MAT.I
1. Uygulama

(*) $\lim_{x\to\infty} x^2.\left(1-\cos\frac{2}{x}\right)=?$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2.\left(1-\cos\frac{2}{x}\right).\left(1+\cos\frac{2}{x}\right)}{1+\cos\frac{2}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2.\left(1-\cos^2\frac{2}{x}\right)}{1+\cos\frac{2}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{1-\cos^2\frac{2}{x}}^{\sin^2\frac{2}{x}}}{\frac{1}{x^2}}.\frac{1}{1+\cos\frac{2}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\underbrace{\left(\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}\right)^2}_{1}.4.\frac{1}{\underbrace{1+\cos\frac{2}{x}}_{2}}=\underline{\underline{2}}$$

(*) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}=?$

$2x-\pi=u$ olsun. $x\to\frac{\pi}{2}$ iken $u\to 0$ olur.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}=\lim_{u\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{u}{2}\right)}{u}=\lim_{u\to 0}-\frac{\sin\frac{u}{2}}{\frac{u}{2}.2}\to 1=\underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

(*) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=?$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin x.\cos x}{x^3.\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x.(1-\cos x)}{x^3.\cos x}$$

$(1+\cos x)$

$$=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1}.\underbrace{\frac{\overbrace{1-\cos^2 x}^{\sin^2 x}}{x^2}}_{1}.\frac{1}{\underbrace{\cos x.(1+\cos x)}_{2}}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$(*)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+\operatorname{Sin}x}-\sqrt{1+\operatorname{Cos}x}}{\operatorname{Tan}x} = ?$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{2+\operatorname{Sin}x}-\sqrt{1+\operatorname{Cos}x}\right)\left(\sqrt{2+\operatorname{Sin}x}+\sqrt{1+\operatorname{Cos}x}\right)}{\operatorname{Tan}x.\left(\sqrt{2+\operatorname{Sin}x}+\sqrt{1+\operatorname{Cos}x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+\operatorname{Sin}x-\operatorname{Cos}x}{\frac{\operatorname{Sin}x}{\operatorname{Cos}x}\cdot\left(\sqrt{2+\operatorname{Sin}x}+\sqrt{1+\operatorname{Cos}x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\operatorname{Cos}x}{\operatorname{Sin}x}\cdot\frac{\operatorname{Cos}x}{\sqrt{2+\operatorname{Sin}x}+\sqrt{1+\operatorname{Cos}x}} + \overbrace{\frac{\operatorname{Cos}x}{\sqrt{2+\operatorname{Sin}x}+\sqrt{1+\operatorname{Cos}x}}}^{\frac{1}{2\sqrt{2}}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} x\ \underbrace{\frac{1-\operatorname{Cos}x}{x}}_{0}\cdot\underbrace{\frac{x}{\operatorname{Sin}x}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{\operatorname{Cos}x}{\sqrt{2+\operatorname{Sin}x}+\sqrt{1+\operatorname{Cos}x}}}_{\frac{1}{2\sqrt{2}}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$(*)\quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\operatorname{Cos}x}{\operatorname{Sin}|x|.\operatorname{Tan}x} = ?$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\operatorname{Cos}x}{\operatorname{Sin}x.\underbrace{\operatorname{Tan}x}_{\frac{\operatorname{Sin}x}{\operatorname{Cos}x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1-\cancel{\operatorname{Cos}x}).\operatorname{Cos}x}{\underbrace{\operatorname{Sin}^2x}_{\underbrace{1-\operatorname{Cos}^2x}_{(1-\cancel{\operatorname{Cos}x})(1+\operatorname{Cos}x)}}} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Cos}x}{1+\operatorname{Cos}x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1-\operatorname{Cos}x}{-\operatorname{Sin}x.\operatorname{Tan}x} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{(1-\cancel{\operatorname{Cos}x}).\operatorname{Cos}x}{\underbrace{\operatorname{Sin}^2x}_{\underbrace{1-\operatorname{Cos}^2x}_{(1-\cancel{\operatorname{Cos}x})(1+\operatorname{Cos}x)}}} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{\operatorname{Cos}x}{1+\operatorname{Cos}x} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\operatorname{Cos}x}{\operatorname{Sin}|x|.\operatorname{Tan}x} \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\operatorname{Cos}x}{\operatorname{Sin}|x|.\operatorname{Tan}x} \Rightarrow \text{limit mevcut değil}$$

2015 - 1. vize sorusu:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = \begin{cases} x & , x \leq -2 \\ \dfrac{1}{x+2} & , -2 < x \leq 1 \\ \dfrac{\sin(1-\sqrt{x})}{x-1} & , x > 1 \end{cases}$

şeklinde tanımlanıyor.

a) $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = ?$ $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = ?$

b) $x=-2$ ve $x=1$ deki süreksizlik tipleri?

$\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{1}{x+2} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -2^-} x = -2$ → $\nexists$ limit mevcut değil. → $x=-2$ de sonsuzlesas süreksizlik var

$\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sin(1-\sqrt{x})}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sin(1-\sqrt{x})}{\underbrace{-(1-\sqrt{x})}_{1}(1+\sqrt{x})} = -\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{3}$ → $\nexists$ limit yok → $x=1$'de sıçramalı süreksiz

---

2016 - 1. vize sorusu

(*) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin 2x}{x^2 - \pi x} = ?$

$x - \pi = t$ olsun. $x \to \pi$ ise $t \to 0$ olur.

$\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin 2x}{x(x-\pi)} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin(2\pi + 2t)}{(\pi + t) . t} = \lim\limits_{t \to 0} \underbrace{\dfrac{\sin 2t}{2t}}_{1} . \dfrac{2}{\pi + t} = \dfrac{2}{\pi}$

2016-1. vize sorusu

$f(x)=\dfrac{3.|x-2|}{x^2.(4-x^2)}$ fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaları ve süreksizlik tiplerini inceleyiniz.

$x^2.(4-x^2)=0 \rightarrow x=0$, $x=2$, $x=-2$ de süreksiz.

x=0 için

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{3.(\cancel{2-x})}{x^2.(\cancel{2-x})(2+x)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{3.(\cancel{2-x})}{x^2.(\cancel{2-x})(2+x)}=+\infty \Rightarrow$$

x=0 da sonsuz (esas) süreksiz

x=-2 için

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{3.(\cancel{2-x})}{x^2.(\cancel{2-x})(2+x)}=+\infty \qquad \lim_{x\to -2^-}\frac{3.(\cancel{2-x})}{x^2.(\cancel{2-x})(2+x)}=-\infty$$

$\Downarrow$

x=-2 de sonsuz (esas) süreksiz

x=2 için

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{3.\overset{-1}{(\cancel{x-2})}}{x^2(\cancel{2-x})(2+x)}=-\frac{3}{16} \qquad \lim_{x\to 2^-}\frac{3.(\cancel{2-x})}{x^2.(\cancel{2-x})(2+x)}=+\frac{3}{16}$$

$\neq$ x=2 de sıçramalı süreksiz

⊛ 2016 - Bütünleme sorusu:

$f_{\alpha,\beta}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $(\alpha\geq 0,\ \beta\in\mathbb{R})$ fonksiyonu

$$f_{\alpha,\beta}=\begin{cases} x^\alpha.\sin x^\beta & , x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}$$

olsun. Buna göre $f_{0,-1}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$'de sürekli mi?

$f_{0,-1} \Rightarrow \alpha=0 \quad \beta=-1$

$$f_{0,-1}=\begin{cases} \sin\frac{1}{x} & , x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ limiti mevcut olmadığından $f_{0,-1}$ $\mathbb{R}$'de sürekli değildir.

2016 - yaz okulu 1. vize soruları:

(*)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{x-\sqrt{x}} = ?$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}^{\to 0}\right)}{\cancel{x}\left(1-\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{0}\right)} = \boxed{0}$$

(*) $f(x)=\dfrac{x^2}{1-\cos x}$ ile verilen $f(x)$ fonksiyonunun $x=0$ daki süreksizlik tipini belirleyiniz ve sürekli olması için gerekeni yapınız.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\underset{(1+\cos x)}{1-\cos x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2.(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2.(1+\cos x)}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \left(\underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{1}\right)^2 . \underbrace{(1+\cos x)}_{2}$$

$$= \boxed{2}$$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{1-\cos x}, & x\neq 0 \\ 2, & x=0 \end{cases}$$

olarak tanımlarsak fonk. $x=0$ da sürekli olur.

2016 - Mazeret sınavı sorusu:

$f(x) = \dfrac{2.|x-1|}{x^2-x^3}$ fonksiyonunun sürekliliğini inceleyiniz.

Eğer varsa süreksizlik noktalarını sınıflandırın.

$x^2.(1-x)=0 \Rightarrow x=0 \quad x=1$ de süreksiz.

x=0 için

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2.\cancel{(1-x)}}{x^2.\cancel{(1-x)}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2.\cancel{(1-x)}}{x^2.\cancel{(1-x)}} = +\infty \rightarrow x=0 \text{ da}$$

sonsuz (esas) süreksiz

x=1 için

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2.\cancel{(1-x)}}{x^2\cancel{(1-x)}} = 2 \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{2.\overset{-1}{\cancel{(x-1)}}}{x^2.\cancel{(1-x)}} = -2$$

$\neq \Rightarrow x=1$ de sıçramalı süreksiz

$\circledast$ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{Sin}x - 1}{2x-\pi} = ?$

$2x-\pi = u$ olsun. $x \to \frac{\pi}{2}$ ise $u\to 0$ olur.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{Sin}x - 1}{2x-\pi} = \lim_{u\to 0} \frac{\overbrace{\operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{u}{2}\right)}^{\operatorname{Cos}\frac{u}{2}} - 1}{u} = \lim_{u\to 0} \underbrace{\frac{\operatorname{Cos}\frac{u}{2} - 1}{\frac{u}{2}\cdot 2}}_{0} = \underline{\underline{0}}$$

$\circledast$ $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-\operatorname{Sin}2x}}{\operatorname{Tan}x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\sqrt{1-\operatorname{Sin}2x})(1+\sqrt{1-\operatorname{Sin}2x})}{\operatorname{Tan}x.(1+\sqrt{1-\operatorname{Sin}2x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1}-\cancel{1}+\operatorname{Sin}2x}{\operatorname{Tan}x.(1+\sqrt{1-\operatorname{Sin}2x})} = \lim_{x\to 0} \frac{2.\cancel{\operatorname{Sin}x}.\overbrace{\operatorname{Cos}x}^{1}}{\dfrac{\cancel{\operatorname{Sin}x}}{\underbrace{\operatorname{Cos}x}_{1}}.(1+\underbrace{\sqrt{1-\operatorname{Sin}2x}}_{1})}$$

$$= \frac{2}{2} = \underline{\underline{1}}$$

$\circledast$ $\lim_{x\to 0} x^2.\operatorname{Cos}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ limitini sıkıştırma teoremini kullanarak bulunuz.

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $-1 \leq \operatorname{Cos}x \leq 1$ dir. O halde,

$x \neq 0$ için $-1 \leq \operatorname{Cos}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} \leq 1$ dir.

$$\Downarrow$$

$$-x^2 \leq x^2.\operatorname{Cos}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \leq x^2 \quad \text{dir.} \quad (1)$$

$$\lim_{x\to 0}(-x^2) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0 \quad (2)$$

(1) ve (2) den Sıkıştırma Teo. göre $\lim_{x\to 0} x^2.\operatorname{Cos}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$ dır.

$\circledast$ $f(x)=\dfrac{\sqrt{|2x+5|-3}}{x^2+1}$ Tanım Kümesi?

$|2x+5|-3 \geq 0$ olmalı.

$|2x+5| \geq 3 \to 2x+5 \geq 3 \to x \geq -1$

$\to 2x+5 \leq -3 \to x \leq -4$

$D(f)=(-\infty,-4] \cup [-1,\infty)$

$\circledast$ $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$ Tanım kümesi?

$|x|-x>0$ olmalı $\Rightarrow |x|>x \Rightarrow x<0 \Rightarrow D(f)=(-\infty,0)$

$\circledast$ $f(x)=\sqrt{\ln \dfrac{5x-x^2}{4}}$ Tanım Kümesi?

$\ln \dfrac{5x-x^2}{4} \geq 0 \to \dfrac{5x-x^2}{4} \geq 1 \to 5x-x^2 \geq 4$

$\downarrow$

$4-5x+x^2 \leq 0$ olmalı.

$(x-1)(x-4) \leq 0$

	1		4	
+		−		+

$D(f)=[1,4]$

$\circledast$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)=?$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}).(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-x^2+x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cancel{x}}{\underbrace{|x|}_{\cancel{x}}\left(\sqrt{1+\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{0}}+\sqrt{1-\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{0}}\right)}=\frac{2}{2}=\underline{\underline{1}}$$

(*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^2}{\sqrt{1+x^2}-1} = ?$

$(\sqrt{1+x^2}+1)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{1+x^2-1}\cdot(\sqrt{1+x^2}+1) = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin x^2}{x^2}}_{1}\cdot \underbrace{(\sqrt{x^2+1}+1)}_{2} = 2$$

(*) $\lim\limits_{x\to 1^-} \left(\dfrac{1}{1-x}\cdot \cos\dfrac{\pi x}{2}\right) = ?$ $\qquad t = 1-x$

$x\to 1^- \Rightarrow t\to 0^+$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\cdot \cos\frac{\pi}{2}(1-t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right) = \sin\frac{\pi}{2}t$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\cdot \sin\frac{\pi}{2}t$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \underbrace{\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t}}_{1}\cdot\frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

(*) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\cdot \sin\dfrac{1}{x} = ?$

<u>I. Yol</u>

$$\lim_{x\to\infty} \underbrace{x}_{\infty}\cdot \underbrace{\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}_{1} = \infty$$

<u>II. Yol (Dönüşüm)</u>

$\dfrac{1}{x} = t \qquad x\to\infty \Rightarrow t\to 0^+$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^2}\cdot \sin t = \lim_{t\to 0^+} \underbrace{\frac{1}{t}}_{\infty}\cdot \underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{1} = \infty$$

(*) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}\cdot \sin\dfrac{1}{x} = ?$

<u>I. Yol</u>

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}_{1}\cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{0} = 0$$

<u>II. Yol (Dönüşüm)</u>

$\dfrac{1}{x} = t \qquad x\to\infty \Rightarrow t\to 0^+$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot \sin t = \lim_{t\to 0^+} \underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{1}\cdot \underbrace{\sqrt{t}}_{0} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2} = ?$$

$(1+\cos x\sqrt{\cos 2x})$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x \cdot \cos 2x}{x^2 \cdot (1+\cos x\sqrt{\cos 2x})} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\overbrace{(1-\sin^2 x)}^{\cos^2 x} \cdot \overbrace{(1-2\sin^2 x)}^{\cos 2x}}{x^2 \cdot (1+\cos x\sqrt{\cos 2x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-(1-3\sin^2 x+2\sin^4 x)}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x\sqrt{\cos 2x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\frac{3\sin^2 x - 2\sin^4 x}{x^2}\right] \cdot \frac{1}{1+\cos x \cdot \sqrt{\cos 2x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{1} \cdot \underbrace{\left(3-2\sin^2 x\right)}_{3} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\cos x\sqrt{\cos 2x}}}_{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin 2x} = ?$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin 2x} \cdot \frac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\sqrt{1+\cos 2x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1-\cos^2 2x}}{\sin 2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\cos 2x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\overbrace{|\sin 2x|}^{-\sin 2x}}{\sin 2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\cos 2x}} = \lim_{x\to 0^-} \underbrace{\frac{-\sin 2x}{\sin 2x}}_{-1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\cos 2x}}}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{x}-2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x}-2}$$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ *

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ **

$(\sqrt{x}+2\sqrt{2}) \cdot (\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)$

$$\lim_{x\to 8} \frac{\overbrace{(\sqrt{x}-2\sqrt{2}) \cdot (2\sqrt{2}+\sqrt{x})}^{**\text{'dan } x-8} \cdot (\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{\underbrace{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}_{*\text{'dan } x-8} \cdot (\sqrt{x}+2\sqrt{2})} = \lim_{x\to 8} \frac{\cancel{x-8}}{\cancel{x-8}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt{x}+2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

⊛ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} = ?$ $x = t^{12}$ olsun. $x \to 1 \Rightarrow t \to 1$

$$\lim_{t\to 1} \frac{t^4-1}{t^3-1} = \lim_{t\to 1} \frac{\overbrace{\cancel{(t^2-1)}}^{t+1}(t^2+1)}{\cancel{(t-1)}(t^2+t+1)} = \frac{2.2}{3} = \frac{4}{3}$$

⊛ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x^2}{x^2 \sin x^2} = ?$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^2 \sin x^2} \cdot \frac{1+\cos x^2}{1+\cos x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{1-\cos^2 x^2}^{\sin^2 x^2}}{x^2 \cdot \sin x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin x^2}{x^2}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\cos x^2}}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

https://avesis.yildiz.edu.tr/pkanar/dokumanlar

(*) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\sqrt{1-\sin x}} = ?$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+\cos 2x}\cdot\sqrt{1-\cos 2x}\cdot\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1-\sin x}\cdot\sqrt{1+\sin x}\cdot\sqrt{1-\cos 2x}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\cos^2 2x}\cdot(\sqrt{1+\sin x})}{\sqrt{1-\sin^2 x}\cdot\sqrt{1-\cos 2x}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin^2 2x}\cdot\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{\cos^2 x}\cdot\sqrt{1-\cos 2x}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin 2x|\cdot\sqrt{1+\sin x}}{|\cos x|\cdot\sqrt{1-\cos 2x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\cdot\overbrace{|\sin x|}^{1}\cdot|\cancel{\cos x}|\cdot\overbrace{\sqrt{1+\sin x}}^{\sqrt{2}}}{|\cancel{\cos x}|\cdot\underbrace{\sqrt{1-\cos 2x}}_{\sqrt{2}}} = \underline{\underline{2}}$$

(*) $\lim_{\theta\to 1} \dfrac{\theta-1}{\theta-\cos(\theta-1)} = ?$

$\theta - 1 = x$ olsun. $\theta\to 1$ ise $x\to 0$ olur.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{1+x-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\underbrace{\frac{1-\cos x}{x}}_{0}} = \underline{1}$$

(*) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x-1|}{\sqrt{x}-1}$ limitinin varlığını araştırınız.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}} = 2$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1-x}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} -\frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}} = -2$$

$\neq \Rightarrow$ $x=1$ de limit mevcut değil

(*) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{2x^2-1}}{2-\sqrt{5-x^2}} = ?$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-\sqrt{2x^2-1}).(x+\sqrt{2x^2-1}).(2+\sqrt{5-x^2})}{(2-\sqrt{5-x^2})(2+\sqrt{5-x^2}).(x+\sqrt{2x^2-1})}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x^2-2x^2+1)(2+\sqrt{5-x^2})}{(4-5+x^2)(x+\sqrt{2x^2-1})}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\overset{-1}{\cancel{(1-x^2)}}.(2+\sqrt{5-x^2})}{\cancel{(x^2-1)}.(x+\sqrt{2x^2-1})} = -\frac{4}{2} = \underline{\underline{-2}}$$

(*) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{\sin(x^2-x)} = ?$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x+2x-2}{\sin(x^2-x)} = \lim_{x\to 1} \underbrace{\frac{x^2-x}{\sin(x^2-x)}}_{1} + \overbrace{\frac{2.(x-1)}{\sin(x^2-x)}.\frac{x}{x}}^{1} = \boxed{3}$$

https://avesis.yildiz.edu.tr/pkanar/dokumanlar

YTÜ

0251321 MATEMATİK I - 1.VİZE SINAVI

12 Nisan 2008

Adı-Soyadı :
Numara :
Grup :
İmza :

1	2	3	4	5	Toplam

Sınav Süresi : 70 dakika

UYARI: YALNIZCA 4 SORU YANITLANACAKTIR.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\sin\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cos^2 x}{x^2}\right)\right]$ limitini hesaplayınız. (İşlemlerde L'Hopital kuralı kullanılmayacak.)

Cevap:

$$\lim_{x\to 0}\left[\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cos^2 x}{x^2}\right)\right] = \lim_{x\to 0}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)\right] = \lim_{x\to 0}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right)\right]$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(1)^2\right) = \mathbf{1.}$$

89

(*) $f(x)=\begin{cases} x.\sin\frac{1}{x} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$ fonksiyonu $\forall x\in\mathbb{R}$ için sürekli midir?

*① $x\neq 0$ için $x.\sin\frac{1}{x}$ fonksiyonu süreklidir. Gerçekten;

$c\in\mathbb{R}-\{0\}$ için $\lim\limits_{x\to c} x.\sin\frac{1}{x}=c.\sin\frac{1}{c}=f(c)$ dır. Yani

fonk. $x\neq 0$ için süreklidir.

*② $x=0$ için

$\lim\limits_{x\to 0} x.\sin\frac{1}{x}=0$ dır. $\lim\limits_{x\to 0} x.\sin\frac{1}{x}=0=f(0)$ olduğundan

$f(x)$ $x=0$ da süreklidir.

① ve ② den $f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ için süreklidir.

(*) $f(x)=\begin{cases} 2\sin x & , x\leq -\frac{\pi}{2} \\ a\sin x+b & , -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \\ \cos x & , x\geq\frac{\pi}{2} \end{cases}$ fonksiyonu $x=\frac{\pi}{2}$ ve $x=-\frac{\pi}{2}$ de sürekli ise $a,b=?$

$x=\frac{\pi}{2}$ 'de sürekli ise:

$$\underbrace{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \underbrace{f(x)}_{a\sin x+b}}_{a+b}=\underbrace{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \underbrace{f(x)}_{\cos x}}_{0}=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0 \Rightarrow \boxed{a+b=0} \quad ①$$

$x=-\frac{\pi}{2}$ de sürekli ise:

$$\underbrace{\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \underbrace{f(x)}_{a\sin x+b}}_{-a+b}=\underbrace{\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} \underbrace{f(x)}_{2\sin x}}_{-2}=f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2.\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-2 \Rightarrow \boxed{-a+b=-2} \quad ②$$

① ve ② den

$\left.\begin{matrix} a+b=0 \\ -a+b=-2 \end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix} a=+1 \\ b=-1 \end{matrix}$

* $\lim_{x\to\pi} \dfrac{1-\sqrt{2+\cos x}}{1-\sqrt{1+\sin x}} = ?$

$(1+\sqrt{2+\cos x})\quad (1+\sqrt{1+\sin x})$

$$\lim_{x\to\pi} \frac{(1-\sqrt{2+\cos x})(1+\sqrt{2+\cos x})(1+\sqrt{1+\sin x})}{(1-\sqrt{1+\sin x})(1+\sqrt{1+\sin x})(1+\sqrt{2+\cos x})}$$

$$= \lim_{x\to\pi} \frac{-(1+\cos x).\ (1+\sqrt{1+\sin x})}{-\sin x\ .\ (1+\sqrt{2+\cos x})} = \lim_{x\to\pi} \frac{\overset{\sin x}{\overbrace{\cancel{\sin^2 x}}}}{(1-\cos^2 x)}\cdot\frac{1+\sqrt{1+\sin x}}{1+\sqrt{2+\cos x}}$$

$(1-\cos x)$ $\qquad \cancel{\sin x}$

$$= \lim_{x\to\pi} \underbrace{\sin x}_{0} .\ \underbrace{\frac{1+\sqrt{1+\sin x}}{1+\sqrt{2+\cos x}}}_{1} = \underline{\underline{0}}$$

---

* $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ fonksiyonunun $x=1$ deki davranışını inceleyiniz.

$\lim_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x^2-1} = +\infty \qquad \lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x^2-1} = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$

$\Downarrow$

$f(x)$, $x=1$ de limite sahip değil

---

* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-2)^2} & , x \neq 2 \\ 0 & , x=2 \end{cases}$ fonksiyonunun $x=2$ deki sürekliliğini inceleyin. Süreksiz ise çeşidini belirtin.

$f(2)=0$ ✓ fonk. $x=2$ de tanımlı

$\lim_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2} = +\infty$ olduğundan $f(x)$ in $x=2$ de limiti yok. Fonksiyon $x=2$ de süreksiz. $\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty$ olduğundan $x=2$ 'deki süreksizlik "sonsuz süreksizlik"tir.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{a-\sqrt{2-x}} & , x\le 1 \\ \dfrac{x-1}{x-\sqrt{3x^2-2}} & , 1<x<3 \\ \dfrac{\sin\frac{x-3}{b}}{1-\sqrt{x-2}} & , x\ge 3 \end{cases}$$

fonksiyonu $x=1$ ve $x=3$ de sürekli ise $a,b=?$

* $f(x)$, $x=1$ de sürekli ise: $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=f(1)$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{x-\sqrt{3x^2-2}}=\lim_{x\to1^+}\frac{\cancel{(x-1)}\,(x+\sqrt{3x^2-2})}{-2\,\underbrace{\cancel{(x^2-1)}}_{x+1}}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{1}{a-\sqrt{2-x}}=\frac{1}{a-1}=f(1)\longrightarrow\frac{1}{a-1}=-\frac{1}{2}\rightarrow a-1=-2$$

$$\boxed{a=-1}$$

* $f(x)$, $x=3$ de sürekli ise: $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=f(3)$

$$\lim_{x\to3^-}\frac{x-1}{x-\sqrt{3x^2-2}}=\frac{2}{3-5}=-1$$

$$\lim_{x\to3^+}\frac{\sin\frac{x-3}{b}\cdot(1+\sqrt{x-2})}{(1-\sqrt{x-2})\,(1+\sqrt{x-2})}=\lim_{x\to3^+}\frac{\sin\frac{x-3}{b}}{3-x}\cdot(1+\sqrt{x-2})$$

$$=\lim_{x\to3^+}\frac{\sin\frac{x-3}{b}}{\underbrace{\frac{x-3}{b}}_{1}}\cdot\frac{1}{-b}\cdot\underbrace{(1+\sqrt{x-2})}_{2}=-\frac{2}{b}$$

$$-\frac{2}{b}=-1\Rightarrow\boxed{b=2}$$

(*) Sıkıştırma Teoremini kullanarak $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-\cos \pi x}{1+x^2} = 0$ olduğunu gösteriniz.

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $-1 \leq \cos x \leq 1$ dir. O halde

$-1 \leq \cos \pi x \leq 1 \rightarrow -1 \leq -\cos \pi x \leq 1 \rightarrow 0 \leq 1-\cos \pi x \leq 2$

$\downarrow$

$0 \leq \frac{1-\cos \pi x}{1+x^2} \leq \frac{2}{1+x^2}$ ①

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{x^2+1} = 0$ ②

① ve ② den $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-\cos \pi x}{1+x^2} = 0$

(*) $f(x) = \begin{cases} \frac{x \sin x}{1-\cos x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ fonksiyonu $x=0$ da sürekli midir? Süreksiz ise süreksizliği kaldırılabilir mi? Nasıl?

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x.\sin x}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x.\cancel{\sin x}}{\frac{1-\cos^2 x}{\cancel{\sin^2 x}\,\sin x}}.(1+\cos x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{x}{\sin x}}{1}.\frac{(1+\cos x)}{2}$

$(1+\cos x)$

$= 2$

$f(0)=1 \neq \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$ olduğundan $f(x)$ $x=0$'da süreksiz. Bu süreksizlik kaldırılabilir süreksizliktir.

$f(0)=2$ olarak tanımlanırsa, yani;

$f(x) = \begin{cases} \frac{x \sin x}{1-\cos x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$ olarak tanımlanırsa fonk. $x=0$ da sürekli olur.

(*) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{|x-2|}, & x\neq 2 \\ 4, & x=2 \end{cases}$ fonksiyonunun $x=2$ deki sürekliliğini araştırınız. Süreksiz ise çeşidini belirtiniz.

$f(2)=4$ ✓ fonk. $x=2$ de tanımlı

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{\overset{x+2}{\cancel{x^2-4}}}{\cancel{x-2}}=4$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{\overset{x+2}{\cancel{x^2-4}}}{-(\cancel{x-2})}=-4$$

$\lim_{x\to 2^+} f(x)\neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$ olduğundan fonk. $x=2$ de limiti mevcut değil. Dolayısıyla süreksiz.

$\lim_{x\to 2^+} f(x)\neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$ olduğundan $x=2$ de sıçramalı süreksizlik var.

NOT: Sağ ve sol süreklilik sorulsaydı:

$\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2)=4$ olduğundan fonk. $x=2$ de sağdan sürekli; ancak $\lim_{x\to 2^-} f(x)\neq f(2)=4$ olduğundan $x=2$ de soldan süreksizdir cevabı verilirdi.

(*) $f(x)=\dfrac{x-1}{2-\sqrt{5-x}}$ fonksiyonunun $x=1$ de sürekli olması için $f(1)$ nasıl tanımlanmalıdır?

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\underset{(2+\sqrt{5-x})}{2-\sqrt{5-x}}}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{4-5+x}}\cdot(2+\sqrt{5-x})=4$$

$f(1)=4$ olarak tanımlanırsa $f(x)$, $x=1$ de sürekli olur.

⊛ $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{x}, & x<0\\ 1+a, & x=0\\ \dfrac{x-b}{2x+1}, & x>0\end{cases}$$

fonksiyonunun $\forall x \in \mathbb{R}$ için sürekli olması için a ve b ne olmalıdır?

$x<0$ için; $\dfrac{\sin 3x}{x}$ ve $x>0$, için $\dfrac{x-b}{2x+1}$ fonksiyonları süreklidir. Dolayısıyla $f(x)$ in $\forall x \in \mathbb{R}$ de sürekli olması için $x=0$'da sürekli olmalıdır.

$x=0$ da sürekli ise:

$$\lim_{x\to 0^+} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\frac{x-b}{2x+1}}}_{①} = \lim_{x\to 0^-} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\frac{\sin 3x}{x}} = \underbrace{f(0)}_{1+a}}_{②}$$ olmalı.

① den:

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 0^+} \frac{x-b}{2x+1} = -b\\ &\lim_{x\to 0^-} \underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{1} \cdot 3 = 3\end{aligned}\right] \rightarrow -b = 3 \rightarrow \boxed{b=-3}$$

② den:

$$3 = 1+a \Rightarrow \boxed{a=2}$$

(*) $f(x)=\dfrac{\sqrt{|2x-3|-x}}{x^3-1}$ fonksiyonunun tanım kümesi?

① $|2x-3|-x\geq 0$ olmalı $\rightarrow$ $2x-3\geq x \rightarrow \boxed{x\geq 3}$
veya
$2x-3\leq -x \rightarrow \boxed{x\leq 1}$

② $x^3-1\neq 0$ olmalı $\Rightarrow$ $\boxed{x\neq 1 \text{ olmalı}}$

① ve ② den $D(f)=(-\infty,1)\cup[3,\infty)$

(*) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}\,x^2-3\sqrt{3}}{x^3-3\sqrt{3}}$ fonksiyonunun $x=\sqrt{3}$ de sürekli olması için $f(\sqrt{3})$ nasıl tanımlanmalıdır?

$$\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}x^2-3\sqrt{3}}{x^3-3\sqrt{3}}=\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}(x^2-3)}{x^3-(\sqrt{3})^3}$$

$$=\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}\cdot\cancel{(x-\sqrt{3})}\overbrace{(x+\sqrt{3})}^{2\sqrt{3}}}{\cancel{(x-\sqrt{3})}\underbrace{(x^2+x\sqrt{3}+3)}_{9}}=\frac{2}{3}$$

$f(\sqrt{3})=\dfrac{2}{3}$ olarak tanımlanırsa $f(x)$, $x=\sqrt{3}$ de sürekli olur.

(*) $\displaystyle\lim_{x\to3^+}\frac{\sin\sqrt{x-3}}{\sqrt{\sin(x-3)}}=?$

$$\lim_{x\to3^+}\underbrace{\frac{\sin\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{\sin(x-3)}}}_{\underbrace{\sqrt{\frac{x-3}{\sin(x-3)}}}_{1}}=\boxed{1}$$

https://avesis.yildiz.edu.tr/pkanar/dokumanlar

⊗ $x^2-x+1=3$ denkleminin $[1,3]$ aralığında bir çözüme sahip olduğunu gösteriniz.

$f(x)=x^2-x+1$ olsun.

$f(1)=1 \quad f(3)=7$ dir.

Fonksiyon sürekli olduğundan ve $s=3$ $f(1)=1$ ve $f(3)=7$ arasında olduğundan Aradeğer Teoremine göre $[1,3]$ aralığında $f(c)=3$ olacak şekilde bir sayı vardır. $(c=2)$

⊗ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x-1|}{\sqrt{x}-1} = ?$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}} = 2$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}} = -2$$

$\neq$ limit mevcut değildir

⊗ $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}.\sin\frac{1}{x} = 0$ olduğunu Sıkıştırma Teo. ile gösterin.

Her $x\neq 0$ için $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$ dir. $\downarrow \sqrt{x}$ ile çarp

$$-\sqrt{x} \leq \sqrt{x}\sin\frac{1}{x} \leq \sqrt{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} -\sqrt{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$$

Sıkıştırma Teo. göre $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}.\sin\frac{1}{x} = \underline{\underline{0}}$

⊛ $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-2}{\sqrt{x^2+3}-2}$ fonksiyonu hangi x değeri/değerleri için süreksizdir? Bu süreksizlik nasıl kaldırılabilir?

$\sqrt{x^2+3}-2=0 \rightarrow x^2+3=4 \rightarrow \boxed{x=\mp 1}$ için fonk. süreksiz.

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{3x^2+1}-2)}{\sqrt{x^2+3}-2} = \lim_{x\to 1}\frac{(\underbrace{3x^2+1-4}_{3})\,(\overbrace{\sqrt{x^2+3}+2}^{4})}{(\cancel{x^2+3-4})\cdot(\underbrace{\sqrt{3x^2+1}+2}_{4})}=3$$

$(\sqrt{3x^2+1}+2)\ (\sqrt{x^2+3}+2)$

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{\sqrt{x^2+3}-2} = \lim_{x\to -1}\frac{(\underbrace{3x^2+1-4}_{3})\,(\overbrace{\sqrt{x^2+3}+2}^{4})}{(\cancel{x^2+3-4})\,(\underbrace{\sqrt{3x^2+1}+2}_{4})}=3$$

$(\sqrt{3x^2+1}+2)\ (\sqrt{x^2+3}+2)$

$f(1)=f(-1)=3$ olarak tanımlanırsa $f(x)$ $x=1$ ve $x=-1$ de sürekli olur.

⊛ $f(x)=\sin(\ln x)+\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-|x|}}$ fonksiyonunun tanım kümesi?

$\ln x$ için: $\boxed{x>0}$ olmalı.

$\sin x$: $\forall x\in\mathbb{R}$ için tanımlı

$1-|x|>0$ olmalı.

$\downarrow$

$|x|<1 \rightarrow \boxed{-1<x<1}$ olmalı.

$\boxed{\text{T.K: } (0,1) \text{ aralığı}}$

(*)

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{\sin\sqrt{x}} & , x>0 \\ 1-a & , x=0 \\ \dfrac{x-b}{2x+1} & , x<0 \end{cases}$$

fonksiyonunun $x=0$ da sürekli olması için $a,b=?$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$ olmalı.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 3x}{\sin\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{x}}{\sin\sqrt{x}}}_{1}\cdot\underbrace{3\sqrt{x}}_{0}=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x-b}{2x-1}=b \longrightarrow \boxed{b=0}$$

$$f(0)=1-a \longrightarrow 1-a=0 \rightarrow \boxed{a=1}$$

(*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+x}}\right)=?$ $\rightarrow \infty-\infty$ belirsizliği

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\sqrt{x^2+x}-x^2}{\sqrt{x^2+x}}\;\;(x\sqrt{x^2+x}+x^2)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(x^2+x)-x^4}{\underbrace{\sqrt{x^2+x}}_{\underbrace{|x|}_{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\cdot\left(x\underbrace{\sqrt{x^2+x}}_{\underbrace{|x|}_{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}+x^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}\;1}{\cancel{x^3}\cdot\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}}\cdot\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}}+1\right)}=\frac{1}{2}$$