Pozitif Terimli Seriler için Yakınsaklık Testleri

1) İntegral Testi

İntegral testi, pozitif terimli bir serinin ona benzer şekilde davranan bir improper integralle karşılaştırmak suretiyle, yakınsak veya ıraksak olup olmadığını belirlememize yardımcı olur.

Teorem: f fonksiyonu, bir pozitif N tamsayısı için, $[N,\infty)$ aralığında pozitif, sürekli, azalan ve $a_n = f(n)$ olsun. O zaman, $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ serisi ile $\int_N^{\infty} f(x)dx$ integrali aynı karakterlidir. (Her ikisi de ıraksar veya her ikisi de yakınsar)

Not: Yukarıdaki teorem, verilen koşullar altında sadece seri ile integralin aynı karakterde olduğunu ifade eder, serinin toplamının integralin değerine eşit olduğunu söylemez.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ olsun. f fonksiyonu $[1,\infty)$ aralığında pozitif ve süreklidir.

$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} < 0$ olduğundan f, bu aralıkta azalandır.

Dolayısıyla integral testi kullanılabilir.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R\to\infty} \int_1^{R} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R\to\infty} \arctan x \Big|_1^R = \lim_{R\to\infty} \arctan R - \arctan 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$\Rightarrow$ Improper integral yakınsak olduğundan seri de yakınsaktır.

Harmonik Seri

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisine harmonik seri denir.

(A) Harmonik seri $+\infty$'a ıraksar. Ancak bu sonuca n. terim testi ile ulaşamayız, integral testi kullanmalıyız:

$f(x) = \frac{1}{x}$ $[1,\infty)$ da pozitif, sürekli ve azalandır.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^{R} \frac{dx}{x} = \lim_{R\to\infty} \ln x \Big|_1^R = \lim_{R\to\infty} (\ln R - \ln 1) = \infty \Rightarrow \text{integral ıraksak}$$

$\Rightarrow$ Seri ıraksak

p-Serisi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots$$ serisine p-serisi denir.

(*) p-serisi $p>1$ için yakınsak, $p\leq 1$ için ıraksaktır. ($+\infty$'a ıraksar)

$p>1$ olsun. $f(x) = \frac{1}{x^p}$ fonksiyonu $[1,\infty)$ da pozitif, sürekli ve azalandır.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}dx = \int_1^{\infty} x^{-p}dx = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^R\right] = \frac{1}{1-p}\lim_{R\to\infty}\Big(\overbrace{\frac{1}{\underbrace{R^{p-1}}_{+\infty\ (p-1>0)}}}^{=0} - 1\Big) = \frac{1}{p-1}$$

olduğundan integral testine göre seri yakınsaktır. (Seri toplamı $\frac{1}{p-1}$ değildir!)

$p\leq 1$ olsun. O zaman $1-p>0$ dır. O halde,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}dx = \frac{1}{1-p}\lim_{R\to\infty}(R^{1-p}-1) = \infty$$

olduğundan integral testine göre seri ıraksaktır.

2) Mukayese Testi

$\sum a_n$ ve $\sum b_n$, terimleri negatif olmayan iki seri olsun.

a) Eğer her n için $a_n \leq b_n$ ve $\sum b_n$ serisi yakınsak ise $\sum a_n$ serisi de yakınsaktır.

b) Eğer her n için $a_n \geq b_n$ ve $\sum b_n$ serisi ıraksak ise $\sum a_n$ serisi de ıraksaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+1}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\frac{3n+1}{n^3+1} = \frac{3n}{n^3+1} + \frac{1}{n^3+1} < \frac{3n}{n^3} + \frac{1}{n^3} < \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{4}{n^2}$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+1} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$ p-serisi olup $p=2>1$ olduğundan yakınsaktır. Mukayese testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+1}$ yakınsaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n-1}$ serisinin karakterini belirleyin.

$\frac{5}{5n-1} = \frac{1}{n-\frac{1}{5}} > \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n-1} > \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{harmonik seri ıraksak}} \Rightarrow$ Mukayese testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n-1}$ ıraksaktır.

Örnek: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ serisinin karakterini belirleyin.

$\ln n < n \Rightarrow \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} > \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{harmonik seri ıraksak}} \Rightarrow$ Mukayese testine göre seri ıraksaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n \sqrt{n}}$ serisinin karakterini belirleyin.

1. yol $e^n > n \Rightarrow \frac{1}{e^n} < \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{e^n\sqrt{n}} < \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n\sqrt{n}} < \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}}_{p=\frac{3}{2}>1 \text{ yakınsak}} \Rightarrow$ Mukayese testine göre seri yakınsak

2. yol $\frac{1}{e^n\sqrt{n}} < \frac{1}{e^n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n\sqrt{n}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e}\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}}_{\text{geometrik seri yakınsak}}$, $r = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow$ Mukayese testine göre seri yakınsak

3) Limit Testi

$\sum a_n$ ve $\sum b_n$ pozitif terimli iki seri olmak üzere $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ olsun.

a) $0 < L < \infty$ (L sonlu) ise her iki seri de aynı karakterdedir.

b) $L = 0$ ve $\sum b_n$ yakınsak ise $\sum a_n$ yakınsaktır

c) $L = \infty$ ve $\sum b_n$ ıraksak ise $\sum b_n$ ıraksaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ serisinin karakterini belirleyin.

$\frac{1}{1+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}} < \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}}_{\text{ıraksak}}$ $p = \frac{1}{2} > 1 \Rightarrow$ Mukayese testi sonuç vermez.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} = 1 \neq 0, \infty$$

Limit testine göre iki seri aynı karakterde olup $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ıraksak olduğundan

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ serisi de ıraksaktır.

Örnek: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^4-16}}{n^2\sqrt{n+1}}$ serisinin karakterini belirleyin.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\sqrt[3]{n^4-16}}{n^2\sqrt{n+1}} \begin{matrix}\to \frac{4}{3} \\ \to \frac{5}{2}\end{matrix}}{\dfrac{1}{n^{7/6}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{7/6}\sqrt[3]{n^4-16}}{n^2\sqrt{n+1}} = 1 \neq 0,\infty$$

$$\frac{5}{2}-\frac{4}{3}=\frac{7}{6}$$

Limit testine göre iki seri aynı karakterdedir.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{7/6}}$ $\quad p=\dfrac{7}{6}>1$ olduğundan yakınsaktır, dolayısıyla seri yakınsaktır.

Örnek: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3+2n+3}{n^4+5n^2}$ karakterini belirleyin.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n^3+2n+3}{n^4+5n^2}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4+2n^2+3n}{n^4+5n^2} = 1 \neq 0,\infty$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ harmonik seri olup ıraksaktır, limit testinden seri ıraksaktır.

Örnek: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin^3\left(\dfrac{1}{n}\right)$ serisinin karakterini belirleyin.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^3} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^3 = 1 \neq 0,\infty$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ $\quad p=3>1$ olduğundan yakınsaktır, limit testinden seri yakınsaktır.

Örnek: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{e^n\sqrt{n}}$ serisinin karakterini belirleyin.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{e^n\sqrt{n}}}{\dfrac{1}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e}\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}}_{\text{geometrik seri}} \quad r=\frac{1}{e}<1 \text{ yakınsaktır.}$$

Limit testinden, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{e^n}$ yakınsak olduğundan seri de yakınsaktır.

Not: Seçilen seri $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ olsaydı $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1/e^n\sqrt{n}}{\underbrace{1/\sqrt{n}}_{\text{ıraksak}}} = \lim\limits_{n\to\infty} 1/e^n = 0 \Rightarrow$ limit testi sonuç vermezdi.

4) Oran Testi

$\sum a_n$ pozitif terimli bir seri ve $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$ olsun.

a) $L<1$ ise seri yakınsaktır.

b) $L>1$ ise seri ıraksaktır.

c) $L=1$ ise test sonuç vermez.

Örnek: Aşağıdaki serilerin karakterlerini belirleyin.

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}+5}{3^{n+1}}}{\frac{2^n+5}{3^n}} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty} \frac{2+5.\overset{\to 0}{\cancel{2^{-n}}}}{1+5.\underset{0}{\cancel{2^{-n}}}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1} = \frac{2}{3} < 1$

Oran testine göre seri yakınsaktır.

__Not:__ Bu durum serinin toplamının $\frac{2}{3}$ olduğu anlamına gelmez.

Toplamını bulalım:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} + \frac{5}{1-\frac{1}{3}} = \frac{21}{2}$$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{99^n}{n!} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{99^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{99^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{99}{n+1} = 0 < 1$

Oran testine göre seri yakınsaktır.

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} 2.\frac{n}{n+1} = 2 > 1$

Oran testine göre seri ıraksaktır.

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n\cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)}.\cancel{n!}}\cdot\frac{\cancel{n!}}{n^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1$

Oran testine göre seri ıraksaktır.

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{n^2}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\,\frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{1}{3}.1 = \frac{1}{3} < 1$

Oran testine göre yakınsaktır.

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}{(n+1)^2 \cancel{(n!)^2}} \cdot \frac{\cancel{(n!)^2}}{\cancel{(2n)!}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4 > 1 \Rightarrow$ Oran testine göre yakınsak

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n! n!}{(2n)!} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4^{n+1}(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)!}}{\frac{4^n n! n!}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{4^n} \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{(n+1)^2} \cancel{(n!)^2}}{\underbrace{(2n+2)}_{2(n+1)}(2n+1)\cancel{(2n)!}} \cdot \frac{\cancel{(2n)!}}{\cancel{4^n (n!)^2}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{2n+1} = 1 \Rightarrow$ Test sonuç vermez.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(n+1)}{2n+1} > 1$ olduğundan a_{n+1} her zaman a_n'den büyüktür. Dolayısıyla serinin bütün terimleri $a_1 = 2$'den büyüktür. Yani dizinin n. terimi (genel terimi) $n \to \infty$ iken 0'a yakınsamaz. n. terim testinden seri ıraksaktır.

5) Kök Testi

$\sum a_n$ pozitif terimli bir seri ve $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ olsun.

a) $L < 1$ ise seri yakınsaktır.

b) $L > 1$ ise seri ıraksaktır.

c) $L = 1$ ise test sonuç vermez.

Örnek: Aşağıdaki serilerin karakterlerini belirleyin.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2} = \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1^2}{2} < 1$

Kök testine göre seri yakınsaktır.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\overset{\to 1}{\frac{n+1}{n}}}}{\underset{\infty}{n}} = 0 < 1$

Kök testine göre seri yakınsaktır.

③ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1$

Kök testinden seri yakınsaktır.

④ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^3} = \frac{2}{1^3} > 1$

Kök testinden seri ıraksaktır.

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n+5}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2^n(1+5.2^{-n})}}{3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\sqrt[n]{1+\frac{5}{2^n}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\cdot\Big(1+\underbrace{\frac{5}{2^n}}_{0}\Big)^{\overset{\to 0}{1/n}} = \frac{2}{3} < 1$

Kök testinden seri yakınsaktır.

6) n. terim Testi

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ise $\sum a_n$ serisi ıraksaktır.

Örnek: Aşağıdaki serilerin karakterlerini belirleyin.

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^2+5}$ (pay ve paydanın derecesi eşit, limit testi uygulanamaz)

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2+5} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ n. terim testinden seri ıraksak

② $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} 1-\frac{1}{n} = 1 \Rightarrow$ kök testi sonuç vermez.

$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e} \neq 0 \Rightarrow$ n. terim testinden seri ıraksaktır.

Hatırlatma: $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$

Not: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ise $\sum a_n$ yakınsak da olabilir, ıraksak da olabilir.

Alterne Seriler

Bir serinin terimleri sırasıyla bir pozitif bir negatif değerler alıyorsa böyle serilere alterne seri denir. Genel olarak, bir alterne seri $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $a_n > 0$ olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

şeklindedir.

Alterne seri testi: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ serisi için,

1) $a_n > 0 \quad (\forall n = 1, 2, 3, \dots)$

2) $a_{n+1} \leq a_n \quad (\forall n = 1, 2, 3, \dots)$

3) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

şartları sağlanıyorsa alterne seri yakınsaktır, aksi halde ıraksaktır

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2+1}$ serisinin yakınsaklığını inceleyin.

1) $a_n = \frac{1}{n^2+1} > 0 \quad (\forall n = 1, 2, 3, \dots)$

2) $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2+1} < \frac{1}{n^2+1} = a_n$

3) $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$

şartları sağlandığından alterne seri testine göre yakınsaktır.

Mutlak yakınsaklık: Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ serisi yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisine mutlak yakınsaktır denir.

* Mutlak yakınsak bir seri yakınsaktır, ancak tersi doğru değildir.

Şartlı yakınsaklık: Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ancak mutlak yakınsak değilse bu seriye şartlı yakınsaktır denir.

* Şartlı yakınsaklık için alterne seri testi kullanılır.

Alterne harmonik seri: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ serisine alterne harmonik seri denir.

* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ alterne harmonik serisinin yakınsaklığını inceleyip, türünü araştıralım.

① $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ serisi harmonik seridir ve ıraksaktır. O halde $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ mutlak yakınsak değildir.

② Şartlı yakınsak olup olmadığını anlamak için alterne seri testi uygulayalım:

a) $a_n = \frac{1}{n} > 0 \quad (\forall n = 1, 2, \ldots)$

b) $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow a_{n+1} < a_n$

c) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ serisi yakınsaktır. Ancak mutlak yakınsak olmadığından şartlı yakınsaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos n\pi}{2^n}$ serisinin yakınsaklığını inceleyin.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos n\pi}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n}{2^n}$$

Seri mutlak yakınsak mı? Yani, $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{n}{2^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ yakınsak mı?

Kök testinden, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$ olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ yakınsaktır.

O halde, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}$ serisi mutlak yakınsaktır.

Örnek: $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2\ln^2 n}$ serisinin yakınsaklık türünü belirleyin.

⊗ Serinin içinde p-serisi saklı ise limit veya mukayese kullan.

Mutlak yakınsak mı? Yani $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln^2 n}$ yakınsak mı?

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ($p=2>1 \Rightarrow$ yakınsak) seçerek limit testini kullanalım.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2\ln^2 n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln^2 n} = 0$$

$\Rightarrow$ Limit testine göre $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ yakınsak $(p=2>1)$ olduğundan $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln^2 n}$ serisi de yakınsaktır.

$\Rightarrow$ O halde, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2\ln^2 n}$ serisi mutlak yakınsaktır.

Örnek: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\ln n}$ serisinin mutlak/şartlı yakınsak olup olmadığını inceleyin, yakınsaklık türünü belirleyin.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$$

① $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ mutlak yakınsak mı?

Mukayese testini kullanalım:

$\ln n < n \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n} \Rightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{harmonik seri ıraksak}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \Rightarrow$ Mukayese testinden $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ ıraksaktır. O halde, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ mutlak yakınsak değildir.

② $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ şartlı yakınsak mı?

a) $a_n = \frac{1}{\ln n} > 0$

b) $\frac{1}{\ln(n+1)} < \frac{1}{\ln n} \Rightarrow a_{n+1} < a_n$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$

Alterne seri testine göre seri yakınsaktır. Ancak mutlak yakınsak olmadığından şartlı yakınsaktır.

Serilerde Terimlerin Yeniden Düzenlenmesi:

Teorem: Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi mutlak yakınsak bir seri ise ve $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ dizisi $\{a_n\}$ dizisinin herhangi bir sıralamada yeniden yazımı ise o zaman $\sum b_n$ serisi mutlak yakınsaktır ve $\sum a_n$ serisinin toplamına yakınsar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

* Eğer şartlı yakınsak bir serinin terimlerini yer değiştirirsek farklı sonuçlar elde ederiz.

1) Eğer bir seri mutlak yakınsak ise, serinin pozitif terimleri ile oluşturulan alt seri ile negatif terimlerden oluşturulan alt serinin ikisi de yakınsar.

2) Eğer bir seri şartlı yakınsak ise, negatif terimli alt seri $-\infty$'a, pozitif terimli alt seri $+\infty$'a ıraksar.

* Eğer bir seri şartlı yakınsak ise o zaman serinin terimleri $\mp\infty$'a ıraksayacak veya bir $L \in \mathbb{R}$ sayısına yakınsayacak şekilde yeniden düzenlenebilir.

Testlerin Özeti:

1) Geometrik seri:

$|r|<1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ geometrik serisi yakınsar, değilse ıraksar.

2) p-serisi:

$p>1$ ise $\sum \frac{1}{n^p}$ serisi yakınsar, değilse ıraksar.

3) n. terim testi: $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ise $\sum a_n$ serisi ıraksaktır.

4) Pozitif terimli seriler: İntegral testi, oran testi, kök testi, mukayese testi, limit testi kullanılarak bu serilerin yakınsaklığı incelenir. Mukayese ve limit testleri için yakınsaklığı / ıraksaklığı bilinen (geometrik seri, harmonik seri, p-serisi gibi) seriler seçilir.

5) Alterne seriler: Alterne seri testi koşullarını sağlayan seri yakınsaktır. Bu yakınsaklık iki tür olabilir.

a) Mutlak yakınsaklık: $\sum |a_n|$ yakınsak ise $\sum a_n$ mutlak yakınsaktır

b) Şartlı yakınsaklık: $\sum a_n$ yakınsak ancak mutlak yakınsak değilse şartlı yakınsaktır, denir.

Pozitif Terimli Seri
- Yakınsak
- Iraksak

Testleri kullan
- integral
- Oran
- Kök
- Mukayese
- Limit
- n. terim

Alterne Seri
- Yakınsak
  - Mutlak yak.
  - Şartlı yak.
- Iraksak

Alterne seri testini kullan