PARAMETRİK DENKLEMLER ve KUTUPSAL KOORDİNATLAR

PARAMETRİK DENKLEMLER

Eğer x ve y, $x=f(t)$ ve $y=g(t)$ $(t\in I)$ şeklinde tanımlanmış fonksiyonlar ise o zaman bu denklemler ile tanımlanan $(x,y)=(f(t),g(t))$ noktalar kümesi bir parametrik eğridir. Bu denklemlere eğrinin parametrik denklemleri denir.

t: eğri için bir parametre

I: parametre aralığı

Eğer $I=[a,b]$, yani $a\leq t\leq b$ ise eğrinin başlangıç noktası $(f(a),g(a))$, bitiş noktası $(f(b),g(b))$ olur.

Aralıkla birlikte, denklemlere eğrinin bir parametrizasyonu denir.

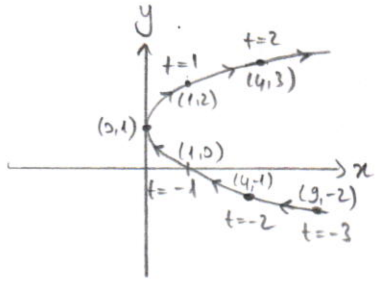
xy-düzleminde hareket eden bir parçacığın bıraktığı iz, her zaman bir fonksiyonun veya tek bir denklemin grafiği değildir.

Örnek: $x=t^2$, $y=t+1$ $-\infty<t<\infty$ eğrisinin denklemini x,y cinsinden bulup grafiğini çiziniz.

$y=t+1 \Rightarrow t=y-1 \Rightarrow x=t^2=(y-1)^2$

$t\to-\infty \Rightarrow x\to\infty,\ y\to-\infty$

$t\to\infty \Rightarrow x\to\infty,\ y\to\infty$



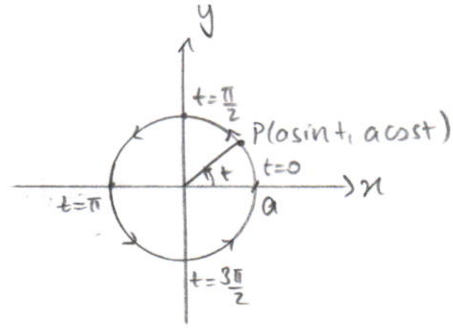
t	x	y
-3	9	-2
-2	4	-1
-1	1	0
0	0	1
1	1	2
2	4	3

Örnek: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $0\leq t\leq 2\pi$ parametrik denk. grafiğini çiziniz.

$x^2+y^2=a^2\cos^2t+a^2\sin^2t=a^2$: a yarıçaplı merkezil çember

$t=0 \Rightarrow x=a,\ y=0$

$t=2\pi \Rightarrow x=a,\ y=0$



$x=a\cos t$ ve $y=a\sin t$ denklemleri $x^2+y^2=a^2$ çemberi üzerindeki hareketi tanımlar.

Örnek: $x = 1+2\cos t$, $y = 2\sin t$ parametrizasyonu ile verilen eğriyi bulun.

$$x = 1+2\cos t \Rightarrow \cos t = \frac{x-1}{2}$$

$$y = 2\sin t \Rightarrow \sin t = \frac{y}{2}$$

$$\cos^2 t + \sin^2 t = \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 4$ çemberi

Parametrik Eğrilerde Hesaplama

Teğetler ve Normaller

f ve g fonksiyonları t noktasında türevlenebilir ise $x=f(t)$ ve $y=g(t)$ eğrisi de t noktasında türevlenebilirdir. Türevlenebilir parametrik eğri üzerindeki bir noktada y de x'in türevlenebilir fonksiyonu olduğunda $\frac{dy}{dx}$ ve $\frac{d^2y}{dx^2}$ için parametrik formüller:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \qquad (f'(t) \neq 0)$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Örnek: $x = \sec t$, $y = \tan t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ eğrisinin $(\sqrt{2}, 1)$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.

$y=f(x)$ in (a,b) noktasındaki teğet denklemi: $y-b = f'(a)(x-a)$

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{2} &= \sec t \\ 1 &= \tan t \end{aligned}\right\} \; t = \frac{\pi}{4}$$

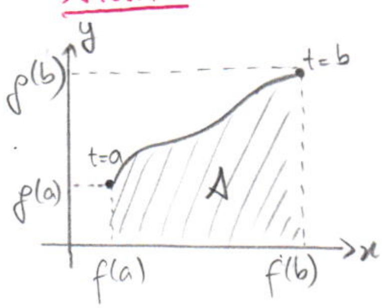
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sec^2 t}{\sec t \cdot \tan t} = \frac{\sec t}{\tan t} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sec(\pi/4)}{\tan(\pi/4)} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

Teğet denklemi: $y-1 = \sqrt{2}(x-\sqrt{2}) \Rightarrow y = \sqrt{2}x - 1$

Örnek: $x=t-t^2$, $y=t-t^3 \Rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2}$ türevini t cinsinden bulun.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-3t^2}{1-2t} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{-6t(1-2t)+2(1-3t^2)}{(1-2t)^2}}{1-2t}=\frac{6t^2-6t+2}{(1-2t)^3}$$

Alan



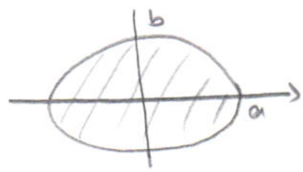
$x=f(t)$, $y=g(t)$, $a\le t\le b$ eğrisinin alanı:

$$A=\int_a^b g(t)\cdot f'(t)\,dt$$ ile bulunur.

Not: (a,b) aralığında $g(t)\cdot f'(t)<0$ ise $A=-\int_a^b g(t)\cdot f'(t)\,dt$ dir.

Örnek: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $0\le t\le 2\pi$ elipsinin alanını bulunuz.

$\frac{x}{a}=\cos t$, $\frac{y}{b}=\sin t \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



$x=f(t)=a\cos t \Rightarrow f'(t)=-a\sin t$

$y=g(t)=b\sin t$

$$\frac{A}{4}=-\int_0^{\pi/2} b\sin t(-a\sin t)\,dt=\int_0^{\pi/2} ab\sin^2 t\,dt=ab\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt=ab\left[\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\Big|_0^{\pi/2}\right]=\frac{ab\pi}{4}$$

$\Rightarrow A=ab\pi$

Parametrik Olarak Tanımlı Eğrinin Uzunluğu

Eğer C eğrisi, $x=f(t)$ ve $y=g(t)$, $a\le t\le b$ ile parametrik olarak tanımlanıyorsa ve $t=a$'dan $t=b$'ye artarken C eğrisi üzerinden sadece bir kez geçiliyorsa C nin uzunluğu $L=\int_a^b \sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2}\,dt$ dir.

Örnek: $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, $0\le t\le 2\pi$ çemberinin uzunluğunu hesaplayın.

$$\left.\begin{aligned} f'(t)=-r\sin t &\Rightarrow (f'(t))^2=r^2\sin^2 t\\ g'(t)=r\cos t &\Rightarrow (g'(t))^2=r^2\cos^2 t\end{aligned}\right\}\ (f'(t))^2+(g'(t))^2=r^2 \Rightarrow L=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2}\,dt=rt\Big|_0^{2\pi}=2\pi r$$