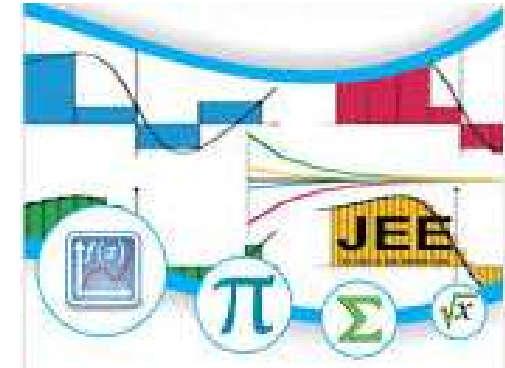




## Doğrusal Denklem Takımlarının Çözümü



# DOĞRUSAL (LİNEER) DENKLEM TAKIMLARININ ÇÖZÜMÜ

## Matrisler Hakkında Kısa Bilgi

- Alt ve Üst Üçgen Matris
- Birim ve Köşegen Matris
- Bant Matris
- Transpoze Matris
- Simetrik Matris
- Kofaktör Matris
- Adjoint (Ek) Matris
- Ters Matris
- Matrislerde Toplama ve Çarpma

Matrisler satır ve sütunlardan oluşan iki boyutlu dizilerdir.

Tek satır veya sütundan oluşurlarsa vektör veya dizi adını alırlar.

Matrisler genelde isimleri ile veya [ ] şeklinde gösterilir.

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} \end{bmatrix}$$

## Alt ve Üst Üçgen Matris

- Matrisin köşegeni üstündeki elemanlar sıfır ise Alt Üçgen Matris
- Matrisin köşegeni altındaki elemanlar sıfır ise Üst Üçgen Matris denir.

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} \end{bmatrix} \quad [A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{ij} \end{bmatrix}$$

## Birim ve Köşegen Matris

- Matrisin köşegeni üzerindeki elemanlar 1 ise Birim Matris
- Matrisin köşegeni üzerinde değer bulunan ve diğer elemanları 0 olan matrise de Köşegen Matris adı verilir.

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad [A] = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{ij} \end{bmatrix}$$

## Bant Matris

Matrisin elemanları köşegen etrafında belirli bir düzen ile yerleşmiştir. Genellikle kısmi türevli denklemlerin çözümünde kullanılır.

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,6} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & a_{i-1,j-3} & a_{i-1,j-2} & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} \\ & & & & & a_{i,j-2} & a_{i,j-1} & a_{i,j} \end{bmatrix}$$

### Transpoze Matris

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$[A]^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

### Simetrik Matris

- Bir matrisin transpozesi kendisine eşit ise Simetrik Matris adını alır.

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$[A]^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$



## Kofaktör Matris

- Bir matrisin herhangi bir elemanının bulunduğu satır ve sütun silinerek elde edilen matrisin işaretli determinanı o elemanın Kofaktörü olarak adlandırılır.
- Bu işlem bütün elemanlar için tekrarlanıp yerine konulursa elde edilen yeni matris Kofaktör Matris olarak adlandırılır.

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{1,1} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

$$\text{kofaktör}[A] = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{2,1} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

### Adjoint (Ek) Matris

- Kofaktör matrisinin transpozelerinden oluşur.

$$\text{Adjoint}[A] = \text{Kofaktör}[A]^T$$

$$\text{Adjoint}[A] = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{2,1} & \alpha_{3,1} \\ \alpha_{1,2} & \alpha_{2,2} & \alpha_{3,2} \\ \alpha_{1,3} & \alpha_{2,3} & \alpha_{3,3} \end{bmatrix}$$

### Ters Matris

- Bir matrisin Adjoint matrisinin o matrisin determinantına bölünmesiyle elde edilen matrise Ters Matris denir.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}[A]}{|A|}$$

### Ortogonal Matris

$$[A] = [A]^{-1}$$

## Matrislerde Toplama ve Çıkarma

- Aynı boyuttaki matrislerin toplanması aynı konumdaki elemanların toplanması ile gerçekleştirilir.
- Matrislerin çarpımı, birinci matrisin satır elemanlarıyla ikinci matrisin sütun elemanlarını çarparak elde edilir.
- $A[i,j]$  ile  $B[m,n]$  matrislerinin çarpma işleminin gerçekleşmesi için  $(j=m)$  olmalıdır.
- Matrislerde bölme işlemi yoktur. Ancak matris herhangi bir sayıya bölünebilir.

# ELEMENTER (TEMEL) SATIR İŞLEMLERİ

Denklem sistemlerinin matris ile çözümünde kullanılır

$$x + 3y - z = 10$$

$$3x - y + 2z = 5$$

$$x + 5y - 2z = -3$$

Genişletilmiş (augmented) katsayılar matrisi haline getirelim

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 10 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & -3 \end{array} \right]$$

Denklem sistemlerini çözerken matrisler üzerinde yapmamıza izin verilen işlemler vardır ki bu işlemlere elementer satır işlemleri denir

## Elementer satır işlemleri nedir?

- I. Genişletilmiş matris içerisindeki istediğimiz satırı istediğimiz sayı ile çarpabiliriz.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 10 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & -3 \end{array} \right] \quad 2 * S1 \rightarrow S1 \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{-2} & \mathbf{20} \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & -3 \end{array} \right]$$

- II. Genişletilmiş matris içerisinde istenildiğinde iki satırın yeri değiştirilebilir

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 10 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & -3 \end{array} \right] \quad S1 \Leftrightarrow S2 \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 10 \\ 1 & 5 & 2 & -3 \end{array} \right]$$

III. Genişletilmiş matris içerisinde istenildiğinde bir satır diğer bir satıra eklenebilir veya bir satır bir sayı ile çarpılıp diğer bir satıra eklenebilir

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 10 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & -3 \end{array} \right] \quad S1 + S2 \rightarrow S1 \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 15 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 12 & 6 & 3 & 45 \end{array} \right] \quad 3*S1 \rightarrow S3$$

**Original matris ile genişletilmiş ve üzerine elementer satır işlemi yapılmış matrislerin çözümleri aynıdır.**

## MATRİSİN TERSİNİN (İNVERSİNİN) ALINMASI

$$[A][I] \xrightarrow{\text{Elementer işlemler}} [I][A]^{-1}$$

Verilen matris (A) ve Birim Matris (I) üzerinde aynı elementer satır işlemleri yapılarak:

- A matrisi Birim Matris haline
- Birim Matriste A matrisinin tersine dönüştürülür.

### Not:

- Sadece kare matrislerin tersi alınır.
- Her kare matrisin tersi olmayabilir. (A matrisini Birim Matris haline getirmeye çalışırken, bir satır tamamıyla 0 oluyorsa tersi alınamaz)
- Matrisimiz kare değilse, tersini alma işleminden önce ön işlem uygulanması gerekir.

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

1. olarak 0 yapılmalı. 1. satır.  
 2. olarak köşegenler 1 yapılmalı.  
 3. olarak 0 yapılmalı. 2. satır.

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$I$   $A^{-1}$

**Not :** Matrisin (1,1) gözündeki değer 0 olmamalıdır. Sıfır ise, ilk olarak sıfırdan kurtarmaktır. Bu sebeple satırların yerlerinin değiştirilmesi gerekirdi.

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-3S_1 + S_2 \rightarrow S_2} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}S_2 \rightarrow S_2}$$

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{-2S_2 + S_1 \rightarrow S_1} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right]$$

$I$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$



## Kare Olmayan Matrislerin Tersi Nasıl Bulunur

1. durum Satır sayısı > Sütun sayısı

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A &= I \\ A \cdot A^{-1} &= I \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

1. adım:  $A^T \cdot A = C$  matrisi elde edilir.  $n \times n$  bir kare matris olur.

2. adım  $C^{-1} \cdot A^T = A^{-L}$  (soldan ters)

Yani  $A^{-L} \cdot A = I$  verir.

2. durum Sütun sayısı > Satır sayısı

1. adım  $A \cdot A^T = C \rightarrow n \times n$  kare bir matris

2. adım  $C^{-1}$  bulunur.

3. adım  $A^T \cdot C^{-1} = A^{-R}$

## GAUSS JORDAN Eleminasyon Yöntemi İle Matrisin Tersini Bulma

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 1. İşlem

1.satırı  $a_{11}$ 'e böl

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,4 & -0,8 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 2. İşlem

2.satırdan  $-(a_{21} * 1.\text{satır})$  çıkar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,4 & -0,8 \\ 0 & 3,6 & 2,8 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ -0,2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3. İşlem

3.satırdan - ( $a_{31}$  \* 1.satır) çıkar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,4 & -0,8 \\ 0 & 3,6 & 2,8 \\ 0 & 2,2 & 7,6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ -0,2 & 1 & 0 \\ -0,4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 4. İşlem

2.satırı  $a_{22}$ 'ye böl

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,4 & -0,8 \\ 0 & 1 & 0,78 \\ 0 & 2,2 & 7,6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ -0,06 & 0,28 & 0 \\ -0,4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 5. İşlem

1.satırdan - ( $a_{12}$  \* 2.satır) çıkar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1,11 \\ 0 & 1 & 0,78 \\ 0 & 2,2 & 7,6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0,22 & -0,11 & 0 \\ -0,06 & 0,28 & 0 \\ -0,4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 6. İşlem

3.satırdan - ( $A_{32} * 2.satır$ ) çıkar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1,11 \\ 0 & 1 & 0,78 \\ 0 & 0 & 5,88 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0,22 & -0,11 & 0 \\ -0,06 & 0,28 & 0 \\ -0,27 & -0,62 & 1 \end{bmatrix}$$

## 7. İşlem

3.satırı  $A_{33}$  'e böl

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1,11 \\ 0 & 1 & 0,78 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0,22 & -0,11 & 0 \\ -0,06 & 0,28 & 0 \\ -0,05 & -0,11 & 0,17 \end{bmatrix}$$

## 8. İşlem

1.satırdan - ( $A_{13} * 3.satır$ ) çıkar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,78 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0,16 & -0,23 & 0,19 \\ -0,06 & 0,28 & 0 \\ -0,05 & -0,11 & 0,17 \end{bmatrix}$$

## 9. İşlem

2.satırdan - ( $a_{22} * 3.satır$ ) çıkar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0,16 & -0,23 & 0,19 \\ -0,02 & 0,36 & -0,13 \\ -0,05 & -0,11 & 0,17 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,16 & -0,23 & 0,19 \\ -0,02 & 0,36 & -0,13 \\ -0,05 & -0,11 & 0,17 \end{bmatrix}$$

## LİNEER DENKLEM TAKIMLARI

Genel olarak bir lineer denklem takımı  $n$  bilinmeyenli  $m$  adet denklemden oluşur.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = c_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = c_2$$

$$\dots\dots\dots + \dots\dots\dots + \dots\dots\dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = c_m$$

$A X = C$  şeklinde gösterebiliriz.

Verilen denklem takımında **C** vektörü **sıfır** ise denklem takımı ***Homojen Denklem Takımı*** sıfırdan farklı olması halinde ***Homojen Olmayan Denklem*** Takımı adını alır.

Homojen Olmayan Denklem Takımlarını çözümü için kullanılan yöntemler ikiye ayrılır.

- Dolaysız (direct)
- Dolaylı (indirect)

## **A. Dolaysız Yöntemler**

1. Cramer Yöntemi
2. Yok Etme (Eleminasyon) Yöntemi
  - a. Gauss Eleminasyon Yöntemi
  - b. Gauss-Jordan Yöntemi
3. Yoğunlaştırılmış Yok Etme Yöntemi (Compact Elimination)
  - a. Cholesky Yöntemi

## **B. Dolaylı Yöntemler**

1. Jacobi Yöntemi
2. Gauss-Seidel Yöntemi



# Dolaysız Yöntemler

## CRAMER Yöntemi

- Verilen denklem takımı  $[A][X] = [C]$  formuna getirilir
- Az sayıda denklemden oluşan denklem sistemlerinin çözümünde kullanılır

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{bmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}{|A|} \quad x_2 = \frac{\begin{bmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{bmatrix}}{|A|} \quad x_3 = \frac{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{bmatrix}}{|A|}$$

## Örnek

$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -11$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 8$$

$$3x_1 - 2x_2 - x_3 = -1$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 2(-1-4) + 3(-1+6) + 2(-2-3) = -5$$

$$x_1 = \frac{\begin{bmatrix} -11 & -3 & 2 \\ 8 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}}{-5}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{\begin{bmatrix} 2 & -11 & 2 \\ 1 & 8 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}}{-5}$$

$$x_2 = 3$$

$$x_3 = \frac{\begin{bmatrix} 2 & -3 & -11 \\ 1 & 1 & 8 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}}{-5}$$

$$x_3 = -2$$

# Dolaysız Yöntemler

## Yoketme (Elimination) Yöntemleri

Lineer Denklem Sistemlerini çözer

**Her Lineer Denklem Sistemini Çözer mi?**

Denklem Sayısı = Bilinmeyen Sayısı

- Denklem sistemi genişletilmiş katsayılar matrisi şeklinde yazılır
- Elementer satır işlemleri uygulanır
- Katsayılar matrisi **üst üçgen matris** haline getirilir

**Neden üst üçgen matris haline getirilir ?**

## Gauss Yoketme (Elimination) Yöntemi

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = c_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

Denklem takımı üst üçgen matris haline getirilmek için bir seri işlem yapılır

$$\begin{aligned} a_{11}'x_1 + a_{12}'x_2 + a_{13}'x_3 + \dots + a_{1n}'x_n &= c_1' \\ a_{22}'x_2 + a_{23}'x_3 + \dots + a_{2n}'x_n &= c_2' \\ a_{33}'x_3 + \dots + a_{3n}'x_n &= c_3' \\ &\dots\dots\dots \\ a_{nn}'x_n &= c_n' \end{aligned}$$

En sondaki denklemden başlayarak geriye doğru işlem yapılır

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

## Örnek

$$\begin{aligned}3,6x + 2,4y - 1,8z &= 6,3 \\4,2x - 5,8y + 2,1z &= 7,5 \\0,8x + 3,5y + 6,5z &= 3,7\end{aligned}$$

Verilen denklem sistemini Gauss Eleminasyon yöntemini kullanarak çözünüz.

$$\begin{bmatrix} 3,6 & 2,4 & -1,8 \\ 4,2 & -5,8 & 2,1 \\ 0,8 & 3,5 & 6,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6,3 \\ 7,5 \\ 3,7 \end{bmatrix}$$

### 1. İşlem

1.satırı  $a_{11}$ 'e böl

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,667 & -0,5 \\ 4,2 & -5,8 & 2,1 \\ 0,8 & 3,5 & 6,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,75 \\ 7,5 \\ 3,7 \end{bmatrix}$$

### 2. İşlem

2.satırı  $a_{21}$ 'e böl, 2.satırdan 1.satırı çıkar ve 2.satırı  $a_{21}$  ile çarp

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,667 & -0,5 \\ 0 & -8,6 & 4,2 \\ 0,8 & 3,5 & 6,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,75 \\ 0,15 \\ 3,7 \end{bmatrix}$$

### 3. İşlem

3.satırı  $a_{31}$ 'e böl, 3.satırdan 1.satırı çıkar ve 3.satırı  $a_{31}$  ile çarp

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,667 & -0,5 \\ 0 & -8,6 & 4,2 \\ 0 & 2,966 & 6,9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,75 \\ 0,15 \\ 2,3 \end{bmatrix}$$

### 4. İşlem

2.satırı  $a_{22}$ 'ye böl

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,667 & -0,5 \\ 0 & 1 & -0,489 \\ 0 & 2,966 & 6,9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,75 \\ -0,017 \\ 2,3 \end{bmatrix}$$

### 5. İşlem

3.satırı  $a_{32}$ 'ye böl, 3.satırdan 2.satırı çıkar ve 3.satırı  $a_{32}$  ile çarp

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,667 & -0,5 \\ 0 & 1 & -0,489 \\ 0 & 0 & 8,35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,75 \\ -0,017 \\ 2,35 \end{bmatrix}$$

### 6. İşlem

3.satırı  $a_{33}$ 'e böl

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,667 & -0,5 \\ 0 & 1 & -0,489 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,75 \\ -0,017 \\ 2,81 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,667 & -0,5 \\ 0 & 1 & -0,489 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,75 \\ -0,017 \\ 2,81 \end{bmatrix}$$

Kökleri geriye doğru hesaplayacak olursak:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[ c_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j \right] \quad \begin{array}{l} k=1,2,\dots,n \\ i=n-k+1 \end{array}$$

$$z = 0,281$$

$$y = 0,120$$

$$x = 1,81$$

## Gauss Jordan Yöntemi

- Gauss Eleminasyon yöntemine benzer
- Katsayılar matrisi üst üçgen matris haline getirildikten sonra bu yöntem ile devam edilir
- Bu yöntemde, üst üçgen matris **birim matris** haline getirilir

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

1.adım

$\alpha_{23}$  sıfırlayalım

2. satırdaki  $\alpha_{23}$ ,  $\alpha_{33}$  ile çarpılır ve  $\alpha_{23}$  'den çıkarılır. Aynı işlem C matrisi içinde yapılır

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} - \alpha_{33} \cdot \alpha_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 - \beta_3 \cdot \alpha_{23} \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$



## 2.adım

$\alpha_{13}$  sıfırlayalım

$\alpha_{13}$   $a_{33}$  ile çarpılır ve  $\alpha_{13}$ , den çıkarılır. Aynı işlem C matrisi içinde yapılır.

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} - a_{33}\alpha_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 - \beta_3\alpha_{13} \\ \gamma_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1^* \\ \gamma_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

## 3.adım

$\alpha_{12}$   $a_{22}$  ile çarpılır ve  $\alpha_{12}$  den çıkarılır.

Aynı işlem C matrisi içinde yapılır

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_{12} - a_{22}\alpha_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1^* - \gamma_2\alpha_{12} \\ \gamma_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

### Örnek

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,667 & -0,5 \\ 0 & 1 & -0,489 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,75 \\ -0,017 \\ 0,281 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,667 & -0,5 & -1 * (-0,5) \\ 0 & 1 & -0,489 & -1(-0,489) \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,75 - (-0,5) * 0,281 \\ -0,017 - (-0,489) * 0,281 \\ 0,281 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,667 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,89 \\ 0,12 \\ 0,281 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,667 - 0,667 * 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,89 - (0,12 * 0,667) \\ 0,12 \\ 0,281 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,81 \\ 0,12 \\ 0,281 \end{bmatrix}$$

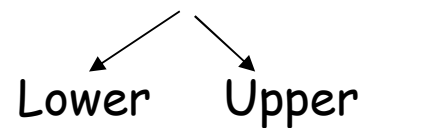
$z = 0,281$   
 $y = 0,120$   
 $x = 1,81$

# Dolaysız Yöntemler

## Yoğunlaştırılmış Yoketme Yöntemleri

### CHOLESKY Yöntemi

- Lineer Denklem Sistemlerini çözer
- Katsayılar matrisi biri alt üst üçgen diğeri üst üçgen olan iki ayrı matrise ayrıştırılır

$$[A][X] = [C]$$


Lower      Upper

$$\begin{aligned}[L][U][X] &= [C] \\ [U][X] &= [Y] \\ [L][Y] &= [C]\end{aligned}$$

$$[A] = [L][U]$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[L] ve [U] çarparsak

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{11}U_{12} & L_{11}U_{13} \\ L_{21} & L_{21}U_{12} + L_{22} & L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23} \\ L_{31} & L_{31}U_{12} + L_{32} & L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_{11} &= a_{11} \\ L_{11}U_{12} &= a_{12} \\ L_{11}U_{13} &= a_{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{12} &= a_{12}/a_{11} \\ U_{13} &= a_{13}/a_{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{21} &= a_{21} \\ L_{21}U_{12} + L_{22} &= a_{22} \\ L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23} &= a_{23} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{22} &= a_{22} - L_{21}U_{12} \\ U_{23} &= (a_{23} - a_{21}a_{13}/a_{11})/(a_{22} - a_{21}a_{12}/a_{11}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{31} &= a_{31} \\ L_{31}U_{12} + L_{32} &= a_{32} \\ L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33} &= a_{33} \end{aligned}$$

U ve L matrisinin elemanları bulunduktan sonra

$$\begin{aligned} [L][Y] &= [C] \quad Y \text{ çözülür} \\ [U][X] &= [Y] \quad X \text{ çözülür} \end{aligned}$$

### Örnek

$$3,6 x + 2,4 y - 1,8 z = 6,3$$

$$4,2 x - 5,8 y + 2,1 z = 7,5$$

$$0,8 x + 3,5 y + 6,5 z = 3,7$$

Denklem sistemini Cholesky yöntemi ile çözünüz.

$$\begin{bmatrix} 3,6 & 2,4 & -1,8 \\ 4,2 & -5,8 & 2,1 \\ 0,8 & 3,5 & 6,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_{11} = 3,6$$

$$L_{11}U_{12} = 2,4$$

$$L_{11}U_{13} = -1,8$$

$$U_{12} = 0,67$$

$$U_{13} = -0,5$$

$$L_{21} = 4,2$$

$$L_{21}U_{12} + L_{22} = -5,8$$

$$L_{22} = -8,6$$

$$L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23} = -2,1 - 8,6U_{23} = 2,1$$

$$U_{23} = 0,49$$

$$L_{31} = 0,8$$

$$L_{31}U_{12} + L_{32} = 3,5$$

$$L_{32} = 2,96$$

$$L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33} = -0,4 - 1,45 + L_{33} = 6,5$$

$$L_{33} = 8,4$$

$$[L][Y] = [C] \quad Y \text{ çözülür}$$

$$\begin{bmatrix} 3,6 & 0 & 0 \\ 4,2 & -8,6 & 0 \\ 0,8 & 2,96 & 8,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,3 \\ 7,5 \\ 3,7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 1,75 \\ y_2 &= -0,02 \\ y_3 &= 1,4 - 0,059 + 8,4y_3 = 3,7 \\ y_3 &= 0,28 \end{aligned}$$

$$[U][X] = [Y] \quad X \text{ çözülür}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,67 & -0,5 \\ 0 & 1 & -0,49 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,75 \\ -0,02 \\ 0,28 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = 0,28$$

$$\begin{aligned} x_2 - 0,49 \cdot 0,28 &= -0,02 \\ x_2 &= 0,12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 0,08 - 0,14 &= 1,75 \\ x_1 &= 1,81 \end{aligned}$$

## 1- Jacobi İterasyon Yöntemi

[illegible]

## 1. Adım

- A matrisinde diyagonelde yer alan katsayıların mutlak değerce çarpımı maksimum olmalıdır. Gerekiyorsa elementer satır değiştirme işlemleri yapılmalıdır
- Kısaca, her sütunda mutlak değerce en büyük sayı köşegene getirilmelidir

## 2. Adım

- Tüm denklemler yazıldıktan sonra birinci denklemden  $x_1$ , ikinci denklemden  $x_2$ , n. denklemden  $x_n$  çekilerek yalnız bırakılır

### 3. Adım

- Verilen ilk değerler ile iterasyon işlemi başlatır. Tüm bilinmeyenler için ardışık iki kök değeri arasındaki mutlak değerce fark verilen hatadan küçük oluncaya kadar işleme devam edilir
- Her iterasyon adımı, **bir önceki iterasyonun değerini kullanır**

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = c_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = c_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = c_3$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = c_m$$

$$x_1 = [c_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n)] / a_{11}$$

$$x_2 = [c_2 - (a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n)] / a_{22}$$

.....

$$x_n = [c_m - (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn-1}x_{n-1})] / a_{mn}$$



**Örnek** Verilmiş olan denklem takımını Jacobi İterasyon yöntemi ile çözünüz.  $x, y$  ve  $z$  için başlangıç değerleri 0'dır. Hata= 0,001

$$-x + 4y - 3z = -8$$

$$3x + y - 2z = 9$$

$$x - y + 4z = 1$$

**1.Adım**

$$-x + 4y - 3z = -8$$

$$3x + y - 2z = 9$$

$$x - y + 4z = 1$$



$$\begin{aligned} 3x + y - 2z &= 9 \\ -x + 4y - 3z &= -8 \\ x - y + 4z &= 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x &= (9 - y + 2z) / 3 \\ y &= (-8 + x + 3z) / 4 \\ z &= (1 - x + y) / 4 \end{aligned}$$

$$x = y = z = 1$$

İterasyon	x	$ \Delta x $	y	$ \Delta y $	z	$ \Delta z $
1	1	-	1	-	1	-
2	3,333	2,333	-1,000	2,000	0,250	0,750
3	3,5	0,167	-0,979	0,021	-0,833	1,083
4	2,771	0,729	-1,750	0,771	-0,870	0,036
5	3,003	0,233	-1,960	0,210	-0,880	0,010
6	3,006	0,063	-1,909	0,050	-0,991	0,111
7	2,976	0,090	-1,976	0,067	-0,994	0,003
8	2,996	0,020	-2,001	0,025	-0,988	0,006
9	3,008	0,012	-1,992	0,009	-0,999	0,011
10	2,998	0,011	-1,997	0,005	-1,000	0,001
11	2,999	0,001	-2,001	0,003	-0,999	0,001
12	3,001	0,002	-1,999	0,001	-1,000	0,001
13	3,00	0,001	-2,000	-0,001	-1,000	0,000

$$x = 3 \quad y = -2 \quad z = -1$$

## 1- Gauss Seidel İterasyon Yöntemi

[illegible]

- Jacobi İterasyon yöntemi gibi, linner denklem sistemlerinin çözümünde sayısal yöntemler yaklaşımıdır
- İterasyon adımına kadar her şet Jacobi İterasyon yöntemi ile aynıdır
- Her iterasyon adımında her değişken için bulunan en son değer kullanılır
- Jacobi İterasyon yöntemine göre daha hızlı sonuç alınır

**Örnek** Verilmiş olan denklem takımını Gauus Seidel İterasyon yöntemi ile çözünüz.  $x, y$  ve  $z$  için başlangıç değerleri 0'dır. Hata= 0,001

$$\begin{aligned} -x + 4y - 3z &= -8 \\ 3x + y - 2z &= 9 \\ x - y + 4z &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x + y - 2z &= 9 \\ -x + 4y - 3z &= -8 \\ x - y + 4z &= 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x &= (9 - y + 2z) / 3 \\ y &= (-8 + x + 3z) / 4 \\ z &= (1 - x + y) / 4 \end{aligned}$$

İterasyon	x	Δx	y	Δy	z	Δz
1	1	-	1	-	1	-
2	3,330	2,333	-0,417	1,417	-0,688	1,688
3	2,680	0,348	-1,845	1,428	-0,882	0,194
4	3,027	0,346	-1,904	0,059	-0,983	0,101
5	2,979	0,048	-1,992	0,088	-0,983	0,010
6	3,002	0,023	-1,994	0,002	-0,999	0,006
7	2,999	0,003	-2,000	0,006	-1,000	0,001
8	3,000	0,001	-2,000	0,000	-1,000	0,000
9	3,000	0,000	-2,000	0,000	-1,000	0,000

$$x = 3 \quad y = -2 \quad z = -1$$

## DOĞRUSAL OLMAYAN DENKLEM TAKIMLARININ ÇÖZÜMÜ

### İki Değişkenli Eşitlikler

$f(x,y) = 0$  ve  $g(x,y) = 0$  için öyle bir  $x$  ve  $y$  değeri bulmalıyız ki her iki denklemi de sağlamalıdır.

Tek değişkenli sistemlerde olduğu gibi Taylor serisini açalım

$$x = x_0 + h$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h/1! + f''(x_0) \cdot h^2/2! + \dots$$

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\Delta x}{1!} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\Delta y}{1!} + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \frac{\Delta y^2}{2!} + \dots$$

$$g(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = g(x_0, y_0) + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\Delta x}{1!} + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\Delta y}{1!} + \frac{\partial^2 g(x_0, y_0)}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial^2 g(x_0, y_0)}{\partial y^2} \frac{\Delta y^2}{2!} + \dots$$

İkinci mertebeden türev dahil sağdaki tüm terimler atılarak denklem 0 eşitlenir.

## İki Değişkenli Eşitlikler

$$f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y = 0$$

$$g(x_0, y_0) + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f(x_0, y_0) \\ -g(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y$$

$$|x_{n+1} - x_n|, |y_{n+1} - y_n| < \text{hata}$$

## Üç Değişkenli Eşitlikler

$f(x,y,z) = 0$ ,  $g(x,y,z) = 0$  ve  $v(x,y,z)$  için öyle bir  $x$ ,  $y$  ve  $z$  değeri bulmalıyız ki her üç denklemi de sağlamalıdır.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} & \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \\ \frac{\partial g(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} & \frac{\partial g(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} & \frac{\partial g(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \\ \frac{\partial v(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} & \frac{\partial v(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} & \frac{\partial v(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f(x_0, y_0, z_0) \\ -g(x_0, y_0, z_0) \\ -v(x_0, y_0, z_0) \end{bmatrix}$$

## Örnek

$$\begin{aligned}x^2 + y - 3 &= 0 \\x + y^2 - 5 &= 0\end{aligned}$$

$X_0 = 0,7$  ve  $y_0 = 1,7$  alarak 0,08 hata ile doğrusal olmayan denklem takımını çözünüz.

$$\begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x^2 + y - 3 \\ x + y^2 - 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1,4 & 1 \\ 1 & 3,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -0,81 \\ -1,41 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Delta x &= 0,31 & \Delta y &= 0,38 \\ x &= 1,01 & y &= 2,08\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2,02 & 1 \\ 1 & 4,16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -0,10 \\ -0,34 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Delta x &= -0,01 & \Delta y &= -0,08 \\ x &= 1 & y &= 2\end{aligned}$$