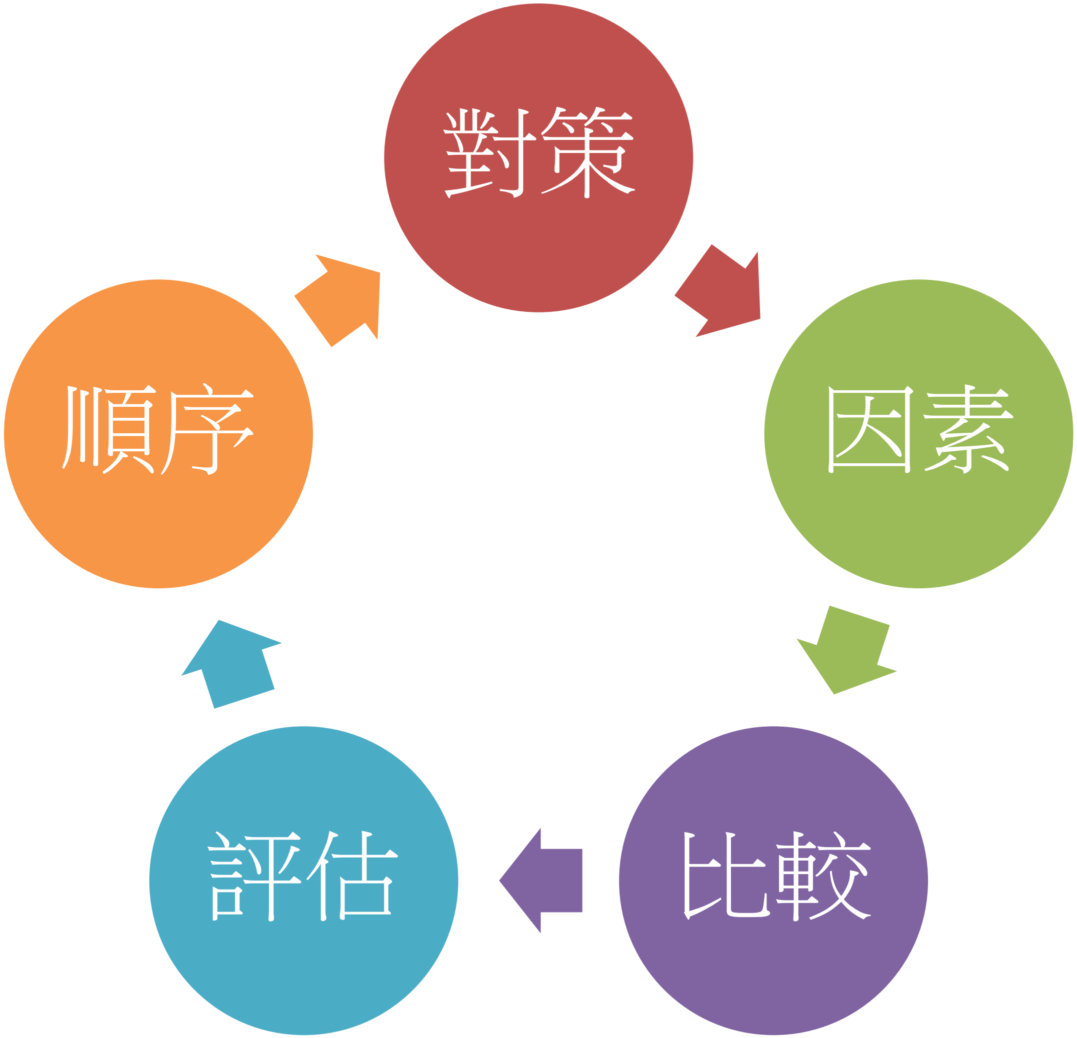
# 層級分析法 AHP

資料來源:
簡禎富、決策分析與管理；
陳耀茂、決策方法與應用

國立成功大學 吳政翰 博士

# Question



# 大綱

- 分析層級程序法概論
- AHP分析架構及步驟
- AHP法的特性與基本數理原理
- AHP應用實例
- AHP實作
- 結論

- 講授方式以先實作再補充數理特性方式呈現
  - 能實作且理解其方法目的為主
  - 對其理論有概念為輔

# 分析層級程序法
# (Analytic Hierarchy Process, AHP)

- Saaty教授於1971年發展的多屬性評估方法
- 概念：利用層級結構將複雜問題系統化，將決策元素劃分成不同維度，將問題加以層級分解和架構，使大型複雜的決策問題可以解構成多個小的子問題，分別比較評估後再整合
- 優點：系統化地分析問題可避免受到人類認知能力的限制，並確保決策考量的全面性
- 為了在分析模式中納入屬性間回饋與相依的關係，Saaty進而提出「分析網路程序法」(Analytic Network Process, ANP)

# AHP的沙第教授的生平

- 1926 年誕生於伊拉克的墨沙魯。
  - 父親是美國的貿易商，母親是伊拉克人。
- 1947 年赴美，在哥倫比亞大學聯合學院研習數學、物理學、生物學。
- 1953 年從耶魯大學取得數學的博士學位
  - 其後持續在索爾本大學與MIT 進行數學與OR 的研究。
- 1957 年進入國防部五角大廈(Pentagon)
  - 進行對英聯戰略的OR 研究。
- 1963 年進入國務部，為了縮小軍備與軍備限制進行OR 研究。
- 1969 年成為賓州大學的教授，數年後發現AHP。
- 1979 年成為匹茲堡大學教授，盡力普及AHP。
- 近年來發現AHP 的發展模式－ANP (Analytic Network Process) 。

# AHP的應用範圍

- AHP 的相關研究與實務，應用於經濟、社會及管理等領域的決策問題，包括公共政策評估、區位選擇、供應商評選及系統選擇
- Saaty(1980)整理可應用AHP的問題類型和範圍如下：

  - 決定優先順序
  - 產生一組方案
  - 選擇最佳的政策
  - 決定需求
  - 分配資源
  - 預測結果
  - 評估績效
  - 設計系統
  - 確保系統穩定性
  - 最佳化
  - 規劃
  - 解決衝突與矛盾
  - 風險評估

# 使用AHP於解決問題

綜合目的 → 評價基準 → 替代案

此評價的過程，AHP 適用以往的經驗與直覺，將以往難以模式化或定量化者使之也能處理。

# AHP 與其他模式之不同特徵

1.可建立模式並能反映出人所具有的主觀與直覺。

2.它是可以同時考慮許多目的之模式。

3.可以明確說明模糊環境的模式。

4.決策者可以容易使用此模式。

# AHP模式與步驟

- 用AHP建立層級結構和決策模式時，需要解決兩個問題：

1. 如何建構決策元素的層級關係
2. 計算各屬性之相對權重和各方案的相對評估值

AHP都是以成對比較（pairwise comparison）矩陣計算特徵向量而得之，包含三個操作步驟：

(1) 建立成對比較矩陣

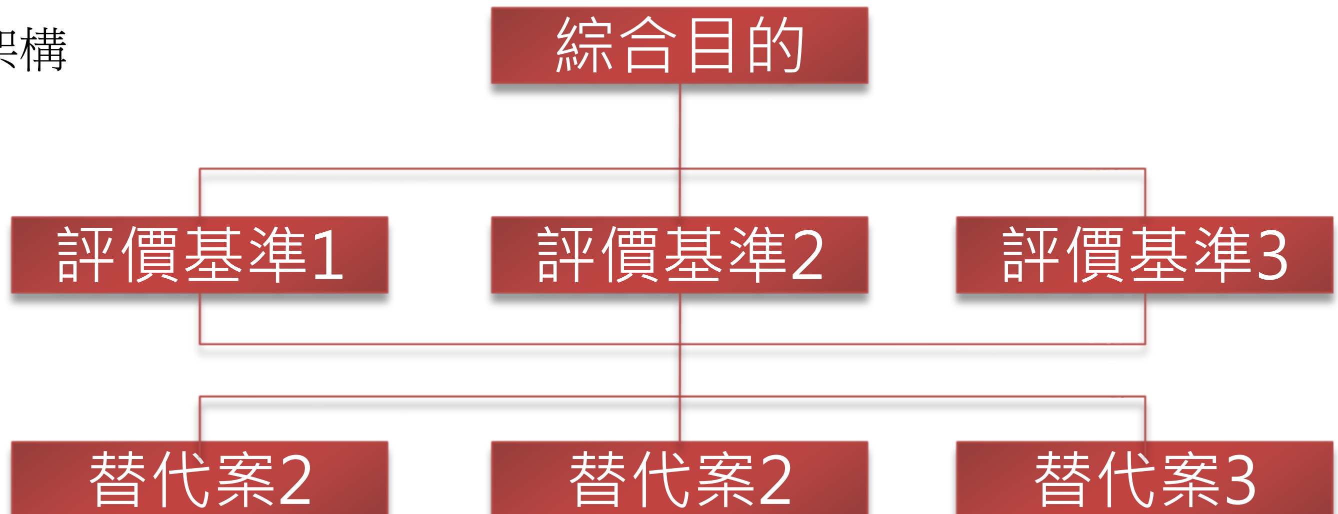
(2) 計算特徵向量（eigenvector）

(3) 驗證一致性

# 何謂AHP-第1步驟

**目的**:將各種想解決的問題，按評價基準與替代案區分層次以階層構造來表現。

三層架構




- 各層次的要素數最大容許數是**(7±2)**。
- 層次的層數是受應解決之**問題性質**來決定。

# 何謂AHP-第2步驟

**目的**:進行各層次的要素間之比重設定。

- 將層次中的要素間之一對比較在它上一層次的關係要素之下進行。
- 從所得到的各層次的一對比較矩陣（已知）來計算各層次的要素間的比重（未知）。

| 重要性的尺度 | 定　　　　　　　　　義 |
|---|---|
| 1 | 同樣重要 (Equal Importance) |
| 3 | 稍為重要 (Weak Importance) |
| 5 | 相當重要 (Strong Importance) |
| 7 | 非常重要 (Very Strong Importance) |
| 9 | 極為重要 (Absolute Importance) |

（其中，2, 4, 6, 8是在中間時使用，不重要時使用倒數）

# 何謂AHP-第3步驟

**目的**:決定各替代案對綜合目的的優先順位(Priority)

計算出各層次的**要素間**的比重設定

使用此結果進行**整個階層**的比重設定

利用此決定各替代案對綜合目的的**優先順位(Priority)**

# 架構問題與釐清決策元素

- AHP利用層級架構來分析問題，站在層級的頂端制高點，來看不同層級的決策元素之間的
  - 上下關聯，
  - 以及同一層級內不同元素之間的相對影響

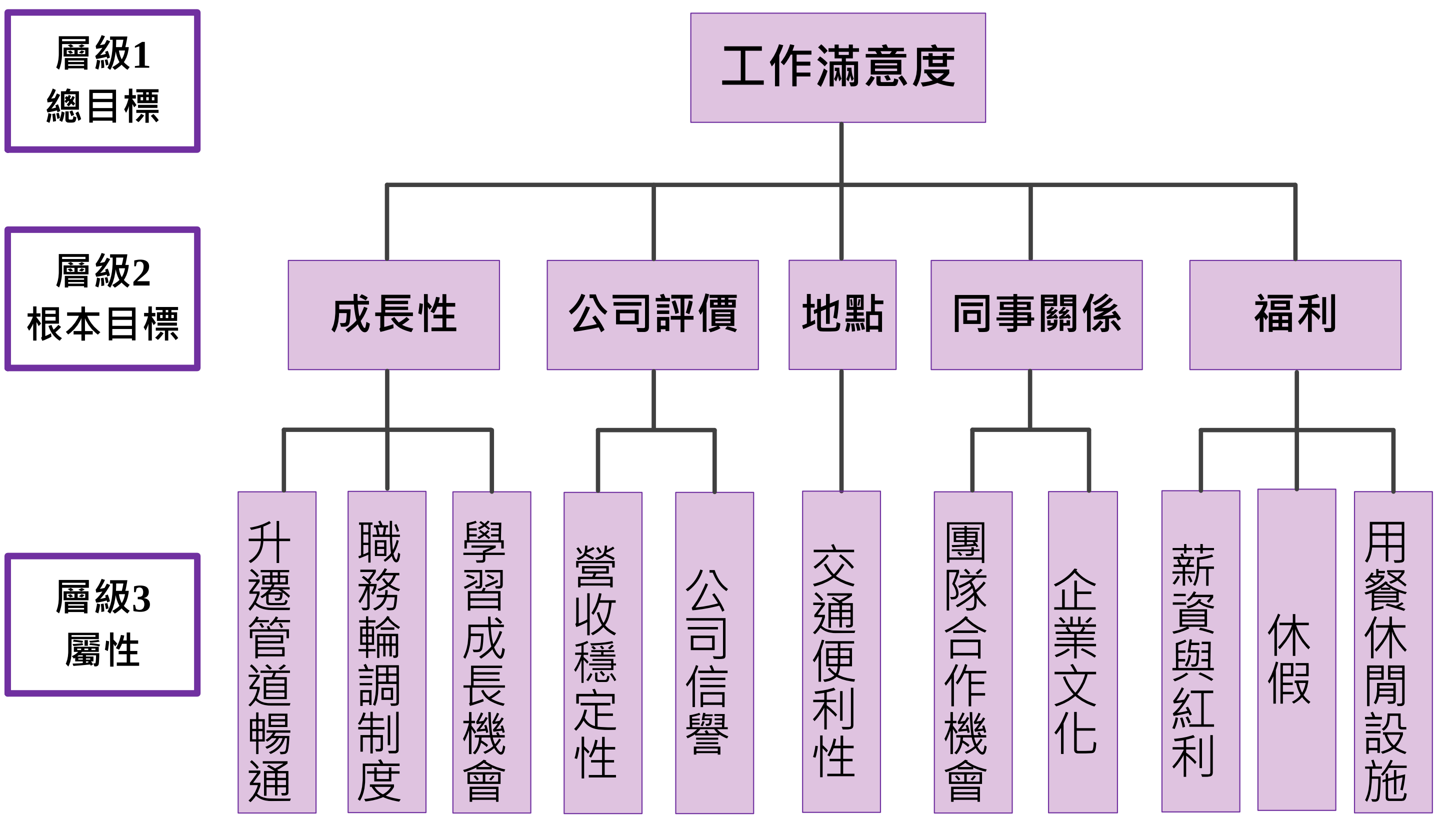
- 應用於群體決策，或由一組專家意見來協助決策，須納入偏好整合的步驟以整合群體決策者的偏好和價值判斷。配合層級架構，利用**腦力激盪法、焦點團體、Delphi法或名目群體技術（NGT）**等方法，逐一列出影響決策之決策元素，匯集各層級的參與決策者的意見和評估

# 目標定義與層級架構

- 建構根本目標層級架構前，應先確認策略目標
- 建立目標層級架構前，需先產生目標集合，並區分為根本目標或工具目標
  - 根據根本目標，採行由上而下分解方式或由下而上合成方式將目標層級逐層發展完成
- 每一層級內的屬性集合，可以用其上一層目標作為依據，反覆評估並修正選出的屬性，確保其符合**以下五個原則**
  - **完整的**
  - **可解構的**
  - **可衡量的**
  - **不重複**
  - **最少的**

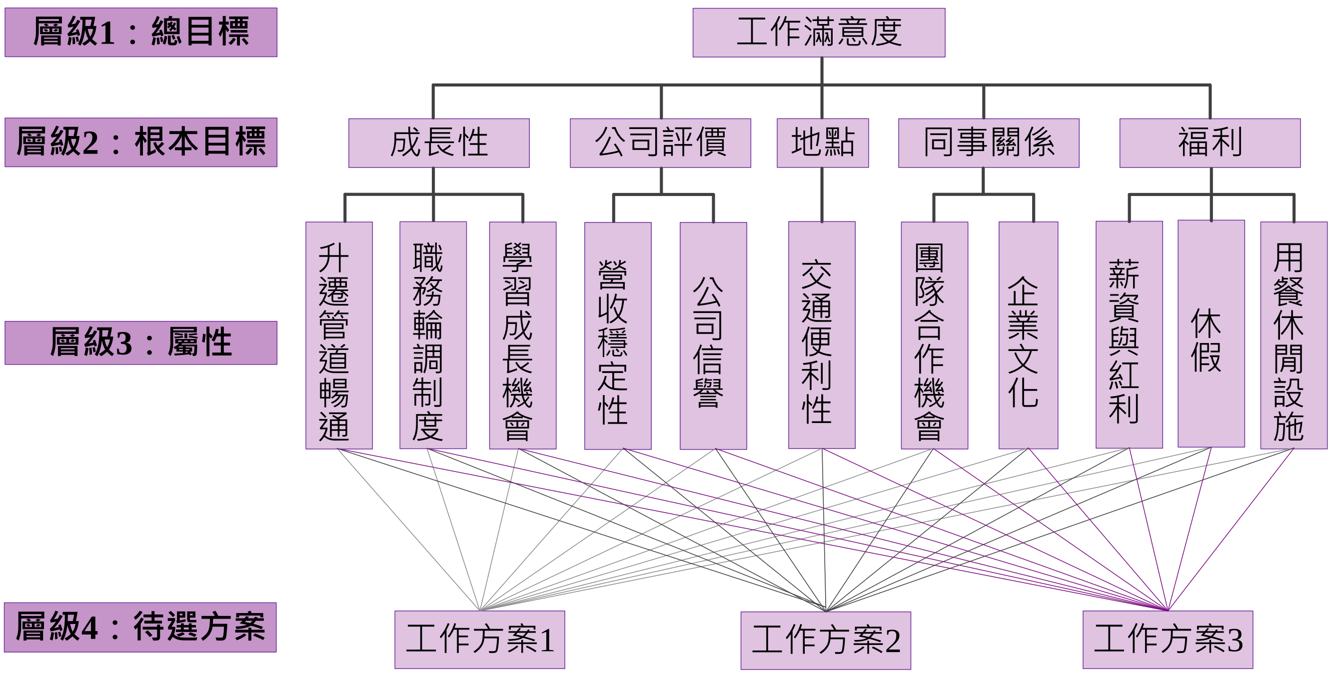
# AHP架構說明

- 工具目標網路是呈現執行手段和根本目標間的因果關聯性



# 方案產生與層級架構

- 藉由討論「如何完成這個根本目標？」找到可協助的工具目標，亦可和根本目標發展分別進行
- 藉由討論「這目標為什麼重要？」來追溯工具目標



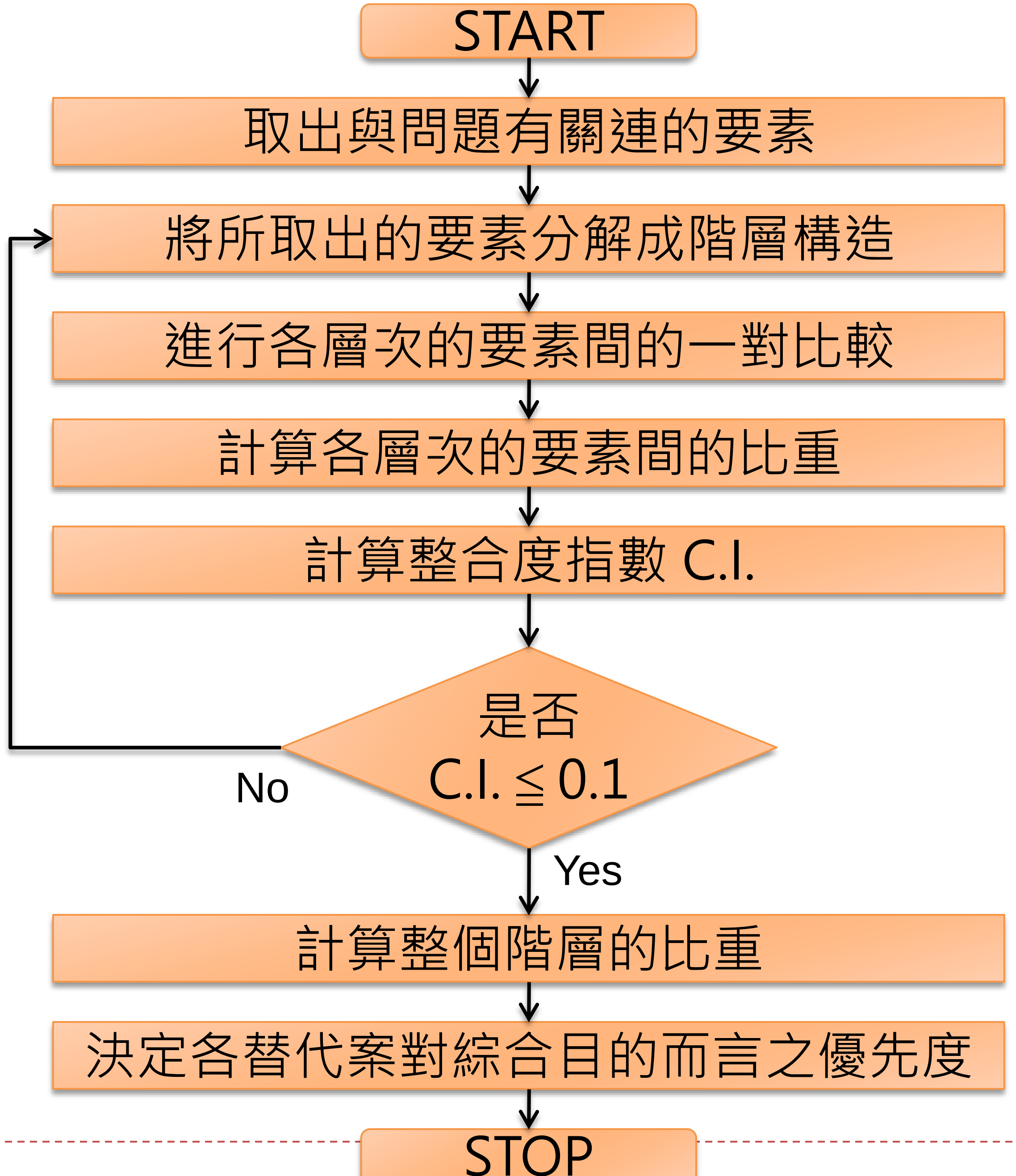

AHP層級架構的最底層元素即為決策的備選方案

# 屬性成對比較以建立相對權重

- AHP的評估是每一層級屬性間對上層目標的相對貢獻度或重要性成對比較，以成對比較矩陣來計算每個屬性的相對權重

- 建立相對權重之操作過程包含：
  1. 依評估尺度蒐集衡量值
  2. 建立方案間的成對比較矩陣
  3. 計算特徵值與特徵向量
  4. 驗證一致性

# AHP的流程圖


START
取出與問題有關連的要素
將所取出的要素分解成階層構造
進行各層次的要素間的一對比較
計算各層次的要素間的比重
計算整合度指數 C.I.
是否
C.I. ≦ 0.1
No
Yes
計算整個階層的比重
決定各替代案對綜合目的而言之優先度
STOP

# 1.依評估尺度蒐集衡量值

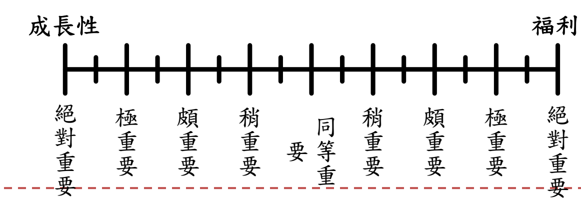
- **AHP係利用屬性成對比較的問題作為媒介，並利用問卷來蒐集決策者或專家的意見和判斷**
- **將評估相對重要水準劃分為五級：**

| 相對重要性程度 | 相對重要水準的定義 | 說明 |
| --- | --- | --- |
| 1 | 同等重要（Equal importance） | 兩指標的重要性一樣 |
| 3 | 稍重要（Moderate importance of one over another） | 從經驗與判斷上來看，某一個指標稍微重要 |
| 5 | 頗重要（Essential or strong importance） | 從經驗與判斷上來看，某一個指標頗為重要 |
| 7 | 極重要（Demonstrated importance） | 實際上顯示某一個指標極重要 |
| 9 | 絕對重要（Extreme importance） | 有充分的證據顯示某一個指標絕對重要 |
| 2、4、6、8 | 相鄰衡量的中間值 | 需要折衷時 |

針對工作滿意度而言，工作的「成長性」對於「福利」的相對重要性為：

☐「成長性」相對「福利」為絕對重要
☐「成長性」相對「福利」為極重要
☐「成長性」相對「福利」為頗重要
☐「成長性」相對「福利」為稍重要
☐「成長性」和「福利」為同等重要
☐「福利」相對「成長性」為稍重要
☐「福利」相對「成長性」為頗重要
☐「福利」相對「成長性」為極重要
☐「福利」相對「成長性」為絕對重要

針對工作滿意度而言，工作的「成長性」與「福利」的相對重要性為何？請勾選一個你認為符合的敘述：



# AHP:比重向量與整合度指數C.I.

表2.2 各個要因的一對比較

| | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ |
|---|---|---|---|---|---|
| ① | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| ② | $\frac{1}{3}$ | 1 | 3 | 6 | 7 |
| ③ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 | 2 | 3 |
| ④ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 3 |
| ⑤ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 |

列

行

(其中第1列第2行的「3」是指要因①比要因②稍為重要)

# AHP:比重向量與整合度指數C.I.

**步驟1**:將一對比較矩陣的各行的要素合計。

$$
\begin{array}{c}
 \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\
1/3 & 1 & 3 & 6 & 7 \\
1/5 & 1/3 & 1 & 2 & 3 \\
1/7 & 1/6 & 1/2 & 1 & 3 \\
1/9 & 1/7 & 1/3 & 1/3 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

| 行的合計 | 1.787 | 4.643 | 9.833 | 16.333 | 23 |
|---|---|---|---|---|---|

# AHP:比重向量與整合度指數C.I.

**步驟2:**將一對比較矩陣的要素除以行的合計。

1/1.787=0.560

$$\begin{bmatrix} 0.560 & 0.646 & 0.508 & 0.429 & 0.391 \\ 0.187 & 0.215 & 0.305 & 0.367 & 0.304 \\ 0.112 & 0.072 & 0.102 & 0.122 & 0.130 \\ 0.080 & 0.036 & 0.051 & 0.061 & 0.130 \\ 0.062 & 0.031 & 0.034 & 0.020 & 0.043 \end{bmatrix}$$

1/23=0.043

# AHP:比重向量與整合度指數C.I.

$$\begin{bmatrix} 0.560 & 0.646 & 0.508 & 0.429 & 0.391 \\ 0.187 & 0.215 & 0.305 & 0.367 & 0.304 \\ 0.112 & 0.072 & 0.102 & 0.122 & 0.130 \\ 0.080 & 0.036 & 0.051 & 0.061 & 0.130 \\ 0.062 & 0.031 & 0.034 & 0.020 & 0.043 \end{bmatrix}$$

**步驟3:**將步驟2 所求出的矩陣的各要素按各列求平均，結果即為比重向量。

- 不可直的相加，因為總合必為1
- 橫的相加，表示其他項目對某項的相對重要性

$$第一列: \frac{0.560+0.646+0.508+0.429+0.391}{5} = 0.507$$

$$比重向量: \begin{bmatrix} 0.507 \\ 0.276 \\ 0.108 \\ 0.072 \\ 0.038 \end{bmatrix}$$

第1個要因之比重是0.507
第2個要因之比重是0.276
....

# AHP:比重向量與整合度指數C.I.

$$
\begin{bmatrix}
1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\
1/3 & 1 & 3 & 6 & 7 \\
1/5 & 1/3 & 1 & 2 & 3 \\
1/7 & 1/6 & 1/2 & 1 & 3 \\
1/9 & 1/7 & 1/3 & 1/3 & 1
\end{bmatrix}
\Rightarrow
\begin{matrix}
0.507 \\ 0.276 \\ 0.108 \\ 0.072 \\ 0.038
\end{matrix}
$$

第一層權重

$$
\begin{matrix}
0.507 & 0.276 & 0.108 & 0.072 & 0.038
\end{matrix}
$$

# AHP:比重向量與整合度指數C.I.

步驟1:將先前所求出之比重向量，依序乘表**2.2** 所表示的一對比較矩陣的各行後再求其和。

$$0.507\times\begin{bmatrix}1\\1/3\\1/5\\1/7\\1/9\end{bmatrix}+0.276\times\begin{bmatrix}3\\1\\1/3\\1/6\\1/7\end{bmatrix}+0.108\times\begin{bmatrix}5\\3\\1\\1/2\\1/3\end{bmatrix}+0.072\times\begin{bmatrix}7\\6\\2\\1\\1/3\end{bmatrix}+0.038\times\begin{bmatrix}9\\7\\3\\3\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.507\\0.169\\0.101\\0.072\\0.056\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.828\\0.276\\0.092\\0.046\\0.039\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.540\\0.324\\0.108\\0.054\\0.036\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.504\\0.432\\0.144\\0.072\\0.024\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.342\\0.266\\0.114\\0.114\\0.038\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.721\\1.467\\0.559\\0.358\\0.193\end{bmatrix}\xleftrightarrow{\text{是否一致?}}\begin{bmatrix}0.507\\0.276\\0.108\\0.072\\0.038\end{bmatrix}$$

# AHP:比重向量與整合度指數C.I.

**步驟2:**將步驟1 所求出的各要素的計算結果，除以先前所求出的各要素之比重。

$$\begin{bmatrix} 2.721/0.507 \\ 1.467/0.276 \\ 0.559/0.108 \\ 0.358/0.072 \\ 0.193/0.038 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.367 \\ 5.315 \\ 5.176 \\ 4.972 \\ 5.079 \end{bmatrix}$$

# AHP:比重向量與整合度指數C.I.

**步驟3:**將步驟**2**所求出之各要素的計算結果予以平均。此結果即為表**2.2**所示之一對比較矩陣的最大特徵值λmax。

$$\lambda_{\max} = \frac{5.367 + 5.315 + 5.176 + 4.972 + 5.079}{5} = 5.182$$

# AHP:比重向量與整合度指數C.I.

**步驟4**:利用步驟3所求出的λmax 求整合度指數C.I.

$$C.I. = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1} = \frac{5.182-5}{4} = 0.046 < 0.1$$

0.046 < 0.1
因此，具有有效性

# 案例說明1

出處: 決策方法與應用 陳耀茂

# AHP案例計算1

就職的學生面臨就職問題，最感困擾的是應付腦海中未理出在就職中如何選定企業內容，如果掌握不住是什麼原因在煩惱就無法解決問題。

# AHP案例計算1

**步驟1**:首先要掌握選定企業的選定要因（評價基準）

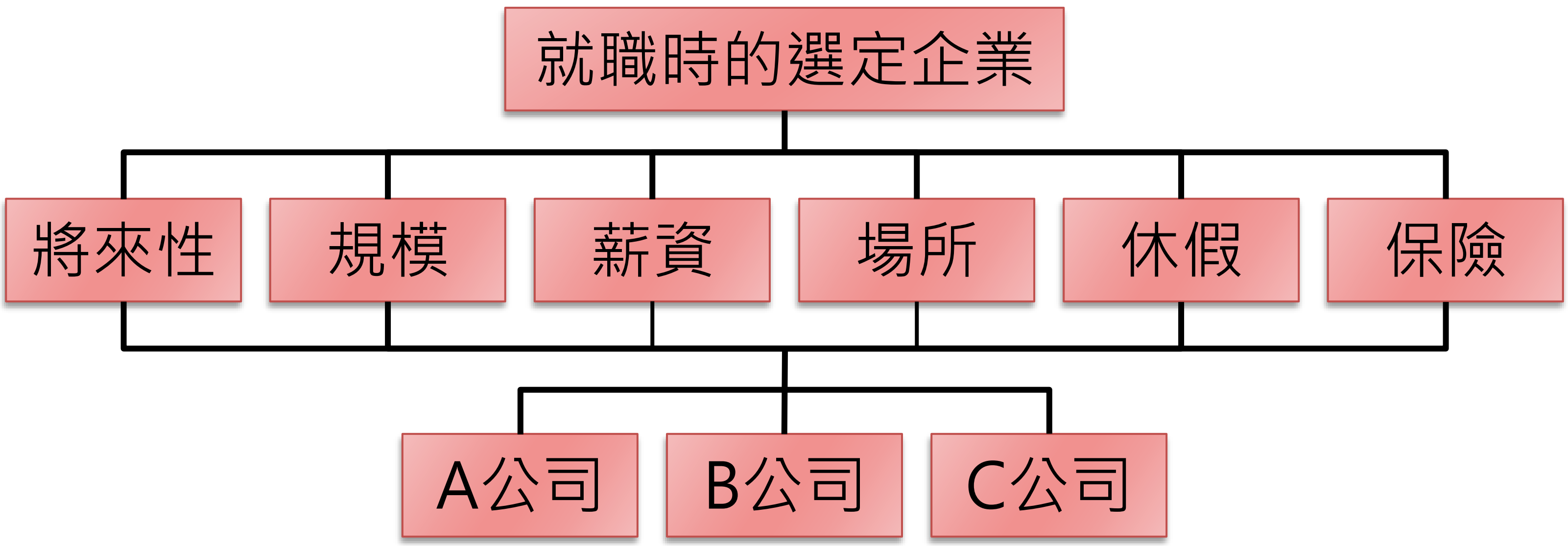



圖2.3 企業選定中的階層構造

# AHP案例計算1

**步驟2:**對面臨就職的學生實施意見調查。

表 2.3　有關選定企業在層次 2 的各要因的一對比較

| | 將來性 | 規模 | 薪資 | 場所 | 休假 | 保險 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 將來性 | 1 | 2 | 1 | 5 | 5 | 1 |
| 規模 | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{1}{3}$ | 2 | 3 | 1 |
| 薪資 | 1 | 3 | 1 | 3 | 3 | $\frac{1}{2}$ |
| 場所 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 | 1 | $\frac{1}{3}$ |
| 休假 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 | 1 | $\frac{1}{3}$ |
| 保險 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 1 |

# AHP案例計算1-求比重向量

## 步驟I

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 & 5 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1/3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 3 & 1/2 \\ 1/5 & 1/2 & 1/3 & 1 & 1 & 1/3 \\ 1/5 & 1/3 & 1/3 & 1 & 1 & 1/3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

行的合計 3.9 7.833 5 15 16 4.166

# AHP案例計算1-求比重向量

**步驟2:**以行的合計除以一對比較矩陣的要素。

$$\begin{bmatrix} 0.256 & 0.255 & 0.2 & 0.333 & 0.313 & 0.24 \\ 0.128 & 0.128 & 0.067 & 0.133 & 0.188 & 0.24 \\ 0.256 & 0.383 & 0.2 & 0.2 & 0.188 & 0.12 \\ 0.051 & 0.064 & 0.067 & 0.067 & 0.063 & 0.080 \\ 0.051 & 0.043 & 0.067 & 0.067 & 0.063 & 0.080 \\ 0.256 & 0.128 & 0.4 & 0.2 & 0.188 & 0.24 \end{bmatrix}$$

# AHP案例計算1-求比重向量

**步驟3:**利用步驟**2** 所求出之矩陣的各要素按各列求平均。

$$\frac{0.256+0.255+0.2+0.333+0.313+0.24}{6}=0.266$$

$$W=\begin{bmatrix}0.266\\0.147\\0.225\\0.065\\0.062\\0.235\end{bmatrix}$$

由此結果得知，對學生來說將來性是最重要的要因，其次依序為保險、薪資……。

# AHP案例計算1-求C.I.的步驟

**步驟1:**各行向量乘上對應的比重，再按各列合計。

$$0.266\times\begin{bmatrix}1\\1/2\\1\\1/5\\1/5\\1\end{bmatrix}+0.147\times\begin{bmatrix}2\\1\\3\\1/2\\1/3\\1\end{bmatrix}+0.225\times\begin{bmatrix}1\\1/3\\1\\1/3\\1/3\\2\end{bmatrix}+0.065\times\begin{bmatrix}5\\2\\3\\1\\1\\3\end{bmatrix}+0.062\times\begin{bmatrix}5\\3\\3\\1\\1\\3\end{bmatrix}+0.235\times\begin{bmatrix}1\\1\\1/2\\1/3\\1/3\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.266\\0.133\\0.266\\0.053\\0.053\\0.266\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.294\\0.147\\0.441\\0.074\\0.049\\0.147\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.225\\0.075\\0.225\\0.075\\0.075\\0.450\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.325\\0.130\\0.195\\0.065\\0.065\\0.195\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.310\\0.186\\0.186\\0.062\\0.062\\0.186\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.235\\0.235\\0.118\\0.078\\0.078\\0.235\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.655\\0.906\\1.431\\0.407\\0.382\\1.479\end{bmatrix}$$

# AHP案例計算1-求C.I.的步驟

**步驟2:**

$$\begin{bmatrix} 1.655/0.266 \\ 0.906/0.147 \\ 1.431/0.225 \\ 0.407/0.065 \\ 0.382/0.062 \\ 1.479/0.235 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.222 \\ 6.163 \\ 6.360 \\ 6.262 \\ 6.161 \\ 6.294 \end{bmatrix}$$

**步驟3:**

$$\lambda_{\max} = \frac{6.222 + 6.163 + 6.360 + 6.262 + 6.161 + 6.294}{6} = 6.244$$

# AHP案例計算1-求C.I.的步驟

**步驟4:**

$$C.I. = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1} = \frac{6.244-6}{5} = 0.049 < 0.1$$

0.049<0.1
因此，具有有效性。

# 關於6 個選定要因各替代案的一對比較

| 將來性 | A | B | C |
|---|---|---|---|
| A | 1 | $\frac{1}{2}$ | 2 |
| B | 2 | 1 | 5 |
| C | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{5}$ | 1 |

$\lambda_{\max} = 3.005$ C.I.=0.0025

| 規模 | A | B | C |
|---|---|---|---|
| A | 1 | 3 | 1/3 |
| B | $\frac{1}{3}$ | 1 | $\frac{1}{9}$ |
| C | 3 | 9 | 1 |

$\lambda_{\max} = 3.0$ C.I.=0

| 薪資 | A | B | C |
|---|---|---|---|
| A | 1 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{2}$ |
| B | 5 | 1 | 3 |
| C | 2 | $\frac{1}{3}$ | 1 |

$\lambda_{\max} = 3.0044$ C.I.=0.0022

| 場所 | A | B | C |
|---|---|---|---|
| A | 1 | 2 | $\frac{1}{2}$ |
| B | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{1}{4}$ |
| C | 2 | 4 | 1 |

$\lambda_{\max} = 3.0$ C.I.=0

| 休假 | A | B | C |
|---|---|---|---|
| A | 1 | 3 | $\frac{1}{3}$ |
| B | $\frac{1}{3}$ | 1 | $\frac{1}{9}$ |
| C | 3 | 9 | 1 |

$\lambda_{\max} = 3.0$ C.I.=0

| 保險 | A | B | C |
|---|---|---|---|
| A | 1 | $\frac{1}{2}$ | 3 |
| B | 2 | 1 | 9 |
| C | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{9}$ | 1 |

$\lambda_{\max} = 3.014$ C.I.=0.007

# 6 個一對比較矩陣的比重向量

將來性 ........ $w_1^T = (0.277\,, 0.595\,, 0.128)$

規模 ........... $w_2^T = (0.231, 0.077, 0.692)$

薪資 ........... $w_3^T = (0.122, 0.648, 0.230)$

場所 ........... $w_4^T = (0.286, 0.143, 0.571)$

休假 ........... $w_5^T = (0.231, 0.077, 0.692)$

保險 ........... $w_6^T = (0.279, 0.640, 0.081)$

# 結果

- 關於將來性來說，B公司魅力度最高。
- 關於規模是C公司。
- 關於薪資是B公司。

- C.I.之值均在0.1 以下，這些一對比較矩陣均是有效的。

# AHP案例計算1

**步驟3:**針對綜合目的製作各替代案（企業A，B，C）的定量性選定基準。

$$
X = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} \text{將來性} & \text{規模} & \text{薪資} & \text{場所} & \text{休假} & \text{保險} \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0.277 & 0.231 & 0.122 & 0.286 & 0.231 & 0.279 \\ 0.595 & 0.077 & 0.648 & 0.143 & 0.077 & 0.640 \\ 0.128 & 0.692 & 0.230 & 0.571 & 0.692 & 0.081 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{bmatrix} 0.266 \\ 0.147 \\ 0.225 \\ 0.065 \\ 0.062 \\ 0.235 \end{bmatrix}
= \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}
\begin{bmatrix} 0.234 \\ 0.480 \\ 0.286 \end{bmatrix}
$$

因此，回答表2.3、表2.4之一對比較矩陣的決策者（學生），對各企業的魅力度（重要度），如上式成為 B>C>A的偏好順序。實際上此位學生向B公司就職獲得成功。

# 案例說明2

出處:決策方法與應用 陳耀茂

# AHP案例計算

**步驟1**:首先有需要掌握有關職棒預估順位的要因。

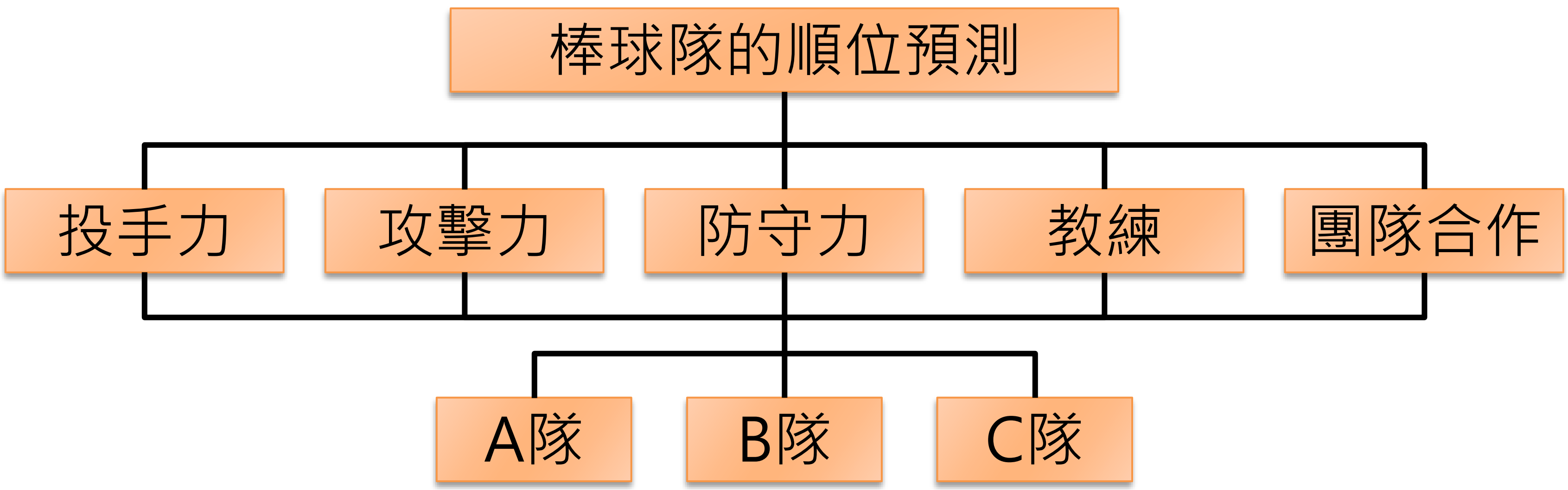



圖2.4 預估棒球隊順位的階層構造

# AHP案例計算

**步驟2:**乃向此評論家進行意見調查。

表 2.6　就棒球隊順位預估而言層次 2 的各要因之一對比較

| | 投手力 | 攻擊力 | 防守力 | 教練 | 團隊合作 |
|---|---|---|---|---|---|
| 投手力 | 1 | 3 | 6 | $\frac{1}{2}$ | 1 |
| 攻擊力 | $\frac{1}{3}$ | 1 | 4 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 防守力 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{4}$ | 1 | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{3}$ |
| 教練 | 2 | 5 | 7 | 1 | 3 |
| 團隊合作 | 1 | 2 | 3 | $\frac{1}{3}$ | 1 |

# AHP案例計算-求比重向量

**步驟1**:求一對比較矩陣之各列要素的幾何平均。

要因 1 $\sqrt[5]{1\times3\times6\times1/2\times1}=1.552$

要因 2 $\sqrt[5]{1/3\times1\times4\times1/5\times1/2}=2.3520.668$

要因 3 $\sqrt[5]{1/6\times1/4\times1\times1/7\times1/3}=0.288$

要因 4 $\sqrt[5]{2\times5\times7\times1\times3}=2.914$

要因 5 $\sqrt[5]{1\times2\times3\times1/3\times1}=1.149$

# AHP案例計算-求比重向量

## 步驟2:

$$1.552+0.668+0.288+2.914+1.149=6.571$$

## 步驟3:

$$W=\begin{bmatrix}1.552/6.571\\0.668/6.571\\0.288/6.571\\2.914/6.571\\1.149/6.571\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.236\\0.102\\0.044\\0.443\\0.175\end{bmatrix}$$

由此結果知，教練的指揮是最重要的要因(0.443)，接著依序為投手力(0.236)、團隊合作(0.175)、……。

# AHP案例計算1-求C.I.的步驟

**步驟1**:對各行向量乘上對應的比重，再將各列合計。

$$0.236\times\begin{bmatrix}1\\1/3\\1/6\\2\\1\end{bmatrix}+0.102\times\begin{bmatrix}3\\1\\1/4\\5\\2\end{bmatrix}+0.044\times\begin{bmatrix}6\\4\\1\\7\\3\end{bmatrix}+0.443\times\begin{bmatrix}1/2\\1/5\\1/7\\1\\1/3\end{bmatrix}+0.175\times\begin{bmatrix}1\\1/2\\1/3\\3\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.236\\0.079\\0.039\\0.472\\0.236\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.306\\0.102\\0.026\\0.510\\0.204\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.264\\0.176\\0.044\\0.308\\0.132\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.222\\0.089\\0.063\\0.443\\0.148\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.175\\0.088\\0.058\\0.525\\0.175\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.203\\0.534\\0.230\\2.258\\0.895\end{bmatrix}$$

# AHP案例計算1-求C.I.的步驟

**步驟2**:

$$\begin{bmatrix} 1.203/0.236 \\ 0.534/0.102 \\ 0.230/0.044 \\ 2.258/0.443 \\ 0.895/0.175 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.097 \\ 5.235 \\ 5.227 \\ 5.097 \\ 5.114 \end{bmatrix}$$

**步驟3**:

$$\lambda_{\max} = \frac{5.097+5.235+5.227+5.097+5.114}{5} = 5.154$$

# AHP案例計算1-求C.I.的步驟

**步驟4:**

$$C.I. = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1} = \frac{5.154-5}{4} = 0.039 < 0.1$$

0.039<0.1
因此，它可以說是有效的。

# 層次3中各替代案間的一對比較

| 投手力 | A | B | C |
|---|---|---|---|
| A | 1 | 2 | 5 |
| B | $\frac{1}{2}$ | 1 | 4 |
| C | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 |

$\lambda_{max} = 3.025$ C.I.=0.012

| 攻擊力 | A | B | C |
|---|---|---|---|
| A | 1 | 2 | 2 |
| B | $\frac{1}{2}$ | 1 | 1 |
| C | $\frac{1}{2}$ | 1 | 1 |

$\lambda_{max} = 3.0$ C.I.=0

| 團隊合作 | A | B | C |
|---|---|---|---|
| A | 1 | $\frac{1}{3}$ | 3 |
| B | 3 | 1 | 5 |
| C | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{5}$ | 1 |

$\lambda_{max} = 3.038$ C.I.=0.019

| 防守力 | A | B | C |
|---|---|---|---|
| A | 1 | 5 | 3 |
| B | $\frac{1}{5}$ | 1 | $\frac{1}{3}$ |
| C | $\frac{1}{3}$ | 3 | 1 |

$\lambda_{max} = 3.038$ C.I.=0.019

| 教練 | A | B | C |
|---|---|---|---|
| A | 1 | 2 | 9 |
| B | $\frac{1}{2}$ | 1 | 7 |
| C | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{7}$ | 1 |

$\lambda_{max} = 3.022$ C.I.=0.011

# 5個一對比較矩陣的比重向量

投手力 ........ $w_1^T = (0.570 , 0.333 , 0.097)$

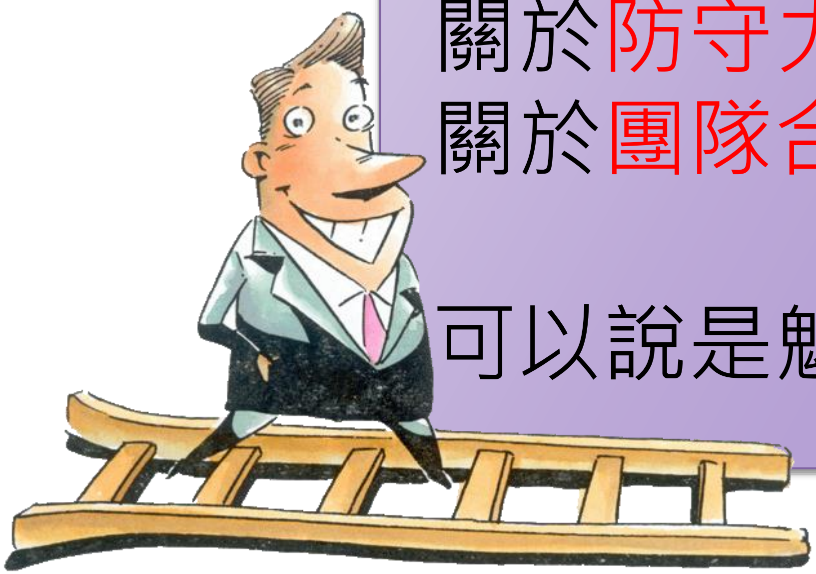
攻擊力 ........ $w_2^T = (0.5 , 0.25 , 0.25)$

防守力 ........ $w_3^T = (0.637 , 0.105 , 0.258)$

教練 ............ $w_4^T = (0.597 , 0.346 , 0.057)$

團隊合作 ..... $w_5^T = (0.258 , 0.637 , 0.105)$

# 結果



關於投手力是A隊
關於防守力是A隊
關於團隊合作是B隊......

可以說是魅力度（重要度）最高

# AHP案例計算

**步驟3**:針對綜合目的（棒球的順位預估）製作各替代案(A, B, C)的定量性順位基準。

$$
X=\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}\text{投手力} & \text{攻擊力} & \text{防守力} & \text{教練} & \text{團隊合作}\end{array}\\ \begin{bmatrix} 0.570 & 0.5 & 0.637 & 0.597 & 0.258 \\ 0.333 & 0.25 & 0.105 & 0.346 & 0.637 \\ 0.097 & 0.25 & 0.258 & 0.057 & 0.105 \end{bmatrix}\end{array}\begin{bmatrix} 0.236 \\ 0.102 \\ 0.044 \\ 0.443 \\ 0.175 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{bmatrix} 0.523 \\ 0.374 \\ 0.103 \end{bmatrix}
$$

因此，此評論家用AHP所預估的順位是A > B > C。
實際上進入比賽季節，優勝比賽是A, B, C 3隊的競爭。
如AHP的分析，優勝是A隊，第2是B隊，第3是C隊而塵埃落定。

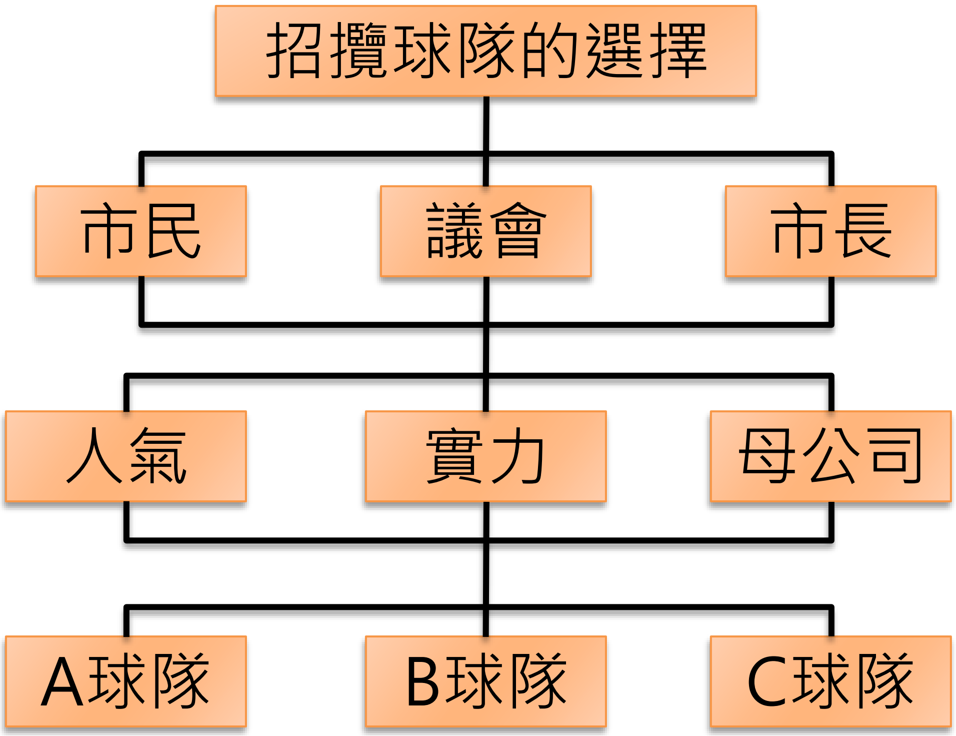
# AHP進階說明

# 決策者有複數人時

神戶市招攬棒球隊Oricks到綠色體育館，千葉縣也招攬棒球隊Rotte到千葉巨艦體育館，兩市均獲得成功。反映此種棒球界的情勢，有一段時間，某市的市長前來與我商討招攬棒球隊的問題。該市的企劃室指定A, B, C 3個球隊作為候選球隊。但市長無法獨斷要招攬那一個球隊，需要取得議會與市民的同意。在此種條件下要招攬那一個球隊好呢？

# 決策者有複數人時

## 步驟I:



# 決策者有複數人時

## 步驟2:

最大特徵值

$$\lambda_{\max} = 3.080$$

整合性的評價

$$\text{C.I.} = 0.04$$

標準化特徵向量

$$w_1^T = (0.515\ ,\ 0.097\ ,\ 0.388)$$

表 4.1　就選擇球隊而言層次 2 的各要因的一對比較

| | 市民 | 議會 | 市長 |
|---|---|---|---|
| 市民 | 1 | 7 | 1 |
| 議會 | $\frac{1}{7}$ | 1 | $\frac{1}{3}$ |
| 市長 | 1 | 3 | 1 |

$\lambda_{\max}$ = 3.08 C.I.=0.04

在3 位決策者之中，可知市民具有最大的發言力，其次是市長，最後才是議會。

# 層次3的各要因的一對比較

| 市民 | 人氣 | 實力 | 母公司 |
|---|---|---|---|
| 人氣 | 1 | 3 | 7 |
| 實力 | $\frac{1}{3}$ | 1 | 3 |
| 母公司 | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 |

$\lambda_{\max} = 3.007$ C.I.=0.004

| 議會 | 人氣 | 實力 | 母公司 |
|---|---|---|---|
| 人氣 | 1 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 實力 | 7 | 1 | 7 |
| 母公司 | 2 | $\frac{1}{7}$ | 1 |

$\lambda_{\max} = 3.054$ C.I.=0.027

| 市長 | 人氣 | 實力 | 母公司 |
|---|---|---|---|
| 人氣 | 1 | 1 | $\frac{1}{9}$ |
| 實力 | 1 | 1 | $\frac{1}{7}$ |
| 母公司 | 9 | 7 | 1 |

$\lambda_{\max} = 3.007$ C.I.=0.004

# 3個最大特值的標準化的特徵向量

市民............ $w_2^T = (0.669 , 0.243 , 0.088)$

議會............ $w_3^T = (0.088 , 0.773 , 0.139)$

市長............ $w_4^T = (0.096 , 0.105 , 0.799)$

這些是層次3對各決策者而言的比重向量。亦即，可知.....
市民重視**球隊的人氣**，
議會重視**球隊的實力**，
市長重視**母公司的經營力**。

# 決策者有複數人時

- 如本例決策者有複數人（本例是3人）時，層次3的各要因的最終比重由於依存決策者的力量關係，因之有需要如下計算。

$$
\begin{array}{ll}
 & \begin{array}{ccc} \text{市民} & \text{議會} & \text{市長} \end{array} \\
W = \begin{array}{r} \text{人　氣} \\ \text{實　力} \\ \text{母公司} \end{array} & \begin{bmatrix} 0.669 & 0.088 & 0.096 \\ 0.243 & 0.773 & 0.105 \\ 0.088 & 0.139 & 0.799 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.515 \\ 0.097 \\ 0.388 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.390 \\ 0.241 \\ 0.369 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

- 因此，有關招攬球隊的選擇問題在層次3中的要因比重，知依序為球隊的人氣**(0.390) >** 母公司的經營力**(0.369) >** 球隊的實力**(0.241)**。

# 3個選擇要因進行各替代案的一對比較

| 人氣 | A | B | C |
|---|---|---|---|
| A | 1 | 1 | $\frac{1}{3}$ |
| B | 1 | 1 | $\frac{1}{3}$ |
| C | 3 | 3 | 1 |

$\lambda_{max} = 3.0$ C.I.=0

| 實力 | A | B | C |
|---|---|---|---|
| A | 1 | 1 | $\frac{1}{5}$ |
| B | 1 | 1 | $\frac{1}{5}$ |
| C | 5 | 5 | 1 |

$\lambda_{max} = 3.0$ C.I.=0

| 母公司 | A | B | C |
|---|---|---|---|
| A | 1 | 3 | 9 |
| B | $\frac{1}{3}$ | 1 | 6 |
| C | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{6}$ | 1 |

$\lambda_{max} = 3.054$ C.I.=0.027

# 3個最大特徵值的標準化特徵向量

人氣 ………… $w_{\mathrm{I}}^{T} = (0.2 , 0.2 , 0.6)$

實力 ………… $w_{\mathrm{II}}^{T} = (0.143 , 0.143 , 0.714)$

母公司 ……… $w_{\mathrm{III}}^{T} = (0.663 , 0.278 , 0.059)$

關於球隊的人氣與實力，C球隊的魅力度（重要度）是最高的，關於母公司的經營力來說，A 球隊的魅力度是最高的。

# 決策者有複數人時

**步驟3**:針對綜合目的（選擇球隊）製作各替代案的定量性選擇基準。

$$
X = \begin{array}{c} \\ \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \text{人氣} & \text{實力} & \text{母公司} \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0.2 & 0.143 & 0.663 \\ 0.2 & 0.143 & 0.278 \\ 0.6 & 0.714 & 0.056 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{bmatrix} 0.390 \\ 0.241 \\ 0.369 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.357 \\ 0.215 \\ 0.428 \end{bmatrix}
$$

「人氣」與「實力」兼備的C球隊中選，市民非常的高興。此後，只有期待此球隊的「母公司的經營力」。
其後，此球隊歷經3年的落後低迷，但第4年以後就保持日本第一寶座。母公司的從旁協助發揮奏效。託球隊優勝之福，母公司的經營力也提升，此例也證明了AHP的效力。

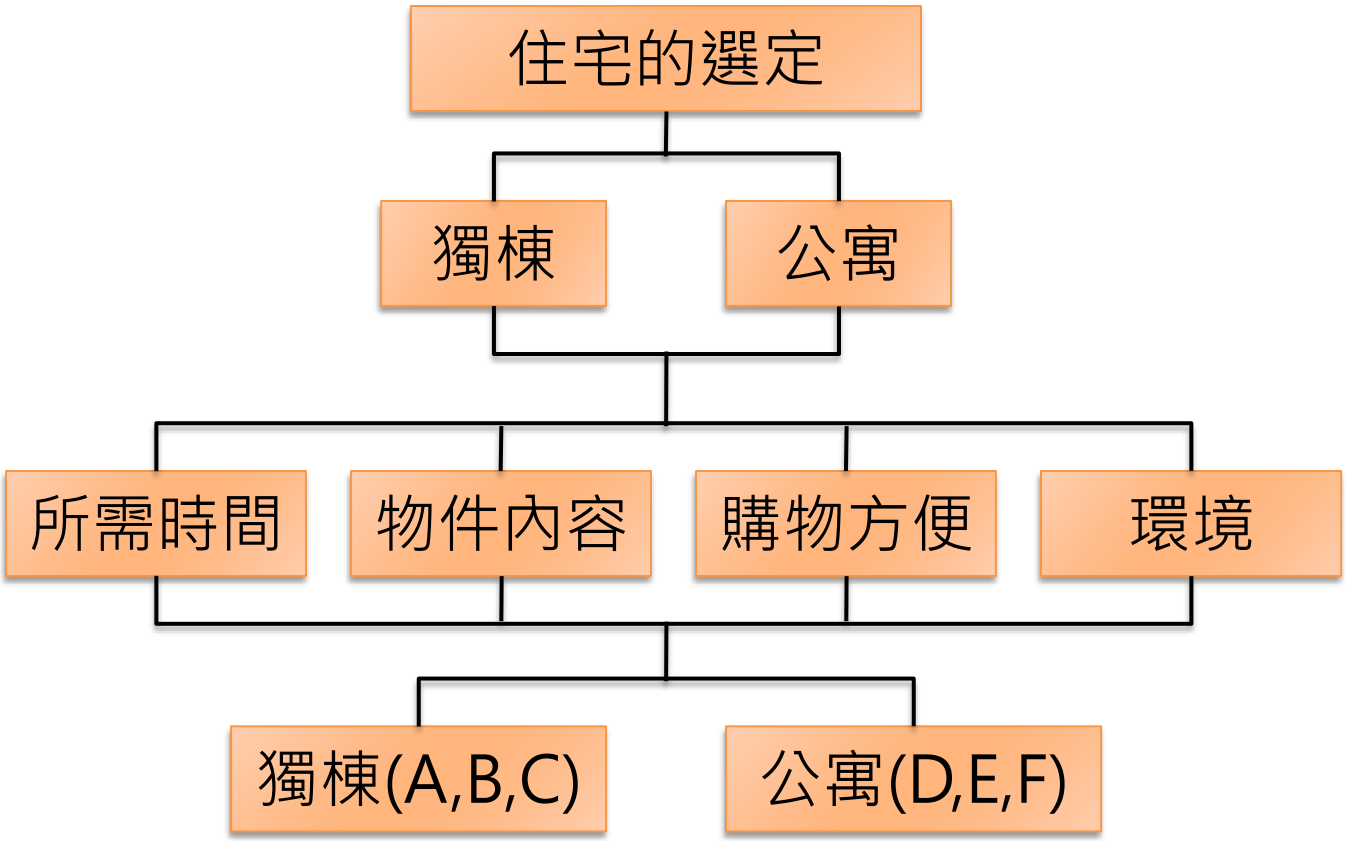
# 4.2　替代案可分成複數個類別時

購買住宅找出了獨棟(A, B, C)、公寓(D, E, F)共計6個物件。問題是從此6個物件之中要選擇那一個物件。因此，決定利用AHP分析此問題。

此時與以往的AHP不同的是替代案被分成2類（獨棟、公寓）。

# 選定住宅的階層構造

## 步驟1:



# 步驟2:層次2-獨棟、公寓的一對比較

表 4.4 層次 2 的 2 個分類（獨棟、公寓）的一對比較

| 住宅的選定 | 獨棟 | 公寓 |
|---|---|---|
| 獨棟 | 1 | $\frac{3}{2}$ |
| 公寓 | $\frac{2}{3}$ | 1 |

標準化特徵向量

$$w_1^T = (0.6 , 0.4)$$

因此，可知該人稍微喜歡獨棟。

# 步驟2:層次3-在獨棟與公寓中各要因的一對比較

| 獨棟 | 所需時間 | 物件內容 | 購物方便 | 環境 |
|---|---|---|---|---|
| 所需時間 | 1 | $\frac{1}{3}$ | 1 | $\frac{1}{5}$ |
| 物件內容 | 3 | 1 | 5 | $\frac{1}{2}$ |
| 購物方便 | 1 | $\frac{1}{5}$ | 1 | $\frac{1}{3}$ |
| 環境 | 5 | 2 | 3 | 1 |

$\lambda_{\max} = 4.128$ C.I.=0.043

標準化特徵向量

$$w_2^T = (0.098 , 0.332 , 0.102 , 0.468)$$

| 公寓 | 所需時間 | 物件內容 | 購物方便 | 環境 |
|---|---|---|---|---|
| 所需時間 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 物件內容 | $\frac{1}{3}$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | 1 |
| 購物方便 | 1 | 2 | 1 | 3 |
| 環境 | $\frac{1}{3}$ | 1 | $\frac{1}{3}$ | 1 |

$\lambda_{\max} = 4.02$ C.I.=0.07

標準化特徵向量

$$\omega_3^T = (0.383 , 0.142 , 0.348 , 0.127)$$

由此結果知，選定獨棟時「環境」是最具影響力(46.8%)，在公寓方面「所需時間」是最具影響力(38.3%)。

# 步驟2:層次4-按各選定要因進行各替代案的評價

表4.6有關獨棟之評價

| 所需時間 | 時間 |
|---|---|
| A | 1.5 |
| B | 0.5 |
| C | 1.0 |

| 物件內容 | A | B | C |
|---|---|---|---|
| A | 1 | 3 | 5 |
| B | $\frac{1}{3}$ | 1 | 3 |
| C | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 |

$\lambda_{max} = 3.039$ C.I.=0.019

| 購物方便 | A | B | C |
|---|---|---|---|
| A | 1 | 3 | $\frac{1}{5}$ |
| B | $\frac{1}{3}$ | 1 | $\frac{1}{7}$ |
| C | 5 | 7 | 1 |

$\lambda_{max} = 3.065$ C.I.=0.032

| 環境 | A | B | C |
|---|---|---|---|
| A | 1 | 3 | $\frac{1}{4}$ |
| B | $\frac{1}{3}$ | 1 | $\frac{1}{5}$ |
| C | 4 | 5 | 1 |

$\lambda_{max} = 3.086$ C.I.=0.043

# 獨棟的分類(A, B, C)的評價向量

✓ 說明:關於至上班地點的所需時間，是將實際時間的倒數使之標準化（所需時間愈短比重即愈高）。

所需時間 ..... $\omega_4^T = (0.182\,,\, 0.545\,,\, 0.273)$

物件內容 ..... $w_5^T = (0.637\,,\, 0.258\,,\, 0.105)$

購物方便 ..... $w_6^T = (0.188\,,\, 0.081\,,\, 0.731)$

環境 ........... $w_7^T = (0.226\,,\, 0.101\,,\, 0.673)$

# 步驟2:層次4-按各選定要因進行各替代案的評價(續)

表4.6有關公寓之評價

| 所需時間 | 時間 |
|---|---|
| D | 1.2 |
| E | 0.2 |
| F | 0.8 |

| 物件內容 | D | E | F |
|---|---|---|---|
| D | 1 | 4 | 3 |
| E | $\frac{1}{4}$ | 1 | $\frac{1}{2}$ |
| F | $\frac{1}{3}$ | 2 | 1 |

$\lambda_{max} = 3.018$ C.I.=0.09

| 購買方便 | D | E | F |
|---|---|---|---|
| D | 1 | 3 | $\frac{1}{2}$ |
| E | $\frac{1}{3}$ | 1 | $\frac{1}{3}$ |
| F | 2 | 3 | 1 |

$\lambda_{max} = 3.054$ C.I.=0.027

| 環境 | D | E | F |
|---|---|---|---|
| D | 1 | 4 | 2 |
| E | $\frac{1}{4}$ | 1 | $\frac{1}{3}$ |
| F | $\frac{1}{2}$ | 3 | 1 |

$\lambda_{max} = 3.018$ C.I.=0.09

# 公寓的分類(D, E, F)的評價向量

所需時間 ..... $w_8^T = (0.118\ , 0.706\ , 0.176)$

物件內容 ..... $w_9^T = (0.625\ , 0.137\ , 0.238)$

購物方便 ..... $w_{10}^T = (0.333\ , 0.140\ , 0.527)$

環境 ........... $w_{11}^T = (0.559\ , 0.121\ , 0.320)$

# 替代案可分成複數個類別時

**步驟3:**

獨棟的各替代案（物件A , B , C）的綜合評價

$$X = \begin{array}{c} \\ \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{所要時間} & \text{物件內容} & \text{購物方便} & \text{環境} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.182 & 0.637 & 0.188 & 0.226 \\ 0.545 & 0.258 & 0.081 & 0.101 \\ 0.545 & 0.105 & 0.731 & 0.673 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} 0.098 \\ 0.332 \\ 0.102 \\ 0.468 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.354 \\ 0.195 \\ 0.451 \end{bmatrix}$$

公寓的各替代案（物件D, E, F）的綜合評價

$$Y = \begin{array}{c} \\ \mathrm{D} \\ \mathrm{E} \\ \mathrm{F} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{所要時間} & \text{物件內容} & \text{購物方便} & \text{環境} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.118 & 0.625 & 0.333 & 0.559 \\ 0.706 & 0.137 & 0.140 & 0.121 \\ 0.176 & 0.238 & 0.527 & 0.320 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} 0.383 \\ 0.354 \\ 0.348 \\ 0.127 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.321 \\ 0.354 \\ 0.325 \end{bmatrix}$$

# 獨棟與公寓的各替代案的綜合評價值

- 將此2個分類（獨棟、公寓）的比重wI 乘上X,Y。由此結果即可比較獨棟的各替代案(A, B, C)與公寓的各替代案(D, E, F)的綜合評價值。

$$0.6 \cdot X = 0.6 \cdot \begin{bmatrix} 0.354 \\ 0.195 \\ 0.451 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \end{array} \begin{bmatrix} 0.212 \\ 0.117 \\ 0.271 \end{bmatrix}$$

$$0.4 \cdot Y = 0.4 \cdot \begin{bmatrix} 0.321 \\ 0.354 \\ 0.325 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \mathrm{D} \\ \mathrm{E} \\ \mathrm{F} \end{array} \begin{bmatrix} 0.128 \\ 0.142 \\ 0.130 \end{bmatrix}$$

因此，6個物件的最終偏好順序，依序為$C > A > E > F > D > B$。

# 4.3 AHP中用法的檢討

一. 整合性

二. 不完全一對比較矩陣

三. 利用小組的決策

# 一. 整合性

已定義整合性的尺度C.I.。因此，計算了一對比較矩陣的各要素的比重時，如果該矩陣的整合性差時（整合性的尺度C.I.在0.1～0.15 以上時），必須重新檢討一對比較矩陣之值，可是，發現那一對比較之值違反整合性並非易事。

# 例子

一對比較矩陣*P* 的各項目的比重與C.I.如下。

$$
P=\begin{array}{c}\\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}1&2&3&4&5&6\end{array}\\ \begin{bmatrix}1&3&1/3&4&6&7\\1/3&1&1/5&5&5&6\\3&5&1&3&2&3\\1/4&1/5&1/3&1&1&2\\1/6&1/5&1/2&1&1&2\\1/7&1/6&1/3&1/2&1/2&1\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\text{比重}\\ \begin{bmatrix}0.275\\0.182\\0.367\\0.064\\0.069\\0.043\end{bmatrix}\end{array}
\qquad \text{C.I.}=0.198
$$

→C.I.之值大，判斷整合性差。

# 例子-檢討1

一. 根據所計算的比重w1 , w2 , w3 , w4 , w5 , w6 以wi/wj當作(i , j)的成分製作矩陣W。

$$
W = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\begin{bmatrix}
1 & 1.511 & \boxed{0.749} & 4.297 & 3.986 & 6.395 \\
 & 1 & \boxed{0.496} & 2.844 & 2.638 & 4.233 \\
 & & 1 & 5.734 & \boxed{5.319} & \boxed{8.535} \\
 & & & 1 & 0.928 & 1.488 \\
 & & & & 1 & 1.605 \\
 & & & & & 1
\end{bmatrix}
$$

# 例子-檢討2

$$W = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1.511 & \boxed{0.749} & 4.297 & 3.986 & 6.395 \\ & 1 & \boxed{0.496} & 2.844 & 2.638 & 4.233 \\ & & 1 & 5.734 & \boxed{5.319} & \boxed{8.535} \\ & & & 1 & 0.928 & 1.488 \\ & & & & 1 & 1.605 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

二. 比較矩陣P與W的各成分，注意差異大者（譬如 $\boxed{\phantom{xx}}$ 內）重新修改一對比較。結果，假定得出P′ 。

差異大:比較的要素（P 與W）之值有2倍以上差異者。

$$P' = \begin{array}{c|cccccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \text{比重} \\ \hline 1 & 1 & 3 & 1/2 & 4 & 6 & 7 & 0.300 \\ 2 & & 1 & 1/3 & 5 & 5 & 6 & 0.195 \\ 3 & & & 1 & 3 & 4 & 7 & 0.346 \\ 4 & & & & 1 & 1 & 2 & 0.066 \\ 5 & & & & & 1 & 2 & 0.058 \\ 6 & & & & & & 1 & 0.035 \end{array}$$

$$\text{C.I.} = 0.075$$

→C.I.之值在0.1 以下，可以說P′ 具有有效性。因此， P′ 的整合性佳。

# 二. 利用小組的決策

也有以小組單位使用AHP的情形。譬如，由幾個人謀求共識來下決策的時候。此時，各人分別實行AHP，經出示結果相互檢討之後，再提出結論也是一種方法。可是，在取得小組的共識方面，也需要由小組決定一對比較之值。此種情形，在各成員間經常發生一對比較值不一致。只要各成員的立場與價值觀不同，自然是理所當然的。雖然可以將它集中成一個數值，但無法取得同意時可如下因應。

# 例子

- ✓ 小組的成員有A, B, C 3氏，對某問題進行了一對比較，在如下的一個部位（$\boxed{\quad\quad}$ 內）值不同，總是無法整理成1個數值。

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & \boxed{3} & 5 \\ & 1 & 1 & 2 & 3 \\ & & 1 & 2 & 4 \\ & & & 1 & 3 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}
B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & \boxed{4} & 5 \\ & 1 & 1 & 2 & 3 \\ & & 1 & 2 & 4 \\ & & & 1 & 3 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}
C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & \boxed{5} & 5 \\ & 1 & 1 & 2 & 3 \\ & & 1 & 2 & 4 \\ & & & 1 & 3 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}
$$

# 例子(續)

- 此種情形，以**3**氏之值的幾何平均當作替代值來採用。亦即

$$\sqrt[3]{3 \times 4 \times 5} = \sqrt[3]{60} = 3.915$$

- 如此採行時，在一對比較矩陣中對稱位置的數值即成立倒數關係。亦即

$$\sqrt[3]{\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5}} = \sqrt[3]{\frac{1}{60}} = \frac{1}{3.915}$$

# 例子(續)

- 取算術平均時，此種倒數關係一般是不成立的。如在本例中，

$$\frac{1}{3}(3+4+5)=4$$

- 由於 $1/4=0.25$ ，所以

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)=0.261$$

- 對稱位置的數值即不成立倒數關係。

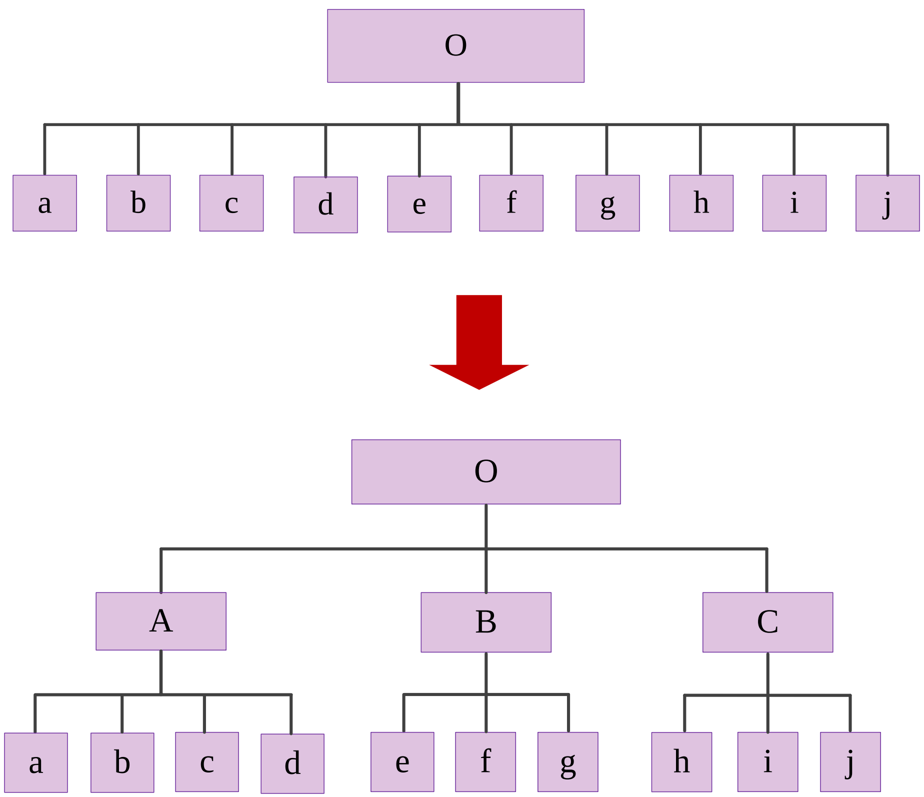
# AHP數理說明與特性

# 2.建立成對比較矩陣

- 同一層屬性中，決策者對任兩個屬性之相對重要性的比較結果
- 有***n***個屬性時，則需要進行 $C_2^n$次的成對比較
- 每一層級的屬性總量***n***最好控制在**7**個以下，超出時可以再分層處理

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{23} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & 1/a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

二層級屬性架構（1x10）




三層級屬性架構（1x3x10）

# 3.計算特徵值與特徵向量 (1/3)

- $a_{ij}$為屬性$A_i$對於屬性$A_j$的相對重要度。令$w_i$、$w_j$分別為屬性$A_i$與屬性$A_j$之權重，定義 $a_{ij} = \dfrac{w_i}{w_j}$ ，則成對比較矩陣可以改寫如下：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{23} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & 1/a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \cdots & \\ \vdots & & & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots & w_n/w_n \end{bmatrix}$$

# 3.計算特徵值與特徵向量(2/3)

- 成對比較矩陣
  - 求出成對矩陣後，使用數值分析中的特徵值(eigenvalue)解法，找出特徵向量(eigenvector)
  - 若矩陣A為一個$n \times n$的一致性矩陣時，A的特徵向量X與特徵值λ和矩陣A的關係如下式：

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \lambda \cdot \mathbf{X}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{X} = 0$$

- 成立之條件為特徵向量X為非零向量且行列式解開後，即可求得矩陣A的$n$個特徵值λ，其中最大特徵值標記為$\lambda_{max}$

# 3.計算特徵值與特徵向量(3/3)

- 令W為n個屬性的權重向量，也就是 $\mathbf{W}=[w_1, w_2, \cdots, w_n]^T$ ，則成對比較矩陣A 與權重向量內積可得下式：

$$
\mathbf{A}\cdot\mathbf{W}=\begin{bmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \cdots & \\ \vdots & & & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots & w_n/w_n \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} nw_1 \\ nw_2 \\ \vdots \\ nw_n \end{bmatrix}
$$

$$
= n\cdot\mathbf{W}
$$

- 上式中權重向量W恰為成對比較矩陣A之特徵向量，且n恰為特徵值的其中一個，上式可改寫為：$\mathbf{A}\cdot\mathbf{W}=\lambda_{\max}\cdot\mathbf{W}$
- 可依數值分析理論求解最大特徵值 $\lambda_{\max}$ 與特徵向量，也就是權重向量W

# 【計算範例】特徵值與特徵向量

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1/3 & 1 & 5 \\ 1/7 & 1/5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 & 7 \\ 1/3 & 1-\lambda & 5 \\ 1/7 & 1/5 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)^3 - 3(1-\lambda) + \frac{274}{105} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{\max} = 3.065$$

代入方程式 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{W} = \lambda_{\max} \cdot \mathbf{W}$

得 $\mathbf{W} = [w_1, w_2, w_3]^T = [0.649,\ \ 0.279,\ \ 0.072]^T$

高次多項式求解不易

# 4.驗證一致性(1/2)

- 理性決策者的偏好架構應該滿足遞移律 (transitivity)
- 主觀判斷構成的成對比較矩陣不容易完全遵照遞移律，因此需測試其偏好一致性 (consistency)程度
- Saaty(1990)提出一致性比率（consistency ratio, CR）

$$\boxed{CR=\frac{CI}{RI}}\begin{cases} =0 & \text{表示前後判斷具完全一致性} \\ \leq 0.1 & \text{表示前後雖不完全一致，但為可接受的偏誤} \\ >0.1 & \text{表示前後判斷有不一致} \end{cases}$$

  - 一致性指標（consistency index, CI）
  - 隨機指標（random index, RI）

$$CI=\frac{\lambda_{max}-n}{n-1}$$

調整不同矩陣階數大小所產生不同程度的CI值變化

| 階數 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| RI | N.A. | N.A. | 0.58 | 0.9 | 1.12 | 1.24 | 1.32 | 1.41 | 1.45 | 1.49 | 1.51 | 1.48 | 1.56 | 1.57 | 1.58 |

# 4.驗證一致性(2/2)

- 當CR值超過可接受的上限0.1時，表示成對比較結果不符合一致性要求，採用以下兩種解決方法：
  - 更換某個成對比較的判斷值
  - 更換以某個元素為主所做的整列成對比較判斷值
- 以上方法僅可微調修正不符合一致性要求的問題，不能過度使用去大幅變更調整成對比較結果，以免偏離實際狀況，以致決策者真實的偏好被人為調整的數字掩蓋了

# 方案成對比較
# 以建立個別屬性下之方案衡量

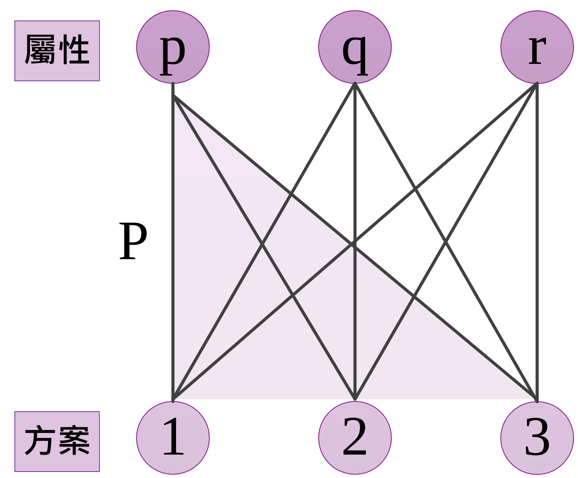
- 方案間的兩兩比較必須在每個屬性下都進行一次，操作過程與建立屬性間相對權重的過程相同，包含：
  1. 依評估尺度蒐集衡量值
  2. 建立方案間的成對比較矩陣
  3. 計算特徵值與特徵向量
  4. 驗證一致性

# 操作過程(1/2)

- 1.依評估尺度蒐集衡量值
  - 問卷調查以兩兩比較的問題作為媒介，在某一個屬性下萃取決策者對兩個方案符合該屬性的相對程度

**請在以下敘述中，勾選一個你認為符合的敘述。**
針對升遷管道暢通而言，「工作機會1」相對於「工作機會2」符合升遷管道暢通之相對價值為：

□「工作機會1」相對於「工作機會2」為絕對符合
□「工作機會1」相對於「工作機會2」為極符合
□「工作機會1」相對於「工作機會2」為頗符合
□「工作機會1」相對於「工作機會2」為稍符合
□「工作機會1」相對於「工作機會2」為同等符合
□「工作機會2」相對於「工作機會1」為稍符合
□「工作機會2」相對於「工作機會1」為頗符合
□「工作機會2」相對於「工作機會1」為極符合
□「工作機會2」相對於「工作機會1」為絕對符合



# 操作過程(2/2)

- 2.方案間的成對比較矩陣

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 1 & p_{12} & p_{13} \\ 1/p_{12} & 1 & p_{23} \\ 1/p_{13} & 1/p_{23} & 1 \end{bmatrix}$$

根據相同的操作程序可建立P、Q、R 三個成對比較矩陣

- 3.計算特徵值與特徵向量
  - 由成對比較矩陣可求得特徵向量$\omega_P$ = [$\omega_{p1}$ $\omega_{p2}$ $\omega_{p3}$ ]$^T$：

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{P}}=[\omega_{p1} \quad \omega_{p2} \quad \omega_{p3}]^T$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{Q}}=[\omega_{q1} \quad \omega_{q2} \quad \omega_{q3}]^T$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{R}}=[\omega_{r1} \quad \omega_{r2} \quad \omega_{r3}]^T$$

總評分矩陣

$$\Omega=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{P}} & \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{Q}} & \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{R}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \omega_{p1} & \omega_{q1} & \omega_{r1} \\ \omega_{p2} & \omega_{q2} & \omega_{r2} \\ \omega_{p3} & \omega_{q3} & \omega_{r3} \end{bmatrix}$$

- 4.驗證一致性
  - 計算一致性比率C.R. 值，若C.R. ≤ 0.1，則符合一致性要求

# 加總模式與方案總排序

- 採取線性加總模式，將權重矩陣與評分矩陣做內積，即可計算每個方案的綜合評分，作為總排序之結果

$$\Omega \cdot \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \omega_{p1} & \omega_{q1} & \omega_{r1} \\ \omega_{p2} & \omega_{q2} & \omega_{r3} \\ \omega_{p3} & \omega_{q3} & \omega_{r3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_p \\ w_q \\ w_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_p\omega_{p1} + w_q\omega_{q1} + w_r\omega_{r1} \\ w_p\omega_{p2} + w_q\omega_{q2} + w_r\omega_{r2} \\ w_p\omega_{p3} + w_q\omega_{q3} + w_r\omega_{r3} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \cdots \text{方案1} \\ \cdots \text{方案2} \\ \cdots \text{方案3} \end{array}$$

- **AHP的加總模式是由下而上以計算最底層的各方案對整個目標層級的各層屬性的優先順位，而由逐層加權後的總和決定各方案的優劣，作為實際決策的參考**

# AHP方法的特性

- 根據決策者主觀偏好而建構決策模式並估計參數，同時強調以圖像化表示決策問題各元素間的階層關係
- 和其他多屬性決策模式一樣，可以同時考慮多個評估屬性來評估方案的相對價值。然而，AHP成對比較的結果為比率尺度
- 評估時是以成對比較的方式建構屬性和方案的成對比較矩陣，再計算特徵向量以推導各屬性的相對權重，以及不同方案在各屬性的相對價值
- 可同時處理質化及量化資料，須做一致性的檢定以檢驗資料的一致性和信度
- 同時匯集專家的判斷與經驗，以產生解決方案之優先順序，適合用於群體決策問題

# AHP的特徵

1.評價基準有很多，而且相互並無共通的尺度之類的問題是可以解決的。

2.在以往的定量分析中無法處理之不明確(Intangible)要因交織著，構造也不明確之問題是可以解決的。

3. 首尾一貫性的整合度可以同時知道，所以修正容易。

4.將複雜且構造不明確的問題利用階層化來整理，能以有限的條件不斷地去做部分性的比較，之後即可進行全體的評價。

# AHP的特徵(續)

5. 將系統的探討與主觀的判斷加以組合，即可活用難以採納的直覺與經驗來下決策。

6. 像沒有數據、或在不易收集的環境下進行決策之類的問題是可以解決的。

7. 在決定之前，設想各種情形並想預測決策之影響對此類的問題是可以解決的。

8. 當由小組來決策時，表示及整理有關人員之間的意見也是非常方便的。

# AHP的注意點

1. 引進到同一層次的要素應選擇相互間獨立性高者。

2. 一對比較的對象要素在7 個左右，至多不超過9 個。

3. 當一對比較值無法確信時，對該值進行分析。

4. 綜合的重要度（綜合評價值）表示偏好度，依此值的大小順序來決定理想的替代案。

5. 當小組決策使用AHP 時，一對比較值是使用小組成員之值的幾何平均。