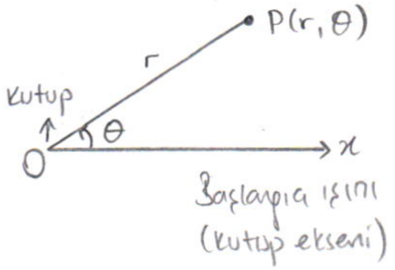
KUTUPSAL KOORDİNATLAR

x ve y dik koordinatları düzlemdeki bir P noktasını bir dikey doğru ile bir yatay doğrunun kesişmesi olarak belirtir. Kutupsal koordinatlar ise bir P noktasını, bir çemberle merkezinden çıkan bir ışının kesişmesi olarak belirtir. Kutupsal koordinatı tanımlamak için önce bir O orijini (buna "kutup" denir) ve bir başlangıç ışını sabitlenir. Bu durumda düzlemde bir P noktasını, (r, θ) kutupsal koordinat çifti ile gösterebiliriz.



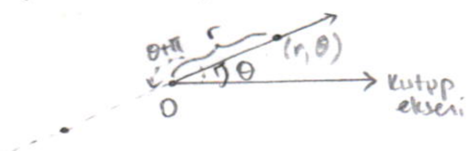
$P(r, \theta)$

r: O'dan P'ye alınan yönlü uzaklık

θ: Kutup ekseninden OP ye alınan yönlü açı $\begin{cases} \theta > 0 & \text{saatin tersi yönü} \\ \theta < 0 & \text{saat yönü} \end{cases}$

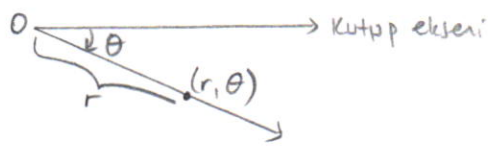
* Bir noktayı temsil eden sonsuz tane kutupsal koordinat çifti vardır.
* Eğer $r = 0$ ise θ ne olursa olsun P kutuptur.
* Eğer $r < 0$ ise P, θ açılı ışının ters yönündeki $\theta + \pi$ açılı ışın üzerinde olup kutuptan $|r|$ birim uzaklıktadır.

• (r, θ) : $\theta > 0$, $r > 0$

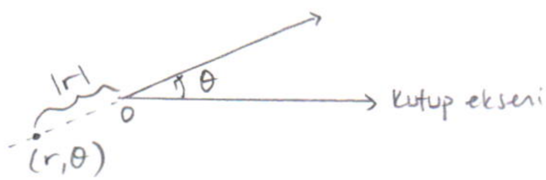


$$(r, \theta) = (r, \theta + 2\pi) = \ldots = (r, \theta + 2k\pi)$$
$$= (-r, \theta + \pi) = (-r, \theta + 3\pi) = \ldots = (-r, \theta + (2k+1)\pi) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

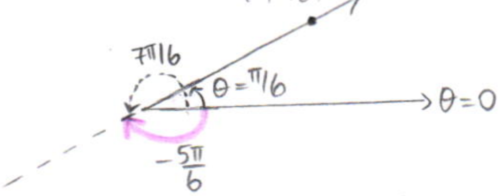
• (r, θ) : $\theta < 0$, $r > 0$



• (r, θ) : $\theta > 0$, $r < 0$



Örnek: $P(2, \pi/6)$ noktasının tüm kutupsal koordinatlarını bulunuz.



$$\left(2, -\frac{11\pi}{6}\right) = \left(2, \frac{\pi}{6}\right) = \left(-2, -\frac{5\pi}{6}\right) = \left(-2, \frac{7\pi}{6}\right)$$

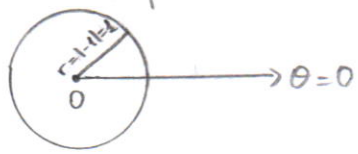
$$\left(2, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) \qquad \left(-2, -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right) \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Kutupsal Denklemler ve Grafikleri

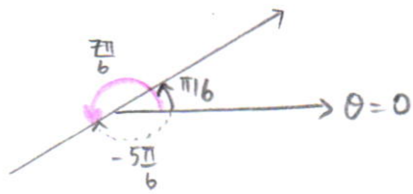
Denklem	Grafiği
$r=a$	Merkezi O'da yarıçapı $\lvert a \rvert$ olan çember
$\theta=\theta_0$	O'dan geçen ve kutup ekseni ile θ_0 açısı yapan doğru

Örnek: Kutupsal koordinatları aşağıdaki şartları sağlayan noktalar kümesinin grafiğini çizin

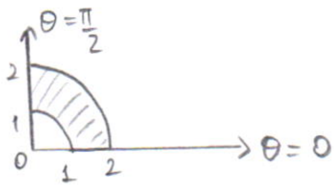
a) $r=1$ ve $r=-1$



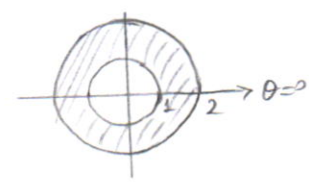
b) $\theta=\frac{\pi}{6}$, $\theta=\frac{7\pi}{6}$, $\theta=-\frac{5\pi}{6}$



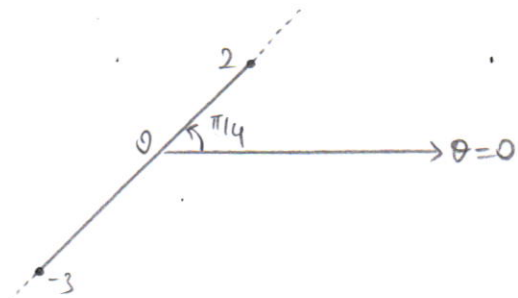
c) $1 \leq r \leq 2$ ve $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$



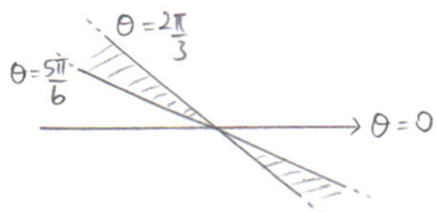
θ kısıtlaması olmasaydı:



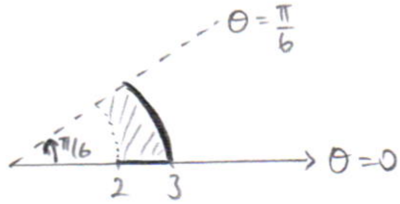
d) $-3 \leq r \leq 2$ ve $\theta=\frac{\pi}{4}$



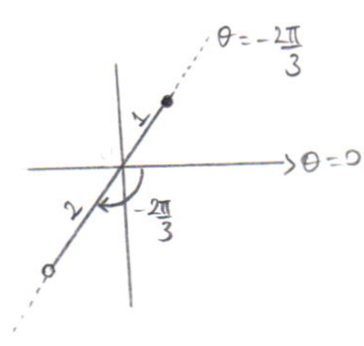
e) $\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$



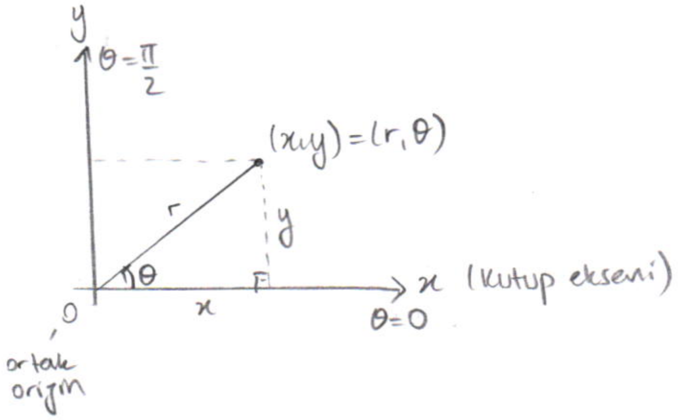
f) $2 < r \leq 3$, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{6}$



g) $-1 \leq r < 2$, $\theta=-\frac{2\pi}{3}$



Kutupsal Koordinatlar ile Kartezyen Koordinatlar Arasındaki İlişki



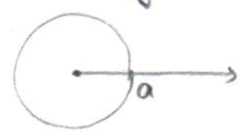
$$x^2+y^2=r^2 \quad , \quad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r} \Rightarrow y=r\sin\theta$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r} \Rightarrow x=r\cos\theta$$

Örnek: $x^2+y^2=a^2$ çemberinin kutupsal denklemini yazın.

$$\left.\begin{array}{l} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{array}\right\} x^2+y^2=r^2=a^2 \Rightarrow r=|a|$$



Örnek: $x^2+(y-3)^2=9$ çemberinin kutupsal denklemini yazın.

$$x^2+y^2-6y+9=9 \Rightarrow x^2+y^2-6y=0 \Rightarrow r^2-6r\sin\theta=0 \Rightarrow r=6\sin\theta$$

Örnek: $r^2=a^2\cos 2\theta$ nın kartezyen denklemini yazın.

$$\left.\begin{array}{l} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ \cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta \end{array}\right\} \begin{array}{l} r^2=a^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=a^2\left(\frac{x^2}{r^2}-\frac{y^2}{r^2}\right)=\frac{a^2}{r^2}(x^2-y^2) \\ (r^2)^2=a^2(x^2-y^2) \Rightarrow (x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2) \end{array}$$

Örnek: $r=\frac{4}{2\cos\theta-\sin\theta}$ nın kartezyen denklemini yazın.

$$r(2\cos\theta-\sin\theta)=4 \Rightarrow 2r\cos\theta-r\sin\theta=4 \Rightarrow 2x-y=4 \Rightarrow y=2x-4$$

Örnek:

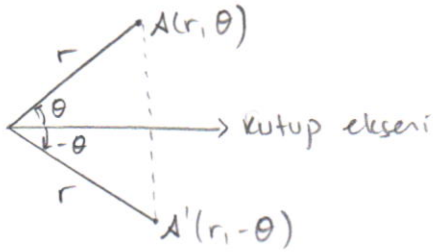
Kutupsal Denklem	Kartezyen Denklemi
$r\cos\theta=2$	$x=2$
$r^2\cos\theta\sin\theta=4$	$xy=4$
$r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta=1$	$x^2-y^2=1$
$r=1+2r\cos\theta$	$y^2-3x^2-4x-1=0$
$r=1-\cos\theta$	$x^4+y^4+2x^2y^2+2x^3+2xy^2-y^2=0.$
$r=2a\cos\theta$	$(x-a)^2+y^2=a^2$
$r=4\cos\theta$	$(x-2)^2+y^2=4$

Kutupsal Koordinatlarda Grafik Çizimi

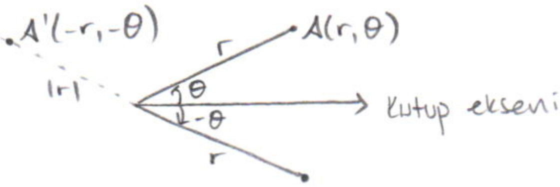
Simetri

1. simetri özelliği: $r=f(\theta)$ fonksiyonunda $\theta \to -\theta$ yazılırsa

a) $f(-\theta)=f(\theta)=r$ ise kutup eksenine göre simetri vardır.

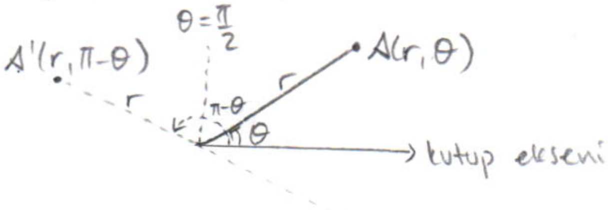


b) $f(-\theta)=-f(\theta)=-r$ ise $\theta=\frac{\pi}{2}$ ye göre simetri vardır.

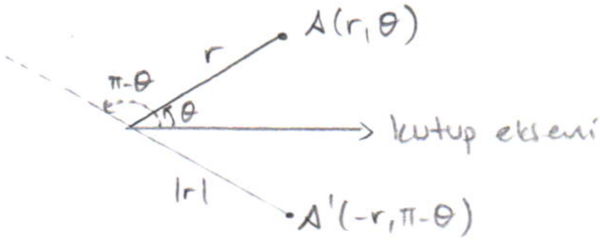


2. simetri özelliği: $r=f(\theta)$ fonksiyonunda $\theta \to \pi-\theta$ yazılırsa

a) $f(\pi-\theta)=f(\theta)=r$ ise $\theta=\frac{\pi}{2}$ ye göre simetri vardır.



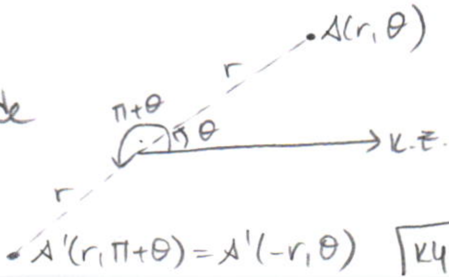
b) $f(\pi-\theta)=-f(\theta)=-r$ ise kutup eksenine göre simetri vardır.



3- simetri özelliği:

a) $f(\pi+\theta)=f(\theta)=r$ ise orijine göre simetriktir.

b) (r,θ) eğri üzerinde iken $(-r,\theta)$ de eğri üzerinde ise orijine göre simetri vardır.



$r=f(\theta)$ Eğrisinin Eğimi

$r=f(\theta)$ kutupsal eğrisi için ;

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \\ y &= r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta \end{aligned}\right\} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta}$$

(r,θ) noktasında $r=f(\theta)$ nın eğimi:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(r,\theta)} = \left.\frac{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta}\right|_{(r,\theta)}$$

Kutupsal Koordinatlarda Grafik Çizimi

$r=f(\theta)$ eğrisinin grafiği çizilirken;

1) Eğri periyodik ise periyodu bulunur.
2) Simetrisi incelenip çizim aralığı belirlenir.
3) Türev yardımıyla $r=f(\theta)$ nın değişimi incelenir.
4) Bazı θ değerleri için $(\theta, f(\theta))$ noktaları bulunur.
5) θ, r ve r' değerlerini içeren tablo yapılır.

Örnek: $r=a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$' eğrisini çiziniz.

1) Periyod : 2π $\rightarrow [0,2\pi]$ aralığı

2) 1-simetri? $\theta \rightarrow -\theta$ $\Rightarrow f(-\theta) = a(1+\cos(-\theta)) = a(1+\cos\theta) = f(\theta) = r$

$\Rightarrow$ kutup eksenine göre simetrik

2-simetri? $\theta \rightarrow \pi-\theta$ $\Rightarrow f(\pi-\theta) = a(1+\cos(\pi-\theta)) = a(1-\cos\theta)$

$\Rightarrow$ 2. simetri öz. yok.

3-simetri? $\theta \rightarrow \pi+\theta$ $\Rightarrow f(\pi+\theta) = a(1+\cos(\pi+\theta)) = a(1-\cos\theta)$

$\Rightarrow$ 3. simetri öz. yok.

inceleme aralığı : $[0,\pi]$ (Kutup eks. göre simetrik olduğundan)

3) $r' = -a\sin\theta < 0$ $\Rightarrow$ $[0,\pi]$ de azalan bir fonksiyondur.

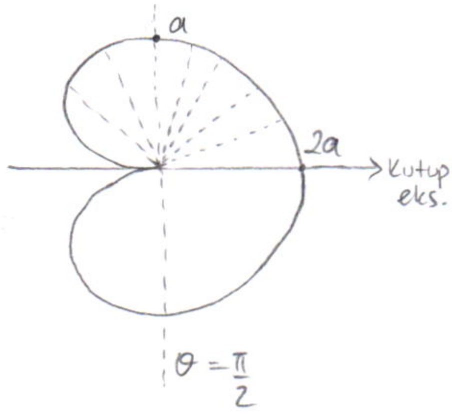
4) $\theta=0 \Rightarrow r=2a \qquad (2a,0)$

$\theta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow r=a \qquad (a,\frac{\pi}{2})$

$\theta=\pi \Rightarrow r=0 \qquad (0,\pi)$

5)

θ	0	$\pi/2$	π
r'	$-$		$-$
r	$2a \searrow$	a	$\searrow 0$



Örnek- $r=a(1-\sin\theta)$ eğrisini çizin.

1) Periyodu: $2\pi \Rightarrow [0,2\pi]$ aralığı

2) $\theta \to -\theta \Rightarrow f(-\theta)=a(1-\sin(-\theta))=a(1+\sin\theta)\neq f(\mp\theta)$ (1. simetri yok)

$\theta \to \pi-\theta \Rightarrow f(\pi-\theta)=a(1-\sin(\pi-\theta))=a(1-\sin\theta)=f(\theta)$

$\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$'ye göre simetrik (2. simetri öz.)

$\theta \to \pi+\theta \Rightarrow f(\pi+\theta)=a(1-\sin(\pi+\theta))=a(1+\sin\theta)\neq f(\mp\theta)$ (3. simetri yok)

İnceleme aralığı: $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ ($\theta=\frac{\pi}{2}$'ye göre simetrik olduğundan)

3) $r'=-a\cos\theta<0 \quad (\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}))$

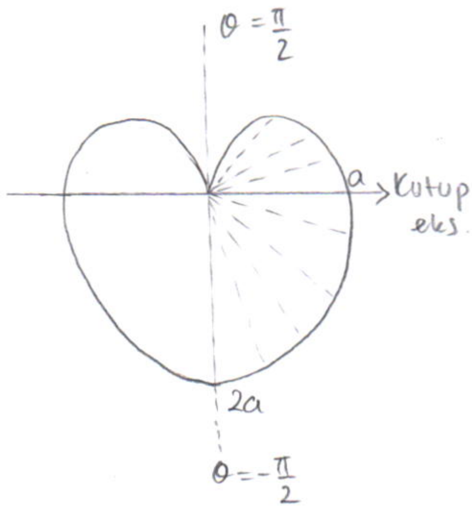
4) $\theta=-\frac{\pi}{2} \Rightarrow r=2a$

$\theta=0 \Rightarrow r=a$

$\theta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow r=0$

5)

θ	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
r'	$-$		$-$
r	$2a \searrow$	a	$\searrow 0$



Örnek: $r=1-\cos\theta$ eğrisini çizin.

1) $[0,2\pi]$ aralığı

2) $f(-\theta)=1-\cos(-\theta)=1-\cos\theta=f(\theta) \Rightarrow$ kutup eks. göre simetrik $\Rightarrow [0,\pi]$'de incele.

3) $r'=\sin\theta>0 \quad (\theta\in(0,\pi)) \Rightarrow [0,\pi]$ de artan bir fonksiyon.

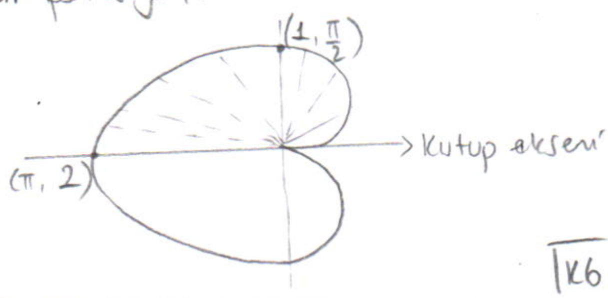
4) $\theta=0 \Rightarrow r=0$

$\theta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow r=1$

$\theta=\pi \Rightarrow r=2$

5)

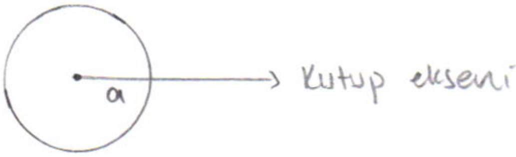
θ	0	$\pi/2$	π
r'	$+$		$+$
r	$0 \nearrow$	1	$\nearrow 2$



Bazı Temel Şekiller

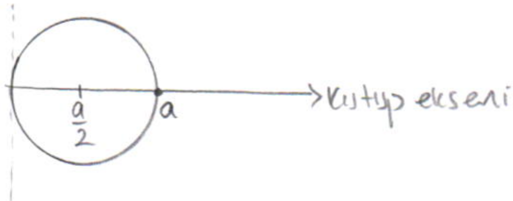
Çemberler

1) $r = a$: $|a|$ yarıçaplı merkezil çember



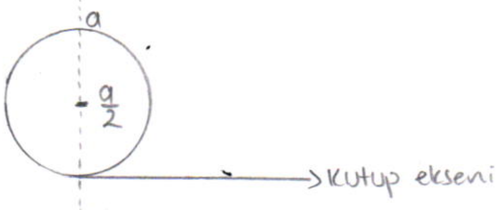
$(x^2 + y^2 = a^2$ çemberi$)$

2) $r = a\cos\theta$: Kutup ve $(a,0)$ noktalarından geçen $\frac{a}{2}$ yarıçaplı çember



$$\left(r = a\cos\theta \Rightarrow r^2 = a^2\cos^2\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2\frac{x^2}{r^2} \Rightarrow (x^2+y^2)^2 = a^2x^2 \Rightarrow x^2+y^2 = ax \Rightarrow \underbrace{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}}_{\text{çemberi}} \right)$$

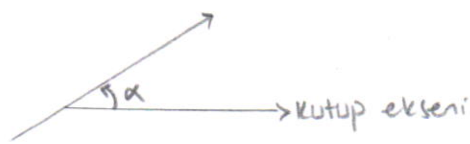
3) $r = a\sin\theta$: Kutup ve $(a, \frac{\pi}{2})$ noktalarından geçen $\frac{a}{2}$ yarıçaplı çember



$\left(x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}\right.$ çemberi$\left.\right)$

Doğrular

4) $\theta = \alpha \Rightarrow$ Eğimi α olan doğru

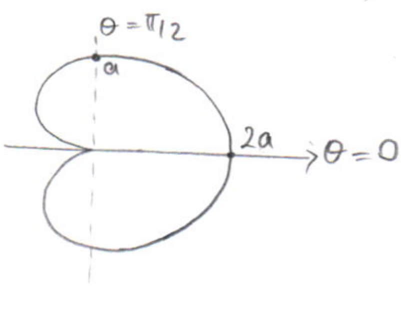


5) $r\cos\theta = a$ veya $r = a\sec\theta \Rightarrow x = a$ doğrusu

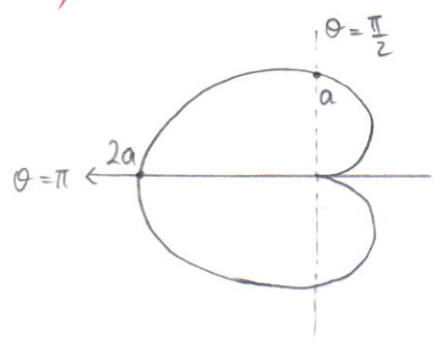
$r\sin\theta = b$ veya $r = b\,\mathrm{cosec}\,\theta \Rightarrow y = b$ doğrusu

Kardiyoidler

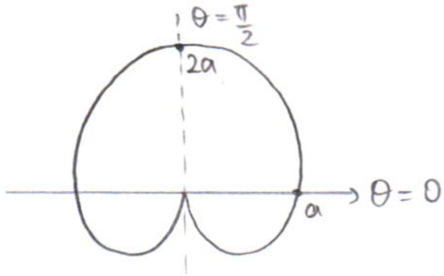
6) $r = a(1 + \cos\theta)$ $(a > 0)$



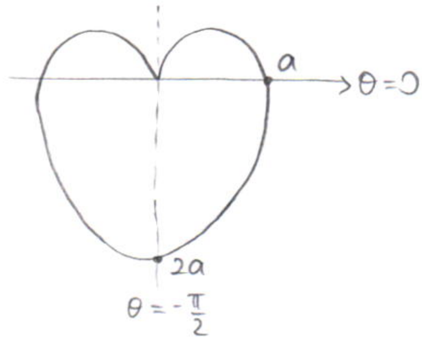
7) $r = a(1 - \cos\theta)$ $(a > 0)$



8) $r = a(1+\sin\theta)$ $(a>0)$

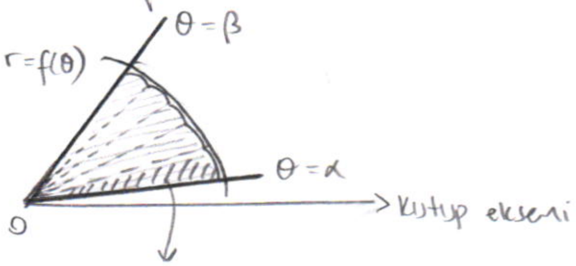


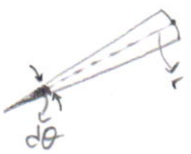
9) $r = a(1-\sin\theta)$ $(a>0)$.



Kutupsal Koordinatlarda Alan

$r = f(\theta)$ eğrisinin $\theta = \alpha$ ve $\theta = \beta$ doğrularıyla sınırladığı bölgenin alanı:





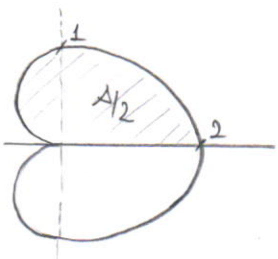
dA alan diferansiyeli:

$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

(Alan diferansiyelinin integralidir)

Örnek: $r = 1+\cos\theta$ eğrisinin sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.



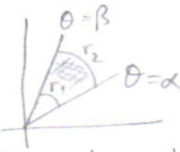
$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1+\cos\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(\theta + 2\sin\theta \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta\right) = \frac{1}{2}\pi + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\Big|_0^{\pi} = \frac{3\pi}{4}$$

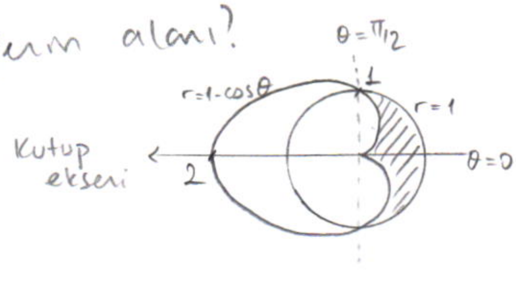
$$A = \frac{3\pi}{2}$$

(*) $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$, $r_1 = f_1(\theta)$ ve $r_2 = f_2(\theta)$ arasındaki bölgenin alanı: $(r_1 < r_2)$

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r_2^2 d\theta - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r_1^2 d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)\,d\theta$$



Örnek: $r = 1$ çemberinin içinde ve $r = 1-\cos\theta$ kardiyoidinin dışında kalan bölgenin alanı?



$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 1^2 d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1-\cos\theta)^2 d\theta$$

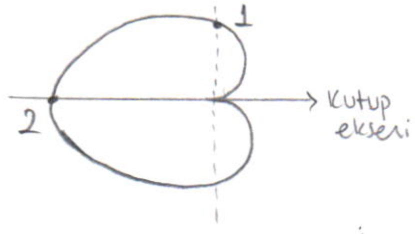
$$\Rightarrow A = 2 - \frac{\pi}{4}$$

Kutupsal Eğrinin Uzunluğu

$r=f(\theta)$ eğrisinin $\theta=\alpha$ ve $\theta=\beta$ arasındaki uzunluğu:

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta$$

Örnek: $r=1-\cos\theta$ kardiyoidinin uzunluğunu bulunuz.

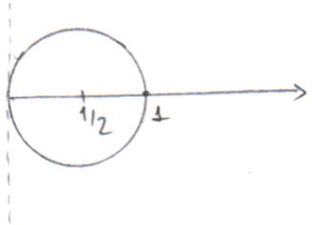


$r=1-\cos\theta \quad r'=\sin\theta$

$$r^2+(r')^2 = 1-2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta = 2-2\cos\theta$$
$$=2-2\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)=4\sin^2\frac{\theta}{2}$$
$$\sqrt{r^2+(r')^2}=\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}=\left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|$$

$$L=\int_0^{2\pi}\left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|d\theta=\int_0^{2\pi}2\sin\frac{\theta}{2}d\theta=-4\cos\frac{\theta}{2}\Big|_0^{2\pi}=8$$

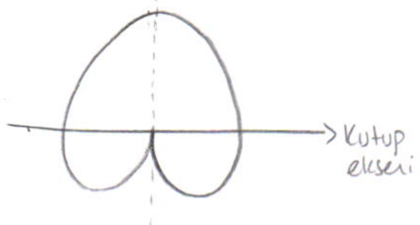
Örnek: $r=\cos\theta$ çemberinin uzunluğunu bulunuz.



$r=\cos\theta \quad r'=-\sin\theta$

$$r^2+(r')^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$
$$\sqrt{r^2+(r')^2}=1 \Rightarrow L=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\pi$$

Örnek: $r=1+\sin\theta$ kardiyoidinin uzunluğunu bulunuz.



$r=1+\sin\theta \quad r'=\cos\theta$

$$r^2+(r')^2 = 1+2\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta = 2(1+\sin\theta)$$
$$=2\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)=2\left(1+\left(2\cos^2\left(\frac{\pi-2\theta}{4}\right)-1\right)\right)$$
$$=4\cos^2\left(\frac{\pi-2\theta}{4}\right)$$
$$\sqrt{r^2+(r')^2}=\left|2\cos\left(\frac{\pi-2\theta}{4}\right)\right|$$

$$\frac{L}{2}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left|2\cos\left(\frac{\pi-2\theta}{4}\right)\right|d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos\left(\frac{\pi-2\theta}{4}\right)d\theta=\frac{2\sin\left(\frac{\pi-2\theta}{4}\right)}{-\frac{1}{2}}\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=-4(0-1)=4$$

TKG