YTU – Fen Edebiyat Fakültesi Sınav Soru ve Cevap Kağıdı			NOT TABLOSU						
			1. q	2. q	3.q	4.q			TOPLAM
Adı-Soyadı									
Öğrenci Numarası		Grup No							
Bölümü				Tarih			21.04.2017		
Dersin Adı	**MAT1320 Lineer Cebir** 1. Vize		Sınav Süresi	90 dk	Sınav Yeri				
Dersi veren Öğretim Üyesinin Adı Soyadı				İmza					

YÖK nun 2547 sayılı Kanunun ***Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin*** 9. Maddesi olan ***"Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek"*** fiili işleyenler **bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma** cezası alırlar.

1-) $$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = abcd\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

eşitliğini determinant özelliklerini kullanarak ispatlayınız.

1) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = abcd\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$ eşitliğini göst.

$$= abcd \begin{vmatrix} \frac{1}{a}+1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & \frac{1}{d}+1 \end{vmatrix} =$$

$$= abcd \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} & 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} & 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} & 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\dots \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & \frac{1}{d}+1 \end{vmatrix}$$

$$= abcd\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & \frac{1}{d}+1 \end{vmatrix}$$

$$= abcd\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{b} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{c} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{d} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{1}$$

$$= abcd\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

2-) a) n tek sayı olmak üzere her nxn mertebeli anti simetrik matrisin determinantının sıfır olduğunu gösteriniz (Örnek verilmeyecektir).

b) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 = 0$ lineer denklem sistemini çözünüz.

a) A $n\times n$ mertebeli antisimetrik matris

$A^T = -A$

$|A^T| = |-A|$

$|A^T| = (-1)^n |A|$ $\rightsquigarrow$ $|A^T| = |A|$ idi.

n tek sayı ise $(-1)^n = -1$

$|A^T| = -|A|$ eşitliği ancak $|A|=0$ için sağlanır.

b) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 = 0$

Sıfır çözüm: $\boxed{x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0}$

$$\underbrace{[\underbrace{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6}_{A} \quad 0]}_{AB}$$

$r = r_A = r_{AB} = 1$

$n = 6$

$n - r = 6 - 1 = 5$ keyfi bilinmeyene bağlı sonsuz çözüm

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= -2a - 3b - 4c - 5d - 6e \\ x_2 &= a \\ x_3 &= b \\ x_4 &= c \\ x_5 &= d \\ x_6 &= e \end{aligned}}$$

3-) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -7 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ve $A^{-1}B=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ matrisleri veriliyor. Buna göre $AX=B$ lineer denklem sistemini yazınız (Lineer denklem sistemi çözülmeyecektir).

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -7 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(A^{-1})^{*} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -7 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -7 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^{t}$$

transpoze alınm
-2

$$(A^{-1})^{*} = \begin{bmatrix} -7 & 8 & -11 \\ -2 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 5 \end{bmatrix}^{t} = \begin{bmatrix} -7 & -2 & 3 \\ 8 & 2 & -3 \\ -11 & -3 & 5 \end{bmatrix} \quad 9$$

$$|A^{-1}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -7 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & +5 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad 5.$$

$$(A^{-1})^{-1} = \frac{(A^{-1})^{*}}{|A^{-1}|_{1}} = \begin{bmatrix} -7 & -2 & 3 \\ 8 & 2 & -3 \\ -11 & -3 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow 2 \quad A = (A^{-1})^{-1}$$

$$\underset{2}{(A^{-1})^{-1} \cdot A^{-1}} B = B = \begin{bmatrix} -7 & -2 & 3 \\ 8 & 2 & -3 \\ -11 & -3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14-4+3 \\ 16+4-3 \\ -22-6+5 \end{bmatrix} \quad 3$$

$$\begin{bmatrix} -7 & -2 & 3 \\ 8 & 2 & -3 \\ -11 & -3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 17 \\ -23 \end{bmatrix} \quad 3$$

$$\boxed{\begin{aligned} -7x - 2y + 3z &= -15 \\ 8x + 2y - 3z &= 17 \\ -11x - 3y + 5z &= -23 \end{aligned}}$$

4) $\begin{aligned} x+y-z&=2 \\ x+2y+z&=3 \\ 2x+10y+(\lambda^2-2)z&=\lambda+16 \end{aligned}$ lineer denklem sisteminin

i) tek çözümünün, **ii)** sonsuz çözümünün, **iii)** çözümsüz olması için

λ nın alması gereken değerleri irdeleyiniz.

$x+y-z=2$

$x+2y+z=3$

$2x+10y+(a^2-2)z=a+16$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 10 & a^2-2 & a+16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & +2 & 1 \\ 0 & 8 & a^2 & a+12 \end{bmatrix} \quad 4$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-16 & a+4 \end{bmatrix} \quad 4$$

→ sutun işlemi yap 4

i) Tek çözüm $r_A = n = 3$ 3

$a^2-16 \neq 0$

$a \neq 4$ ve $a \neq -4$ 2 1

$\boxed{Ç = R - \{-4, +4\}}$

ii) Sonsuz çözüm $r_A = r_{AB} < n = 3$ 3

$\underbrace{a^2-16=0 \text{ ve } a+4=0}_{a=\mp 4 \text{ ve } a=-4}$

$\boxed{Ç = \{-4\}}$ 3 → 1

ii) Çözümsüz olması için

$r_A \neq r_{AB}$ 3

$\left.\begin{array}{ll} r_A = 2 \text{ olmalı} & a^2-16=0 \\ \text{ve} & \\ r_{AB}=3 \text{ olmalı} & a+4 \neq 0 \end{array}\right\}$ $\boxed{Ç = \{4\}}$

1 3

$$1.)\quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & a \\ 0 & -1 & 0 & b \\ 0 & 0 & -1 & c \end{vmatrix} = 0$$

olduğuna göre a,b,c,x,y,z arasındaki bağıntıyı **determinant özelliklerini** kullanarak bulunuz.

1) $$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & a \\ 0 & -1 & 0 & b \\ 0 & 0 & -1 & c \\ x & y & z & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x\;\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & a \\ 0 & -1 & 0 & b \\ 0 & 0 & -1 & c \\ x & y & z & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & a \\ 0 & -1 & 0 & b \\ 0 & 0 & -1 & c \\ 0 & y & z & ax-1 \end{vmatrix} \quad 5$$

$$= -\;y\;\begin{vmatrix} -1 & 0 & b \\ 0 & -1 & c \\ y & z & ax-1 \end{vmatrix} \quad 5 \quad = -\begin{vmatrix} -1 & 0 & b \\ 0 & -1 & c \\ 0 & z & ax+by-1 \end{vmatrix}$$

5

$$= \begin{vmatrix} -1 & c \\ z & ax+by-1 \end{vmatrix} = 0 \quad 5$$

$$= -ax - by + 1 - cz = 0$$

$$= \boxed{ax + by + cz = 1} \quad 5$$

YTÜ – Fen-Edebiyat Fakültesi, Bütünleme Sınavı Soru ve Cevap Kağıdı			Not Tablosu				
			1. S	2. S	3. S	4. S	Toplam
Adı Soyadı							
Numarası		Grup no					
Bölümü					Tarih	12.06.2019	
Dersin Adı	MAT1320 LİNEER CEBİR		Süre	80 dk.		Sınıf	
Öğretim Üyesi				İmza			

YÖK'ün 2547 sayılı Kanunun *Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin* 9. Maddesi olan *"Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek"* fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar.

S1) $\begin{aligned} x - y + 2z &= 5 \\ kx + 2y - 3z &= -6 \\ 3x + y + kz &= 3 \end{aligned}$ lineer denklem sisteminin hangi k değerleri için

a) Çözümü yoktur?

b) Sonsuz çözümü vardır?

c) Tek çözümü vardır? **[25 p]**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ k & 2 & -3 & -6 \\ 3 & 1 & k & 3 \end{array}\right] \text{ (3) } \xrightarrow[-3S_1+S_3 \to S_3]{-kS_1+S_2 \to S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & k+2 & -2k-3 & -5k-6 \\ 0 & 4 & k-6 & -12 \end{array}\right] \text{ (4) } \xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & k-6 & -12 \\ 0 & k+2 & -2k-3 & -5k-6 \end{array}\right] \text{ (2)}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}S_2 \to S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{k-6}{4} & -3 \\ 0 & k+2 & -2k-3 & -5k-6 \end{array}\right] \text{ (2) } \xrightarrow{-(k+2)S_2+S_3 \to S_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{k-6}{4} & -3 \\ 0 & 0 & \frac{-k(k+4)}{4} & -2k \end{array}\right] \text{ (2)}$$

(4) (a) $k=-4$ için $\operatorname{rank} A = 2 < 3 = \operatorname{rank}(A \vdots \vec{B})$ olduğundan, çözüm yoktur.

(4) (b) $k=0$ için $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A \vdots \vec{B}) = 2 < 3 =$ değişken sayısı, olduğundan sonsuz çözüm vardır.

(4) (c) $k \notin \{-4, 0\}$ için $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A \vdots \vec{B}) =$ değişken sayısı $=3$ olduğundan tek çözüm vardır.

YTU – Faculty of Arts and Sciences Exam Questions and Solutions Sheet			Score Table				
			1. Q	2. Q	3. Q	4. Q	TOTAL
Name-Surname							
Number		Group No					
Department					Date		02.05.2019
Course	MAT1320 Linear Algebra		Duration		80 min.	Room	
Lecturer					Signature		

Students, who cheat in the exam or attempt to this, are sentenced with **suspension of one semester or two semesters** according to the Article 9 of the **Student Discipline Ordinance** (No. 2547) of Higher Education Council (YÖK).

Q1) $x+2y+3z=4$
$y+2z-w=4$
$y-5w=0$
$2x-z-2w=2$

In the given lineer system, find the value of the variable y using **Cramer's rule. [25 p]**

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&3&0\\0&1&2&-1\\0&1&0&-5\\2&0&-1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3&0\\0&1&2&-1\\0&1&0&-5\\0&-4&-7&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&0&-5\\-4&-7&-2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&2&4\\1&0&0\\-4&-7&-22\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2&4\\-7&-22\end{vmatrix}=-(-44-(-28))=16$$

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{1}{16}\begin{vmatrix}1&4&3&0\\0&4&2&-1\\0&0&0&-5\\2&2&-1&-2\end{vmatrix}=\frac{5}{16}\begin{vmatrix}1&4&3\\0&4&2\\2&2&-1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{5}{16}\begin{vmatrix}1&4&3\\0&4&2\\0&-6&-7\end{vmatrix}=\frac{5}{16}\begin{vmatrix}4&2\\-6&-7\end{vmatrix}=\frac{5}{16}(-28-(-12)$$

$$=-5 \,//$$

Good Luck...

YTÜ – Fen-Edebiyat Fakültesi, Final Sınav Soru ve Cevap Kağıdı			Not Tablosu				
			1. S	2. S	3. S	4. S	Toplam
Adı Soyadı							
Numarası		Grup no					
Bölümü					Tarih	22.05.2019	
Dersin Adı	MAT1320 LİNEER CEBİR		Süre	80 dk.		Sınıf	
Öğretim Üyesi				İmza			

YÖK'ün 2547 sayılı Kanunun *Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin* 9. Maddesi olan *"Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek"* fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar.

S1) $\begin{aligned} x + y - 3z &= 1 \\ 2x - y + z &= -2 \\ 3x - 2y + z &= 3 \end{aligned}$ lineer denklem sistemini katsayılar matrisinin tersi yardımıyla

çözünüz. [25 p]

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 5 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -(-15+10) = 5 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{Adj} A$$

$$\operatorname{Adj} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 5 & 10 & 5 \\ -2 & -7 & -3 \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 1 & 10 & -7 \\ -1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 1 & -2/5 \\ 1/5 & 2 & -7/5 \\ -1/5 & 1 & -3/5 \end{bmatrix}$$

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$X = \begin{bmatrix} 1/5 & 1 & -2/5 \\ 1/5 & 2 & -7/5 \\ -1/5 & 1 & -3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} - 2 - \frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} - 4 - \frac{21}{5} \\ -\frac{1}{5} - 2 - \frac{9}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

1-) $\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 \end{vmatrix} = 1+a_1+a_2+a_3$ olduğunu gösteriniz.

2-) $x-y+2z=8$
$3x+y-z=1$
$2x+3y+z=16$ sistemini çözünüz.

1-) $\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1+a_1+a_2 & a_3 \\ a_1 & a_1+a_2 & 1+a_3 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1+a_1+a_2 & a_3 \\ a_1+a_2 & 1+a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a_1+a_2 & 1+a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a_1+a_2 & 1+a_1+a_2+a_3 \end{vmatrix}$

$= 1+a_1+a_2+a_3$ //

2-) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -7 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -12+35$
$= 23$ //

$\Delta \neq 0$ A^{-1} var.

$x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 16 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{23} = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & -9 & 10 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -13 & 17 \end{vmatrix}}{23} = \dfrac{-\begin{vmatrix} -9 & 10 \\ -13 & 17 \end{vmatrix}}{23}$

$= \dfrac{-23}{23} = 1$ //

$y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 16 & 1 \end{vmatrix}}{23} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 0 & -23 & -7 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{23} = \dfrac{\begin{vmatrix} -23 & -7 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}}{23} = \dfrac{3.\cancel{23}}{\cancel{23}}$

$= 3$ //

$z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 16 \end{vmatrix}}{23} = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 9 \\ 3 & 1 & 1 \\ -7 & 0 & 13 \end{vmatrix}}{23} = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ -7 & 13 \end{vmatrix}}{23} = \dfrac{115}{23}$

$= 5$ //

$x=1$, $y=3$, $z=5$ bulunur.

S4) Hangi *k* değerleri için

$$\begin{aligned} x + \;& 2y + \;& 3z &= 4 \\ 2x + \;& ky + \;& 8z &= 5 \\ x + \;& 3y + \;& kz &= 1 \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminin

(a) çözümü yoktur?

(b) sonsuz çözümü vardır?

(c) tek çözümü vardır? **[30 p]**

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & k & 8 \\ 1 & 3 & k \end{bmatrix}, \quad \vec{b}=\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[A \vdots \vec{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & k & 8 & 5 \\ 1 & 3 & k & 1 \end{array}\right] \text{(3)} \xrightarrow[\substack{-2S_1+S_2 \to S_2 \text{ (3)} \\ -S_1+S_3 \to S_3 \text{ (3)}}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & k-4 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & k-3 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_3 \text{ (3)}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & k-3 & -3 \\ 0 & k-4 & 2 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{(3)}]{-(k-4)S_2+S_3 \to S_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & k-3 & -3 \\ 0 & 0 & -(k-2)(k-5) & 3\cdot(k-5) \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} 2-(k-4)(k-3) &= 2-(k^2-7k+12) \\ &= -k^2+7k-10 \\ &= -(k^2-7k+10) \\ &= -(k-2)(k-5) \end{aligned}$$

$$3-(k-4)(-3) = -3(1-k+4) = 3(k-5)$$

(a) $k=2$ (3) için $\text{rank}(A)=2$, $\text{rank}(A \vdots \vec{B})=3$. (2) Çözüm yoktur. (5)

(b) $k=5$ için (2) $\text{rank}(A)=\text{rank}(A \vdots \vec{B})=2<3=$ Değişken sayısı. (2) Sonsuz çözüm vardır. (5)

(c) $k \notin \{2,5\}$ için $\text{rank}(A)=\text{rank}(A \vdots \vec{B})=$ Değişken sayısı $=3$. Tek çözüm vardır. (5)

(3) (2)

S2) $A=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & -2\\ 2 & 6 & 4\end{bmatrix}$ matrisinin tersini ek matris yardımıyla bulunuz. **[25 p]**

$$ek(A)=\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix}1 & -2\\ 6 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 4\\ 6 & 4\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & -2\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & 4\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 2 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 3 & -2\end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 6\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 2 & 6\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}16 & 12 & -10\\ -16 & -16 & 8\\ 16 & 18 & -11\end{bmatrix}$$

$$\det(A)=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16\\ -16\\ 16\end{bmatrix}=-16.$$

O halde, $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}ek(A)=\begin{bmatrix}-1 & -3/4 & 5/8\\ 1 & 1 & -1/2\\ -1 & -9/8 & 11/16\end{bmatrix}$

$\pm$ işaretler : Σ 5 puan

Transpoze : 5 puan

$|\because|$ her biri 1 puan : Σ 9 p.

Determinant : 5 puan

Sonuç : 1 puan

S3) Hangi *k* değerleri için $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & k & 2 \\ 2 & k & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -k & k \\ -2 & 1 & k & k \end{bmatrix}$ matrisinin tersi yoktur? **[25 p]**

A kare matrisinin tersinin olmaması için gerek ve yeter şart $\det(A)=0$ olmasıdır. 5

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & k & 2 \\ 2 & k & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -k & k \\ -2 & 1 & k & k \end{vmatrix} \underset{\substack{-2S_1+S_2 \to S_2 \; 2 \\ S_1+S_3 \to S_3 \; 2 \\ 2S_1+S_4 \to S_4 \; 2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & k & 2 \\ 0 & k+2 & 1-2k & -5 \\ 0 & 0 & 0 & k+2 \\ 0 & -1 & 3k & k+4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} k+2 & 1-2k & -5 \\ 0 & 0 & k+2 \\ -1 & 3k & k+4 \end{vmatrix} \quad 4$$

$$= -(k+2) \cdot \begin{vmatrix} k+2 & 1-2k \\ -1 & 3k \end{vmatrix} \quad 4$$

$$= -(k+2) \cdot (3k^2+6k+1-2k)$$
$$= -(k+2) \cdot (3k^2+4k+1)$$
$$= -(k+2) \cdot (3k+1)(k+1) \quad 3$$

$\det(A)=0 \iff k=-2$ 1 veya $k=-\frac{1}{3}$ 1 veya $k=-1$. 1

O halde, $k \in \{-2,-1,-\frac{1}{3}\}$ için A matrisinin tersi yoktur.

$-(3k^3+10k^2+9k+2)=0$

2- a) $\{f_1, f_2, f_3\}$, $\mathbb{R}^3$ de lineer bağımsız bir küme ve A bir involüt matris olsun. $\{Af_1, Af_2, Af_3\}$ kümesinin de lineer bağımsız olacağını gösteriniz.

$c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$ 2

A involut $\Rightarrow A^2 = I$ 2

$\lambda_1 A f_1 + \lambda_2 A f_2 + \lambda_3 A f_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 \overset{?}{=} \lambda_2 \overset{?}{=} \lambda_3 \overset{?}{=} 0$

A ile çarpalım 2

$\lambda_1 A^2 f_1 + \lambda_2 A^2 f_2 + \lambda_3 A^2 f_3 = \cancel{A0}$ 2

$\lambda_1 I f_1 + \lambda_2 I f_2 + \lambda_3 I f_3 = A \cdot 0$ 2

$I \cdot (\underbrace{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3}_{0}) = A \cdot 0 = 0$ 2

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ 1

b) $n \times n$ mertebeden bir A kare matrisinin inversi varsa tektir. İspatlayınız. (Örnek verilmeyecektir.)

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot B = B \cdot A = I_n \\ A \cdot D = D \cdot A = I_n \end{array}\right\} \quad B \overset{?}{=} D$$

4

$A \cdot B = I_n$

$DAB = D\, I_n$ 3

$I_n B = D$ 3

$B = D$ 2

YTÜ – Fen-Edebiyat Fakültesi, 1. Vize Sınav Soru ve Cevap Kağıdı			Not Tablosu				
			1. S	2. S	3. S	4. S	Toplam
Adı Soyadı							
Numarası		Grup no					
Bölümü					Tarih	12.04.2019	
Dersin Adı	MAT1320 LİNEER CEBİR		Süre	80 dk.	Sınıf		
Öğretim Üyesi				İmza			

YÖK'ün 2547 sayılı Kanunun *Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin* 9. Maddesi olan *"Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek"* fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar.

S1) Her ikisi de ortogonal ve ters simetrik olan A ve B kare matrisleri değişmeli ise AB matrisinin involut matris olduğunu gösteriniz. **[20 p]**

A ortogonal olduğundan $AA^T = I_n$ olur. 3

A ters simetrik olduğundan $A^T = -A$ olur. 3

O halde, $A\cdot(-A) = I_n$, $-A^2 = I_n$ ve dolayısıyla $A^2 = -I_n$ olur. 3

Benzer şekilde, $B^2 = -I_n$ elde edilir. 1

Buradan da, $(AB)^2 = ABAB = AABB = A^2B^2 = (-I_n)\cdot(-I_n) = I_n^2 = I_n$ olur.
2 4 4

A ile B değişmeli olduğundan

Dolayısıyla, AB matrisi involut matristir.

2. Çözüm A ve B ortogonal ise $\begin{cases} A^T = A^{-1} \\ B^T = B^{-1} \end{cases}$ dir. 3

A ve B ters simetrik ise $\begin{cases} A^T = -A \\ B^T = -B \end{cases}$ dir. 3

$(AB)^2 = (AB)(AB) = A(\underbrace{BA}_{AB})B = AABB$ 4

2

$= A(-A^T)B(-B^T)$ 2

$= (AA^T)(BB^T)$ 2

$= (AA^{-1})(BB^{-1})$ 2

$= I_n \cdot I_n = I_n$ 2

Değişmeli olduğu gösterene 2

AB involut matristir.

involut bilgisine 2 $(AB)(AB) = I$

YTÜ - Fen-Edebiyat Fakültesi,
Bütünleme Sınav Soru ve Cevap Kağıdı

Adı Soyadı			
Öğrenci Numarası		Grup No	
Bölümü			
Dersin Adı	MAT1320 Lineer Cebir	Süre	90 dk
Dersi veren Öğretim Üyesinin Adı Soyadı		İmza	

NOT TABLOSU				
1. S	2. S	3. S	4. S	TOPLAM
			Tarih	05/07/2017
			Sınav Yeri	

YÖK nun 2547 sayılı Kanunun *Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin* 9. Maddesi olan ***"Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek"*** fiili işleyenler **bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma** cezası alırlar.

1-) $\begin{vmatrix} a-b+c & a+c & \cdots & a+c \\ a+c & a-b+c & \cdots & a+c \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+c & a+c & \cdots & a-b+c \end{vmatrix}_{n\times n}$ determinantını, determinantın özelliklerini kullanarak hesaplayınız?

$$\begin{vmatrix} na+nc-b & a+c & \cdots & a+c \\ na+nc-b & a-b+c & \cdots & a+c \\ \vdots & \vdots & & \\ na+nc-b & a+c & \cdots & a-b+c \end{vmatrix}_{n\times n} =$$ 5

$$(na+nc-b)\begin{vmatrix} 1 & a+c & \cdots & a+c \\ 1 & a-b+c & \cdots & a+c \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & a+c & \cdots & a-b+c \end{vmatrix}_{n\times n}$$ 5

$$(na+nc-b)\begin{vmatrix} 1 & a+c & a+c & \cdots & a+c \\ 0 & -b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -b & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b \end{vmatrix}_{n\times n}$$ 5

$$(na+nc-b)\begin{vmatrix} -b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -b \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$ 5

$$=(na+nc-b)\,(-b)^{n-1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (na+nc-b)(-b)^{n-1}$$ 5

Başarılar.

b) A ve B değişmeli matris olduğuna göre A^2 ve B^3 matrislerinin değişmeli olduklarını gösteriniz. (Örn
verilmeyecektir.)

3

$A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow A^2 \cdot B^3 \overset{?}{=} B^3 \cdot A^2$

$A^2 \cdot B^3 = A \cdot A \cdot B \cdot B^2 = ABABB = BABAB$

2 2

$= BABBA$

$= BBABA$

$= BBBAA$

$= B^3 \cdot A^2$ ✓