

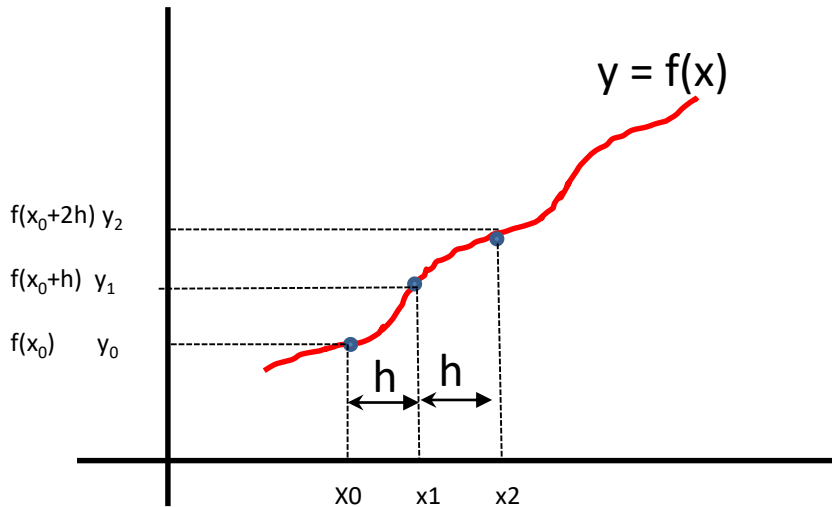
SONLU FARKLAR

- Matematik ve fizikteki problemlerin çoğu sürekli ve çok değişkenlidir
- Fonksiyonlar bir formül şeklinde verilebilir ve değişkenlerin belli değerleri için fonksiyonun değeri hızlıca bulunabilir
- Bazen bir fonksiyon sadece bir takım ayırık noktalarda belirlenmiş olabilir
- Bu taktirde sonlu farklar matematiği kullanılarak bilinmeyen noktada fonksiyonun değeri için tahmin yapılabilir

Sonlu Farkla ile ilgili Operatörler

Birbirini takip eden iki ayırık nokta arasındaki farka **fark aralığı** denir ve h ile gösterilir.

$h = x_{k+1} - x_k$ olarak yazılır



Bir $f(x)$ fonksiyonu ve adım uzunluğu h kullanılarak x noktası için sonlu fark operatörleri

a) Δ ileri fark operatörü
 $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$ şeklinde hesaplanır

b) ∇ geri fark operatörü
 $\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$ şeklinde hesaplanır

c) δ Merkezi fark operatörü
 $\delta f(x) = f(x+h/2) - f(x-h/2)$ olarak hesaplanır

d) μ Ortalama operatörü
 $\mu f(x) = \frac{1}{2} [f(x+h/2) + f(x-h/2)]$ olarak hesaplanır

e) **E** Kaydırma operatörü

E $f(x) = f(x+h)$ şeklindedir.

Bu operatör $f(x)$ fonksiyonunu kendinden sonra gelen ilk değere yükseltir.

$$\mathbf{E} f(x) = f(x+h) = f(x) + \Delta f(x)$$

$$\mathbf{E} f(x) = f(x) (1 + \Delta)$$

$$\mathbf{E} = (1 + \Delta) \text{ olarak bulunur}$$

Bir $f(x)$ fonksiyonuna iki defa kaydırma operatörü uygulanırsa;

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^2 f(x) &= \mathbf{E} (\mathbf{E} f(x)) = \mathbf{E} f(x+h) \\ &= f(x + 2h) \text{ olacaktır} \end{aligned}$$

$$\text{Genelleştirirsek } \mathbf{E}^n f(x) = f(x+nh)$$

İki veya daha yüksek dereceden İleri, geri ve Merkezi Farklar ile aralarındaki ilişkiler;

Eşit aralıklarla verilen ayrık noktalar;

$$x_1 = x_0 + h$$

$$x_2 = x_0 + 2h$$

$$x_3 = x_0 + 3h$$

.....

$$x_n = x_0 + nh \quad \text{ile gösterilerek;}$$

$f(x)$ fonksiyonunun bu noktalardaki değerlerine de;

$$f(x_0) = f_0$$

$$f(x_1) = f_1$$

.....

$$f(x_n) = f_n \quad \text{dersek,}$$

herhangi bir x_i noktasındaki

1.Derece ileri fark;

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$$

$i=0,1,\dots,n$ şeklinde yazılır

2.Derece ileri fark;

$$\begin{aligned}\Delta^2 f_i &= \Delta(\Delta f_i) = \Delta(f_{i+1} - f_i) \\ &= \Delta f_{i+1} - \Delta f_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta f_{i+1} &= f_{i+2} - f_{i+1} \\ \Delta f_i &= f_{i+1} - f_i\end{aligned}$$

$$\Delta^2 f_i = f_{i+2} - f_{i+1} - f_{i+1} + f_i$$

$$\Delta^2 f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i$$

3.Derece ileri fark;

$$\Delta^3 f_i = \Delta(\Delta(\Delta f_i))$$

?

$$\begin{aligned}\Delta^3 f_i &= \Delta(\Delta(f_{i+1} - f_i)) \\ &= \Delta(\Delta f_{i+1} - \Delta f_i) \\ &= \Delta(f_{i+2} - f_{i+1} - f_{i+1} + f_i) \\ &= \Delta(f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i) \\ &= \Delta f_{i+2} - 2\Delta f_{i+1} + \Delta f_i \\ &= f_{i+3} - f_{i+2} - 2(f_{i+2} - f_{i+1}) + f_{i+1} - f_i \\ &= f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i\end{aligned}$$

$$\Delta^3 f_i = f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i$$

1.Derece geri fark;

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$$

$i=0,1,\dots,n$ şeklinde yazılır

2.Derece geri fark;

$$\begin{aligned}\nabla^2 f_i &= \nabla(\nabla f_i) = \nabla(f_i - f_{i-1}) \\ &= \nabla f_i - \nabla f_{i-1} \\ &= f_i - f_{i-1} - (f_{i-1} - f_{i-2}) \\ &= f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}\end{aligned}$$

$$\nabla^2 f_i = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}$$

3. Derece geri fark

$$\begin{aligned}\nabla^3 f_i &= \nabla(\nabla(\nabla f_i)) \\ &= \nabla(\nabla(f_i - f_{i-1})) \\ &= \nabla(\nabla f_i - \nabla f_{i-1}) \\ &= \nabla(f_i - f_{i-1} - (f_{i-1} - f_{i-2})) \\ &= \nabla(f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}) \\ &= \nabla f_i - 2\nabla f_{i-1} + \nabla f_{i-2} \\ &= f_i - f_{i-1} - 2(f_{i-1} - f_{i-2}) + (f_{i-2} - f_{i-3}) \\ &= f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3}\end{aligned}$$

$$\nabla^3 f_i = f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3}$$

1.Derece merkezi fark;

$$\delta f_i = f_{i+1/2} - f_{i-1/2}$$

$i=0,1,\dots,n$ şeklinde yazılır

2.Derece merkezi fark;

$$\begin{aligned}\delta^2 f_i &= \delta(\delta f_i) = \delta(f_{i+1/2} - f_{i-1/2}) \\ &= f_{i+1} - f_i - (f_i - f_{i-1}) \\ &= f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}\end{aligned}$$

$$\delta^2 f_i = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}$$

3. Derece merkezi fark

$$\begin{aligned}\delta^3 f_i &= \delta(\delta(\delta f_i)) \\ &= \delta(\delta(f_{i+1/2} - f_{i-1/2})) \\ &= \delta(\delta f_{i+1/2} - \delta f_{i-1/2}) \\ &= \delta(f_{i+1} - f_i - (f_i - f_{i-1})) \\ &= \delta(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) \\ &= f_{i+3/2} - f_{i+1/2} - 2(f_{i+1/2} - f_{i-1/2}) + (f_{i-1/2} - f_{i-3/2}) \\ &= f_{i+3/2} - 3f_{i+1/2} + 3f_{i-1/2} - f_{i-3/2}\end{aligned}$$

$$\delta^3 f_i = f_{i+3/2} - 3f_{i+1/2} + 3f_{i-1/2} - f_{i-3/2}$$

n. dereceden ileri fark formülü

$$\Delta^n f_i = \Delta^{n-1} f_{i+1} - \Delta^{n-1} f_i$$

Üç operatör arasındaki ilişkiler

$$\Delta f_i = \delta f_{i+1/2} = \nabla f_{i+1}$$

$$\Delta^2 f_i = \delta^2 f_{i+1} = \nabla^2 f_{i+2}$$

.....

$$\Delta^r f_i = \delta^r f_{i+r/2} = \nabla^r f_{i+r}$$

$$\Delta^k f_k = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} f_{k-i}$$

Formülü ile istenilen derecede katsayılar hesaplanabilir.

$\binom{k}{i}$ açılımı $\frac{k!}{i!(k-i)!}$ şeklindedir.

Örnek

k=5 için ileri fark formülünden 5.türevi alınız.

$$\Delta^5 f_5 = \sum_{i=0}^5 (-1)^i \binom{5}{i} f_{5-i}$$

$$i=0 \quad (-1)^0 \binom{5}{0} f_{5-0} = 1 * \frac{5!}{0!5!} f_5 = f_5$$

$$i=1 \quad (-1)^1 \binom{5}{1} f_{5-1} = -1 * \frac{5!}{1!4!} f_4 = -5f_4$$

$$i=2 \quad (-1)^2 \binom{5}{2} f_{5-2} = 1 * \frac{5!}{2!3!} f_3 = 10f_3$$

$$i=3 \quad (-1)^3 \binom{5}{3} f_{5-3} = -1 * \frac{5!}{3!2!} f_2 = -10f_2$$

$$i=4 \quad (-1)^4 \binom{5}{4} f_{5-4} = 1 * \frac{5!}{4!1!} f_1 = 5f_1$$

$$i=5 \quad (-1)^5 \binom{5}{5} f_{5-5} = -1 * \frac{5!}{5!0!} f_0 = -f_0$$

$$\Delta^5 f_5 = f_5 - 5f_4 + 10f_3 - 10f_2 + 5f_1 - f_0$$

Sonlu Fark Tabloları

İleri Fark Tablosu $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$

<u>x_i</u>	<u>$f(x_i)$</u>	<u>$\Delta f(x_i)$</u>	<u>$\Delta^2 f(x_i)$</u>	<u>$\Delta^3 f(x_i)$</u>	<u>$\Delta^4 f(x_i)$</u>
x_0	f_0				
x_1	f_1	Δf_0			
x_2	f_2	Δf_1	$\Delta^2 f_0$		
x_3	f_3	Δf_2	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_0$	
x_4	f_4	Δf_3	$\Delta^2 f_2$	$\Delta^3 f_1$	$\Delta^4 f_0$

<u>x_i</u>	<u>$f(x_i)$</u>	<u>$\Delta f(x_i)$</u>	<u>$\Delta^2 f(x_i)$</u>	<u>$\Delta^3 f(x_i)$</u>	<u>$\Delta^4 f(x_i)$</u>
x_0	$f(x_0)$				
x_0+h	$f(x_0+h)$	$\Delta f(x_0)$			
x_0+2h	$f(x_0+2h)$	$\Delta f(x_0+h)$	$\Delta^2 f(x_0)$		
x_0+3h	$f(x_0+3h)$	$\Delta f(x_0+2h)$	$\Delta^2 f(x_0+h)$	$\Delta^3 f(x_0)$	
x_0+4h	$f(x_0+4h)$	$\Delta f(x_0+3h)$	$\Delta^2 f(x_0+2h)$	$\Delta^3 f(x_0+h)$	$\Delta^4 f(x_0)$

Geri Fark Tablosu $\nabla f_i = f_i - f_{i+1}$

$\underline{x_i}$	$\underline{f(x_i)}$	$\underline{\nabla f(x_i)}$	$\underline{\nabla^2 f(x_i)}$	$\underline{\nabla^3 f(x_i)}$	$\underline{\nabla^4 f(x_i)}$
x_0	f_0				
x_1	f_1	∇f_1			
x_2	f_2	∇f_2	$\nabla^2 f_2$		
x_3	f_3	∇f_3	$\nabla^2 f_3$	$\nabla^3 f_3$	
x_4	f_4	∇f_4	$\nabla^2 f_4$	$\nabla^3 f_4$	$\nabla^4 f_4$

Merkezi Fark Tablosu $\delta f_i = f_{i+1/2} - f_{i-1/2}$

$\underline{x_i}$	$\underline{f(x_i)}$	$\underline{\delta f(x_i)}$	$\underline{\delta^2 f(x_i)}$	$\underline{\delta^3 f(x_i)}$	$\underline{\delta^4 f(x_i)}$
x_0	f_0				
x_1	f_1	δf_0			
x_2	f_2	δf_1	$\delta^2 f_0$		
x_3	f_3	δf_2	$\delta^2 f_1$	$\delta^3 f_0$	
x_4	f_4	δf_3	$\delta^2 f_2$	$\delta^3 f_1$	$\delta^4 f_0$

Örnek

$F(x) = x^3 - 3x$ fonksiyonu için $h=1$ ve $[-3, 2]$ aralığında ileri fark tablosunu çıkarınız.

<u>x_i</u>	<u>$f(x_i)$</u>	<u>$\Delta f(x_i)$</u>	<u>$\Delta^2 f(x_i)$</u>	<u>$\Delta^3 f(x_i)$</u>	<u>$\Delta^4 f(x_i)$</u>
-3	-18				
-2	-2	16	-12		
-1	2	4	-6	6	0
0	0	-2	0	6	0
1	-2	-2	6	6	
2	2	4			

Genelde n .dereceden bir polinomun n .dereceden farkı sabit bir sayıya eşittir.

Genel bir polinom:

$P_n(x) = a_0x^n + a_1x_{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ şeklinde gösterirsek 3.dereceden bir polinom için üçüncü fark $\Delta^3 P_3(x) = 6a_0h^3$ dür.

$h=1$ ve $a_0=1$ için $\Delta^3 f(x) = 6*1*1^3 = 6$ olup, fark tablosundan da aynı sonuca erişilmiştir.

Sonlu Fark Tablosunda Hatanın Yayılması

Ayrık değerleri verilen $f(x)$ fonksiyonunda $f_3=f(x_3)$ değerinde ε gibi bir hata olduğunu varsayalım. Bunu fark tablosunda nasıl gösterebiliriz ?

<u>x_i</u>	<u>$f(x_i)$</u>	<u>$\Delta f(x_i)$</u>	<u>$\Delta^2 f(x_i)$</u>	<u>$\Delta^3 f(x_i)$</u>	<u>$\Delta^4 f(x_i)$</u>	<u>$\Delta^5 f(x_i)$</u>	<u>$\Delta^6 f(x_i)$</u>
x_0	f_0						
x_1	f_1	Δf_0					
x_2	f_2	Δf_1	$\Delta^2 f_0$				
x_3	$f_3+\varepsilon$	$\Delta f_2+\varepsilon$	$\Delta^2 f_1+\varepsilon$	$\Delta^3 f_0+\varepsilon$			
x_4	f_4	$\Delta f_3-\varepsilon$	$\Delta^2 f_2-2\varepsilon$	$\Delta^3 f_1-3\varepsilon$	$\Delta^4 f_0-4\varepsilon$		
x_5	f_5	Δf_4	$\Delta^2 f_3+\varepsilon$	$\Delta^3 f_2+3\varepsilon$	$\Delta^4 f_1+6\varepsilon$	$\Delta^5 f_0+10\varepsilon$	
x_6	f_6	Δf_5	$\Delta^2 f_4$	$\Delta^3 f_3-\varepsilon$	$\Delta^4 f_2-4\varepsilon$	$\Delta^5 f_1-10\varepsilon$	$\Delta^6 f_1-20\varepsilon$

ε önündeki katsayıların Binom katsayıları olduğuna dikkat edelim