$$

Ani Açısal Hız (ω): Ortalama hızın limiti:

$$\boxed{\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}} \qquad \text{(açısal hız)}$$

Açısal Hız Vektörü:



Açısal hız vektörü, katı cisim saat ibrelerinin tersi yönünde dönüyorsa pozitif, saat ibreleri yönünde dönüyorsa negatif alınır.

Açısal hız vektörü ω dönme ekseni doğrultusundadır ve kesin yönü "sağ-el-kuralı" na göre belirlenir.

Sağ - el - kuralı : Dönme eksenini, parmak uçlarınız dönme yönünü gösterecek şekilde sağ avcunuza alın ve dönme yönünde bir tur atın. Başparmağınızın yönü açısal hız vektörünün ($\vec{\omega}$) yönünü verir.

Açısal İvme (α)

Açısal hızın birim zamandaki değişme miktarı.

$$\boxed{\alpha_{\text{ort}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}} \qquad \text{(ortalama açısal ivme)}$$

Ani açısal ivme : Ortalama ivmenin $\Delta t \to 0$ limiti:

$$\boxed{\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}} \qquad \text{(açısal ivme)}$$

Birimi : rad/s^2.

Sabit Açısal İvmeli Hareket

Açısal hız düzgün olarak değişiyorsa α = sabit olur.

Doğrusal harekette izlediğimiz yolla, açısal konum ve hız için formüller elde ederiz.

Sonuçları doğrusal hareket formülleriyle karşılıklı gösterelim:

Sabit ivmeli dönme ve öteleme hareketleri.

Dönme	Öteleme
$\omega = \omega_0 + \alpha t$	$v = v_0 + at$
$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$	$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$

Örnek : Bir tekerlek 3.5 rad/s^2' lik sabit açısal ivme ile dönmektedir. Tekerleğin $t =$ 0 anındaki açısal hızı 2 rad/s olduğuna göre,

a) ilk 2 s içinde ne kadarlık açısal yer-değiştirme yapmıştır?

b) t = 2 s anındaki açısal hızı nedir?

$$a\text{–)}\quad \Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 2(2) + \frac{1}{2}(3.5)(2)^2 = \boxed{11\text{ rad}}$$

$$N = \frac{11}{2\pi} = \boxed{1.75\text{ tur yapmıştır.}}$$

$$b\text{–)}\quad \omega = \omega_0 + \alpha t = 2 + 3.5(2) = \boxed{9\text{ rad/s}}$$

Örnek : Bir döner kapının açısal konumu $\theta(t) = 5 + 10t + 2t^2$ rad ifadesi ile veriliyor. $t = 0$ ve $t = 3$ s anlarında, kapının açısal hızını ve açısal ivmesini bulunuz.

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = 10 + 4t \quad \rightarrow \quad \omega(0) = 10 \text{ rad/s} \ \text{ ve } \ \omega(3) = \boxed{22 \text{ rad/s}}$$

$$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} = 4 \quad \rightarrow \quad \alpha(0) = \alpha(3) = \boxed{4 \text{ rad/s}^2}$$

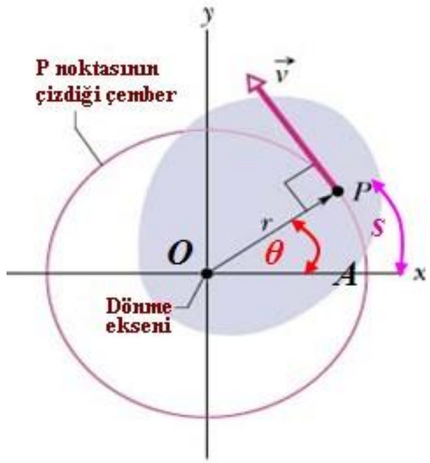
Örnek : Bir mil 65 rad/s hızla dönerken, $t = 0$ anında $\alpha(t) = -10 - 5t$ (rad/s^2) ile verilen ivmeli bir harekete başlıyor. $t = 3$ s anındaki açısal hızını ve bu 3 s' lik süredeki açısal yerdeğiştirmesini bulunuz.

$$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} \rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^3 \alpha\, dt \rightarrow \omega(t) = 65 - 10t - 2.5t^2 \quad \rightarrow \quad \omega(3) = \boxed{12.5 \text{ rad/s}}$$

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^3 \omega dt \quad \rightarrow \quad \Delta\theta = \int_0^3 (65 - 10t - 2.5t^2) = \left[65t - 5t^2 - \frac{5}{6} t^3 \right]_0^3$$

$$\boxed{\Delta\theta = 117.5 \text{ rad}}$$

Çizgisel ve Açısal Değişkenler Arasındaki İlişki :



Bir eksen etrafında dönen katı cisim üzerindeki bir P noktasını ele alalım. $t = 0$ anında referans çizgisi x-ekseni üzerinde ve P noktası da A noktasında bulunsun.

P noktası t kadarlık bir sürede, AP yayı boyunca hareket ederek s yolunu alır. Bu sürede referans çizgisi (OP) θ açısı kadar döner.

Açısal Hız ve Çizgisel Hız arasındaki ilişki :

$r = \overline{OP}$ olmak üzere, yay uzunluğu s ve θ açısı arasındaki ilişki $s = r\theta$ eşitliğine uyar.

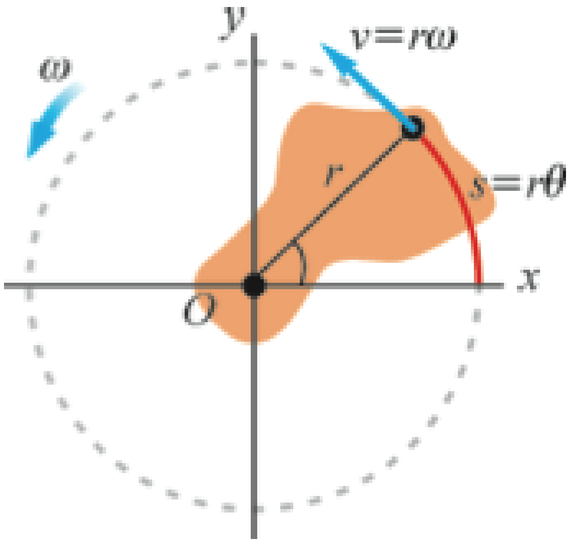
P noktasının çizgisel hızı: $v = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{d(r\theta)}{dt} = r\dfrac{d\theta}{dt} = r\omega$

Hareketin periyodu: $T = \dfrac{\text{çevre}}{\text{hız}} = \dfrac{2\pi r}{v} = \dfrac{2\pi r}{\omega r} = \dfrac{2\pi}{\omega}$

Açısal hız:

$$\boxed{\omega = 2\pi f \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}}$$

Katı cismin dönme hareketinde, her noktanın çizgisel hız ve ivmesiyle, katı cismin açısal hız ve ivmesi arasındaki ilişki vardır.



- **Konumlar:** $\boxed{s = r\,\theta}$

- **Hızlar:**

Her iki tarafın t zamanına göre türevi:

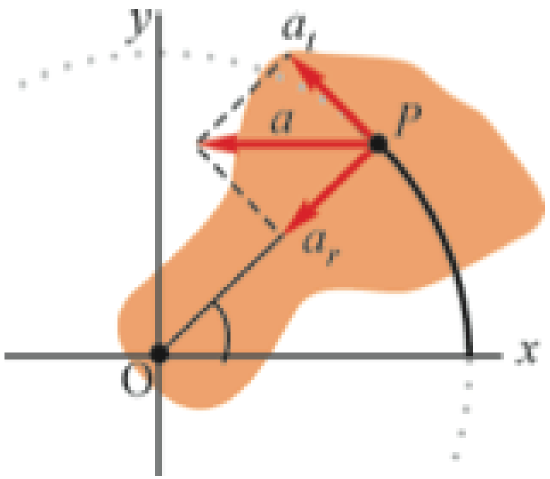
$$\frac{ds}{dt} = \frac{d(r\theta)}{dt} = r\,\frac{d\theta}{dt}$$

Sağ taraftaki türev **açısal hız**, sol taraftaki türev ise bildiğimiz **çizgisel hız** olur:

$$\boxed{v = r\,\omega}$$

Dairesel harekette ivmenin iki bileşeni vardı:

Teğetsel ve merkezcil ivmeler.



- **Merkezcil ivme** formülünü hatırlayalım: $a_r = v^2/r$

  Çizgisel hız için bulunan $v = r\omega$ ifadesi yerine konur:

$$\boxed{a_r = \frac{(r\,\omega)^2}{r} = r\,\omega^2}$$

- **Teğetsel ivme** formülünü hatırlayalım: $a_t = dv/dt$

  $v = r\omega$ ifadesini kullanıp koyup türev alındığında (r yarıçapı sabit),

$$\boxed{a_t = r\,\frac{d\omega}{dt} = r\,\alpha} \qquad (2)$$

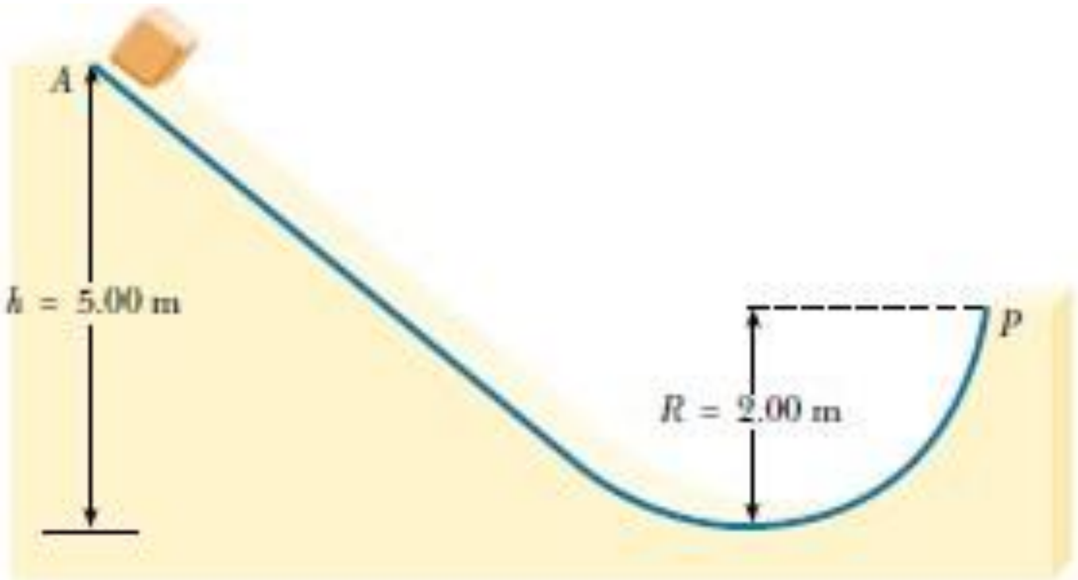
Sonuçların özeti:

Açısal ve çizgisel kinematik arasındaki ilişki.

	Açısal	Çizgisel
Konum	θ	$s = r\theta$
Hız	ω	$v = r\omega$
İvme	α	$a_r = r\omega^2$ (merkezcil ivme) $a_t = r\alpha$ (teğetsel ivme)

★ ★ ★ ★ ★

Örnek : Kütlesi 6 kg olan bir blok sürtünmesiz eğik bir düzlem üzerindeki *A* noktasından serbest bırakılıyor. Blok *P* noktasında iken sahip olduğu ivmenin teğetsel ve radyal bileşenlerini bulunuz.

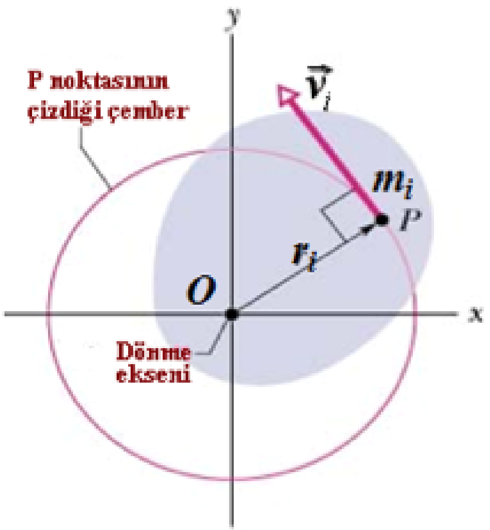


$$mgh = mgR + \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = \sqrt{2g(h-R)} = \sqrt{2(9.8)(5-2)} = 7.67\ \text{m/s}$$

$$\boxed{a_r = \frac{v^2}{R} = 29.4\ \text{m/s}^2} \qquad F_t = m\vec{a}_t = -mg\hat{j} \rightarrow \boxed{\vec{a}_t = -9.8\hat{j}\ \text{m/s}^2}$$

Radyal ivme

Teğetsel ivme



Dönme Kinetik Enerjisi :

Soldaki dönen katı cismi, kütleleri $m_1, m_2, m_3, ..., m_i, ...$ olan çok küçük parçalara bölelim. P noktası, kütlesi m_i olan i. parçacık olsun.

Katı cismin dönme kinetik enerjisi, noktasal cisimlerin kinetik enerjilerinin toplamına eşittir:

$$K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + ... = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

i. elemanın çizgisel hızı $v_i = \omega r_i \rightarrow K = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$

$I = \sum_i m_i r_i^2$ terimi, katı cismin dönme eksenine göre "eylemsizlik momenti" dir.

Eylemsizlik momenti katı cismin kütlesine ve dönme ekseninin konumuna bağlı olduğu için, bilinmelidir. Katı bir cismin eylemsizlik momenti, katı cismin kütlesinin dönme eksenine göre nasıl dağıldığını tanımlar.

$I = \sum_i m_i r_i^2$; $I = \int r^2 dm$; $K = \frac{1}{2} I \omega^2$

Eylemsizlik Momenti Hesapları

2 türlü hesaplanabilir:

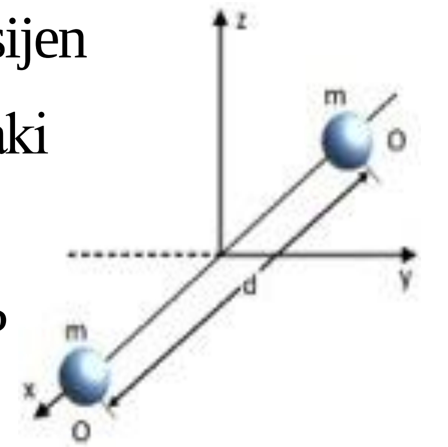
- **Katı cisim noktasal kütlelerden oluşuyorsa:** $\Delta m_i = m_i$ ler toplanır:

$$\boxed{I = \sum_i m_i r_i^2}$$

- **Sürekli dağılmış kütle:** $\Delta m_i \to 0$ limitinde, toplama integrale dönüşür:

$$\boxed{I = \int dm\, r^2}$$

Örnek : *xy*-düzleminde bulunan bir oksijen molekülü O_2 olsun ve ortasından dik olarak geçen *z*-ekseni etrafında dönsün. Her bir oksijen atomunun kütlesi 2.66×10^{-20} kg' dır ve oda sıcaklığında aralarındaki mesafe 1.21×10^{-10} m' dir.



a) Molekülün *z*-eksenine göre dönme eylemsizlik momenti nedir?

b) Molekülün dönme açısal hızı 4.6×10^{12} rad/s ise, dönme kinetik enerjisi nedir?

$$a-)\ I=\sum m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = 2m\left(\frac{d}{2}\right)^2 = 2\left(2.66\times10^{-20}\right)\left(\frac{1.21\times10^{-10}}{2}\right)^2$$

$$\boxed{I = 1.95\times10^{-40}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2}$$

$$b-)\ K=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}\left(1.95\times10^{-40}\right)\left(4.6\times10^{12}\right)^2 = \boxed{20.6\times10^{-16}\ \text{J}}$$

Örnek : Dört adet küçük küre şekildeki gibi hafif çubukların uçlarına tutturulmuş ve sistem *xy*-düzlemine şekildeki gibi yerleştirilmiştir.

a) Sistem *y* – ekseni etrafında ω açısal hızı ile döndürülürse,

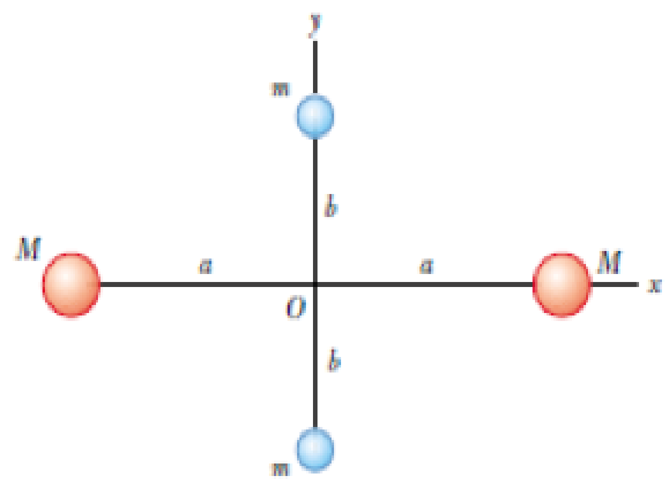
sistemin dönme eylemsizlik momenti ve dönme kinetik enerjisi nedir?

b) Sistem *z* – ekseni etrafında ω açısal hızı ile döndürülürse,

sistemin dönme eylemsizlik momenti ve dönme kinetik enerjisi nedir?

$$a\text{–}) \; I_y = \sum m_i r_i^2 = 2Ma^2$$

$$K_y = \frac{1}{2} I_y \omega^2 = \frac{1}{2} 2Ma^2\omega^2 = \boxed{Ma^2\omega^2}$$



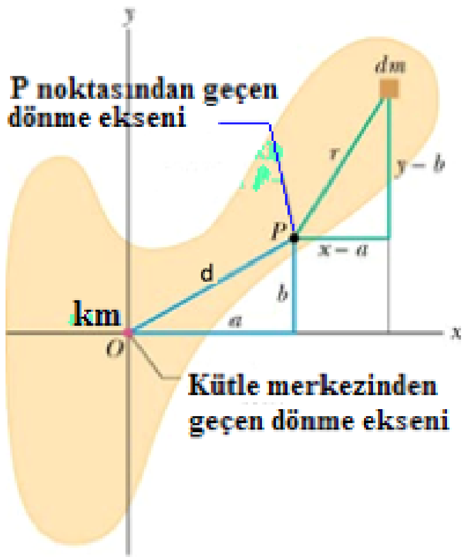
$$b\text{–}) \; I_z = \sum m_i r_i^2 = 2Ma^2 + 2mb^2$$

$$K_z = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2} 2\left(Ma^2 + mb^2\right)\omega^2 = \boxed{\left(Ma^2 + mb^2\right)\omega^2}$$

Eylemsizlik Momenti Hesabı :

Noktasal parçacıklardan oluşan sistemlerde: $I = \sum_i m_i r_i^2$ bağıntısından hesaplanır.

Katı cisimlerde: $I = \int r^2 dm$ bağıntısından hesaplanır.



Paralel - Eksen Teoremi :

Eylemsizlik momenti dönme ekseninin konumuna bağlı olduğundan, her farklı dönme ekseni için I' yı tekrar hesaplamamız gerekir.

Bunun için, çok kolay bir yöntem olan "paralel-eksen teoremi" ni kullanacağız.

Üstteki M kütleli katı cismin kütle merkezinden geçen ve sayfa düzlemine dik olan eksene göre eylemsizlik momentini (I_{km}) bildiğimizi varsayalım.

Bu eksene paralel ve d kadar uzaktaki bir P noktasından geçen eksene göre eylemsizlik momenti (I) şu ifadeyle verilir:

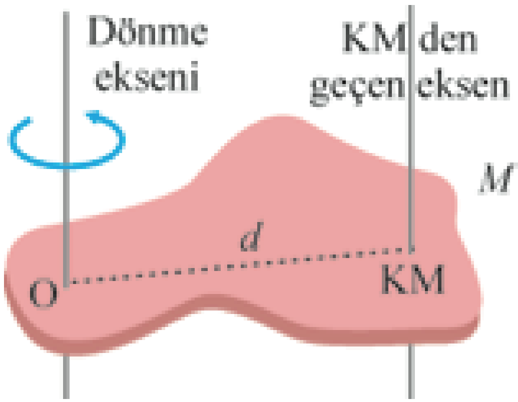
$I = I_{km} + Md^2$ "paralel-eksen teoremi"

Paralel Eksenler (Steiner) Teoremi

Eylemsizlik momenti hangi eksene göre alındığına bağlıdır.

Tablodaki değerler kütle merkezine göre I_{KM} değerleridir.

Eğer, katı cisim başka bir eksen etrafında dönüyorsa,



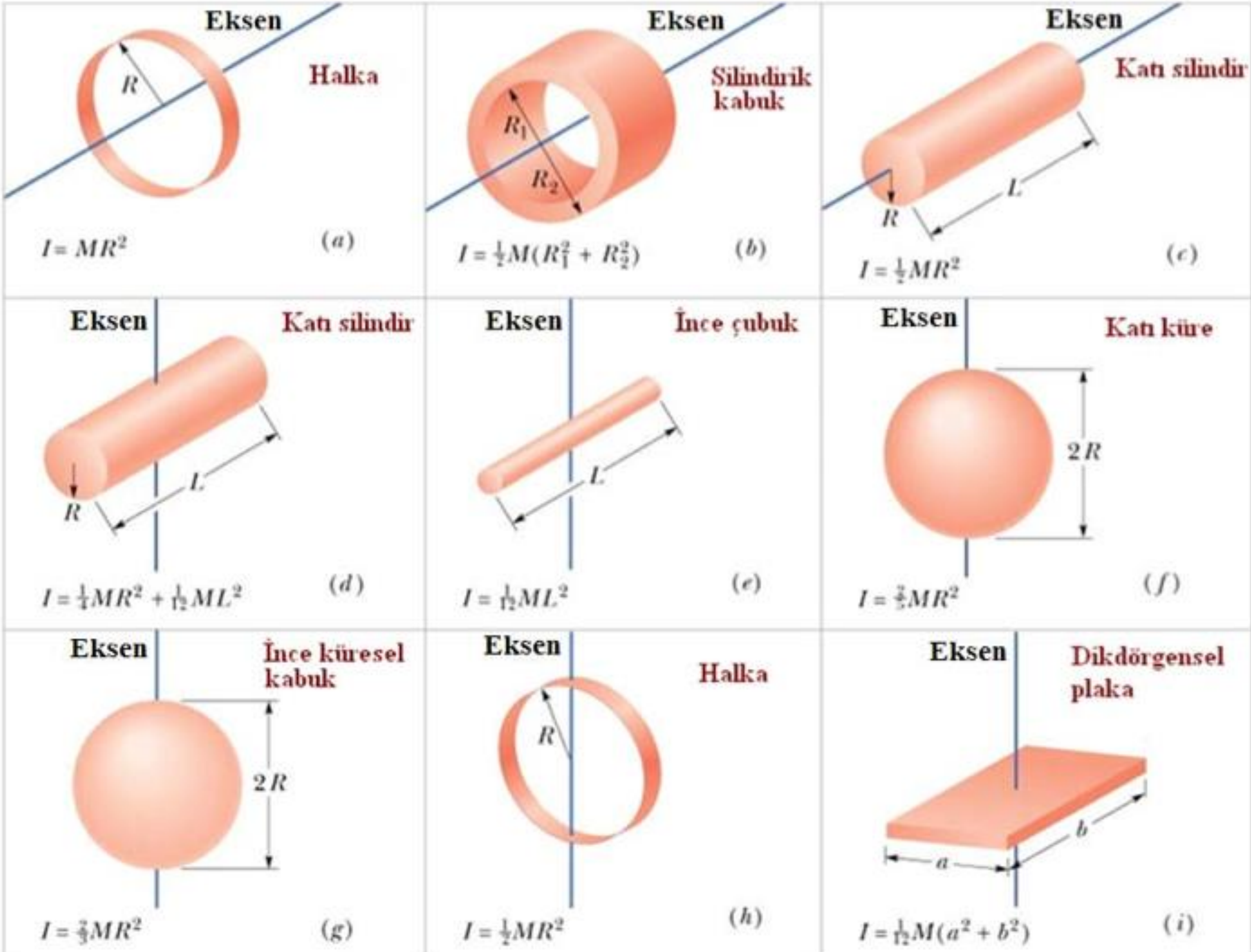
Kütle merkezinden d uzaklıkta paralel bir eksene göre eylemsizlik momenti,

$$\boxed{I = I_{KM} + M\,d^2}$$

Paralel eksenler (veya Steiner) teoremi denir.

Cismin eylemsizlik momentinin en küçük olduğu (yani en kolay dönebildiği) eksen, kütle merkezinden geçen eksendir.

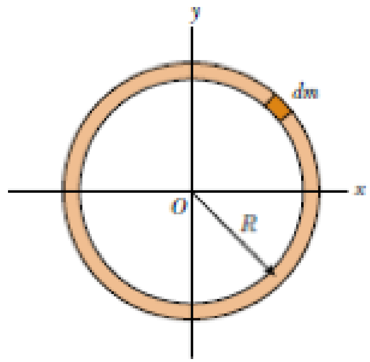
Bazı katı cisimlerin dönme eylemsizlik momentleri:



Örnek : Kütlesi M ve yarıçapı R olan çembersel bir halkanın,

$a-$) yüzeyine dik ve merkezinden geçen eksene göre eylemsizlik momenti nedir?

$b-$) yüzeyine paralel ve çapı boyunca olan bir dönme eksenine göre eylemsizlik momenti nedir?

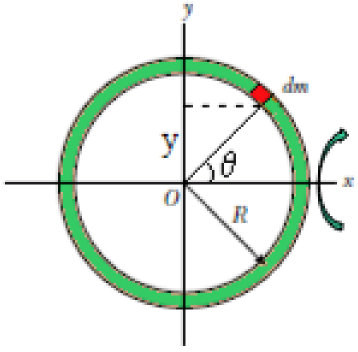


$$a-)\ I=\int dmR^2=\boxed{MR^2}$$

$$b-)\ I=\int dmy^2=\int \lambda dl\left(R\sin\theta\right)^2=\lambda R^3\int \sin^2\theta d\theta$$

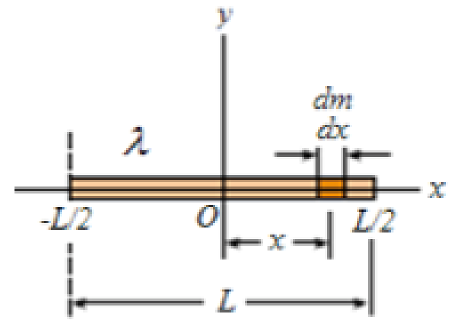
$$=2\lambda R^3\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta\ =\lambda R^3\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big|\right]_0^{\pi}$$

$$I=\left(\frac{M}{2\pi R}\right)R^3\pi=\boxed{\frac{1}{2}MR^2}$$



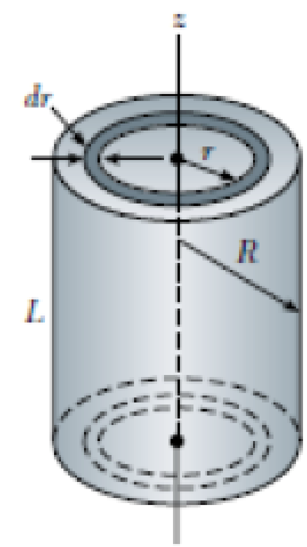
Örnek : Kütlesi M ve uzunluğu L olan bir çubuğun merkezinden dik olarak geçen $y-$eksenine göre eylemsizlik momenti nedir?

$$I=\int dm x^2=\int(\lambda dx)x^2=\int\left(\frac{M}{L}\right)x^2dx$$



$$I=\frac{M}{L}\int_{-L/2}^{L/2}x^2dx=\frac{M}{3L}\left[x^3\right]_{-L/2}^{L/2}=\frac{M}{3L}\left(2\frac{L^3}{8}\right)=\boxed{\frac{1}{12}ML^2}$$

Örnek : Kütlesi M, yarıçapı R ve yüksekliği L olan katı bir silindirin eksenine göre eylemsizlik momenti nedir?

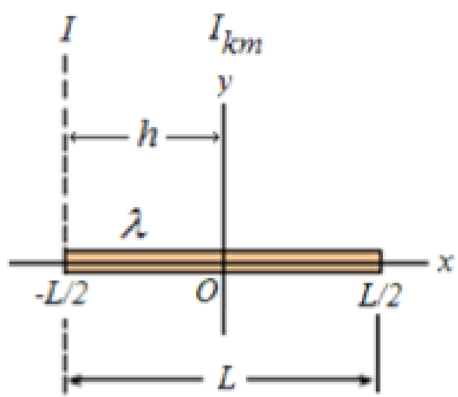


Silindirle aynı boyda, r yarıçaplı ve dr kalınlığında silindirik bir kabuk seçersek, $dm=\rho dV=\rho\left(L2\pi r dr\right)$ bulunur.

Buna göre, $I=\int dm r^2=\int(\rho L2\pi r dr)r^2=\left(\frac{M}{\pi R^2L}\right)L2\pi\int r^3dr$

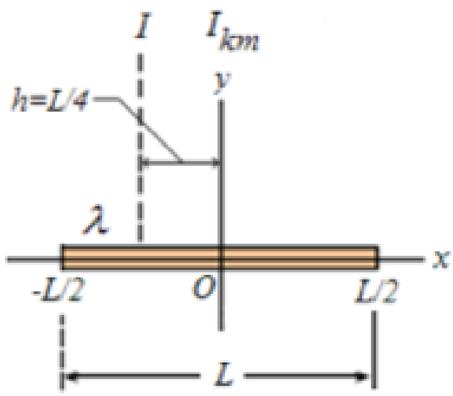
$$I=\frac{2M}{R^2}\int_0^R r^3dr=\frac{2M}{R^2}\left(\frac{R^4}{4}\right)=\boxed{\frac{1}{2}MR^2}$$

Örnek : Paralel-eksen teoremini kullanarak, kütlesi M ve uzunluğu L olan bir çubuğun sol ucundan dik olarak geçen $y-$eksenine göre eylemsizlik momenti nedir?



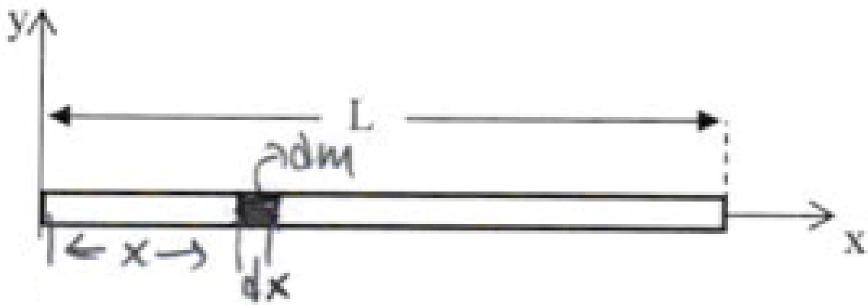
$$I = I_{km} + M.d^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{3}ML^2}$$

Örnek : Aynı çubuğun kütle merkezinden $L/4$ kadar uzaktan geçen ve $y-$eksenine paralel bir eksene göre eylemsizlik momenti nedir?



$$I = I_{km} + M.d^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \boxed{\frac{7}{48}ML^2}$$

SORU 2: M kütleli ve L uzunluklu homojen olmayan bir çubuk şekildeki gibi bir ucu orijinde olacak şekilde x-eksenine yerleştirilmiştir. Çubuğun çizgisel kütle yoğunluğu x'e bağlı olarak, $\lambda = Ax^2$ ($A > 0$ ve sabit) şeklinde değişmektedir.



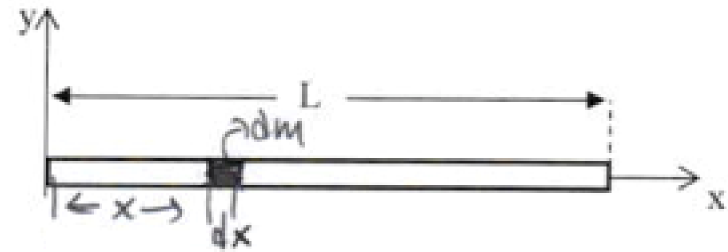
a) Çubuğun toplam M kütlesini, **L ve A cinsinden bulunuz.**

$$M = \int dm = \int \lambda dx$$

$$M = \int_0^L Ax^2 dx = A \frac{x^3}{3}\Big|_0^L$$

$$\boxed{M = A\frac{L^3}{3}}$$

b) Çubuğun kütle merkezini bulunuz.



$$X_{KM} = \frac{1}{M}\int x\,dm = \frac{1}{M}\int x\lambda\,dx$$

$$X_{KM} = \frac{1}{M}\int_0^L x\,(Ax^2)\,dx$$

$$X_{KM} = \frac{1}{M}\cdot A\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^L$$

$$X_{KM} = \frac{3}{L^3\cancel{A}}\cdot\cancel{A}\,\frac{L^4}{4}$$

$$\boxed{X_{KM} = \frac{3}{4}L}$$

c) Çubuğun y-eksenine göre eylemsizlik momentini **M ve L cinsinden** hesaplayınız.

$$I_y = \int r^2 dm \quad , \quad r = x \quad , \quad dm = \lambda dx$$

$$I_y = \int_0^L x^2 \lambda dx = \int_0^L x^2 (Ax^2) dx$$

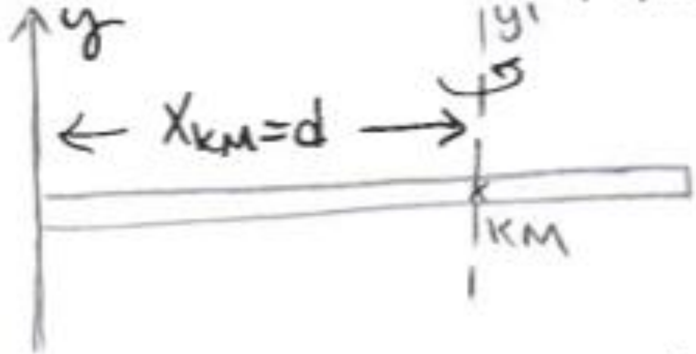
$$I_y = A \int_0^L x^4 dx = A \frac{x^5}{5} \Big|_0^L$$

$$I_y = A \frac{L^5}{5} \quad ;$$

$$M = A \frac{L^3}{3} \Rightarrow AL^3 = 3M$$

$$\boxed{I_y = \frac{3}{5} M L^2}$$

d) ***Paralel eksenler teoremini*** kullanarak kütle merkezinden geçen eksene göre eylemsizlik momentini **M ve L cinsinden** hesaplayınız.



Paralel eksenler teoremi:

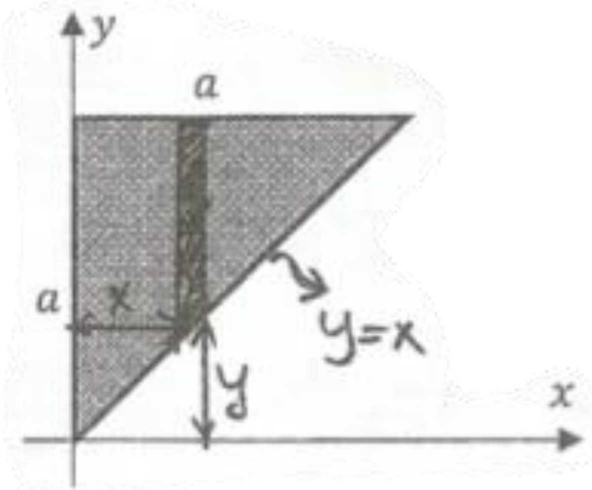
$$I_y = I_{KM} + Md^2$$

$$I_{KM} = I_y - M\left(\frac{3}{4}L\right)^2$$

$$I_{KM} = \frac{3}{5}ML^2 - \frac{9}{16}ML^2$$

$$\boxed{I_{KM} = \frac{3}{80}ML^2}$$

PROBLEM 3: M kütleli, **homojen** <u>ikizkenar</u> üçgen bir plaka şekildeki gibi xy-düzlemine yerleştirilmiştir.



a) Üçgen plakanın <u>kütle merkezinin konumunu</u> (x_{KM} *ve* y_{KM}) bulunuz.

$$X_{KM}=\frac{1}{M}\int x\,dm \quad ; \; dm=\sigma\,dA \; ; \; \sigma=\frac{2M}{a^2}$$

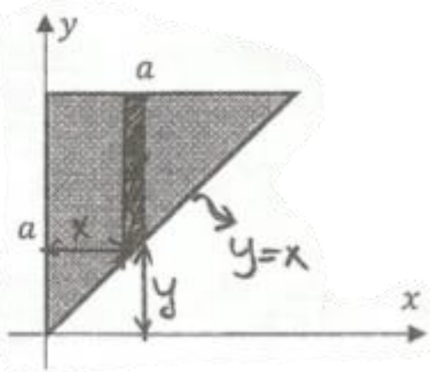
$$X_{KM}=\frac{1}{M}\int x\,\sigma\,(a-y)\,dx \quad ; \; \boxed{y=x}$$

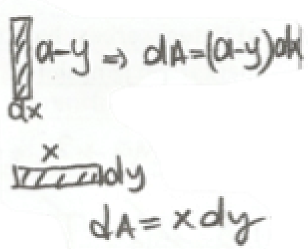
$$x_{KM}=\frac{\sigma}{M}\int_0^a x\,(a-x)\,dx$$

$$X_{KM}=\frac{\sigma}{M}\left(a\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a$$

$$X_{KM}=\frac{2\cancel{M}}{\cancel{M}a^2}\left(\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{3}\right)=\frac{2}{6}a$$

$$\boxed{X_{KM}=\frac{a}{3}}$$





$$y_{KM} = \frac{1}{M}\int y\,dm = \frac{1}{M}\int y\sigma\,dA$$

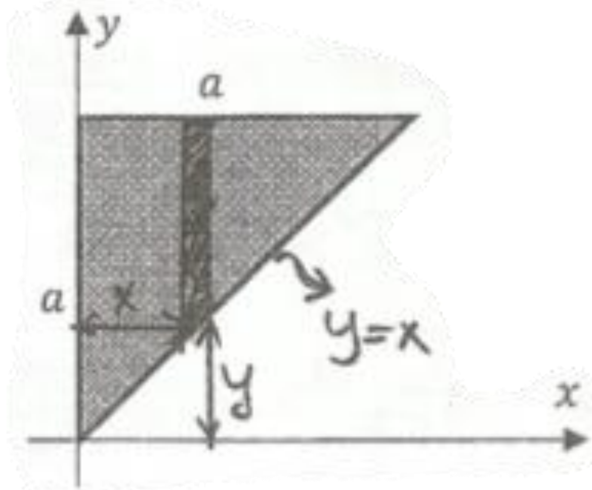
$$y_{KM} = \frac{\sigma}{M}\int_0^a yx\,dy \quad , y = x$$

$$y_{KM} = \frac{\sigma}{M}\int y^2\,dy = \frac{\sigma}{M}\,\frac{y^3}{3}\Big|_0^a$$

$$y_{KM} = \frac{2\cancel{M}}{\cancel{M}\cancel{a^2}}\cdot\frac{a^{\cancel{3}}}{3}$$

$$\boxed{y_{KM} = \frac{2}{3}a}$$

b) Üçgen plakanın y eksenine göre <u>eylemsizlik momentini</u> bulunuz.



$$I_y = \int r^2 dm \,,$$

$$r = x \quad \text{ve} \quad dm = \sigma . (a - \underset{\substack{\downarrow \\ y=x}}{y}) dx$$

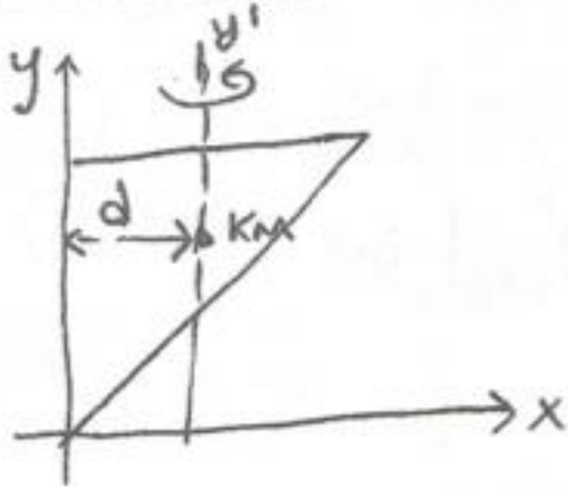
$$I_y = \int_0^a x^2 \sigma (a-x) dx$$

$$I_y = \sigma \cdot \left(\frac{x^3}{3} a - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^a$$

$$I_y = \frac{2M}{\cancel{a^2}} \left(\frac{\cancelto{2}{a^4}}{3} - \frac{\cancelto{2}{a^4}}{4} \right)$$

$$\boxed{I_y = \frac{1}{6} M a^2}$$

c) Paralel eksenler teoremini kullanarak kütle merkezinden geçen ve y eksenine paralel bir eksene göre eylemsizlik momentini (I_{KM}) hesaplayınız.



$$d = x_{KM} = \frac{a}{3}$$

$$I_y = I_{KM} + Md^2$$

$$I_{KM} = \frac{1}{6}Ma^2 - M\frac{a^2}{9}$$

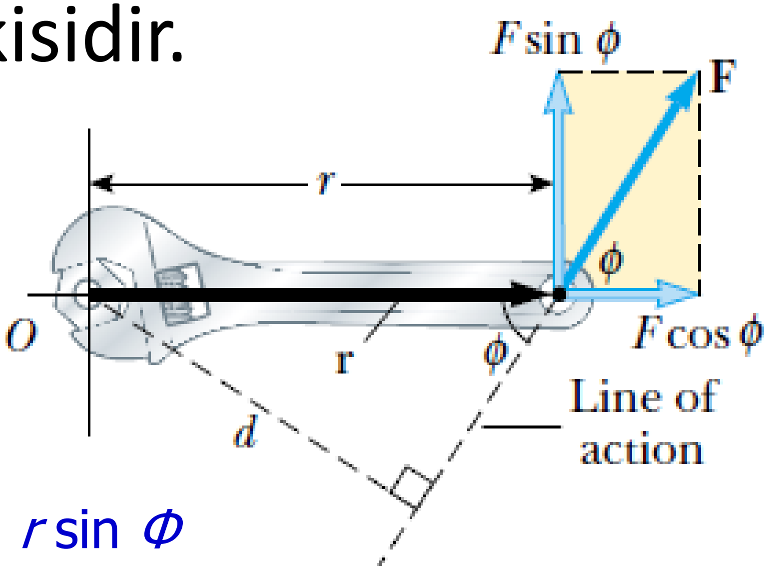
$$\boxed{I_{KM} = \frac{1}{18}Ma^2}$$

BİR KUVVETİN MOMENTİ (TORK)

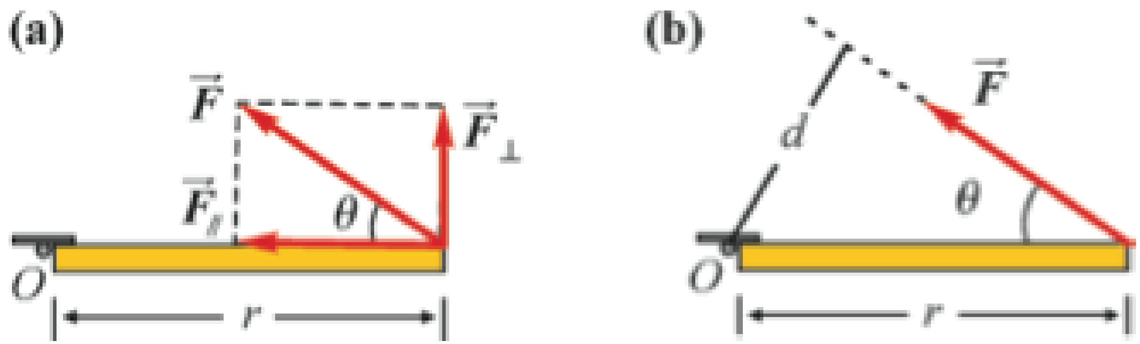
Bir kuvvetin cismi döndürme kabiliyetine **moment** (veya tork) adı verilir.

Bu F kuvvetlerinden hangisi kapıyı daha kolay döndürür?

- **Tork**, τ, bir kuvvetin bir cismi bir eksen etrafında döndürme etkisidir.
  - Tork vektörel büyüklüktür.
  - $\tau = r\,F \sin\phi = F\,d$
    - **F** kuvvettir.
    - ϕ kuvvetin yatayla yaptığı açıdır.
    - d moment kolu uzunluğu.



$d = r \sin \Phi$



Tanım: Orijinden r uzaklıkta etkiyen bir kuvvetin r doğrultusuyla yaptığı açı θ ise, F kuvvetinin O merkezine göre momenti,

$$\tau = F\,r\,\sin\theta$$

İki farklı hesap yöntemi:

$$\tau = \begin{cases} \underbrace{F\,\sin\theta}_{F_\perp}\,r = F_\perp\,r & \text{(Şekil a)} \\ F\,\underbrace{r\,\sin\theta}_{d} = F\,d & \text{(Şekil b)} \end{cases}$$

d uzaklığına **moment kolu** denir.

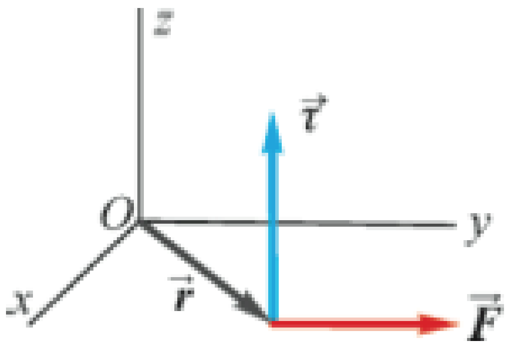
Momentin işareti: Kuvvetin döndürme yönüne bağlıdır:

Kuvvet, θ açısının pozitif alındığı yönde döndürüyorsa moment pozitif,

negatif yönde döndürüyorsa $\sin\theta$ ve dolayısıyla moment negatif olur.

Momentin Vektörel Çarpım Olarak İfadesi:

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$$



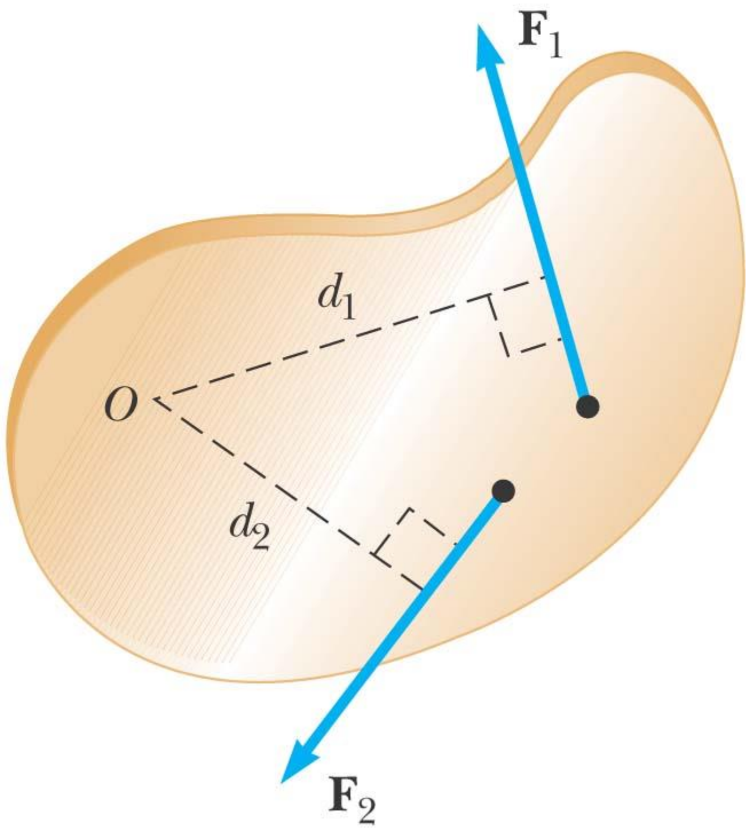
Şiddeti: $\boxed{\tau = F\,r\,\sin\theta}$

Yönü: $\vec{r}$ ve $\vec{F}$ vektörleri xy-düzleminde olsun.

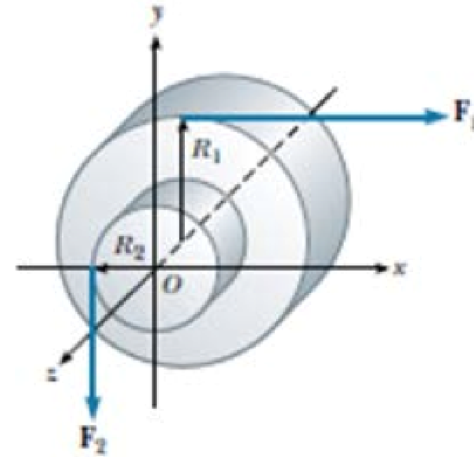
Sağ-el kuralına göre: Kuvvetin döndürme yönü saat ibrelerine ters ise, moment $+z$ yönünde, yani pozitif olur.
Tersi yönde döndürüyorsa, moment negatif olur.

Net Tork:

- **F**$_{1,}$ saat dönme eksenine ters yönünde O-ekseni etrafında,
- **F**$_2$ saat dönme ekseni yönünde O-ekseni etrafında, döndürsün, **Net TORK**:
- $\Sigma\tau = \tau_1 + \tau_2 = F_1 d_1 - F_2 d_2$
- **SI** de birimi N.m dir



Örnek : Yarıçapları R_1 ve R_2 olan iki silindir şekildeki gibi birleştirilmiştir ($R_1 > R_2$). Yarıçapı R_1 olan silindir üzerine sarılmış ip sağa doğru F_1, yarıçapı R_2 olan silindir üzerine sarılmış ip aşağı doğru F_2 kuvvetiyle çekiliyor.



$z-$eksenine göre oluşan net tork nedir?

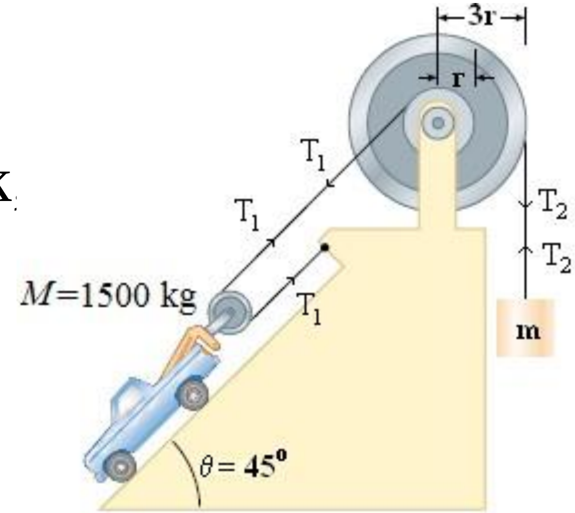
$$\vec{\tau} = R_1 F_1(-\hat{k}) + R_2 F_2(\hat{k}) = \boxed{\left(-R_1 F_1 + R_2 F_2\right)\hat{k}}$$

$F_1 = 5$ N, $R_1 = 1$ m, $F_2 = 15$ N, $R_2 = 0.5$ m ise, net torkun büyüklüğü ne kadardır?

$$\vec{\tau} = \left(-5 + 7.5\right)\hat{k} = 2.5\hat{k}$$

$$\boxed{\tau = 2.5 \ \ \text{N}\cdot\text{m}}$$

Örnek : Makaraların sürtünmesiz ve ihmal edilebilir kütlelere sahip olduğunu varsayarak, kütlesi $M = 1500$ kg olan aracı dengeleyecek bloğun m kütlesini bulunuz.



Küçük makarayı gözönüne alalım:

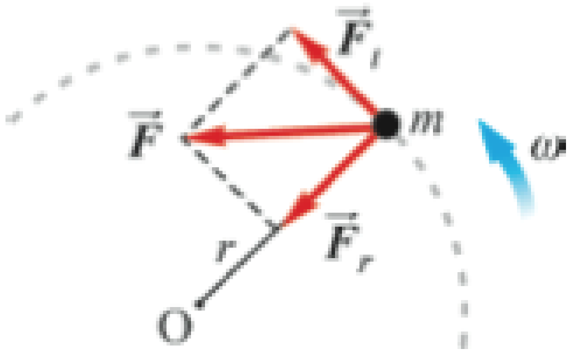
$$2T_1 = Mg\sin\theta = (1500\,.\,9{,}8)\sin(45) \rightarrow T_1 = 5197\ \text{N}$$

$$\sum \vec{\tau} = 0 \rightarrow \left|\vec{\tau}_{T_1}\right| = \left|\vec{\tau}_{T_2}\right| \rightarrow rT_1 = 3rT_2 \rightarrow T_2 = \frac{T_1}{3} = 1732\,\text{N}$$

$$T_2 = mg \rightarrow m = \frac{T_2}{g} = 176{,}8\,\text{kg}$$

DÖNME DİNAMİĞİ

- **Noktasal Cismin Dönme Dinamiği**



$\vec{F}$ kuvvetinin etkidiği m kütlesi r yarıçaplı dairesel yörüngede dönüyor.

$\vec{F}$ kuvvetini teğetsel ve merkezcil bileşenleri için Newton yasası:

$$F_r = ma_r = mr\omega^2$$

$$F_t = ma_t = mr\alpha$$

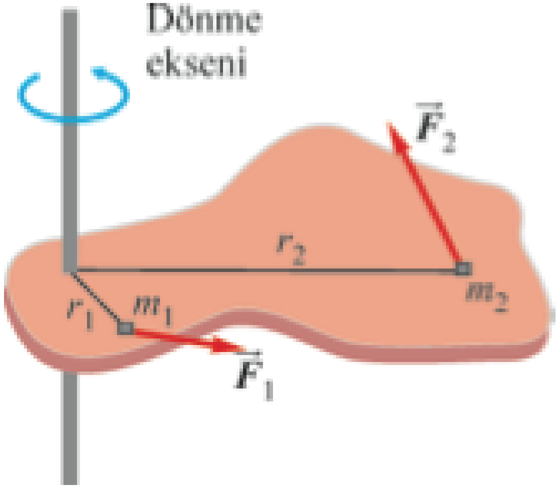
İkinci denklem r ile çarpılır:

$$F_t r = mr^2\alpha$$

Eşitliğin sol tarafı F kuvvetinin O merkezine göre momenti olur:

$$\tau = (mr^2)\alpha$$

Katı Cismin Dönme Dinamiği



O ekseni etrafında dönen katı cisim küçük $\Delta m_1, \Delta m_2 \ldots \Delta m_N$ kütlelerine ayrılır. Bu kütlelerin herbirine etkiyen dış kuvvetler $\vec{F}_1, \vec{F}_2 \ldots \vec{F}_N$ (İç kuvvetler birbirini sıfırlar.)

Noktasal cisim için bulunan sonuç herbir kütle için yazılır:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= F_{1t}\, r_1 = (\Delta m_1 r_1^2)\,\alpha \\
\tau_2 &= F_{2t}\, r_2 = (\Delta m_2 r_2^2)\,\alpha \\
\cdots &= \cdots \\
\tau_N &= F_{Nt}\, r_N = (\Delta m_N r_N^2)\,\alpha
\end{aligned}$$

Taraf tarafa toplanır:

$$\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_N = (\Delta m_1 r_1^2 + \Delta m_2 r_2^2 + \cdots + \Delta m_N r_N^2)\,\alpha$$

$$\boxed{\sum_i \tau_i = \Big(\sum_i \Delta m_i r_i^2\Big)\alpha}$$

$$\boxed{\underbrace{\sum_i \tau_i}_{\tau_{\text{net}}} = \underbrace{\left(\sum_i \Delta m_i r_i^2\right)}_{I} \alpha}$$

τ_{net} : dış kuvvetlerin toplam momenti

I : Katı cismin **eylemsizlik momenti**

α : açısal ivme.

$$\boxed{\tau_{\text{net}} = I\,\alpha \qquad \text{(Katı cismin dönme dinamiği)}}$$

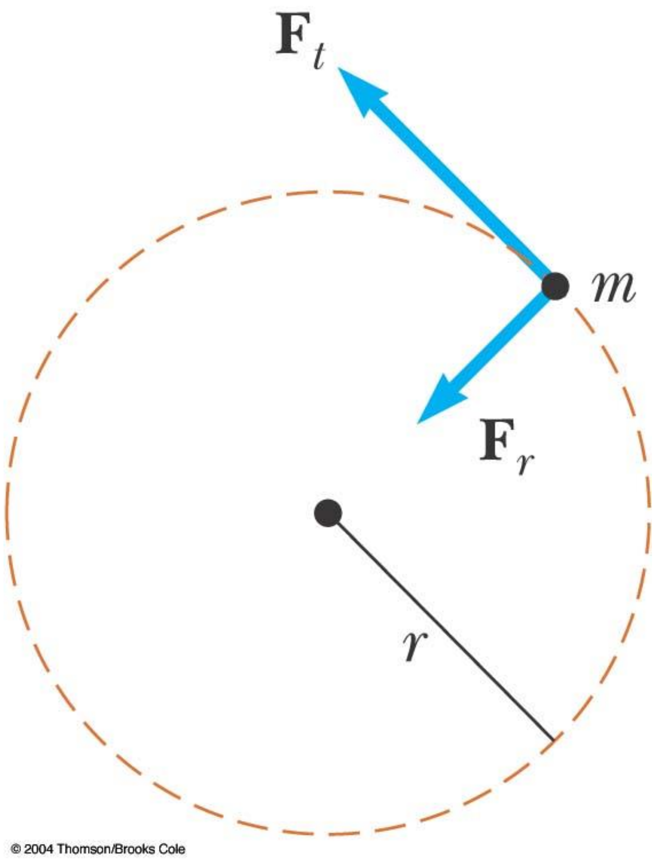
$F = ma$ ile benzerlik.

I kütle vazifesi görür.

TORK ve **Açısal İvme** Arasındaki Bağıntı:

- Teğetsel Kuvvet: $\mathbf{F}_t$
- **İvme**lenmesi sonucu **kuvvet** ifadesi:
  - $F_t = ma_t$
  - *Bu kuvvetin dairenin merkezine göre uyguladığı TORK (θ=90 derece)*
  - $\tau = F_t\, r = (ma_t)\, r$
  - $I = mr^2$

    $\tau = (ma_t)\, r = (mr\alpha)\, r = (mr^2)\, \alpha$

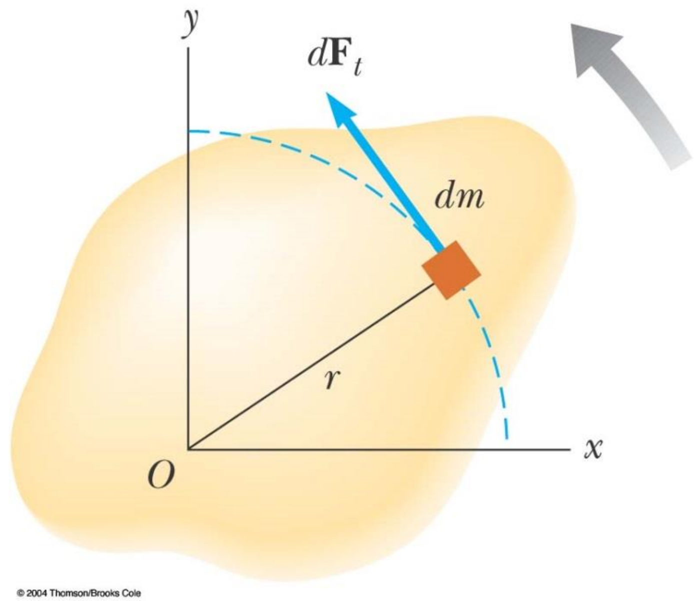


- $\boldsymbol{\tau = I\alpha}$ *Tork ile açısal ivme arasındaki bağıntıdır.*

Tork ile Açısal İvme Bağlantısı:

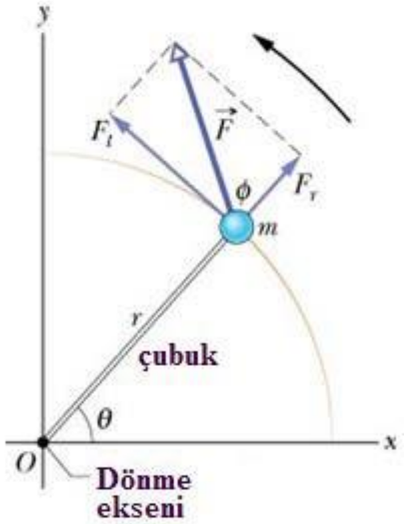
- Newton'un II. yasasından;
  - $dF_t = (dm)\, a_t$
  - $a_t = \alpha r$
  - $d\tau = r\, dF_t = a_t r\, dm = \alpha r^2\, dm$
- Bulunan **net tork**:
  - $\sum \tau = I\alpha$

$$\sum \tau = \int \alpha r^2 dm = \alpha \int r^2 dm$$



Doğrusal	Dönme
m	I
a	α
F	τ

TORK ve AÇISAL İVME ARASINDAKİ BAĞINTI:



Ötelenme hareketinde, Newton' un ikinci yasası cisme etkiyen kuvveti cismin ivmesine bağlar. Benzer bir ilişki, kuvvetin katı cisim üzerine uyguladığı tork ile cismin açısal ivmesi arasında da vardır. Bu ilişki, Newton' un ikinci yasasının dönmedeki karşılığıdır.

Kütlesi m olan bir cisim r uzunluğunda ağırlıksız bir çubuğun ucuna yapıştırılmıştır. Cisim üzerine uygulanan $\vec{F}$ kuvveti ile sistem, orijinden geçen eksen etrafında dönsün.

Daha önceden olduğu gibi F kuvvetini radyal ve teğetsel bileşenlerine ayıralım. Radyal kuvvetin dönmeye katkısının olmadığını biliyoruz.

$$F_t = ma_t \quad \rightarrow \quad \tau = F_t r = ma_t r = m(\alpha r)\, r = \left(mr^2\right)\alpha = I\alpha$$

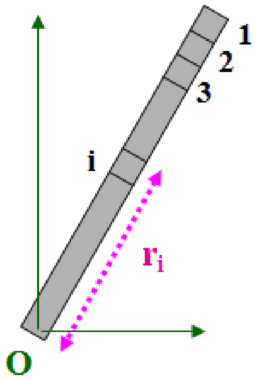
$$\boxed{\tau = I\alpha}$$

bulunur ($F = ma$ ile karşılaştırınız).

Dönen Katı Cisimler İçin Newton'un İkinci Yasası:

r uzunluğunda ağırlıksız bir çubuğun ucuna bağlı m kütleli parçacık özel durumu için, Newton' un ikinci yasasının dönme hareketindeki karşılığını bulduk. Şimdi ise, bunu çok daha genel durumlar için tekrarlayalım.

Net bir torkun etkisiyle (τ_{net}) O noktasından geçen eksen etrafında dönebilen çubuk benzeri katı bir cisim olsun.



Çubuğu, O noktasından olan uzaklıkları $r_1, r_2, r_3, ..., r_n$ ve kütleleri $m_1, m_2, m_3, ..., m_n$ olan küçük parçalara bölelim.

Her bir parçaya, dönme için Newton' un ikinci yasasını uygularsak;

$$\tau_1 = I_1\alpha \quad ; \quad \tau_2 = I_2\alpha \quad ; \quad \tau_3 = I_3\alpha \quad ; \ldots.$$

eşitliklerini elde ederiz. Cisme etki eden toplam tork,

$$\tau_{\text{net}} = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \ldots + \tau_n = (I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_n)\alpha$$ olacaktır.

Burada, $I_i = m_i r_i^2$ i. elemanın dönme eylemsizlik momentidir ve $I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_n$ toplamı da, katı cismin dönme eylemsizlik momentidir.

Buradan da, $\boxed{\tau_{\text{net}} = I\alpha}$ yazılır.

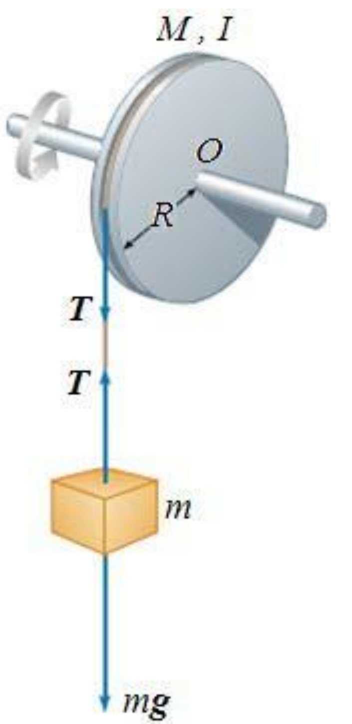
Örnek : Yarıçapı R, kütlesi M ve eylemsizlik momenti I olan bir tekerlek şekildeki gibi ortasından geçen sürtünmesiz yatay bir aksa bağlıdır. Tekerlek etrafına sarılmış hafif bir ipin ucuna da m kütlesi asılmıştır.

Sistem serbest bırakıldığında m kütlesinin çizgisel ivmesini, ipte oluşan gerilme kuvvetini ve tekerleğin açısal ivmesini bulunuz.

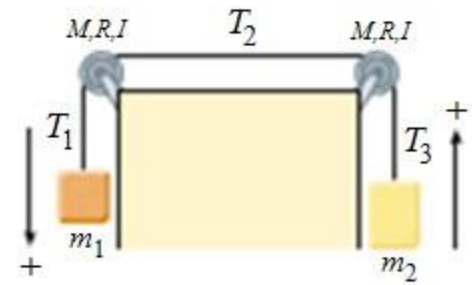
$$mg - T = ma \quad ; \quad \sum \tau = I\alpha \rightarrow TR = I\alpha \rightarrow T = \frac{Ia}{R^2}$$

$$a = \frac{g}{\left(\dfrac{I}{mR^2} + 1\right)} \qquad T = \frac{I}{R^2}a = \frac{mg}{\left(1 + \dfrac{mR^2}{I}\right)}$$

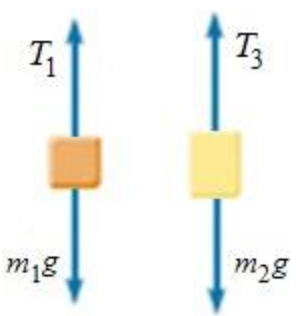
$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{g}{\left(\dfrac{I}{mR} + R\right)}$$



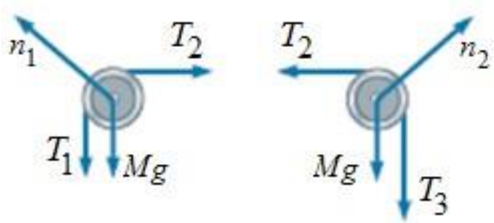
Örnek : Kütleleri m_1 ve m_2 olan iki blok hafif iplerle, Kütlesi M , yarıçapı R ve eylemsizlik momenti I olan sürtünmesiz iki özdeş makara üzerinden birbirine bağlanmıştır.



Sistem durgun halden serbest bırakıldığında, blokların ivmesi ne olur?



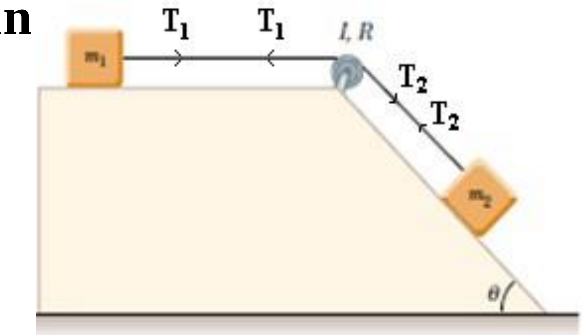
$$\left.\begin{aligned} m_1 g - T_1 &= m_1 a \\ T_3 - m_2 g &= m_2 a \end{aligned}\right\} \rightarrow (T_1 - T_3) = (m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2)a \quad (1)$$



$$\left.\begin{aligned} \sum \tau = I\alpha &\rightarrow (T_1 - T_2)R = I\alpha \\ \sum \tau = I\alpha &\rightarrow (T_2 - T_3)R = I\alpha \end{aligned}\right\} \rightarrow (T_1 - T_3) = 2I\frac{a}{R^2} \quad (2)$$

$$(\text{Eş-1}) = (\text{Eş-2}) \rightarrow \boxed{a = \frac{(m_1 - m_2)g}{\left(m_1 + m_2 + 2\frac{I}{R^2}\right)}}$$

Örnek : Kütleleri m_1=2 kg ve m_2 = 6 kg olan iki blok hafif bir iple, yarıçapı R = 0.25 m ve kütlesi M = 10 kg olan disk şeklindeki bir makara üzerinden birbirine bağlanmıştır. Tüm yüzeylerde kinetik sürtünme katsayısı 0.36' dır ve m_2 bloğu 30°' lik eğik düzlem üzerindedir.



- Sistem serbest bırakıldığında blokların ivmesini ve makaranın her iki yanındaki iplerde oluşan gerilme kuvvetlerini bulunuz.

$$T_1 - \mu_k m_1 g = m_1 a \quad ; \quad m_2 g \sin\theta - \mu_k m_2 g \cos\theta - T_2 = m_2 a$$

$$T_1 - T_2 = (m_1 + m_2)a + g\left(\mu_k m_1 + \mu_k m_2 \cos\theta - m_2 \sin\theta\right)$$

$$\sum \tau = I(-\alpha) = (T_1 - T_2)R \quad \rightarrow \quad (T_1 - T_2) = -\frac{I\alpha}{R} = -\frac{1}{2}MR^2\frac{a/R}{R} = -0.5Ma$$

$$a = \frac{g\left(m_2 \sin\theta - \mu_k m_1 - \mu_k m_2 \cos\theta\right)}{m_1 + m_2 + 0.5M} = 0.309\ \text{m/s}^2$$

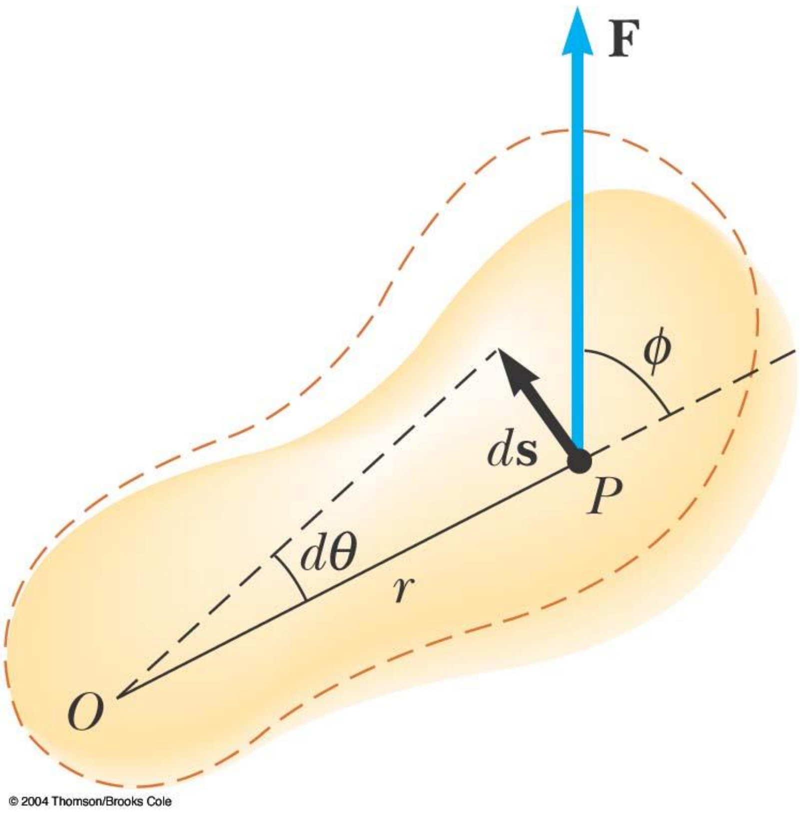
$$T_1 = m_1(\mu_k g + a) = 7.67\,\text{N} \qquad T_2 = T_1 + 0.5Ma = 9.22\,\text{N}$$

Dönme Hareketinde İş:

- Bir tek **F** dış kuvvetin P noktasına uygulandığını varsayalım:
- Cisim dt süresinde;
- $ds = r\,d\theta$ *kadar döndüğünde yapılan iş:*
- $dW = \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{s}$

$$= (F \sin\phi)\, r\, d\theta$$

$$dW = \tau\, d\theta$$



Dönme Hareketinde
İş-Kinetik Enerji Teoremi

- Doğrusal harekete benzer,
- $\tau = I\alpha$ için *zincir kuralı* uygulayalım:

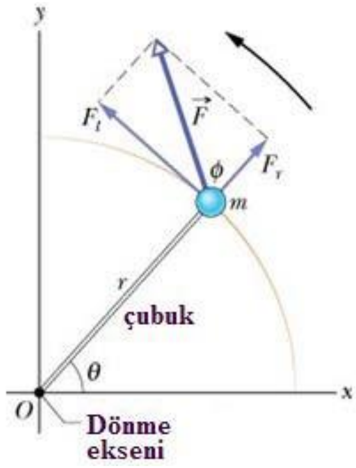
$$\tau = \mathrm{I}\alpha = \mathrm{I}\frac{d\omega}{dt} = \mathrm{I}\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \mathrm{I}\frac{d\omega}{d\theta}\omega$$

$$\tau d\theta = d\omega$$

- olarak: $\tau d\theta = dW = I\omega d\omega$ elde ederiz.
- Bu ifadedeki **işi** *integrallersek*:

$$\sum W = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I\omega\, d\omega = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2$$

İş ve Dönme Kinetik Enerjisi :



Bölüm-7' de, bir kuvvetin bir cisim üzerinde yaptığı işin (W), o cismin kinetik enerjisindeki değişime (ΔK) eşit olduğunu gördük.

Benzer şekilde, bir torkun dönen bir cisim üzerinde yaptığı iş, o cismin dönme kinetik enerjisindeki değişime eşittir.

Kütlesi m olan cisim, r uzunluğunda ağırlıksız bir çubuğun ucuna yapıştırılmıştır.

Katı cismin $d\theta$ kadar dönmesi için F kuvvetinin yaptığı iş: $dW = F_t . r . d\theta = \tau d\theta$

ile verilir.

Kuvvetin radyal bileşeni F_r harekete dik yönde olduğu için iş yapmaz.

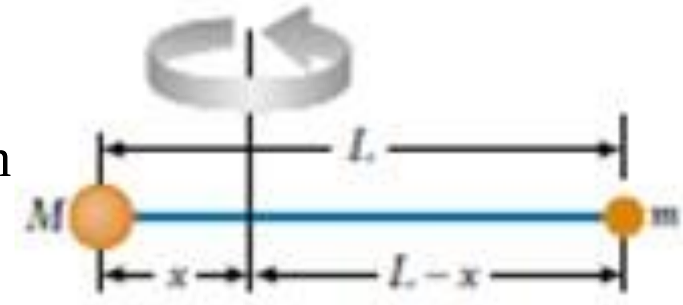
θ_i ve θ_s aralığında kuvvetin yaptığı toplam iş:

$$W = \int F_t r d\theta = \int_{\theta_i}^{\theta_s} \tau \, d\theta$$

olur. İş-enerji teoreminden kinetik enerjideki değişim de şu ifadeye sahiptir:

$$\Delta K = W = \frac{1}{2} m v_s^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega_s^2 - \frac{1}{2} m r^2 \omega_i^2 = \frac{1}{2} I \omega_s^2 - \frac{1}{2} I \omega_i^2$$

Örnek : Kütleleri *M* ve *m* olan iki cisim *L* uzunluğunda ağırlıksız bir çubuğun uçlarına yapıştırılmıştır.



Çubuğa dik bir eksene göre eylemsizlik momentinin minimum olduğu noktayı ve bu noktadan geçen eksene göre eylemsizlik momentini bulunuz.

$$I = \sum m_i r_i^2 \rightarrow I = Mx^2 + m(L - x)^2 = Mx^2 + mx^2 - 2mLx + mL^2$$

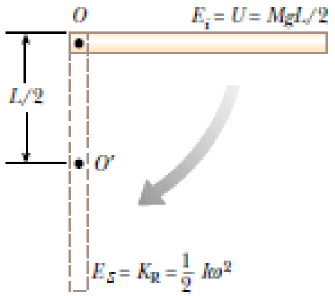
$$\frac{dI}{dx} = 0 \rightarrow 2(M+m)x - 2mL = 0$$

$$x = \left(\frac{m}{M+m}\right)L$$

$$I = (M+m)x^2 - 2mLx + mL^2 = \left(\frac{m^2}{M+m} - \frac{2m^2}{M+m} + m\right)L^2$$

$$\boxed{I = \left(\frac{mM}{M+m}\right)L^2}$$

Örnek : Kütlesi M ve boyu L olan çubuk, bir ucundan geçen eksen etrafında düşey düzlemde dönebilmektedir. Çubuk şekildeki gibi yatay konumdan serbest bırakılıyor.



a) Çubuğun bırakıldığı andaki açısal ivmesi, kütle merkezinin ve uç noktasının çizgisel ivmesi nedir?

b) Çubuk düşey konuma geldiği anda açısal hızı, kütle merkezinin ve uç noktasının çizgisel hızı nedir?

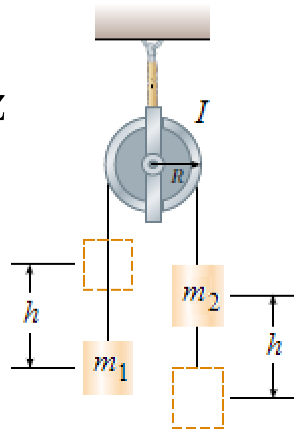
$$a-)\sum\tau = I\alpha = rF_{\perp} \rightarrow \left(\frac{1}{3}ML^2\right)\alpha = \frac{L}{2}Mg \rightarrow \alpha = \frac{3g}{2L}$$

$$a_t = r\alpha \rightarrow a_{t,km} = \frac{L}{2}\left(\frac{3g}{2L}\right) = \frac{3}{4}g \quad ; \quad a_{t,uç} = L\left(\frac{3g}{2L}\right) = \frac{3}{2}g$$

$$b-)\ E_i = E_s \rightarrow Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

$$v = r\omega \rightarrow v_{km} = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{3g}{L}} = \frac{1}{2}\sqrt{3gL} \qquad v_{uç} = L\sqrt{\frac{3g}{L}} = \sqrt{3gL}$$

Örnek : Kütlesi m_1 ve m_2 ($m_1 \neq m_2$) olan iki blok şekildeki gibi hafif bir iple, yarıçapı R ve eylemsizlik momenti I olan sürtünmesiz bir makara üzerinden birbirine bağlanmıştır. Sistem durgun halden serbest bırakılıyor.



m_2 bloğu h kadar alçaldığı anda hızı ne olur?

Tam bu anda makaranın açısal hızı nedir?

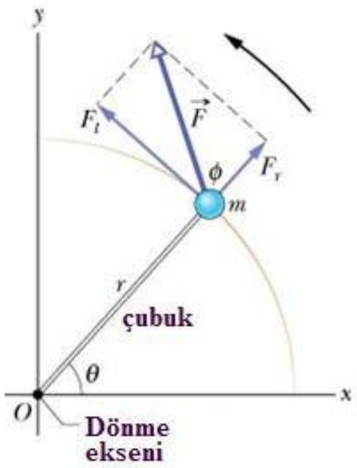
$$\Delta K = K_s - \cancel{K_i} = \left(\frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2\right) - 0 = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)v^2$$

$$\omega = \frac{v}{R}$$

$$\Delta U = U_s - U_i = m_1gh - m_2gh$$

$$\Delta K + \Delta U = 0 \rightarrow \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)v^2 + m_1gh - m_2gh = 0$$

$$v = \sqrt{\frac{2(m_2 - m_1)gh}{\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)}} \rightarrow \boxed{\omega = \frac{v}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2(m_2 - m_1)gh}{\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)}}}$$



Güç:

Güç, bir kuvvet tarafından işin yapılma hızı olarak tarif edilir. Dönme durumunda ise güç, tork tarafından işin yapılma hızı olarak tarif edilir.

Cisim $d\theta$ kadar döndüğünde, torkun yaptığı iş $dW = \tau d\theta$ olduğuna göre, güç ifadesi

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(\tau d\theta) = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau\omega$$

şeklinde elde edilir. ($P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ ile karşılaştırınız).

İş-Dönme kinetik enerjisi teoremini özetleyecek olursak:

$$\boxed{W = \int_{\theta_i}^{\theta_s} \tau d\theta}$$; $$\boxed{\text{tork sabit ise} \quad \rightarrow \quad W = \tau(\theta_s - \theta_i)}$$

$$\boxed{W = \Delta K = \frac{1}{2} I\omega_s^2 - \frac{1}{2} I\omega_i^2}$$ İş-Dönme Kinetik Enerjisi Teoremi

$$\boxed{P = \tau . \omega}$$ Güç

Ötelenme ve Dönme Hareketleri Arasındaki Benzerlik :

Ötelenme		Dönme
x	$\leftrightarrow$	θ
v	$\leftrightarrow$	ω
a	$\leftrightarrow$	α
$v = v_0 + at$	$\leftrightarrow$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = x_o + v_0 t + \frac{at^2}{2}$	$\leftrightarrow$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$
$v^2 - v_0^2 = 2a\left(x - x_o\right)$	$\leftrightarrow$	$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\left(\theta - \theta_0\right)$
$K = \frac{1}{2}mv^2$	$\leftrightarrow$	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
m	$\leftrightarrow$	I
$F = ma$	$\leftrightarrow$	$\tau = I\alpha$
F	$\leftrightarrow$	τ
$\mathrm{W}= \int \vec{F}.d\vec{x}$	$\leftrightarrow$	$\mathrm{W}=\int \tau.d\theta$
$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$	$\leftrightarrow$	$P = \tau\omega$


TEŞEKKÜRLER…