応用数学レポート

伊原　康行

第1章 線形代数

- スカラー、ベクトル、行列
  - 普通の数を「スカラー」、大きさと向きを持つものを「ベクトル」と言う。また、 スカラーを表にしたもの（ベクトルを横に並べたもの）を「行列」と言う。また、行列とベクトルの積、行列の積についても定義した。
- 固有値と固有ベクトル
  - 正方行列Aに対し、スカラーλとベクトル$\vec{x}$が存在して、

    $$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

    が成り立つとき、$\vec{x}$、λをそれぞれ行列Aに対する固有ベクトル、固有値と言う。
- 固有値分解
  - 正方行列Aに対して、固有値を対角成分に持つ対角行列Λ、各固有値に対応する固有ベクトル 横に並べた行列Vが存在して、

    $$AV = V\Lambda$$

    が成り立つ。
- 特異値分解
  - 必ずしも正方とは限らない一般的な行列 Mに対しても、固有値分解と似た分解式 $M = USV^{-1}$ が成り立つ (Sは必ずしも正方行列ではないが対角行列に似た行列。またその対角成分を特異値と言う)
- 特異値分解の求め方
  - 特異値分解の式に対して、

    $$MM^\top = USS^\top U^{-1}$$

    が成り立つことから、$MM^\top$を固有値分解することにより、行列Uと特異値の２乗を求める ことが出来る。同様に、$M^\top M$を固有値分解することにより、行列Vと特異値の2乗を求めることが出来る。

第2章 確率・統計

- 確率
    - ある事象$X = x$の下での、$Y = y$となる確率（「条件付き確率」）を次の様に定義する

$$P(Y = y \mid X = x) = \frac{P(Y = y, X = x)}{P(X = x)}$$

    - お互いの発生には因果関係のない２事象を「独立な事象」と言う。この場合、同時確率（同時に発生する確率）について下記が成り立つ。

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

- ベイズ則
    - 条件付き確率について

$$P(X = x \mid Y = y)P(Y = y) = P(Y = y \mid X = x)P(X = x)$$

    が成り立つことを利用して、ある事象が起きたときの条件付き確率を求めることができる。
- 期待値・分散
    - 与えられた確率分布(P(x))における、確率変数fの平均の値を「期待値」

$$E(f) = \sum P(x)f(x)$$

    (離散形)として定義する。
    - また、確率変数fの 値が期待値からどれだけずれているかを平均したものを「分散」

$$Var(f) = E((f - E(f))^2) = E(f^2) - (E(f))^2$$

    として定義する。
- 様々な確率分布 確率分布の例として、ベルヌーイ分布、マルチヌーイ分布、二項分布、ガウス分布がある。

第3章 情報理論

- 自己情報量
    - 発生確率が小さい事象ほど、事象が１つ発生したことを知ったときのインパクトが大きい。 その大きさを、自己情報量 $I(x) = -\log P(x)$ として定義する。
- シャノンエントロピー(微分エントロピー)
    - 自己情報量の期待値 $H(P) = -\sum P(x) \log P(x)$ (離散形)をシャノンエントロピーと言う
- カルバック・ライブラー ダイバージェンス (以下KLダイバージェンス)
    - 異なる確率分布の違いを表すKLダイバージェンスを次の様に定義する

$$D_{KL}(P \parallel Q) = \mathbb{E}_{x \sim P}\left[\log P(x) - \log Q(x)\right]$$

- 交差エントロピー
  - KLダイバージェンスのうち、Q(x)に関係する項のみ取り出したもの、すなわち、KLダイバージェンスに確率分布$P(x)$の事象に関する自己情報量$H(P)$を足したものを、交差エントロピーと言う

$$H(P, Q) = D_{KL}(P \parallel Q) + H(P).$$