1) Her nilpotent matrisin singüler old. göst.
(Örnek verilmeyecek)

A bir nilpotent matris ise $A^p = 0$ dır.

$$|A^p| = 0 \Rightarrow |A|^p = 0 \Rightarrow |A| = 0 \,//$$

2) A ve B matrisleri için $AA^T = A^{-1}B$ ise de B yi det A cinsinden ifade ediniz. (Örnek verilmeyecek)

$$AA^T = A^{-1}B$$

$$AAA^T = \underbrace{AA^{-1}}_{I}B \Rightarrow AAA^T = B$$

$$|AAA^T| = |B|$$

$$\boxed{|A^T| = |A|} \qquad |A||A||A^T| = |B|$$

$$|B| = |A|^3 \,//$$

3) $|A| \neq 0$ olmak üzere A idempotent bir matris ise $|A| = 1$ olduğunu gösteriniz.

A idempotent matris $\Rightarrow A^2 = A$

$$A.A = A \Rightarrow |AA| = |A|$$

$$\Rightarrow |A||A| = |A|$$

$$\Rightarrow |A|^2 = |A|$$

$|A| \neq 0$ olduğu için $|A| = 1$ dir. //

4-) nxn mertebeden bir A kare matrisinin inversi varsa tektir. (ö.ve.)

$$\left.\begin{array}{l} A.B = BA = I \\ A.D = D.A = I \end{array}\right\} B \stackrel{?}{=} D$$

$$AB = I$$

$$\underline{DA}B = DI$$

$$IB = DI$$

$$\boxed{B = I}$$

5-) $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} a+2g & b+2h & c+2k \\ d+3g & e+3h & f+3k \\ g & h & k \end{bmatrix}$

$C=\begin{bmatrix} 2g & h & k \\ 4d & 2e & 2f \\ -6a & -3b & -3c \end{bmatrix}$ ise $|A|=5$ olduğuna göre

$|B|=?$ $|C|=?$ $|BC|=?$

$$|B|=\begin{vmatrix} a+2g & b+2h & c+2k \\ d+3g & e+3h & f+3k \\ g & h & k \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}=|A|=5$$

$$|C|=\begin{vmatrix} 2g & h & k \\ 4d & 2e & 2f \\ -6a & -3b & -3c \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} g & h & k \\ 2d & 2e & 2f \\ -3a & -3b & -3c \end{vmatrix}=2.2.(-3)\begin{vmatrix} g & h & k \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$=(-).2.2.(-3)\underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}}_{|A|}=2.2.3.5=60$$

$|BC|=|B||C|=5.60=300$ //

6-) A matrisi 3x3 terslenebilir matris olmak üzere

$$(EkA)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$ ise $\det(A)$ nın olası tüm değerlerini bulunuz.

$$|(EkA)^{-1}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2-(-6) = 4$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot EkA \Rightarrow (A^{-1})^{-1} = |A|.(EkA)^{-1}$$

$$\Rightarrow A = |A|.(EkA)^{-1}$$

$$\Rightarrow |A| = \big|\,|A|.(EkA)^{-1}\big|$$

$$\cancel{|A|} = |A|^{\cancel{3}\,2}\,\underbrace{|(EkA)^{-1}|}_{4}$$

$$|A|^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow |A| = \mp\frac{1}{2}$$

1- *i*) A ve B 4x4 mertebeli iki matris olsun.

$$B^2(AB - B^2)B^{-1}(A - B)^2 = I \ \ ve \ \ |B| = 3 \ \ ise \ \ |A - B| = ?$$ 15

ÇÖZÜM:

$$B^2(AB - B^2)B^{-1}(A - B)^2 = I$$

$$\boxed{B^2(A - B)BB^{-1}(A - B)^2 = I}$$ 2

$$\boxed{B^2(A - B)I\,(A - B)^2 = I}$$ 2

$$B^2(A - B)(A - B)^2 = I$$

$$\boxed{B^2(A - B)^3 = I}$$ 2

$$\boxed{|B^2|\,|(A - B)^3| = 1}$$ 3

$$\boxed{|(A - B)^3| = \frac{1}{3^2}}$$ 3

$$\boxed{|(A - B)| = \frac{1}{3^{2/3}}}$$ 3

$$|A - B| = 3^{-2/3}$$

***ii*)** A, nxn mertebeli matris olsun. Tekil olmayan bir S matrisi için $B = S^{-1}AS$ ise $|B| = |A|$ olduğunu gösteriniz.

10

ÇÖZÜM:

1 1 2

$$S^{-1}S = I \Rightarrow |S^{-1}S| = |I| \Rightarrow |S||S^{-1}| = 1 \quad \textbf{dir.}$$

$$|B| = |S^{-1}AS| = |S^{-1}|\,|A|\,|S|$$ 2

2

$$= |S^{-1}|\,|S|\,|A| = 1.\,|A| = |A|$$

2

2) $\begin{cases} 2x - y + w = 1 \\ y + 2z - 3w = -2 \\ 2x + z = 0 \\ 3y - z + 2w = 4 \end{cases}$ lineer denklem sisteminde z bilinmeyenini **Cramer metoduyla** bulunuz.

(Sarrus kuralını kullanmayınız)

5

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 11 \end{vmatrix}$$

3 2 10

$$= 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -7 & 11 \end{vmatrix} = 2(-11+14) = 6$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & 5 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$$

5 3 2 10

$$= -2(-5+14) = -18$$

VEYA

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 10 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 11 \end{vmatrix} = 2(11-20) = -18$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-18}{6} = -3$$

5

2

CamScanner ile tarandı

$$\begin{aligned} x+2y+z&=m^2 \\ x+y+3z&=m \\ 3x+4y+7z&=8 \end{aligned}$$

2) lineer denklem sistemi veriliyor.

i) Sistemin çözümünün olmaması için m ne olmalıdır.

ii) Sistemin sonsuz çözümünün olması için m ne olmalıdır.

iii) Sistemin tek çözümünün olması için m ne olmalıdır.

Çözüm: 2 2 2

$$[A \vdots B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & m^2 \\ 1 & 1 & 3 & m \\ 3 & 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & m^2 \\ 0 & -1 & 2 & m-m^2 \\ 0 & -2 & 4 & 8-3m^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & m^2 \\ 0 & 1 & -2 & -m+m^2 \\ 0 & -2 & 4 & 8-3m^2 \end{bmatrix}$$

2

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 2m-m^2 \\ 0 & 1 & -2 & -m+m^2 \\ 0 & 0 & 0 & 8-2m-m^2 \end{bmatrix} \qquad 8-2m-m^2=0 \implies m=2, m=-4.$$

m^2+2m-8 2

2 3

5 *i)* Çözümsüz olması için $r_A \neq r_{AB} \Rightarrow m \neq -4 \;\; ve \;\; m \neq 2$

2 3

5 *ii)* Sonsuz çözümünün olması için, $r_A = r_{AB} < n = 3 \implies$ m$=-4$ $veya$ $m=2$

5 *iii)* Tek çözümünün olması için $r_A = r_{AB} = n = 3$ olmalı. Ancak $r_A = 3$ olamaz. Bu denklem sisteminin tek çözümü yoktur.

2 3

4) $\begin{aligned} x-ky+z&=2\\ -2x+k^2y-kz&=-2k\\ -kx+2ky+z&=-4\end{aligned}$ lineer denklem sisteminin

a) tek çözümünün **b)** sonsuz çözümünün **c)** çözümsüz

olması için k 'nın alacağı değerler ne olmalıdır.

$$[A:B]=\begin{bmatrix}1 & -k & 1 & 2\\ -2 & k^2 & -k & -2k\\ -k & 2k & 1 & -4\end{bmatrix}\sim \quad 2$$

$$\begin{bmatrix}1 & -k & 1 & 2\\ 0 & k^2-2k & 2-k & 4-2k\\ 0 & 2k-k^2 & 1+k & 2k-4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -k & 1 & 2\\ 0 & k^2-2k & 2-k & 4-2k\\ 0 & 0 & 3 & 0\end{bmatrix} \quad 3$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & -k & 1 & 2\\ 0 & k^2-2k & 2-k & 4-2k\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -k & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & k^2-2k & 2-k & 4-2k\end{bmatrix}\sim \quad 3$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & -k & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & k^2-2k & 0 & 4-2k\end{bmatrix} \quad 2 \qquad \left.\begin{aligned} k^2-2k=0 &\Rightarrow k=2,\ k=0\\ 4-2k=0 &\Rightarrow k=2.\end{aligned}\right\} \quad 3$$

a) $k\neq 2$ ve $k\neq 0$ için $r_A=r_{[A:B]}=3$ olacağından sistemin tek çözümü vardır. (2) (2)

b) $k=2$ için $r_A=r_{[A:B]}=2$ olacağından sistemin $3-2=1$ parametreye bağlı sonsuz çözümü vardır. (2) (2)

c) $k=0$ için $r_A=2$ ve $r_{[A:B]}=3$ olacağından $r_A\neq r_{[A:B]}$ bulunur. $k=0$ için sistemin çözümü yoktur. (2) (2)

1-) $\left.\begin{array}{l} 2x + y - z = 5 \\ x - y + z = 1 \\ x + y - 2z = 4 \end{array}\right\}$ Lineer denklem sisteminin çözümünü $\boldsymbol{A^{-1}}$ (katsayılar matrisinin tersi) matrisini kullanarak bulunuz.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad Ek\,A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{Ek\,A}{|A|} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$x = 2$, $y = 0$, $z = -1$

Tekil liste 8

(25) 2-) $A = \begin{bmatrix} x+2 & -1 & 1 \\ 3 & x-2 & 1 \\ 5 & -5 & x+3 \end{bmatrix}$ matrisi x in hangi değeri ya da değerleri için tekil matristir?

A matrisinin tekil olması tersinin olmaması demektir. o halde A'nın determinantı sıfır olmalıdır.

$$|A| = \begin{vmatrix} x+2 & -1 & 1 \\ 3 & x-2 & 1 \\ 5 & -5 & x+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1-x & x-1 & 1 \\ -x^2-5x-1 & x-2 & x+3 \end{vmatrix} \quad (5)$$

$$= \begin{vmatrix} 1-x & x-1 \\ -x^2-5x-1 & x-2 \end{vmatrix} \cdot (3) = (x-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -x^2-5x-1 & x-2 \end{vmatrix} \cdot (3)$$

$$= (x-1)\left[-x+2+x^2+5x+1\right] \cdot (3)$$

$$= (x-1)(x^2+4x+3)$$

$$= (x-1)(x+1)(x+3) \cdot (3)$$

$|A| = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1)(x+3) = 0 \cdot (5)$

$x = \mp 1, \quad x = -3$ değerleri için $\cdot (3)$

A tekil matristir.

$x^3 + \cancel{3}x^2 \cancel{+} x - 3 = 0 \longrightarrow$ 15

Başarılar...

14-) $B = \begin{bmatrix} i & 1+i & 2-3i \\ -1+i & 2i & 1 \\ -2-3i & -1 & 0 \end{bmatrix}$

a-) B nin ters Hermitian matris

$(\bar{B})^t = -B$? $\quad b_{ij} = -\overline{b_{ji}}$ olmalı

$b_{ii} = -\overline{b_{ii}}$ (0 ya da sanal sayı olmalı)

$i, 2i, 0$ ✓

$b_{12} = -\overline{b_{21}} \Rightarrow 1+i \overset{?}{=} -(\overline{-1+i}) = -(-1-i) = 1+i$ ✓

$b_{13} = -\overline{b_{31}} \Rightarrow 2-3i \overset{?}{=} -(\overline{-2-3i}) = -(-2+3i) = 2-3i$ ✓

$b_{23} = -\overline{b_{32}} \Rightarrow 1 \overset{?}{=} -(\overline{-1}) = -(-1) = 1$ ✓

ters Hermitiandır.

b-) iB nin Hermitian matris

$C = iB = \begin{bmatrix} -1 & -1+i & 3+2i \\ -1-i & -2 & i \\ 3-2i & -i & 0 \end{bmatrix}$ $\quad (\bar{C})^t = C$?

$c_{ij} = \overline{c_{ji}}$

$c_{ii} = \overline{c_{ii}}$ (reel sayı olmalı) ✓

c_{ii} reeldir ✓

$$\left.\begin{aligned} c_{12} &= \overline{c_{21}} \Rightarrow -1+i = (\overline{-1-i}) = -1+i \checkmark \\ c_{13} &= \overline{c_{31}} \Rightarrow 3+2i = (\overline{3-2i}) = 3+2i \checkmark \\ c_{23} &= \overline{c_{32}} \Rightarrow i = (\overline{-i}) = i \checkmark \end{aligned}\right\} \text{Hermitian matristir}$$

6-) $\underbrace{A-(\bar{A})^t}_{B}$ nin ters Hermitian matris old. gös.

$(\bar{B})^t = -B$ olmalı. T. H. matris.

$$\overline{[A-(\bar{A})^t]}^t \overset{?}{=} -[A-(\bar{A})^t]$$

$$\begin{aligned}\overline{[A-(\bar{A})^t]}^t &= [\bar{A}-\overline{(\bar{A})^t}]^t \\ &= [\bar{A}-(A)^t]^t \\ &= [(\bar{A})^t-(A^t)^t] \\ &= [(\bar{A})^t-A] = -[A-(\bar{A})^t]\end{aligned}$$