Kuvvet Serileri

$a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ serisine $x=c$ civarında bir kuvvet serisi denir.

c : serinin (yakınsaklık) merkezi ($x=c$ de seri a_0'a yakınsar)

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$: serinin katsayıları

* Kuvvet serisinin terimleri bir x değişkeninin fonksiyonu olduğundan, seri x in her bir değeri için yakınsayabilir veya ıraksayabilir. Serinin yakınsak olduğu değerler için toplam x'e bağlı bir fonksiyon tanımlar.

Teorem: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ kuvvet serisi için aşağıdakilerden biri sağlanır:

i) Seri sadece $x=c$ de yakınsaktır.

ii) Seri her $x \in \mathbb{R}$ için yakınsaktır.

iii) Seri, $|x-c|<R$ eşitsizliğini sağlayan her x için yakınsak, $|x-c|>R$ eşitsizliğini sağlayan her x için ıraksak olacak şekilde bir R sayısı bulunabilir. Bu durumda seri, $x=c+R$ ve $x=c-R$ uç noktalarında yakınsayabilir veya ıraksayabilir. Buradaki R sayısına <u>yakınsaklık yarıçapı</u> denir.

(i) durumunda $R=0$ dır.

(ii) durumunda $R=\infty$ dur.

* $c-R<x<c+R$ aralığına yakınsaklık aralığı denir.

* Yakınsaklık yarıçapı R, yakınsaklık merkezi c olan kuvvet serisinin yakınsaklık aralığı:

$[c-R, c+R]$, $(c-R, c+R]$, $[c-R, c+R)$, $(c-R, c+R)$ aralıklarından biridir.

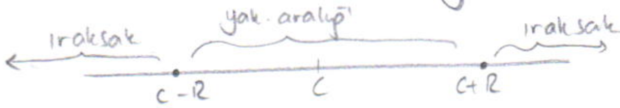
Kuvvet Serilerinin Yakınsaklığını Test Etmek :

Bu test uç noktaları garanti etmez.

1) Oran testi veya kök testi kullanılarak serinin mutlak yakınsadığı bir aralık bulunur. (Bu aralık, $c-R<x<c+R$ açık aralığıdır.).

2) Mutlak yakınsaklık aralığı sonlu ise $x=c-R$ ve $x=c+R$ uç noktalarında yakınsaklık / ıraksaklık incelemesi yapılır.

3) Yakınsaklık aralığı dışında kalan noktalarda, yani $|x-c|>R$ noktalarında seri ıraksaktır.



Örnek: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ serisinin hangi x değerleri için şartlı / mutlak yakınsak olduğunu, yakınsaklık aralığını ve ıraksak olduğu x değerlerini bulun.

1) Oran testini uygulayalım:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|x\underbrace{\frac{n}{n+1}}_{=1}\right| = |x|<1 \Rightarrow -1<x<1$$ aralığında seri mutlak yakınsaktır.

2) $x=1$ için,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ harmonik seri $\Rightarrow$ ıraksak

$x=-1$ için,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ alterne harmonik seri $\Rightarrow$ şartlı yakınsak.

Sonuç: Mutlak yakınsak, $x\in(-1,1)$ için
Şartlı yakınsak, $x=-1$ için
} Yakınsaklık aralığı: $[-1,1)$

Iraksak, $\mathbb{R}-[-1,1)$

Örnek: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ hangi x değerleri için yakınsar?

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}|x| = 0<1 \Rightarrow$$ seri her $x\in\mathbb{R}$ için yakınsaktır. $(R=\infty)$

Örnek: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$ hangi x değerleri için yakınsar?

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{n!\,x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|x|(n+1) = \infty \quad (x\neq 0 \text{ için})$$

$\Rightarrow x=0$ serinin merkezidir, dolayısıyla yakınsaktır. Seri sadece $x=0$ da yakınsaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$ serisinin mutlak / şartlı yakınsak ve ıraksak olduğu x değerlerini araştırın ve yak. aralığını bulun.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{\sqrt{(n+1)^2+3}}}{\frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{\sqrt{n^2+3}}{\sqrt{(n+1)^2+3}}}_{=1}\cdot|x| = |x|<1 \Rightarrow -1<x<1$$ aralığında seri mutlak yakınsak

$x=1$ için, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$ serisi elde edilir.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ harmonik serisini seçerek limit testini uygulayalım.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+3}} = 1 \neq 0,\infty$$ iki seri aynı karakterli olup ıraksaktır.

$x=-1$ için, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}}$ elde edilir.

Mutlak yakınsak değildir, şartlı yakınsak mı?

1) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} > 0$ 2) $a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+3}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} = a_n$ 3) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3}} = 0$

Alterne seri testine göre seri şartlı yakınsaktır.

Sonuç: Mutlak yakınsak ; $x\in(-1,1)$
şartlı yakınsak : $x=-1$ $\Big\}$ $[-1,1)$: yakınsaklık aralığı
Iraksak : $\mathbb{R}-[-1,1)$

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+5)^n}{(n^2+1)3^n}$ yak. aralığını inceleyin.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(2x+5)^{n+1}}{((n+1)^2+1)3^{n+1}}}{\frac{(2x+5)^n}{(n^2+1)3^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2x+5}{3}\right|\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} = \left|\frac{2x+5}{3}\right|<1$$

$\Rightarrow |2x+5|<3 \Rightarrow -3<2x+5<3 \Rightarrow -4<x<-1$: mutlak yakınsaklık aralığı

$x=-1$ için, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ elde edilir.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ serisini seçerek limit testi uygulayalım. (Mukayese testi de uygulanabilir)
($p>1$ yakınsak)

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \neq 0, \infty$ olduğundan limit testine göre iki seri aynı karakterlidir. Dolayısıyla $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ yakınsaktır. $\Rightarrow x=-1$ de mutlak yakınsaktır.

$x=-4$ için, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ elde edilir.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2+1} \right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ yakınsak olduğundan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ mutlak yakınsaktır.

Sonuç: Mutlak yakınsak : $[-4,-1]$
Şartlı yakınsak : —
Iraksak : $\mathbb{R} - [-4,-1]$

$[-4,-1]$ yakınsaklık aralığı

Kuvvet Serilerinde İşlemler

1) Toplama / Çıkarma: Yakınsama aralıklarının kesişiminde iki kuvvet serisi tıpkı sabit terimli serilerdeki gibi terim terim eklenip çıkarılabilir.

$$\left.\begin{array}{l} A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n, \quad |x-c|<R \\ B(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (x-c)^n, \quad |x-c|<R \end{array}\right\} A(x) \mp B(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n \mp b_n)(x-c)^n, \quad |x-c|<R$$

2) Çarpma: Eğer $A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ve $B(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, $|x|<R$ aralığında mutlak yakınsak iki seri ise ve

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

olarak verilirse, o zaman $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ serisi $|x|<R$ aralığında $A(x).B(x)$'e yakınsar.

$$A(x).B(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad |x|<R$$

c_n katsayısını bulmak çok zor olabilir ve bazen genel bir formül de bulunamayabilir. Bu gibi durumlarda çarpım serisinin ilk birkaç terimi bulunarak işlem yapılır.

Örnek: $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = (1+x+x^2+x^3+\dots)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots\right)$

$$= x+\left(-\frac{x^2}{2}+x^2\right)+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^3}{2}+x^3\right)+\dots$$

$$= x+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^3}{6}+\dots$$

3) Sabitle Çarpma: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = f(x)$ $(|x-c|<R)$ serisini bir α sabiti ile çarparsak,

$$\alpha\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = \alpha f(x)$$

⊛ Sabit n'ye bağlı değildir, x cinsinden sabitlerle çarpılabilir.

serisi de $|x-c|<R$ aralığında yakınsaktır. Dolayısıyla bir seriyi sabit bir sayıyla çarpmak yakınsaklık aralığını değiştirmez.

NOT: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+\dots = \frac{1}{1-x}$ $(-1<x<1)$ dir.

İspat: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ geometrik seri, $a=1$, $r=x$

Bu seri $|r|=|x|<1$ için $\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-x}$'e yakınsar.

4) Dönüşüm: Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisi $|x|<R$ için mutlak yakınsak ise o zaman her sürekli f fonksiyonu için $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(f(x))^n$ de $|f(x)|<R$ için yakınsar.

Örnek: $\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^{2n}$ serisinin yakınsaklık aralığını ve bu aralıkta yakınsadığı fonksiyonu bulun.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^{2n} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(4x^2)^n}_{\substack{f(x)=4x^2 \text{ sürekli olduğundan} \\ \text{dönüşüm yapabiliriz}}} \overset{x\to 4x^2}{=} \underbrace{\frac{1}{1-4x^2}}_{\text{yakınsadığı fonk.}}, \quad |4x^2|<1 \Rightarrow \underbrace{|x|<\frac{1}{2}}_{\text{yakınsaklık aralığı}}$$

5) Türev: Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ serisi $R>0$ yakınsaklık yarıçapına sahipse $c-R<x<c+R$ aralığında $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ fonksiyonunu tanımlar. Bu f fonksiyonunun aralığın iç noktalarında her mertebeden türevi vardır;

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n (x-c)^{n-1}, \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n(n-1)(x-c)^{n-2}, \ \ldots$$

dir. Bu türev serilerinden her biri $c-R<x<c+R$ aralığında yakınsar.

6) İntegrasyon: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ serisinin $c-R<x<c+R$ için yakınsak olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-c)^{n+1}}{n+1} + k$$

serisi $c-R<x<c+R$ için yakınsaktır.

Örnek: Aşağıdaki fonksiyonların kuvvet serisi temsillerini ve yakınsaklık aralıklarını bulun.

a) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ b) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$ c) $f(x) = \ln(1+x)$

a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \ |x|<1 \xrightarrow{\text{TÜREV}} \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \ |x|<1$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \ |x|<1 \xrightarrow{\text{TÜREV}} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}, \ |x|<1$

SABİTLE ÇARP : 1/2

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} = \frac{1}{(1-x)^3}, \ |x|<1$$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \ |x|<1 \xrightarrow[\text{DÖNÜŞÜMÜ}]{x \to -x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}, \ |x|<1$

$\xrightarrow{\text{İNTEGRAL}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x) + C, \ |x|<1 \Rightarrow x=0$ alalım.

$$\Rightarrow 0 = 0 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \ |x|<1.$$

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ $(-1<x<1)$ serisini kullanarak $\sum_{n=2}^{\infty} n^2x^n$ serisinin toplamını bulunuz. Bu sonucu kullanarak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ serisinin yakınsadığı değeri bulunuz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (-1<x<1)$$

$\downarrow$ x ile çarp

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n} = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (-1<x<1)$$

$\downarrow$ Türev al

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = \frac{(1-x)^2+x\cdot 2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3} \quad (|x|<1)$$

$\downarrow$ x ile çarp

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \quad (|x|<1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n} \xrightarrow{x=\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 6$$

Örnek: $f(x) = \frac{1}{2+x}$ için $x-1$ in kuvvetlerine göre olan bir seri temsilini ve yakınsaklık aralığını bulun.

$t = x-1 \Rightarrow x = t+1$ dönüşümü yapalım:

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{3+t} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{t}{3}} = \frac{1}{3}\left(1-\frac{t}{3}+\frac{t^2}{3^2}-\frac{t^3}{3^3}+\cdots\right) \quad \left(-1<\frac{t}{3}<1\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{3^{n+1}} \quad (-3<t<3)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{3^{n+1}} \qquad -3<x-1<3 \Rightarrow -2<x<4$$

Örnek: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots$ $(-1<x<1)$ fonksiyonunun kapalı formunu bulunuz.

$$f'(x)=1-x^2+x^4-x^6+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n \quad (-1<x<1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}\overset{x\to -x^2}{\Rightarrow}\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\frac{1}{1+x^2}=f'(x) \quad (-1<x<1)$$

$$\Rightarrow f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x+C$$

$$x=0\Rightarrow f(0)=0\Rightarrow C=0 \quad \Rightarrow f(x)=\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Örnek: $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ fonksiyonu için bir kuvvet serisi temsili ve yakınsaklık aralığını bulun.

$$\sum a_n(x-c)^n=f(x)\quad,\quad |x-c|<R$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\quad,\ |x|<R$$

$x\to -x^2$

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\quad,\quad |-x^2|<1\Rightarrow |x|<1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}\quad,\ |x|<1$$

Örnek: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}=?$

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{1}{2}\right)^k\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}kx^k=\text{toplam}\quad (x=\tfrac{1}{2}\text{ yazacağız})$$

(*) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{x^k}$ şeklinde yazılamaz, çünkü kuvvet serileri $\sum a_n(x-c)^n$ formundadır.

Türev al 1) $\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2}\quad,\ |x|<1$

x ile çarp 2) $\sum_{k=1}^{\infty}kx^k=\frac{x}{(1-x)^2}\quad,\ |x|<1$

$$x=\frac{1}{2}\text{ için}\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2^2}}=2$$

Örnek: $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^n$ serisinin yakınsadığı fonksiyonu ve bu yakınsamanın gerçekleştiği aralığı bulunuz. Bu toplam yardımıyla $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)}{3^n}$ serisinin toplamını bulunuz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad , \quad |x|<1$$

1) x^2 ile çarp : $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} = \frac{x^2}{1-x}$, $|x|<1$

2) Türev al: $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{n+1} = \frac{2x(1-x)+x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$ $|x|<1$

3) $\frac{1}{x}$ ile çarp: $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^n = \underbrace{\frac{2-x}{(1-x)^2}}_{\text{Toplam}}$, $\underbrace{|x|<1}_{\text{Yak. aralığı}}$

$|x|<1 \Rightarrow -1<x<1 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$ alınabilir.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{3^n} = \frac{2-\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{15}{4}$$

⊛ $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)5^n$ şeklinde sorulsaydı $x=5\notin(-1,1)$ olduğundan bu seri ıraksaktır, yani $\sum=\infty$ dur.