第三章　运输问题

Transportation Problems

- §1运输问题的数学模型
- §2表上作业法
- §3产销不平衡的运输问题及其求解方法
- §4应用举例

§1 运输问题的数学模型

一、问题的提出

例1 产销平衡表

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	产量a_i
A_1	6 x_{11}	4 x_{12}	6 x_{13}	200
A_2	6 x_{21}	5 x_{22}	5 x_{23}	300
销量b_j	150	150	200	500

A_2到B_1的单位运价

由产地A_2运往销地B_3的物品数量

设x_{ij}表示A_i到B_j的运量。则

$$MinZ = 6x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + 6x_{21} + 5x_{22} + 5x_{23}$$

$$s.t.\quad \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 200 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 300 \\ x_{11} + x_{21} = 150 \\ x_{12} + x_{22} = 150 \\ x_{13} + x_{23} = 200 \\ x_{ij} \geq 0;\ i = 1,2;\ j = 1,2,3 \end{cases}$$

二、运输问题的一般数学模型

设有m个产地(产量)：$A_1(a_1), A_2(a_2), \ldots, A_m(a_m)$，

n个销地(需求量)：$B_1(b_1), B_2(b_2), \ldots, B_n(b_n)$；

销地 / 产地	B_1	B_2	…	B_n	产量a_i
A_1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	…	x_{1n} c_{1n}	a_1
A_2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	…	x_{2n} c_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
A_m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	…	x_{mn} c_{mn}	a_m
销量b_j	b_1	b_2	…	b_n	

$$\min Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\ i=1,2,\cdots,m\\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\ j=1,2,\cdots,n\\ x_{ij}\geq 0\end{cases}$$

满足产销平衡：$\sum a_i=\sum b_j$

c_{ij}—产地A_i运往销地B_j的单位运费

x_{ij}—产地A_i运往销地B_j的物资量

三、约束系数矩阵的特征

1. 系数矩阵的形式

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	产量a_i
A_1	x_{11} 6	x_{12} 4	x_{13} 6	200
A_2	x_{21} 6	x_{22} 5	x_{23} 5	300
销量b_j	150	150	200	500

$$MinZ = 6x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + 6x_{21} + 5x_{22} + 5x_{23}$$

$$s.t. \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 200 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 300 \\ x_{11} + x_{21} = 150 \\ x_{12} + x_{22} = 150 \\ x_{13} + x_{23} = 200 \\ x_{ij} \geq 0;\ i = 1,2;\ j = 1,2,3 \end{cases}$$

系数矩阵A为：

$$\begin{array}{cccccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

前m行对应产地约束，即平衡表的行；A的第$i(i\leq m)$行对应平衡表的第i行。

后n行对应销地约束，即平衡表的列；A的第$m+j(j\leq n)$行对应平衡表的第j列。

2. 系数矩阵的特征

特征1： 矩阵的行、列与平衡表行、列一一对应

特征2： 矩阵的列向量只有两个元素为1

x_{ij}的系数列向量为：$P_{ij} = (0\cdots1\cdots0\cdots1\cdots0)^{\mathrm{T}} = e_i + e_{m+j}$

$$
\begin{array}{c|ccccccccccccc|l}
 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} & \\
\hline
u_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & & & & & & \\
u_2 & & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & & \\
\vdots & & & & & & & & & \ddots & & & & & \left.\right\} m\text{行} \\
u_m & & & & & & & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & \\
v_1 & 1 & & & & 1 & & & & \cdots & 1 & & & & \\
v_2 & & 1 & & & & 1 & & & \cdots & & 1 & & & \\
\vdots & & & \ddots & & & & \ddots & & \cdots & & & \ddots & & \left.\right\} n\text{行} \\
v_n & & & & 1 & & & & 1 & \cdots & & & & 1 & \\
\hline
\end{array}
$$

$$
P_{ij} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ \rightarrow \quad 第\,i\,行 \\ \\ \rightarrow 第\,m+j\,行 \\ \\ \\ \end{array}
$$

特征3：$r(A) = m + n - 1$

设m、$n \geq 2$，则$m + n \leq m \times n$，故$r(A) \leq m + n$。

$$\text{由} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i$$

$$\text{由} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

对于产销平衡问题，有$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

第$k(1 \leq k \leq m)$个约束条件可表示为：

$$\sum_{j=1}^{n} x_{kj} = a_k \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{m} a_i$$

上式表明第k个约束条件可以由另外$m+n-1$个约束条件线性表示，

故$m+n$个约束条件中有1个是多余的，因此

$$r(A) = m + n - 1$$

2. 系数矩阵的特征

特征1： 矩阵的行、列与平衡表行、列一一对应

特征2： 矩阵的列向量只有两个元素为1

x_{ij}的系数列向量为：$P_{ij}=(0\cdots1\cdots0\cdots1\cdots0)^T=e_i+e_{m+j}$

特征3： $r(A)=m+n-1$

由此可见，A中$m\times n$个系数列向量的最大线性无关向量的个数为$m+n-1$，故基B应该是（$m+n-1)\times(m+n-1$）维。所以运输问题基变量的个数为$m+n-1$。

运输问题的解若是基可行解，则平衡表上$m\times n$个变量中最多只能有$m+n-1$个取正值，而其它的变量为零。

第2节 表上作业法

一、概念

例2

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量a_i
A_1	3	11	3 ④	10 ③	7
A_2	1 ③	9	2 ①	8	4
A_3	7	4 ⑥	10	5 ③	9
销量b_j	3	6	5	6	20

1) 数字格　　2) 空格

3) 闭回路

以某空格为起点。用水平或垂直线向前划，当碰到一数字格时可以转90°后，继续前进，直到回到起始空格为止。

3) 闭回路

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量a_i
A_1	3	11	3 ④	10 ③	7
A_2	1 ③	9	2 ①	8	4
A_3	7	4 ⑥	10	5 ③	9
销量b_j	3	6	5	6	20

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量a_i
A_1	3	11	3 ④	10 ③	7
A_2	1 ③	9	2 ①	8	4
A_3	7	4 ⑥	10	5 ③	9
销量b_j	3	6	5	6	20

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量a_i
A_1	3	11	3 ④	10 ③	7
A_2	1 ③	9	2 ①	8	4
A_3	7	4 ⑥	10	5 ③	9
销量b_j	3	6	5	6	20

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量a_i
A_1	3	11	3 ④	10 ③	7
A_2	1 ③	9	2 ①	8	4
A_3	7	4 ⑥	10	5 ③	9
销量b_j	3	6	5	6	20

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量 a_i
A_1	3	11	3 ④	10 ③	7
A_2	1 ③	9	2 ①	8	4
A_3	7	4 ⑥	10	5 ③	9
销量 b_j	3	6	5	6	20

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量 a_i
A_1	3	11	3 ④	10 ③	7
A_2	1 ③	9	2 ①	8	4
A_3	7	4 ⑥	10	5 ③	9
销量 b_j	3	6	5	6	20

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量a_i
A_1	3	11	3 4	10 3	7
A_2	1 3	9	2 1	8	4
A_3	7	4 6	10	5 3	9
销量b_j	3	6	5	6	20

从每一空格出发一定存在和可以找到唯一的闭回路：

空格	闭 回 路
(11)	(11)-(21)-(23)-(13)-(11)
(12)	(12)-(32)-(34)-(14)-(12)
(22)	(22)-(32)-(34)-(14)-(13)-(23)-(22)
(24)	(24)-(23)-(13)-(14)-(24)
(31)	(31)-(34)-(14)-(13)-(23)-(21)-(31)
(33)	(33)-(34)-(14)-(13)-(33)

4) 闭回路上的变量所对应的系数列向量组线性相关性

结论1： 运输问题一组变量构成闭回路的充要条件是这组变量所对应的系数列向量线性相关；

($x_{11}, x_{13}, x_{23}, x_{21}$) 构成闭回路，则

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量a_i
A_1	3	11	3 ④	10 ③	7
A_2	1 ③	9	2 ①	8	4
A_3	7	4 ⑥	10	5 ③	9
销量b_j	3	6	5	6	20

$$-\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

所以 ($x_{11}, x_{13}, x_{23}, x_{21}$) 所对应的系数列向量线性相关。

结论1： 运输问题一组变量构成闭回路的充要条件是这组变量所对应的系数列向量线性相关；

结论2 运输问题的一个可行解是基可行解的充要条件是：

1）数字格的个数为m+n-1个

$\because \quad r(A)=m+n-1 \qquad \therefore$ 基变量个数为$m+n-1$

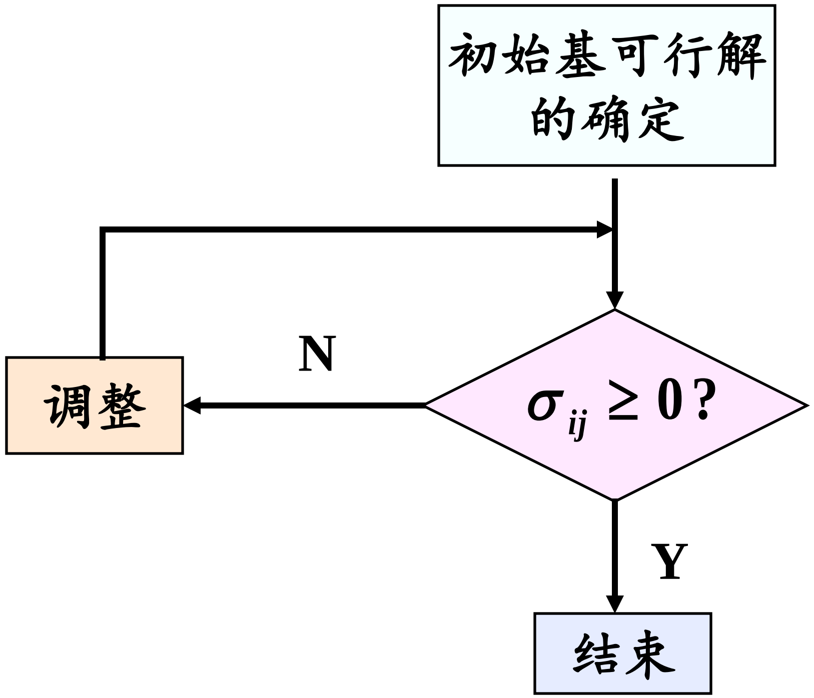
2） m+n-1个数字格不构成闭回路。

$\because$ 基变量的系数列向量线性无关

$\therefore$ $m+n-1$个数字格不构成闭回路

二、表上作业法

1、表上作业法的步骤



2、初始基可行解的确定

与一般LP问题不同，产销平衡的运输问题一定存在可行解。

$$\left(\text{已知} \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = d > 0, \qquad \text{令} x_{ij} = \frac{a_i b_j}{d} \right)$$

1）最小元素法

基本思想:

就“近”供应，从运输表中最小运价所在格开始确定供销关系，然后次小。一直到给出初始基可行解为止。

缺点:

为节省一处费用，会使别处费用增加很多，因此，其初始基可行解往往离最优解甚远，需要较多的迭代过程。

例3 试用最小元素法确定初始基可行解：

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量a_i
A_1	⊗ 3	⊗ 11	④ 3	③ 10	7
A_2	③ 1	⊗ 9	① 2	⊗ 8	4
A_3	⊗ 7	⑥ 4	⊗ 10	③ 5	9
销量b_j	3	6	5	6	20

用最小元素法确定初始可行解依次顺序：

$$x_{21}=3 \Rightarrow x_{23}=1 \Rightarrow x_{13}=4 \Rightarrow x_{32}=6 \Rightarrow x_{34}=3 \Rightarrow x_{14}=3$$

$$z = 4\times 3 + 3\times 10 + 3\times 1 + 1\times 2 + 6\times 4 + 3\times 5 = 86$$

2）伏格尔法（Vogel）

基本思想:

同时考虑每一产地（销地）与每一销地（产地）之间的最小运价和次小运价，若两者差额大，说明若不能按最小运价供应，就有可能按次小运价供应，从而运费很高。因此，应先对最大差额所在的行或列，按最小元素确定供销关系。

优点:

按此法所得基可行解较最小元素法所得可行解更接近最优解。

例4 试用伏格尔法确定可行解：

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量a_i	行差额				
A_1	3	11	⑤ 3	② 10	7	0	0	0	7	-
A_2	③ 1	9	2	① 8	4	1	1	1	6	-
A_3	7	⑥ 4	10	③ 5	9	1	2	-	-	-
销量b_j	3	6	5	6	20					

列差额

2	5	1	3
2	-	1	3
2	-	1	2
-	-	1	2
-	-	-	2

$$z = 5\times 3 + 2\times 10 + 3\times 1 + 1\times 8 + 6\times 4 + 3\times 5 = 85$$

步骤：

a) 在运输表上写出各行、各列最小运价和次小运价差额；

b) 选最大差额所在行(列)的最小元素确定供销关系,并划去所在行(列)；

c) 对未确定的行列，重新计算差额，重复2)、3)， 直至得出初始解。

注：1° 若同时有多个相同的最大差额，选取最小运费确定供应关系。

2° 在以上方法中，每填写一个数字划去一行(列)，只有在填写最后一个数字时，同时划去该数字所在行和列。从而保证基变量个数为（$m+n-1$）个。

3）左上角法（西北角法）

从 x_{11}开始分配，从西北向东南方向逐个分配。

x_{ij} 的分配公式

$$x_{ij}=\min\begin{cases}(a_i-i\text{ 行已分配的总量})=i\text{ 行尚余物资量}\\(b_j-j\text{ 列已分配的总量})=j\text{ 列待分物资量}\end{cases}$$

例5

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量a_i
A_1	20	11	3	6	5
A_2	5	9	10	2	10
A_3	18	7	4	1	15
销量b_j	3	3	12	12	30

例5 左上角法解题演示

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量a_i
A_1	3 [20]	2 [11]	[3]	[6]	5
A_2	[5]	1 [9]	9 [10]	[2]	10
A_3	[18]	[7]	3 [4]	12 [1]	15
销量b_j	3	3	12	12	30

$x_{11}=3 \Rightarrow x_{12}=2 \Rightarrow x_{22}=1 \Rightarrow x_{23}=9$

$\Rightarrow x_{33}=3 \Rightarrow x_{34}=12$

$m+n-1=6$个基变量 $\quad Z=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}x_{ij}=205$

三、求检验数并进行最优解的判定

求调运方案中空格的检验数σ_{ij}，当所有$\sigma_{ij} \geq 0$，则得最优解。

1. 闭回路法

LP迭代过程中， $$z = z_0 + \sum_{j=m+1}^{n} \sigma_j x_j$$

当某个非基变量x_j变化而其它非基变量不变，则

$$\sigma_j = \frac{\partial z}{\partial x_j}$$

上式表明：σ_j为x_j变化一个单位所引起的变化量。

例6：以最小元素法求得的调运方案为例

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量a_i
A_1	3	11	④ 3	③ 10	7
A_2	③ 1	9	① 2	8	4
A_3	7	⑥ 4	10	③ 5	9
销量b_j	3	6	5	6	20

最优性判别准则：当所有$\sigma_{ij}\geq 0$时，则得最优解。

注：数字格检验数均为0

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量a_i
A_1	3 (+1)	11	3 ④(-1)	10 ③	7
A_2	1 ③(-1)	9	2 ①(+1)	8	4
A_3	7	4 ⑥	10	5 ③	9
销量b_j	3	6	5	6	20

$$\sigma_{11} = (3+2)-(1+3) = 1$$

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量a_i
A_1	3	11 (+1)	3 ④	10 ③(-1)	7
A_2	1 ③	9	2 ①	8	4
A_3	7	4 ⑥(-1)	10	5 ③(+1)	9
销量b_j	3	6	5	6	20

$$\sigma_{12} = (11+5)-(4+10) = 2$$

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量a_i
A_1	3	11	3 ④(+1)	10 ③(-1)	7
A_2	1 ③	9 (+1)	2 ①(-1)	8	4
A_3	7	4 ⑥(-1)	10	5 ③(+1)	9
销量b_j	3	6	5	6	20

$$\sigma_{22} = (9+5+3)-(4+10+2)=1$$

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量a_i
A_1	3	11	3 ④(+1)	10 ③(-1)	7
A_2	1 ③	9	2 ①(-1)	8 (+1)	4
A_3	7	4 ⑥	10	5 ③	9
销量b_j	3	6	5	6	20

$$\sigma_{24} = (8+3)-(2+10)=-1$$

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量a_i
A_1	3	11	3 ④(-1)	10 ③(+1)	7
A_2	1 ③(-1)	9	2 ①(+1)	8	4
A_3	7 (+1)	4 ⑥	10	5 ③(-1)	9
销量b_j	3	6	5	6	20

$$\sigma_{31} = (7 + 10 + 2) - (5 + 3 + 1) = 10$$

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量a_i
A_1	3	11	3 ④(-1)	10 ③(+1)	7
A_2	1 ③	9	2 ①	8	4
A_3	7	4 ⑥	10 (+1)	5 ③(-1)	9
销量b_j	3	6	5	6	20

$$\sigma_{33} = (10 + 10) - (5 + 3) = 12$$

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量a_i
A_1	1 [3]	2 [11]	④ [3]	③ [10]	7
A_2	③ [1]	1 [9]	① [2]	-1 [8]	4
A_3	10 [7]	⑥ [4]	12 [10]	③ [5]	9
销量b_j	3	6	5	6	20

$\sigma_{11}=1$ $\sigma_{12}=2$

$\sigma_{22}=1$ $\sigma_{24}=-1$

$\sigma_{31}=10$ $\sigma_{33}=12$

最优性判别准则：当所有$\sigma_{ij}\geq 0$时，则得最优解。

注：数字格检验数均为0

显然该问题至此尚未达到最优解。

2. 位势法

设u_1，u_2，…，u_m；v_1，v_2，…，v_n 是对应运输问题的$m+n$个约束条件的对偶变量。B是$(m+n)\times(m+n)$初始基矩阵。则：

$$C_B B^{-1}=(u_1,u_2,\cdots,u_m;v_1,v_2,\cdots,v_n)$$

而每个决策变量x_{ij}的系数向量$P_{ij}=e_i+e_{m+j}$，所以$C_B B^{-1}P_{ij}=u_i+v_j$。于是x_{ij}的检验数：

$$\sigma_{ij}=c_{ij}-C_B B^{-1}P_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j)$$

所有基变量的检验数等于0。即

$$c_{ij}-(u_i+v_j)=0.\quad i,j\in B$$

2. 位势法

例7：由最小元素法得出初始解，检验是否为最优解。

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量a_i	u_i
A_1	3 1	11 2	3 ④	10 ③	7	0
A_2	1 ③	9 1	2 ①	8 -1	4	-1
A_3	7 10	4 ⑥	10 12	5 ③	9	-5
销量b_j	3	6	5	6	20	
v_j	2	9	3	10		

• 令u_1=0

• 数字格：$u_i+v_j=c_{ij}$计算其它的u_i和v_j

• 计算空格的检验数。$\sigma_{ij}= c_{ij} -(u_i+v_j)$，如$\sigma_{11}=3 - (0+2)=1$

因为$\sigma_{24}=-1<0$,因而该问题至此尚未达到最优解.

2. 位势法

注：1）检验数的计算： $\sigma_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j)$

2）数字格(对应基变量)的检验数： $\sigma_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j)=0$ ，即

$$c_{ij}=u_i+v_j$$

3）行势、列势可不唯一，但检验数是一致的。

四、改进的方法—闭回路调整法

从最小负检验数所对应的空格进行调整

调整方法：1）找出对应空格的闭回路

2）确定调整量θ

使最小负检验数所对应的空格达到最大的调整量

例8 对由最小元素法得出的初始解进行调整

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量a_i
A_1	3 1	11 2	(+) 3 ④ ⑤	(-) 10 ②	7
A_2	1 ③	9 1	(-) 2 ①	(+) 8 -1 ①	4
A_3	7 10	4 ⑥	10 12	5 ③	9
销量b_j	3	6	5	6	20

调整方法：

1）选定调入格

2）找出闭回路

3）确定调整量θ

使最小负检验数所对应的空格达到最大的调整量，即

$$\theta=\min(1,3)=1$$

即 $0+1=1;\ \ 1-1=0;\ \ 4+1=5;\ \ 3-1=2$

再按调整后的解由位势法计算空格的检验数

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量a_i	u_i
A_1	3 0	11 2	3 ⑤ 0	10 ② 0	7	0
A_2	1 ③ 0	9 2	2 1	8 ① 0	4	-2
A_3	7 9	4 ⑥ 0	10 12	5 ③ 0	9	-5
销量b_j	3	6	5	6	20	
v_j	3	9	3	10		

• 令$u_1=0$

因为所有$\sigma_{ij}\geq 0$,因而该问题已得到最优解.

最优值：$z=5\times3+2\times10+3\times1+1\times8+6\times4+3\times5=85$

表上作业法步骤：初始方案、最优性检验、改进方案

一、初始方案的确定

1. 最小元素法　　2. 伏格尔法　　3. 左上角法

二、最优性检验

1. 闭回路法　　2. 位势法

三、改进方案

在闭回路内改进

五、表上作业法的说明

1. 无穷多最优解

无穷多最优解判别：存在非基变量的检验数=0的空格

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量a_i
A_1	3 0	11 2	3 ⑤ 0	10 ② 0	7
A_2	1 ③ 0	9 2	2 1	8 ① 0	4
A_3	7 9	4 ⑥ 0	10 12	5 ③ 0	9
销量b_j	3	6	5	6	20

因为所有$\sigma_{ij} \geq 0$,因而该问题已得到最优解．最优值：$z = 85$

上表中空格(1，1)的检验数是0，表明有无穷多最优解。

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量a_i
A_1	3 0(+)	11 2	3 ⑤	10 ②(-)	7
A_2	1 ③(-)	9 2	2 1	8 ①(+)	4
A_3	7 9	4 ⑥	10 12	5 ③	9
销量b_j	3	6	5	6	20

1）以(1,1)为调入格

2）作闭回路

3）确定

$\theta=\min(2,3)=2$

经调整后得到另一最优解，见下表

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量a_i
A_1	3 ②	11	3 ⑤	10	7
A_2	1 ①	9	2	8 ③	4
A_3	7	4 ⑥	10	5 ③	9
销量b_j	3	6	5	6	20

利用位势法可得所有检验数是非负的，因此也是最优解。

2. 退化情况的处理

(1) 确定初始解时，在(*i*,*j*)格处：A_i的余量=B_j的需量，这时要同时划去*i*行和*j*列，这时需要在*i*行或*j*列的任一空格处添一个“0”。

(2) 用闭回路调整时，若闭回路上出现两个或以上(-1)标记的相等的最小值，选其中一个为换入变量，剩下的数字格填“0”。

(3) 若调入格调整量θ=0，也要按步骤求调整方案，尽管实际并未调整，但解的性质有了变化（原空格变成基变量），从而影响检验数结果。

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量a_i
A_1	3	11	3	10	7
A_2	1	9	2	8	4
A_3	7 ③	4 ⑥	10	5	9
销量b_j	3	6	5	6	20

在表中需同时划去B_2列和A_3行。

在表的空格(1,2),(2,2),(3,3),(3,4) 中任选一格添加一个0。

练习：下表是一运输问题的表格，其中右上角数字是单位运价，圆圈内是运量。

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量a_i
A_1	② 6	3	① 2	② 5	5
A_2	7	5	8	② 4	2
A_3	3	③ 2	5	7	3
销量b_j	2	3	1	4	10

(1)上表所给方案是否为该问题的可行解，是否为该问题的基可行解，为什么？

(2) 上述方案是否是该问题最优解？若不是，如何用表上作业法继续迭代？