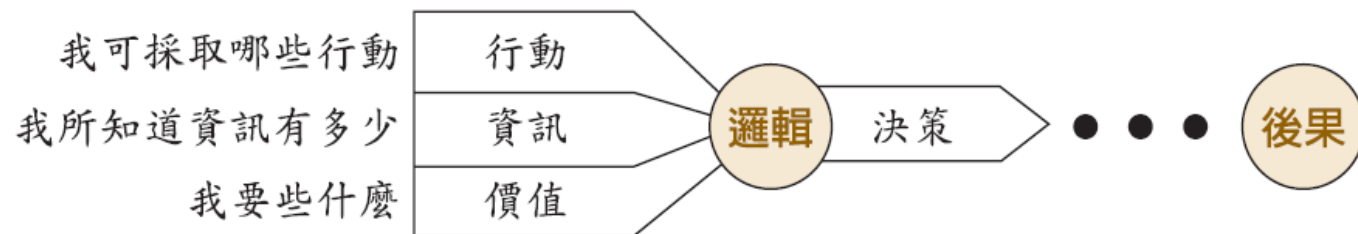


DECISION THEORY

成大工資管 吳政翰 教授



我應如何組織上述的認知 (資訊)、
方案和價值以便得到一個決策



Decision Theory

3

- A general approach to decision making that is suitable to a wide range of operations management decisions
- Characteristics of decisions that are suitable for using decision theory
 - ▣ A set of possible future conditions that will have a bearing on the results of the decision
 - ▣ A list of alternatives from which to choose
 - ▣ A known payoff for each alternative under each possible future condition

Causes of Poor Decisions

4

- Decisions occasionally turn out poorly due to unforeseeable circumstances; however, this is not the norm
- More frequently poor decisions are the result of a combination of
 - ▣ Mistakes in the decision process
 - ▣ Bounded rationality
 - ▣ Suboptimization

Mistakes in the Decision Process

5

- Errors in the Decision Process
 - ▣ Failure to recognize the importance of each step
 - ▣ Skipping a step
 - ▣ Failure to complete a step before jumping to the next step
 - ▣ Failure to admit mistakes
 - ▣ Inability to make a decision

Bounded Rationality & Suboptimization

6

- **Bounded rationality**

- ▣ The limitations on decision making caused by costs, human abilities, time, technology, and availability of information

- **Suboptimization**

- ▣ The results of different departments each attempting to reach a solution that is optimum for that department

Process for Using Decision Theory

7

1. Identify the possible future *states of nature*
2. Develop a list of possible *alternatives*
3. Estimate the *payoff* for each alternative for each possible future state of nature
4. If possible, estimate the *likelihood* of each possible future state of nature
5. Evaluate alternatives according to some *decision criterion* and select the best alternative

Decision Process

8

□ Steps:

1. Identify the problem
2. Specify objectives and criteria for a solution
3. Develop suitable alternatives
4. Analyze and compare alternatives
5. Select the best alternative
6. Implement the solution
7. Monitor to see that the desired result is achieved

Payoff Table

9

- A table showing the expected payoffs for each alternative in every possible state of nature

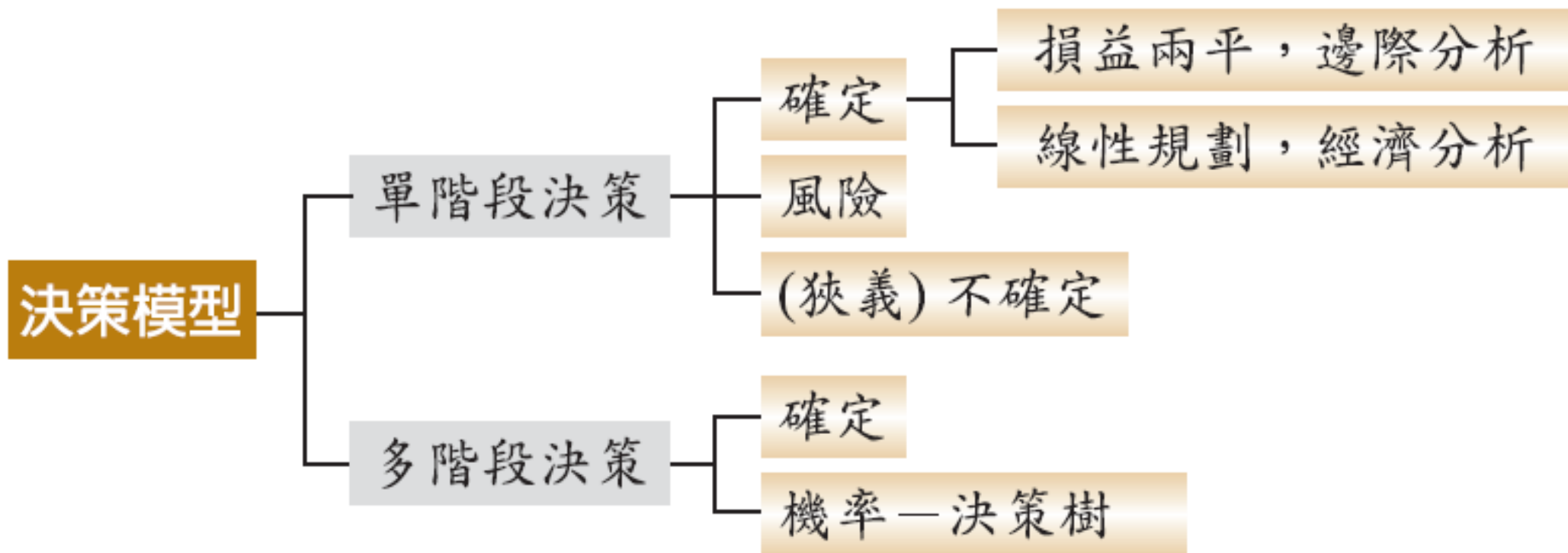
	Possible Future Demand		
Alternatives	Low	Moderate	High
Small facility	\$10	\$10	\$10
Medium facility	7	12	12
Large Facility	(4)	2	16

- A decision is being made concerning which size facility should be constructed
- The present value (in millions) for each alternative under each state of nature is expressed in the body of the above payoff table

Decision Environments

10

- There are three general environment categories:
 - ▣ **Certainty**
 - Environment in which relevant parameters have known values
 - ▣ **Risk**
 - Environment in which certain future events have probabilistic outcomes
 - ▣ **Uncertainty**
 - Environment in which it is impossible to assess the likelihood of various possible future events



決策制定

不確定的情境有狹義和廣義兩種說法。

- 前者是指決策者對於各本性狀況發生的可能大小**完全缺乏資訊**，以致於難以抉擇；
- 後者則是指任何**不屬確定情境的情境**，只要決策者無法確知哪一種狀況一定會發生，就算是「不確定情境」。

因此，它可分為風險情境或狹義的不確定情境。換句話說，包括

- 決策者對可能狀況有局部資訊可用以計算
- 或評估其機率，以及完全沒有資訊而無法計算或評估機率

Decision Making Under Certainty

13

- Sometimes we know the exact outcome or environment. Under those situations, making a decision is easy. For example, if Investment 1 gives a return of 3.4% and Investment 2 gives a return of 5.6%, then **we know what to do**.
- **Uncertainty** comes when there is **a risk involved**, for instance, Investment 1 could be the return on a CD which is guaranteed, but Investment 2 could be a mutual fund whose **returned can't be guaranteed**.
- Decisions are sometimes made under **complete uncertainty**: No information is available on how likely the various states of nature are.

Decision Making Under Uncertainty

14

□ Decision criteria:

將不確定性刻度化，另一方法為連續積分期望值方法，但此方法需要知道不確定性的分配，若資料稀疏下不見得實務可用

▣ Maximin 悲觀

- Choose the alternative with **the best of the worst possible payoffs**

▣ Maximax 樂觀

- Choose the alternative with **the best possible payoff**

▣ Laplace

- Choose the alternative with **the best average payoff**

▣ Minimax regret

- Choose the alternative that has the least of the worst regrets

■ 悲觀準則 —— 小中取大 (Maximin)

雖然我們所認識的人中有些人凡事都採用樂觀準則，事實上卻有更多的人採用悲觀準則。因為這些人深信莫非定律 (Murphy's law) 所說：「任何可能會發生的倒楣事就會發生。」

本準則的作法為首先由各列中選出最劣狀況，然後由其中選取最佳者。在本準則下，決策制定者試圖由多個極小的可能利潤中取其中最大者，因此也稱為「小中取大準則」。根據償付表中所含資訊，決策者首先列出在各決策方案中最小償付，然後由其中選取最大者。

Example – Maximin Criterion

16

Alternatives	Possible Future Demand		
	Low	Moderate	High
Small Facility	\$10	\$10	\$10
Medium Facility	7	12	12
Large Facility	(4)	2	16

- The worst payoff for each alternative is
 - Small facility: \$10 million
 - Medium facility: \$7 million
 - Large facility: -\$4 million
- Choose to construct a small facility**

■ 樂觀準則 —— 大中取大 (Maximax)

假若決策者是個天生的樂觀派，他會爭取一切機會採取這個行動準則，也就是本著「兩利相權取其重」的原則。利用這個準則，他由面對的各替代方案中決定最為可能的出象，然後由這些最好的出象中再選最好的方案。換句話說，在極大化的狀況下，他由各列中選出列極大，而後再由其中選極大值，因此本準則也稱為「大中取大準則」。

Example – Maximax Criterion

18

Alternatives	Possible Future Demand		
	Low	Moderate	High
Small Facility	\$10	\$10	\$10
Medium Facility	7	12	12
Large Facility	(4)	2	16

- The best payoff for each alternative is
 - Small facility: \$10 million
 - Medium facility: \$12 million
 - Large facility: \$16 million
- Choose to construct a large facility**

■ 赫維茲準則 —— 加權準則

上述樂觀準則和悲觀準則的共同缺點是二者都是偏向償付值中的極端值。樂觀者似乎忽略了倒楣的可能性，而悲觀者也未見有利出象的可能性。赫維茲建議在二個極端中採用一個較為彈性和現實的作法，就是對最佳與最劣狀況各取一個加權值 α 。這個加權值 α 視決策者的樂觀程度而定。其中 $\alpha=0$ 代表完全悲觀主義者， $\alpha=1$ 代完全樂觀者。赫氏值 (Hurwicz value) 可用下列公式表示

$$H=(\alpha)(\text{最佳狀況發生機率})+(1-\alpha)(\text{最劣狀況發生機率}) \quad (12.1)$$

其中 $0 \leq \alpha \leq 1$ 。

Example – Hurwicz

20

Alternatives	Possible Future Demand		
	Low	Moderate	High
Small Facility	\$10	\$10	\$10
Medium Facility	7	12	12
Large Facility	(4)	2	16

Set $\alpha = 0.4$

- The worst payoff for each alternative is
 - Small facility: $10 \times 0.4 + 10 \times (1 - 0.4) = \10 million
 - Medium facility $7 \times 0.4 + 12 \times (1 - 0.4) = \10 million
 - Large facility $-4 \times 0.4 + 16 \times 0.6 = \8 million
- Choose to construct a small or medium facility**

Example

例題 12.4 EXAMPLE

旭和公司即將推出新產品上市，行銷部門提出三種促銷決策：

a_1 ：在電視上播放廣告，如果成功，回報很大，但若產品不受市場歡迎，則雖支出龐大廣告費，卻回報很少。

a_2 ：在某區域進行試銷，支出費用不大，產品不會非常熱賣但也不會嚴重滯銷。

a_3 ：在雜誌和報紙上刊登廣告，回報介於 a_1 與 a_2 之間。

市場對該新產品的反應預估可分成良、可、劣三種，估計利潤(萬元)如表 12.3 所示。

表 12.3

本性狀況 行動	e_1	e_2	e_3
	良	可	劣
a_1	110	45	-30
a_2	80	40	10
a_3	90	55	-10

試利用以下決策準則決定應採用的促銷行動。

(a) Maximin 準則。

(b) Maximax 準則。

(c) 赫維茲準則 ((i) $\alpha=0.3$; (ii) $\alpha=0.7$)。

解

(a) 採 Maximin 準則，則

$$\text{Max } (-30, 10, -10) = 10$$

即採行動 a_2 ，進行區域試銷。

這是一個保守派的看法，因為決策者認為所獲得的不致比所選的極小值還低，除非是最倒楣的狀況發生，否則償付值應會高於 Maximin 值。

(b) 採 Maximax 準則，則

$$\text{Max } (110, 80, 90) = 110$$

即採行動 a_1 ，在電視上播放廣告。

(c) 採用赫維茲準則

(i) $\alpha=0.3$

$$H_1 = 110(0.3) + (-30)(0.7) = 33 - 21 = 12$$

$$H_2 = 80(0.3) + 10(0.7) = 24 + 7 = 31$$

$$H_3 = 90(0.3) + (-10)(0.7) = 27 - 7 = 20$$

因此應採用行動 a_2 ，進行區域試銷。

(ii) $\alpha=0.7$

$$H_1 = 110(0.7) + (-30)(0.3) = 77 - 9 = 68$$

$$H_2 = 80(0.7) + 10(0.3) = 56 + 3 = 59$$

$$H_3 = 90(0.7) + (-10)(0.3) = 63 - 3 = 60$$

因此應採用行動 a_1 ，在電視上播放廣告。

拉普拉斯準則

24

- 在先前所述的狹義不確定型決策問題中，無論是樂觀準則或悲觀準則都沒有將每一本性狀況發生的機率列入考量，法國數學家拉普拉斯 (Laplace) 假設各本性狀況的發生機率相同，將問題由不確定型轉為風險型，即採用拉普拉斯準則 (Laplace criterion)，該法則也稱為不充足理由法則 (principle of insufficient reason)。

Example – Laplace Criterion

25

Alternatives	Possible Future Demand		
	Low	Moderate	High
Small Facility	\$10	\$10	\$10
Medium Facility	7	12	12
Large Facility	(4)	2	16

- The average payoff for each alternative is
 - Small facility: $(10 + 10 + 10) \div 3 = \10 million
 - Medium facility $(7 + 12 + 12) \div 3 = \$10.33$ million
 - Large facility $(-4 + 2 + 16) \div 3 = \$4.67$ million
- Choose to construct a medium facility**

例題 12.10

試將例題 12.4 旭和公司例以拉普拉斯準則制定決策。

解

例題 12.4

旭和公司即將推出新產品上市，行銷部門提出三種促銷決策：

a_1 ：在電視上播放廣告，如果成功，回報很大，但若產品不受市場歡迎，則雖支出龐大廣告費，卻回報很少。

a_2 ：在某區域進行試銷，支出費用不大，產品不會非常熱賣但也不會嚴重滯銷。

a_3 ：在雜誌和報紙上刊登廣告，回報介於 a_1 與 a_2 之間。

市場對該新產品的反應預估可分成良、可、劣三種，估計利潤(萬元)如表 12.3 所示。

表 12.3

本性狀況 行動	e_1	e_2	e_3
	良	可	劣
a_1	110	45	-30
a_2	80	40	10
a_3	90	55	-10

Example

例題 12.11

EXAMPLE

光復瓦斯公司向地主王老爹提議願出 60000 元取得其土地的探勘權，以進一步探求有瓦斯蘊藏量可能性，並確認未來開發的可行性。如果探勘發現該地油氣多，公司加付 660000 元買下這塊地。但是王老爹認為該地有瓦斯的可能性很大，因此想要自行開發。這時他必須與一家有探勘能力的公司簽約，這項費用是 100000 元，如果結果為否定，則這筆費用就付諸東流；反之，如果答案是好消息，則地主估計其淨利為 2000000 元。現假設本性狀況 e_1 ：地下無油氣、 e_2 ：地下有油氣；王老爹的行動方案 a_1 ：接受光復的提議、 a_2 ：自行開發。其利益 (千元) 如表 12.9 所示：

表 12.9

本性狀況 行動	e_1	e_2
a_1	60	660
a_2	-100	2000

試問在下列各準則下應如何抉擇？

- (a) 採 Maximin 準則。
- (b) 採赫維茲準則 ($\alpha=0.6$)。
- (c) 採拉普拉斯準則。
- (d) 如果王老爹估計找到油氣的機率為 0.6，試問應採取哪一個決策？

解

(a) 採 Maximin 準則，即

(b) 採赫維茲準則

因此採行動 a_2 ，即自行開發。

(c) 採拉普拉斯準則

(d) 依題意得知 $P(e_2)=0.6$ ，因此 $P(e_1)=0.4$ 。採行動方案 a_1 的期望利益

期望獲利準則？

◉ 例題 12.12 EXAMPLE

試以決策樹法求解光復瓦斯公司例。

解

$$EMV_1 = (60)(0.4) + (660)(0.6) = 420$$

$$EMV_2 = (-100)(0.4) + (2000)(0.6) = 1160$$

因此應採用行動 a_2 ，即自行開發。

■ 薩凡奇準則

本準則不專注於原本償付矩陣而是注重遺憾值矩陣 (regret matrix) 或稱「**條件機會損失**」 (conditional opportunity loss) 矩陣。遺憾值矩陣的作法為矩陣內找出每行中最好的值，先以該值減去該行的每一個數值，薩凡奇準則採悲觀準則，選取能極小化極大遺憾值的替代方案，因此也稱為**大遺憾值中取小準則** (Minimax regret criterion)。

Example – Minimax Regret

33

	Possible Future Demand		
Alternatives	Low	Moderate	High
Small Facility	\$10	\$10	\$10
Medium Facility	7	12	12
Large Facility	(4)	2	16
	<i>Max</i>	<i>10</i>	<i>12</i>
			<i>16</i>

- Construct a **regret** (or **opportunity loss**) table
 - The difference between a given payoff and the best payoff for a state of nature

	Regrets		
Alternatives	Low	Moderate	High
Small Facility	\$0	\$2	\$6
Medium Facility	3	0	4
Large Facility	14	10	0

Example – Minimax Regret (cont.)

34

Alternatives	Regrets		
	Low	Moderate	High
Small Facility	\$0	\$2	\$6
Medium Facility	3	0	4
Large Facility	14	10	0

- Identify the worst regret for each alternative
 - Small facility \$6 million
 - Medium facility \$4 million
 - Large facility \$14 million
- Select the alternative with the minimum of the maximum regrets
 - **Build a medium facility**

Example

例題 12.5 EXAMPLE

發明家王博士有一個新發明，該產品如果上市，有三種可能狀況 e_1 ：銷售良好、 e_2 ：銷售平平，以及 e_3 ：銷售不佳。王博士可採行二種決策， a_1 ：自行生產， a_2 ：將專利權賣給製造商。相關資料如下償付表所示（單位：萬元）：

表 12.4

本性狀況 行動	e_1	e_2	e_3
a_1	80	20	-5
a_2	40	7	1

試求機會損失償付表，並以薩凡奇法則決定其決策。

表 12.5

本性狀況 行動	e_1	e_2	e_3
a_1	80	20	-5
a_2	40	7	1
Max	80	20	1

將每行中的數大值減去該行中各數值，就得到機會損失償付表或稱遺憾值表如下所示：

發生某種狀況下，最大的報酬！

表 12.6 遺憾值償付表

本性狀況 行動	e_1	e_2	e_3	Max
a_1	0	0	6	6
a_2	40	13	0	40

在遺憾值表 12.6 中

$$\text{Min}(6, 40) = 6$$

因此應採行動 a_1 ，即自行生產。

例題 12.6 EXAMPLE

試以薩凡奇準則決定例題 12.4 旭和公司的決策。

解

首先列出償付矩陣如下：

表 12.7

本性狀況 行動	e_1	e_2	e_3
a_1	110	45	-30
a_2	80	40	10
a_3	90	55	-10
Max	110	55	10

以各行的最大值減去該行的每一個數值，得出遺憾值矩陣如下：

表 12.8

本性狀況 行動	良	可	劣	Max
a_1	0	10	40	40
a_2	30	15	0	30
a_3	20	0	20	20

在遺憾償付表中採大中取小準則

$$\text{Minimax} = \text{Min} (40, 30, 20) = 20$$

即應採用行動 a_3 ，即在雜誌和報紙上刊登廣告。

Decision Making Under Risk

39

- Decisions made under the condition that the probability of occurrence for each state of nature can be estimated
- 如果能夠估計出本性狀況發生的機率，則稱該情境為風險型決策。
- A widely applied criterion is **expected monetary value (EMV)**
 - ▣ EMV期望貨幣值
 - Determine the expected payoff of each alternative, and choose the alternative that has the best expected payoff
 - 假設決策者面前有 個行動選擇。根據**最大化期望值原則**，決策者應計算每個行動分別對應的期望值，然後選取期望值最高的行動。
 - ▣ This approach is most appropriate when the decision maker is neither risk averse nor risk seeking

Example – EMV

40

Alternatives	Possible Future Demand		
	Low (.30)	Moderate (.50)	High (.20)
Small Facility	\$10	\$10	\$10
Medium Facility	7	12	12
Large Facility	(4)	2	16

$$EMV_{\text{small}} = .30(10) + .50(10) + .20(10) = 10$$

$$EMV_{\text{medium}} = .30(7) + .50(12) + .20(12) = 10.5$$

$$EMV_{\text{large}} = .30(-4) + .50(2) + .20(16) = \$3$$

Build a medium facility

Example

例題 12.7

EXAMPLE

假若在例題 12.5 中，已知 $P(e_1)=0.2, P(e_2)=0.5$ 及 $P(e_3)=0.3$ ，試求王博士在期望機會損失 (EOL) 準則下的決策。

解

$$\text{EOL}(a_1) =$$

$$\text{EOL}(a_2) =$$

由於行動 a_1 的期望機會損失較低，因應採取行動 a_1 。

表 12.4

本性狀況 行動	e_1	e_2	e_3
a_1	80	20	-5
a_2	40	7	1

試求機會損失償付表，並以薩凡奇法則決定其決策。

例題 12.8

EXAMPLE

王先生欲投資 100 萬元於某項工程建設，現有甲乙兩工程在招標，根據資料分析預測，甲工程淨賺 5 萬元的可能性為 70%，淨賺 1 萬元的機會為 10%，但慘賠 2 萬元的機會為 20%；如投資乙工程可淨賺 4 萬元的機會為 60%，淨賺 3 萬元的機會為 20%，賠 1 萬元的機會為 10%。試問他該如何選擇？

解

例題 12.9

EXAMPLE

明成公司的研發部門擬開發一種新產品，計畫書中列出三種設計方案

(1) 以電力為能源，成功機率 0.75，預計可獲利 1000 萬元，失敗機率 0.25，預計損失 300 萬元；(2) 以瓦斯為能源，成功機率 0.6，預計可獲利 1500 萬元，失敗機率 0.4，預計損失 700 萬元；(3) 放棄設計。試問應如何取捨？

解

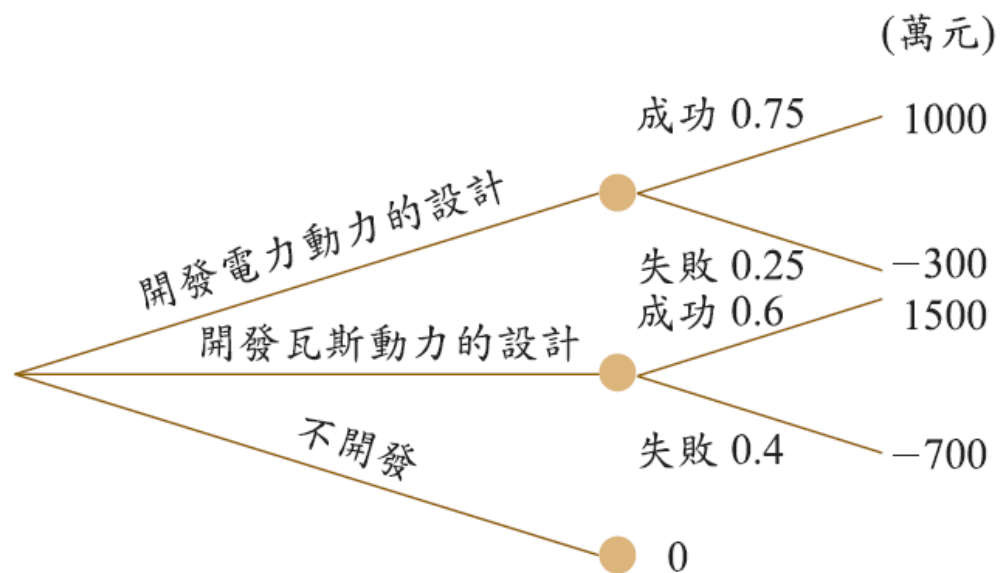


圖 12.6 決策樹圖

$$EMV_1 = 1000(0.75) + (-300)(0.25) = 675(\text{萬})$$

$$EMV_2 = 1500(0.6) + (-700)(0.4) = 620(\text{萬})$$

比較兩種方案的期望值，應採取電力為能源的設計。

Decision Tree

45

- **Decision tree**

- ▣ A schematic representation of the available alternatives and their possible consequences
- ▣ Useful for analyzing sequential decisions

Decision Tree (cont.)

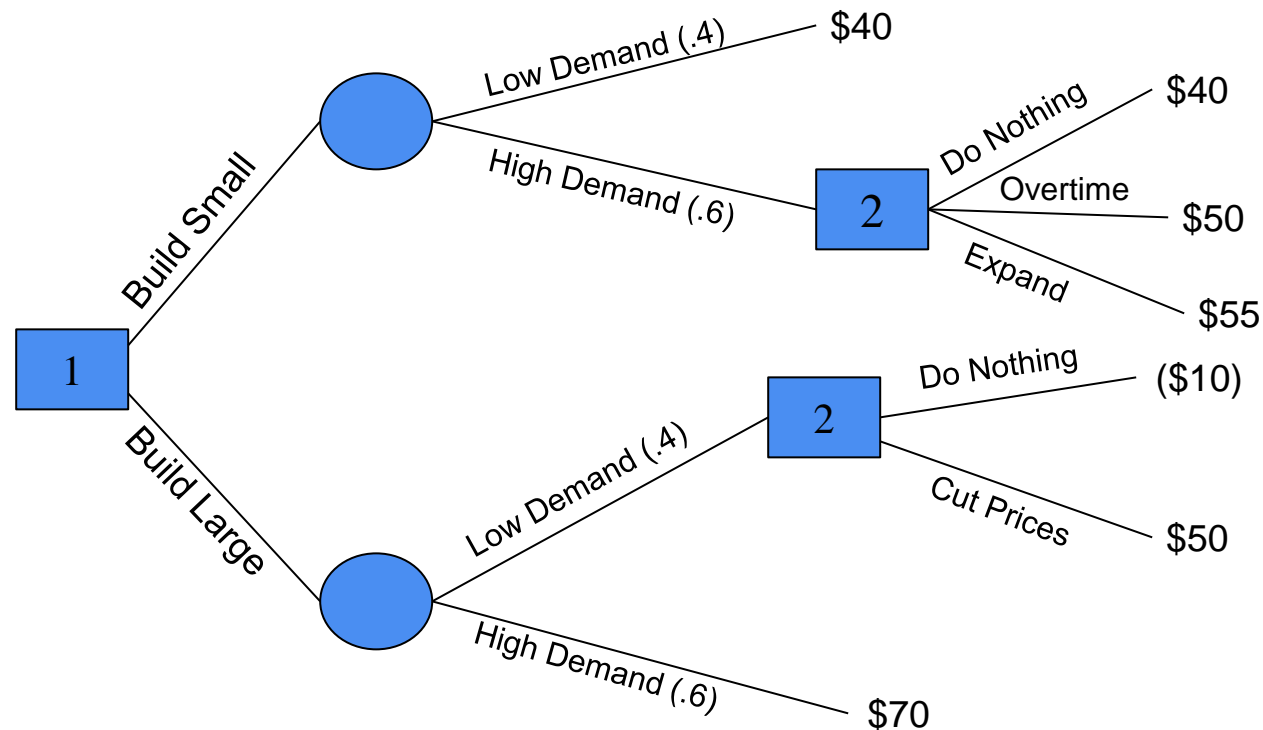
46

- Composed of
 - ▣ Nodes
 - **Decisions** – represented by **square** nodes
 - **Chance events** – represented by **circular** nodes
 - ▣ Branches
 - Alternatives – branches leaving a square node
 - Chance events – branches leaving a circular node
- Analyze from right to left
 - ▣ For each decision, choose the alternative that will yield the **greatest return**
 - ▣ If chance events follow a decision, choose the alternative that has the highest expected monetary value (or lowest expected cost)

Example – Decision Tree

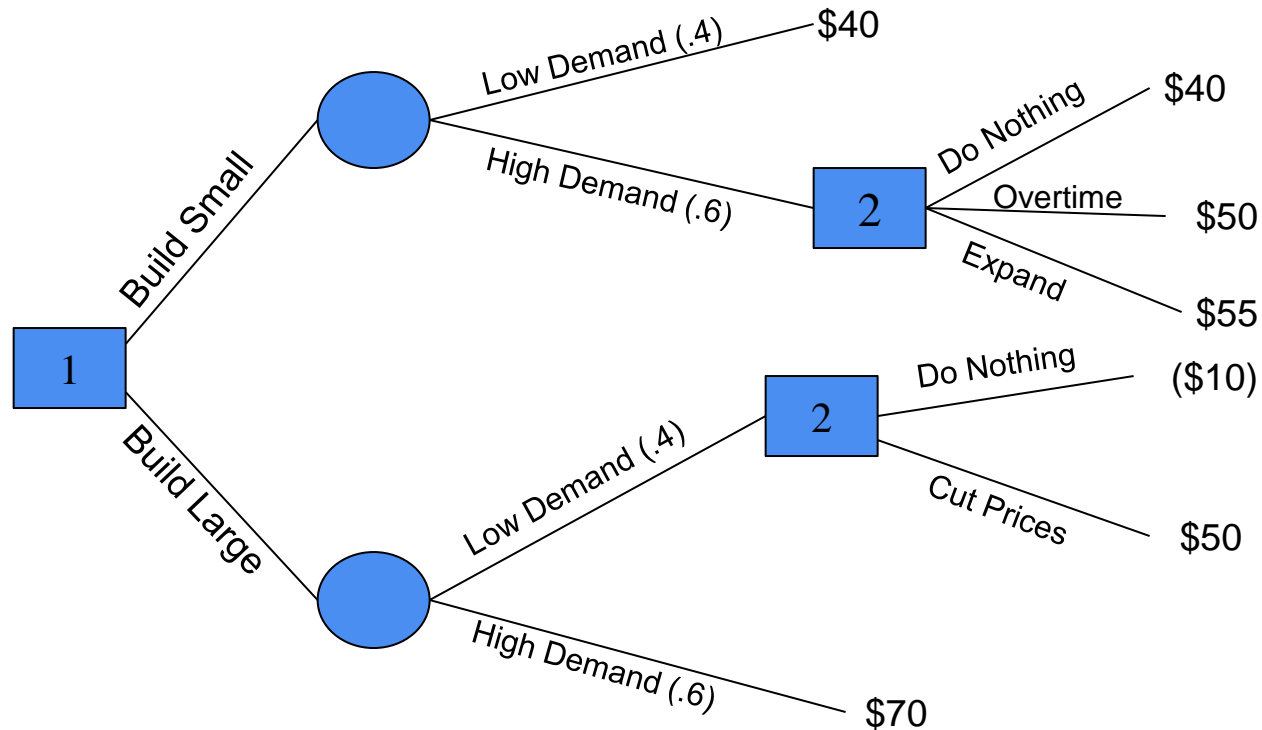
47

- A manager must decide on the size of a video arcade to construct. The manager has narrowed the choices to two: large or small. Information has been collected on payoffs, and a decision tree has been constructed. Analyze the decision tree and determine which initial alternative (build small or build large) should be chosen in order to maximize expected monetary value.



Example – Decision Tree (cont.)

48



$$EV_{\text{Small}} = .4(40) + .6(55) = \$49$$

$$EV_{\text{Large}} = .4(50) + .6(70) = \$62$$

Build the large facility

Example 1

49

例題 12.2 EXAMPLE

丁先生的心臟病有日趨嚴重的現象。醫生建議接受血管繞道手術將可能改善他的病況。但手術並非無風險——手術成功的機會只有 0.7。若手術失敗，他心臟病更惡化的機率為 0.1，維持手術前水準的機率為 0.2。另一方面，如不動手術，他的病情將維持原狀的機率為 0.6，惡化的機率為 0.4。丁先生所面對的決策情境可以表 12.2 及圖 12.5 表示。

表 12.2

本性狀況 行動	病情改善	病情維持原狀	病情惡化
動手術	0.7	0.2	0.1
不動手術	0	0.6	0.4

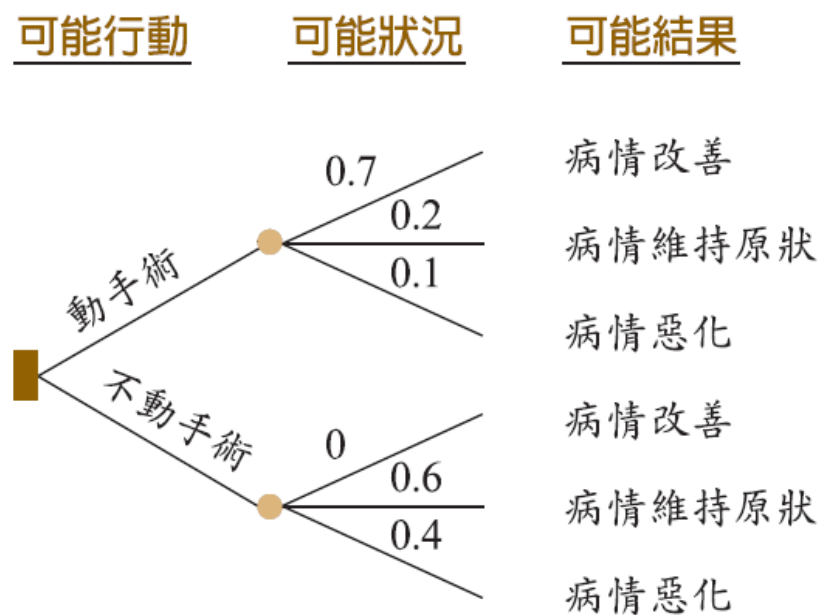


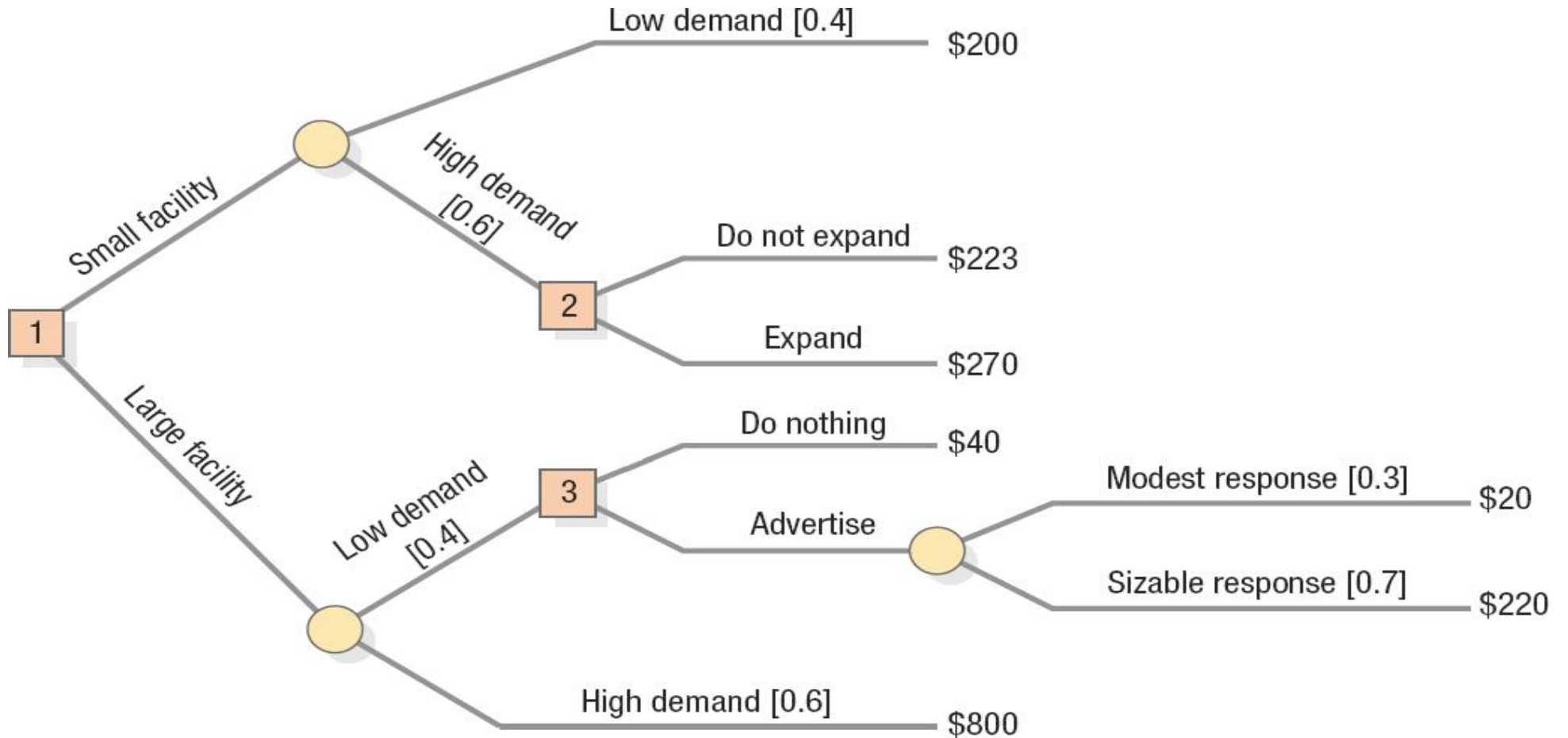
圖 12.5 決策樹圖

Example 2

- A retailer will build a small or a large facility at a new location
- Demand can be either small or large, with probabilities estimated to be 0.4 and 0.6, respectively
- For a small facility and high demand, not expanding will have a payoff of \$223,000 and a payoff of \$270,000 with expansion
- For a small facility and low demand, the payoff is \$200,000
- For a large facility and low demand, doing nothing has a payoff of \$40,000
- The response to advertising may be either modest or sizable, with their probabilities estimated to be 0.3 and 0.7, respectively
- For a modest response, the payoff is \$20,000 and \$220,000 if the response is sizable
- For a large facility and high demand, the payoff is \$800,000

Example

Decision Tree for Retailer



資訊的價值*

53

□ 完全資訊的期望值

完全資訊的期望值 = 確定性下的期望報酬 - 風險下的期望報酬

例題 12.16

EXAMPLE

明復營造公司的一份營建契約承諾必須在 4 年內完工，否則將承受巨額違約金的罰款。該個案有三種不同的規劃，其主要差異在於面對不同氣候狀況的彈性。如果在營造期間天氣良好，則計畫 1 是最佳選擇，但是卻是其他天氣狀況的最差選擇。計畫 2 適於所有狀況，計畫 3 在二種天氣下為好的選擇，但卻是其他二種狀況下的不好選擇。表 12.11 是本例的償付值表 (百萬元)。

表 12.11 償付值表 (百萬元)

天氣 \ 行動	類型 1	類型 2	類型 3	類型 4
	0.4	0.2	0.2	0.2
計畫 1	48	16	16	16
計畫 2	24	24	32	24
計畫 3	40	16	24	16

表 12.11 償付值表 (百萬元)

天氣 行動	類型 1	類型 2	類型 3	類型 4
	0.4	0.2	0.2	0.2
計畫 1	48	16	16	16
計畫 2	24	24	32	24
計畫 3	40	16	24	16

如果有位資深氣象學家能提供「完全資訊」，將使決策者對於不確定性的困擾大幅下降，制定決策的工作就會變得輕鬆容易。所謂「完全資訊」就是千真萬確的資訊，百分之百可靠。然而天下沒有白吃的午餐，通常完全資訊必須付費方能取得，這時決策者必須思考其費用的支出是否「有價值」。換句話說，如果得到完全資訊之後的獲利大於完全資訊的取得成本，則這則完全資訊是「有價值的」。本例的完全資訊下的期望值如圖 12.10 所示：

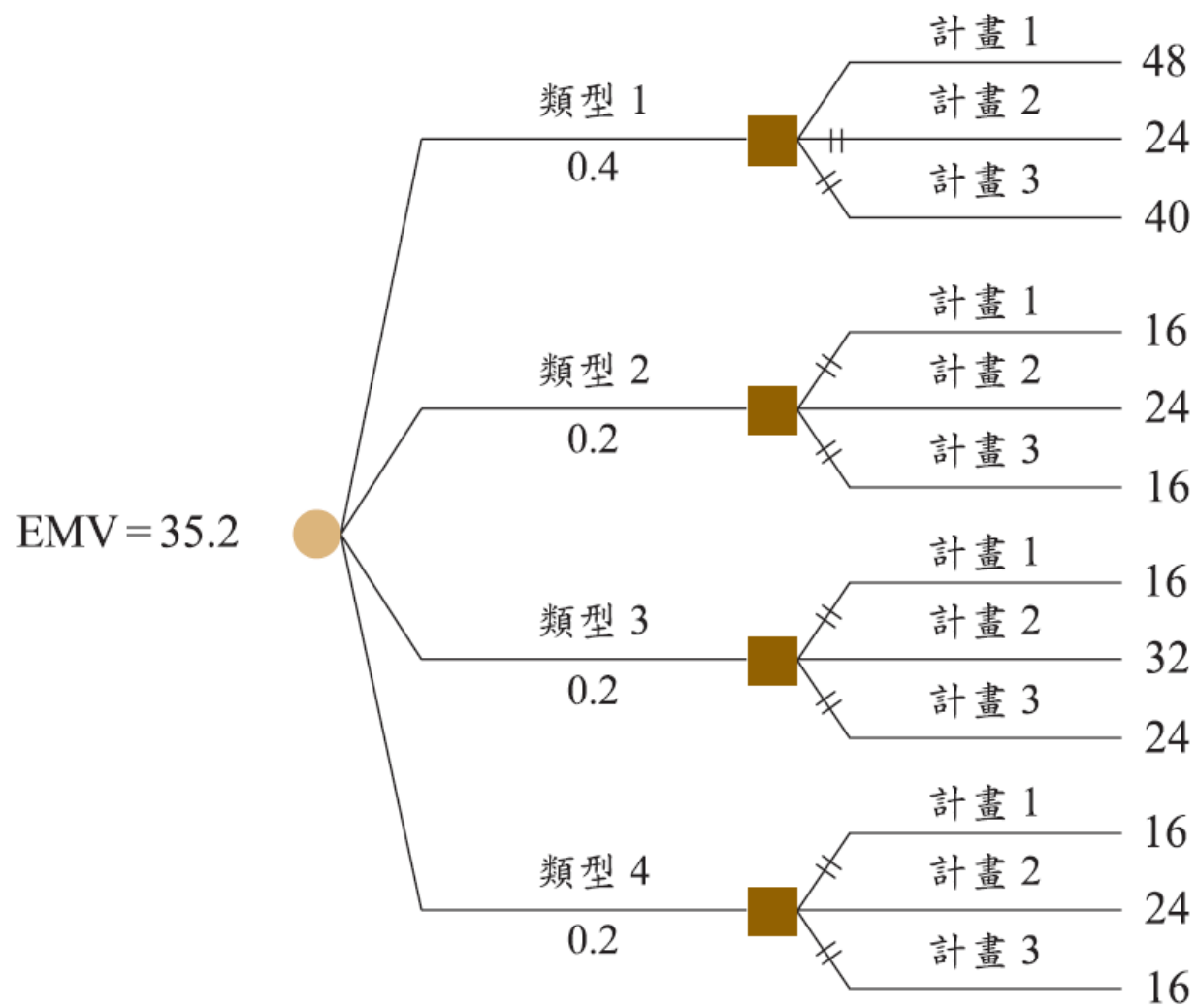


圖 12.10 決策樹圖

$$48 \times 0.4 + 24 \times 0.2 + 32 \times 0.2 + 24 \times 0.2 = 35.2$$

Expected Value of Perfect Information

57

- **Expected value of perfect information (EVPI)**
 - The difference between the expected payoff with perfect information and the expected payoff under risk
 - Two methods for calculating EVPI
 - $\text{EVPI} = \text{expected payoff under certainty} - \text{expected payoff under risk}$
 - $\text{EVPI} = \text{minimum expected regret}$

表 12.12

確知天氣	完全資訊的抉擇	償付值	機率
類型 1	計畫 1	48	0.4
類型 2	計畫 2	24	0.2
類型 3	計畫 2	32	0.2
類型 4	計畫 2	24	0.2
EMV = 35.2			

由圖 12.10 的決策樹圖可知完全資訊之 EMV 為 35.2 百萬元，讀者請注意，得到完全資訊的決策並沒有消除不確定性，因為我們在得到完全資訊之前並不確知哪一種類型的天氣會發生。如果沒有完全資訊，決策者會採用計畫 1，因為其 EMV 最大為 28.8 百萬元，如表 12.13 所示。

表 12.13 各計畫的 EMV

天氣 行動	類型 1	類型 2	類型 3	類型 4	EMV
	0.4	0.2	0.2	0.2	
計畫 1	48	16	16	16	28.8
計畫 2	24	24	32	24	25.6
計畫 3	40	16	24	16	27.2

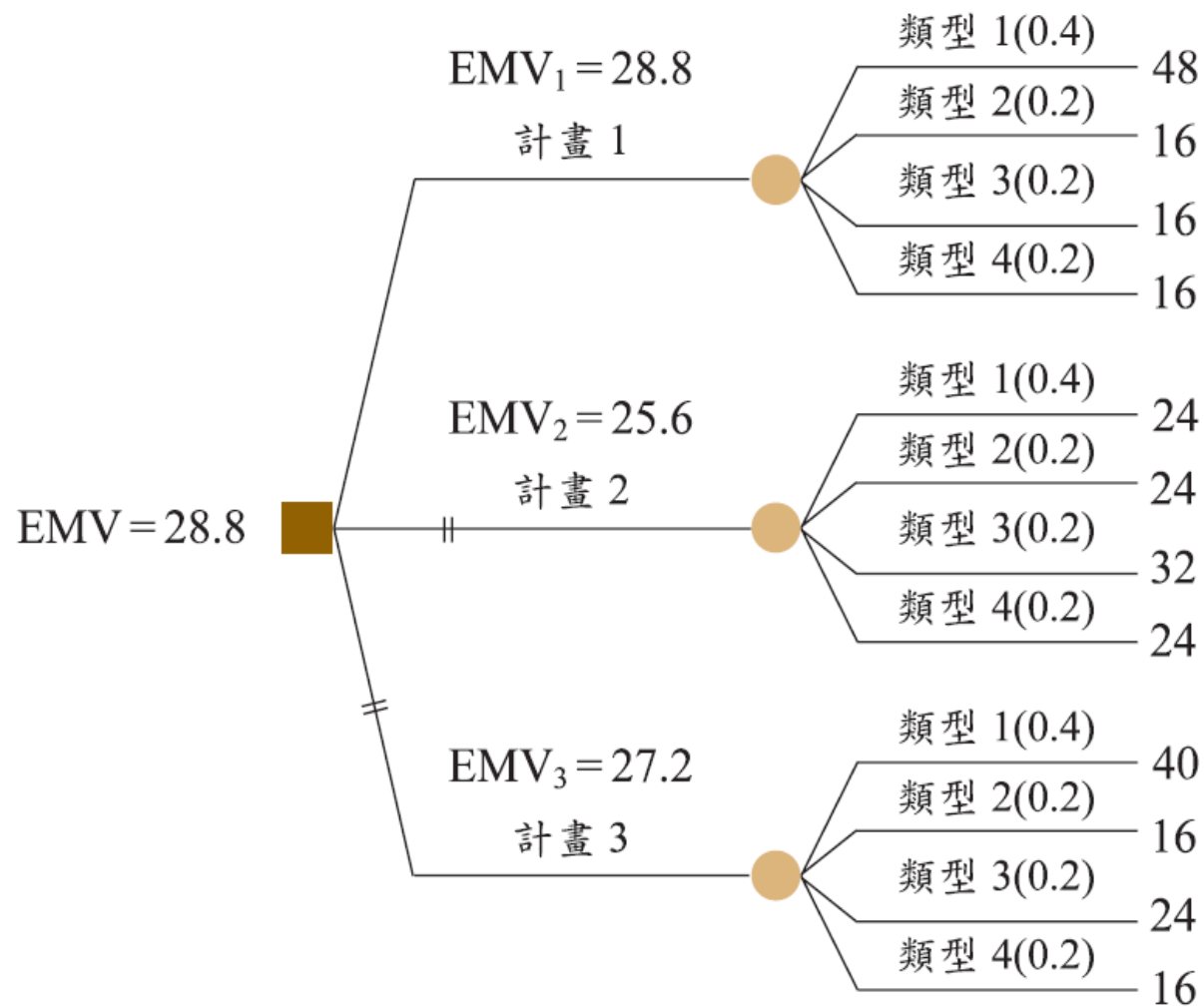


圖 12.11

所以 $EVPI = 35.2 - 28.8 = 6.4$ (百萬元)

另一種計算 EVPI 的方法為由機會損失著手。例如在天氣類型 1 的狀況下，最高的償付值為 48 百萬元，但若採用計畫 3，則機會損失為 $48 - 40 = 8$ (百萬元)。

表 12.14 期望機會損失

天氣 行動	類型 1	類型 2	類型 3	類型 4	EOL
	0.4	0.2	0.2	0.2	
計畫 1	0	8	16	8	6.4
計畫 2	24	0	0	0	9.6
計畫 3	8	8	8	8	8.0

上表顯示出各計畫的期望機會損失，計畫 1 的期望值為 6.4 (百萬元) 最低，因此採取計畫 1，本法也可理解如下表所示。

表 12.15

天氣	目前抉擇	完全資訊下的抉擇	償付值差異	機率
類型 1	計畫 1	計畫 1	0	0.4
類型 2	計畫 1	計畫 2	8	0.2
類型 3	計畫 1	計畫 2	16	0.2
類型 4	計畫 1	計畫 2	8	0.2

$$EVPI = (0 \times 0.4) + (8 \times 0.2) + (16 \times 0.2) + (8 \times 0.2) = 6.4 \text{ (百萬元)}$$

在本例中，如果資深氣象家的報酬費用低於 640 萬元，則值得採用。

不完全資訊的期望值

62

例題 12.17

EXAMPLE

在例題 12.16 明復營造公司例中，假設王總經理根據歷年的經驗確定營建期間的天氣類型是類型 1 或類型 2，其中類型 1 的機率為 0.4，類型 2 的機率為 0.6，其他數據與上例相同。他可以參考氣象預報的服務，但是這項服務並非一定可靠。如果天氣為類型 1，氣象預報為類型 1 的機率是 80%，而預報為類型 2 的機率是 20%，另一方面，如果天氣為類型 2，則氣象預報為類型 2 的機率是 70%，預報為類型 1 的機率是 30%，**假若天氣為類型 1 和類型 2 的發生機率都是 50%**，則氣象服務資訊的期望值為何？

注意：本題只考量狀態 1 與 2

解

設天氣類型 1 以 T_1 表示，天氣類型 2 以 T_2 表示，則得下表

表 12.16 聯合機率表

	預測 T_1	預測 T_2	
T_1	$0.8 \times 0.4 = 0.32$	$0.2 \times 0.4 = 0.08$	0.4
T_2	$0.3 \times 0.6 = 0.18$	$0.7 \times 0.6 = 0.42$	0.6
機率	0.50	0.50	1.00

利用貝氏定理，得到事後機率如下：

$$P(T_1 \mid \text{預測 } T_1) = \frac{0.32}{0.50} = 0.64$$

$$P(T_2 \mid \text{預測 } T_1) = \frac{0.18}{0.50} = 0.36$$

$$P(T_1 \mid \text{預測 } T_2) = \frac{0.08}{0.50} = 0.16$$

$$P(T_2 \mid \text{預測 } T_2) = \frac{0.42}{0.50} = 0.84$$

表 12.11 償付值表 (百萬元)

天氣 \ 行動	類型 1 0.4	類型 2 0.2	類型 3 0.2	類型 4 0.2
計畫 1	48	16	16	16
計畫 2	24	24	32	24
計畫 3	40	16	24	16

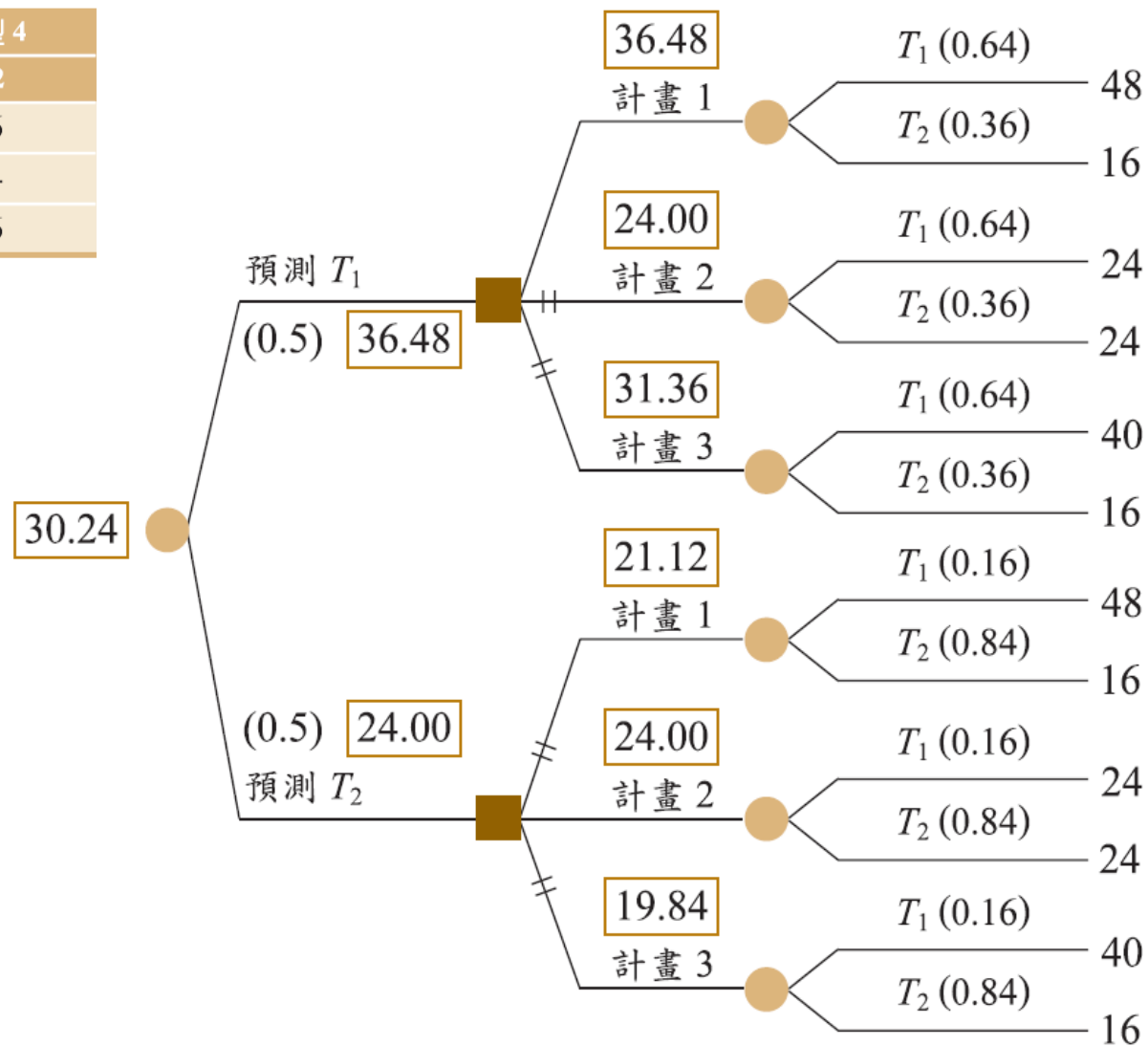


圖 12.12

因此如果參考氣象預報服務，則可知 $EMV = 30.24$ (百萬元)。

另一方面，如果不參考氣象預報的服務，則得知最佳期望值為採用計畫 1， $EMV_1=28.8$ (百萬元)。

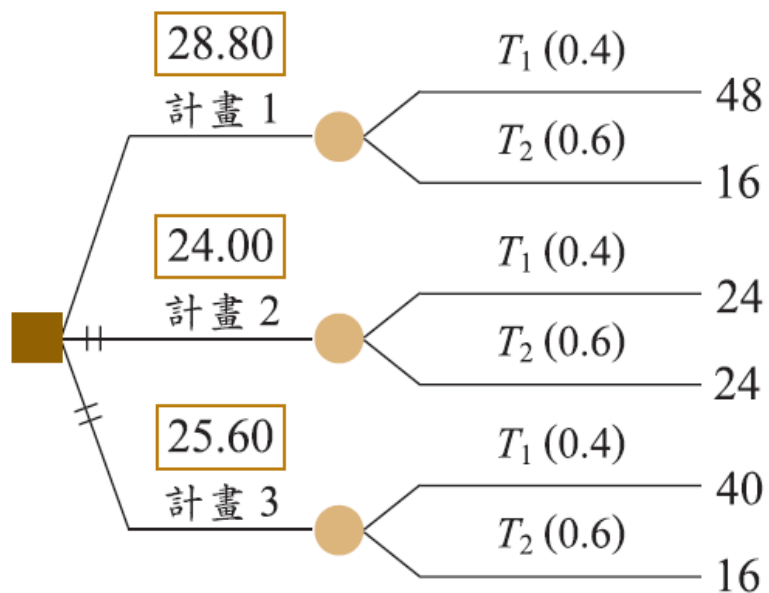


圖 12.13

因此 $EV_{II}=30.24-28.8=1.44$ (百萬元)。

如果氣象預報服務的費用低於 144 萬元，則值得投資。

例題 12.18

EXAMPLE

為了理財，志明計畫明年將一筆錢投資於股市或購買政府公債。已知股市景氣佳的機率為 0.7，景氣差的機率為 0.3，如果投資股市，當景氣差時將會損失 20000 元，反之，如果景氣好，則可獲利 90000 元，另一方面，投資政府公債，將可獲利 30000 元，將上述繪成決策樹圖如下所示：

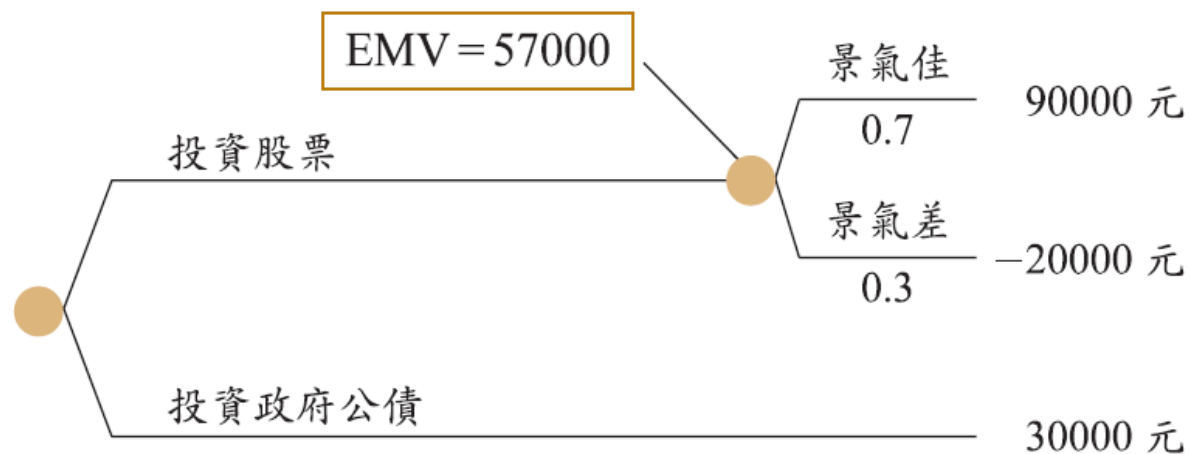


圖 12.14 完全資訊的決策樹圖

假設資深理財專家淑惠小姐能確知明年股市的景氣，但志明必須付費得到這份資訊，則可將決策樹圖改繪如下圖所示：

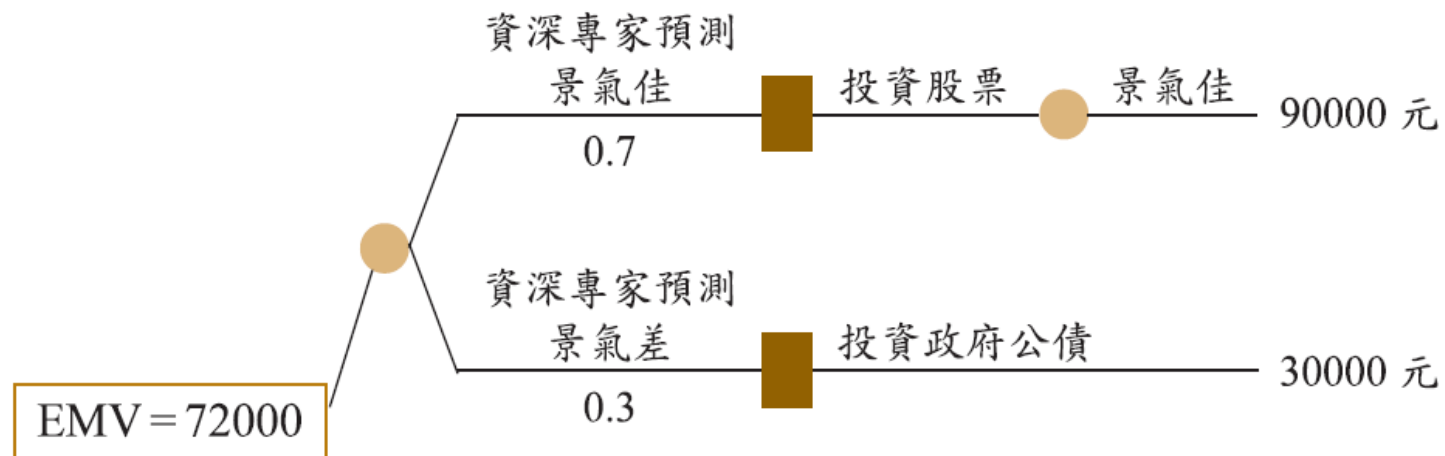


圖 12.15 決策樹圖

表 12.17 EVPI 的計算

資深專家預測	機率	最後行動	償付值 (元)	機率 × 償付值 (元)
景氣佳	0.7	投資股票	90000	63000
景氣差	0.3	投資政府公債	30000	<u>9000</u>
有完全資訊的期望值 = 72000				
沒有完全資訊的最佳期望值 = 57000				
EVPI = 15000				

不完全資訊

68

因此如果淑惠所要求的服務費用低於 15000 元，則志明值得付費。

假設淑惠所提供關於股市景氣的預測並非完全可靠，如果明年股市景氣差，淑惠正確預測為景氣差的機率是 90%，而如果股市景氣佳，她會錯誤的預測為景氣差的機率僅有 20%。此時欲求淑惠的預測最多值多少錢，必須求得不完全資訊的期望值 (EVII)，如同計算完全資訊期望值 EVPI 類似的方法，本題的決策樹圖如圖 12.16 所示：

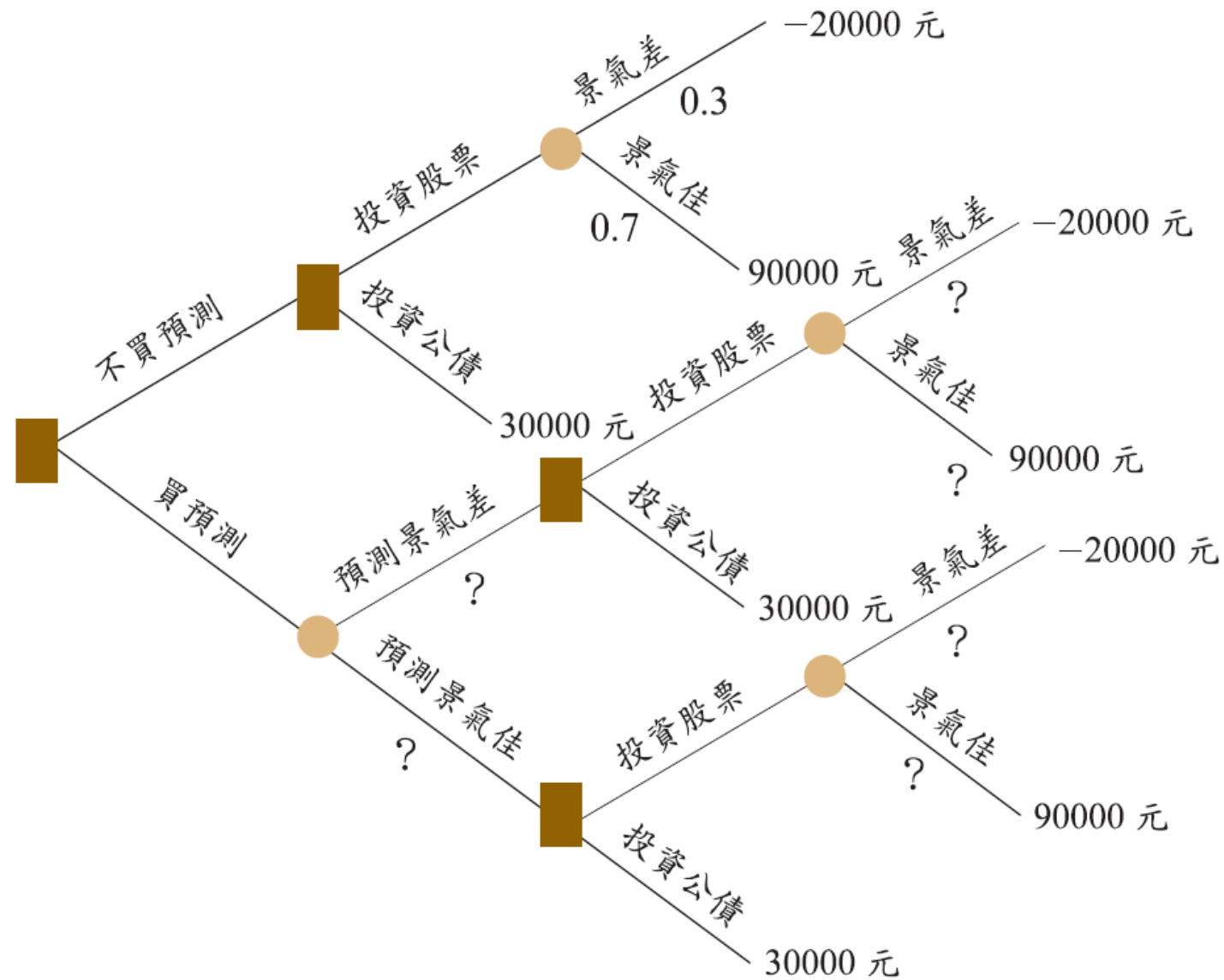


圖 12.16 決定是否要買不完全資訊

首先利用貝氏定理分別計算淑惠預測景氣差和景氣佳的機率。

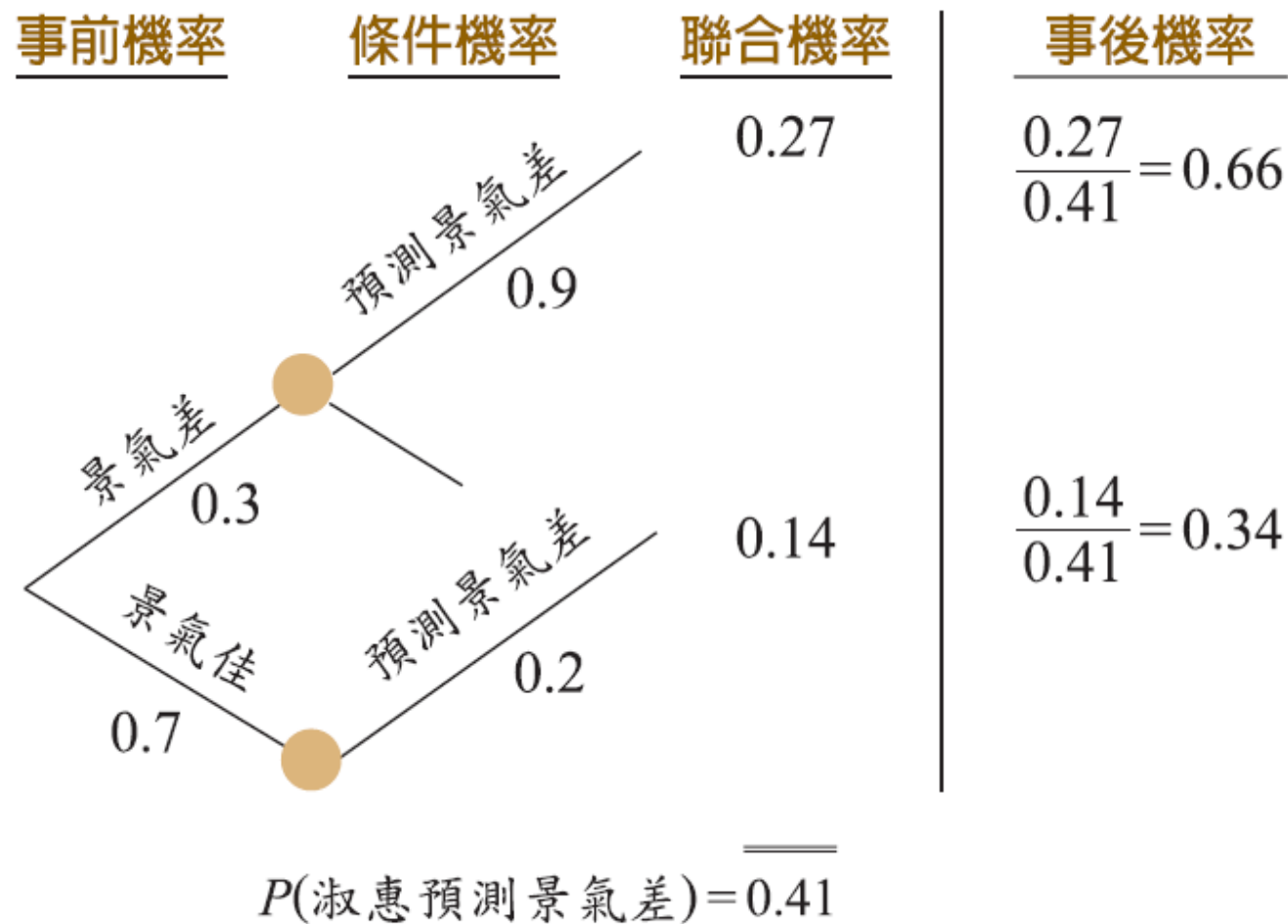


圖 12.17 淑惠預測明年股市景氣差的決策樹圖

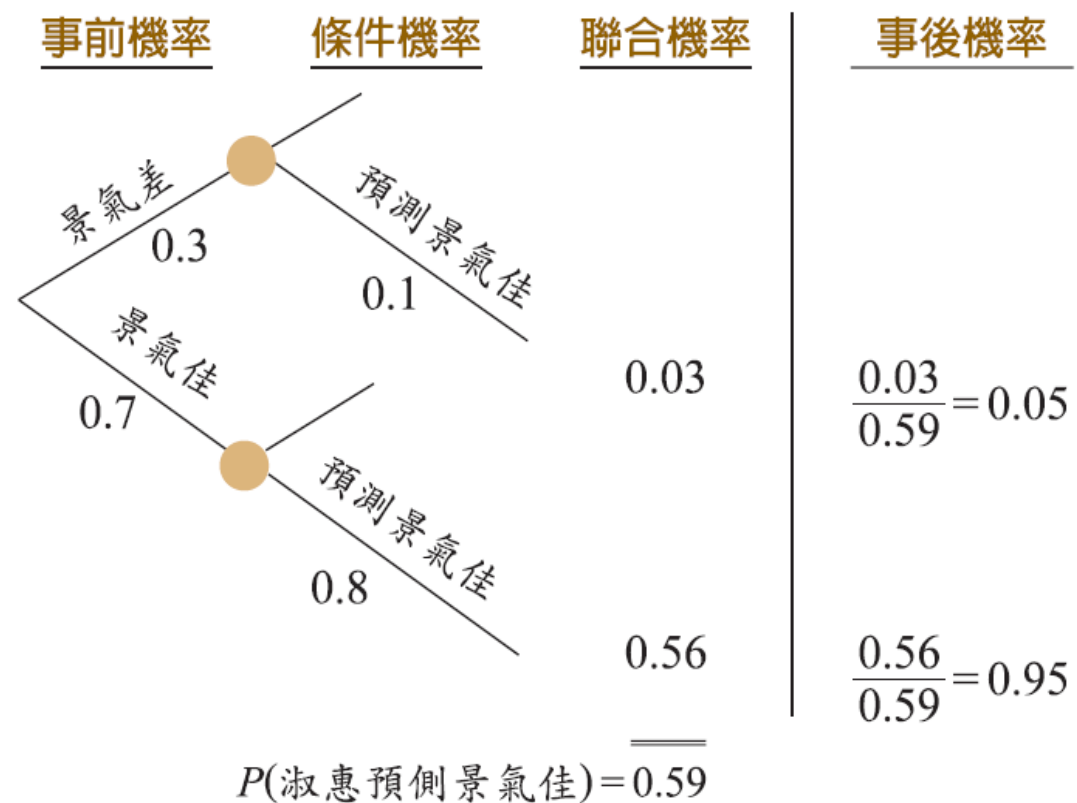


圖 12.18 淑惠預測明年股市景氣佳的決策樹圖

其次，將計算 EVII 的決策樹圖繪製如下：

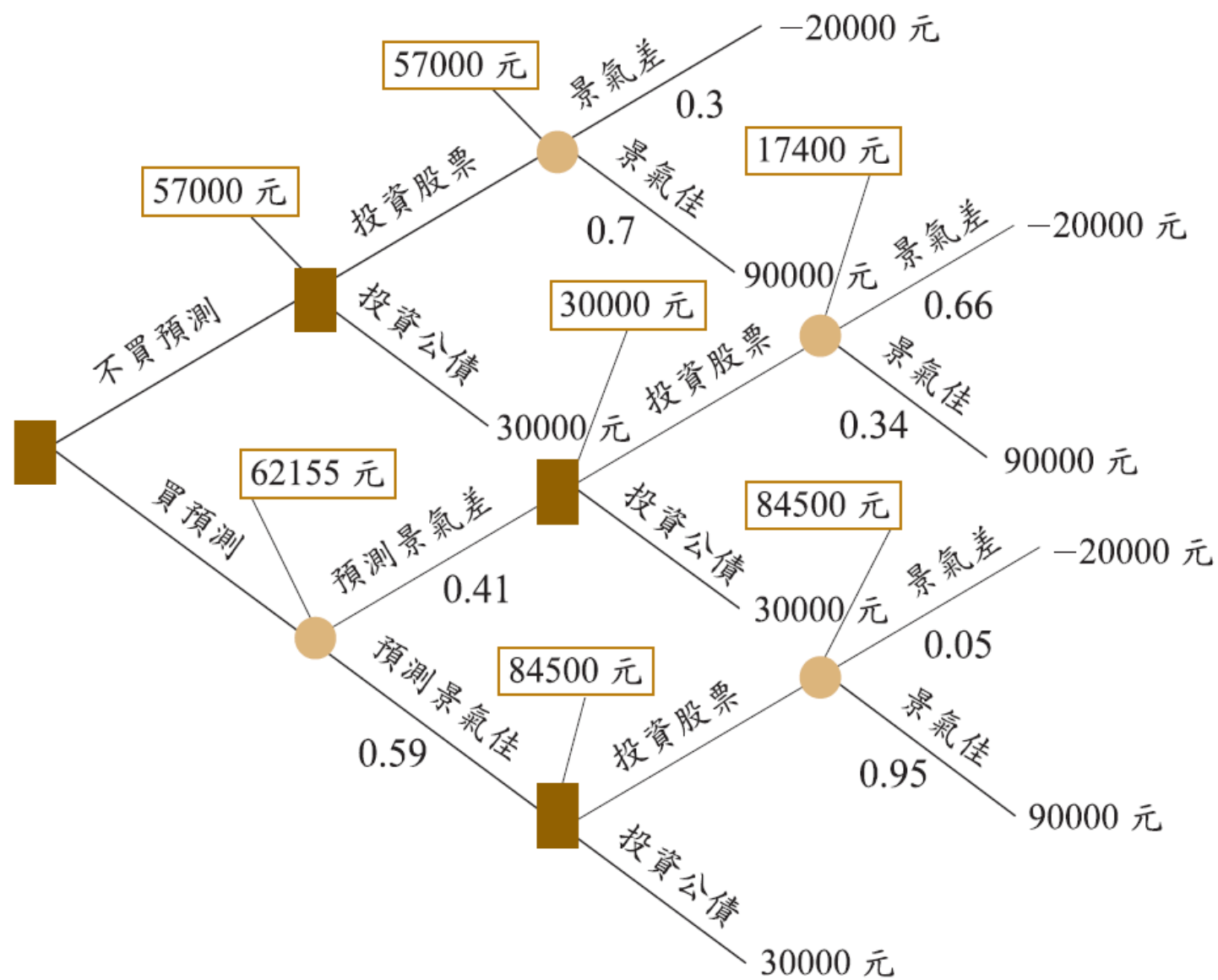


圖 12.19

因此，有不完全資訊的期望償付值為

$$0.41 \times 30000 + 0.59 \times 84500 = 62155 \text{ 元}$$

$$EVII = 62155 - 57000 = 5155 \text{ 元}$$

無不完全資訊的最佳期望值償付值為 57000 元，所以不完全資訊期望值 $EVII = 5155$ 元，換句話說，淑惠的收費上限是 5155 元。

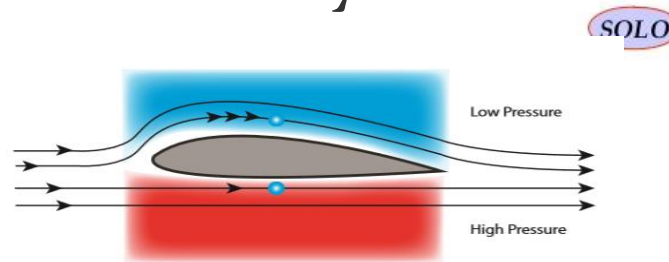
貨幣期望值準則的限制

74

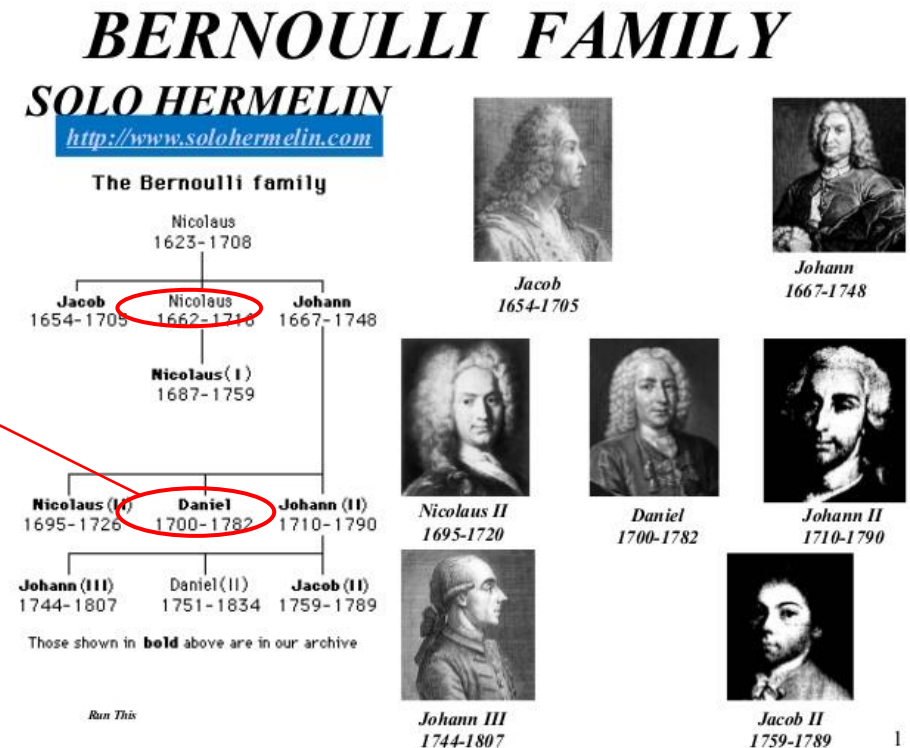
- 雖然貨幣期望值EMV準則是最為常見的決策準則之一，然而並非毫無限制，理由如下：
 - 有時期望值並不存在，以聖彼得堡詭論 (St. Petersburg paradox) 來示範說明。
 - 決策者對金錢的態度為線性價值函數。
 - 換句話說，決策者對於由0元增至100萬元的感覺與由900萬元增至1000萬元的感覺相同。對許多人來說，這項假設並不成立。

St. Petersburg paradox (聖彼得堡悖論)

- St. Petersburg paradox (聖彼得堡悖論) is proposed by **Daniel Bernoulli and Nicola Bernoulli** in 1738.
 - ▣ Critical to Decision Theory



SOLO



例題 12.13 聖彼得堡詭論

假設有一種遊戲其規則如下：

投擲一枚硬幣直至第一次正面（人頭面）出現朝上為止。

若正面在第一次投擲時出現，則你可得 2 元。

若正面在第二次投擲時出現，則你可得 4 元。

若正面在第三次投擲時出現，則你可得 8 元。

⋮

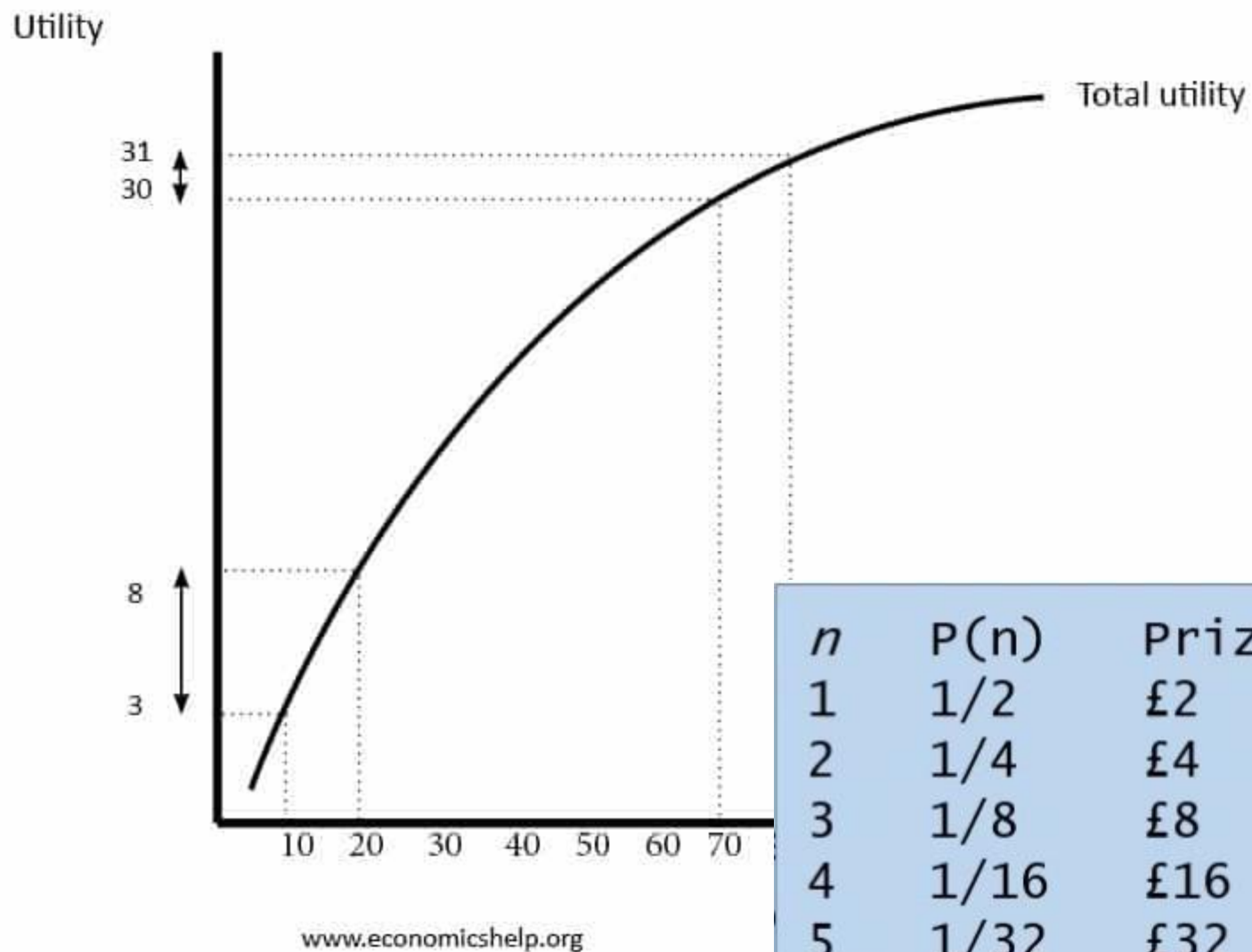
試問你應付多少錢使該遊戲為公平？

解

St. Petersburg paradox (聖彼得堡悖論)

- Stop when you win and get the reward.
- From expected theory, the payoff should be infinity. But it seems not be true in reality.
- How much do you want to pay for this game?
 - ▣ Paradox!!
 - ▣ No one would like to spend more than \$25 to play this game (Hacking, 1980).

n	prob.	payoff	EV
1	$\frac{1}{2}$	2	1
2	$\frac{1}{4}$	4	1
3	$\frac{1}{8}$	8	1
⋮	⋮	⋮	⋮
N	$\frac{1}{2^N}$	2^N	1



n	$P(n)$	Prize	Utility	
1	$1/2$	£2	2	$1/2 \times 2 = 1$
2	$1/4$	£4	4	$1/4 \times 4 = 1$
3	$1/8$	£8	8	$1/8 \times 8 = 1$
4	$1/16$	£16	16	$1/16 \times 16 = 1$
5	$1/32$	£32	32	$1/32 \times 32 = 1$
6	$1/64$	£64	32	$1/64 \times 32 = 0.5$
7	$1/128$	£128	32	$1/128 \times 32 = 0.25$
8	$1/256$	£256	32	$1/256 \times 32 = 0.125$
9	$1/512$	£512	32	$1/512 \times 32 = 0.0625$
.				

Adoption of utility functions

- This concept helps to explain (and prove **mathematically**) a number of social constructs,
 - ▣ like insurance, different prices for similar goods, or the bundling of services.
- It is used today as a key concept in **game theory**, **Nash equilibrium**, and **rational choice theory**.

- 一般而言，組織健全的機構在進行這種特性的決策時，傾向於使用期望值，因為期望值提供了長期平均報酬。
- 但期望值並非真正的報酬，只有當做許多次相同的決策時，方可能會估計出期望值或平均數值。
 - 如果遇到單次決策問題，就不宜用期望值。如例題12.11的王老爹如果生性保守，可能會選擇行動，因為行動 雖期望報酬較高，但風險也大；售出雖然其期望值較低，卻保證無損失，而且本例為單次事件。
- 有些狀況下，無法用貨幣表示，如先前例題12.2中所提及心臟開刀問題，就是一例。

例題 12.14

精華高科技公司接到大為能源工程公司設計某產品新零件的委託。精華公司的研發部門提出兩種設計並得出如下相關資料。

表 12.10

本性狀況 行動	完全失敗		局部成功		完全成功	
	回收 (百萬元)	機率	回收 (百萬元)	機率	回收 (百萬元)	機率
選擇設計 1	-1	0.1	0	0.1	3	0.8
選擇設計 2	-6	0.3	1	0.1	10	0.6

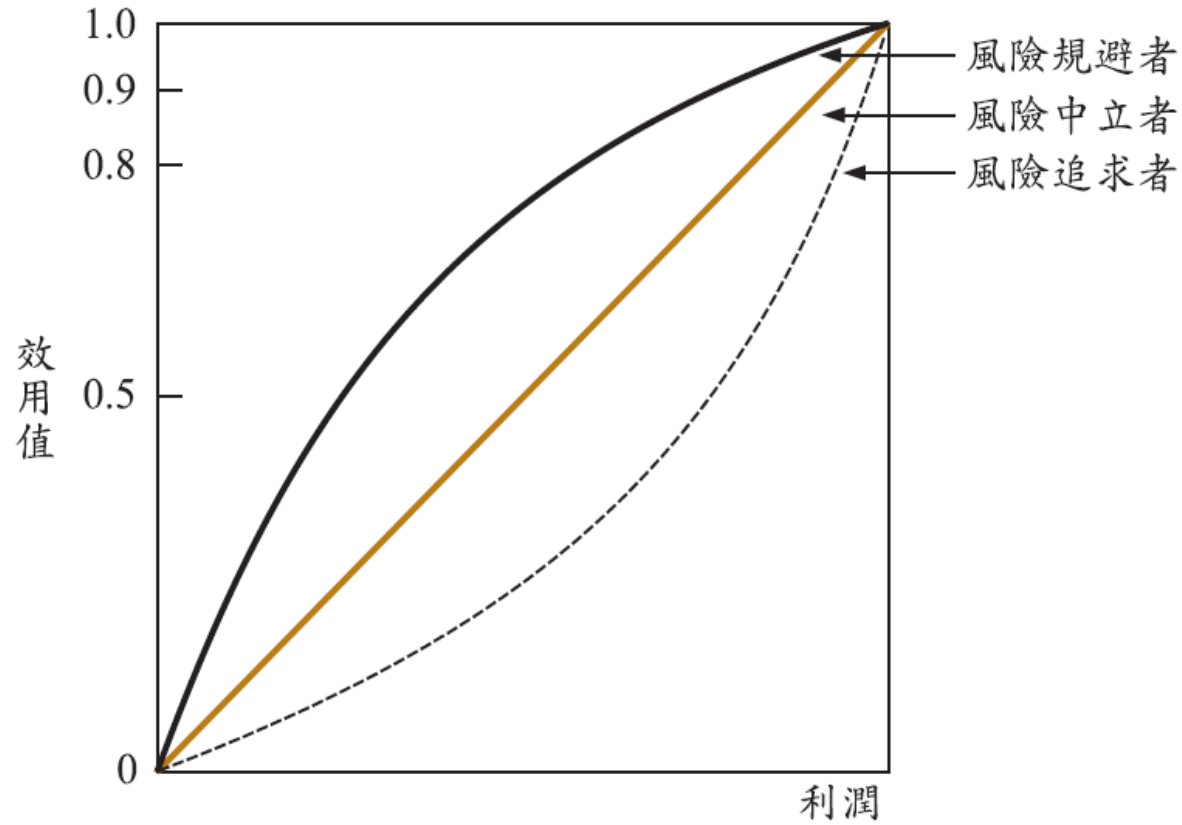
期望獲利？

由上計算可知選擇設計 2 的 EMV 較高，決策者理論上應選設計 2，但事實上，由於設計 2 的完成失敗機率高達 0.3，其損失為 600 萬元，並非小企業所能承受，因此決策者可能會選擇設計 1，以避免高損失。另一方面，先前曾提及期望值為同一事件在長期運作下 (in the long-run) 的平均值，因此在本例中不適用 (one shot case)。

再者，EMV 準則為僅專注一個屬性：金錢。除了獲利金額的考量之外，可能還需考量若能成功開發出某一新型設計，對於公司形象、提升技術和由其中獲得新知識等無法以金錢表示的項目。

效用期望值

83

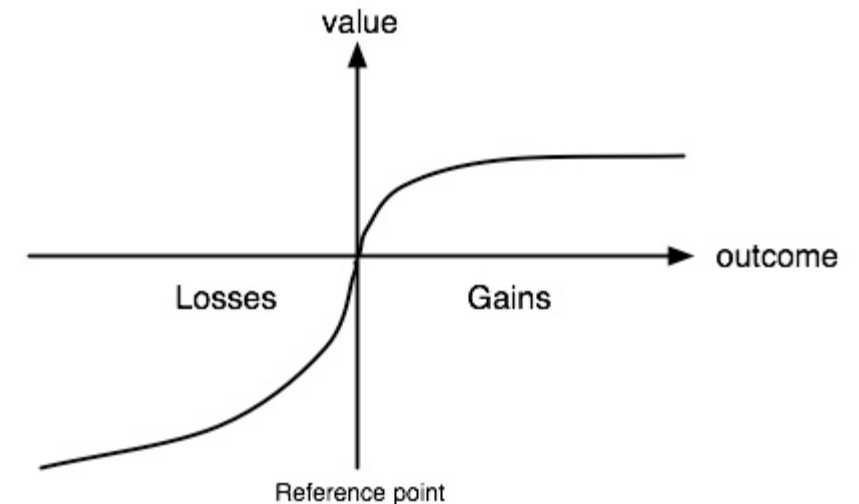


分辨風險屬性？

圖 12.8 效用曲線圖示

Criticism of expected utility theory

- Expected utility theory is a theory about how to make optimal decisions under risk. It has a normative interpretation which economists particularly used to think applies in all situations to **rational agents** but now tend to regard as a useful and insightful first order approximation.
- ▣ In empirical applications, a number of violations have been shown.
 - Perspective theory (2002 Nobel Prize in Econ.)
 - 展望理論
 - loss aversion + reference point



Consumer utility

- A **utility function** is a representation to define individual preferences for goods or services beyond the explicit monetary value of those goods or services.
 - ▣ In other words, it is a calculation for how much someone desires something, and it is relative.
- Scientists use utility functions to explain human behavior, particularly in different states, or where there is a probability that some state will occur.

例題 12.15

春嬌是興光公司的行銷經理，她想要在某鎮舉辦商用器材展示會，但尚未能決定應於麗都大酒店(LH) 或商業中心 (MC) 舉辦，為簡化問題起見，她依過去的經驗對於獲利得出下述的預測：

若選在 LH 舉辦，則有 60% 機會為高參觀率，預計可賺 30000 元；40% 機會為低參觀率，僅賺 11000 元。另一方面，若選在 MC 舉行，則有 50% 的機會為高參觀率，將可賺 60000 元；50% 的機會為低參觀率將虧損 10000 元。

首先以決策樹圖表示上述情況，其中圓圈代表機會事件並以方塊表決策點。

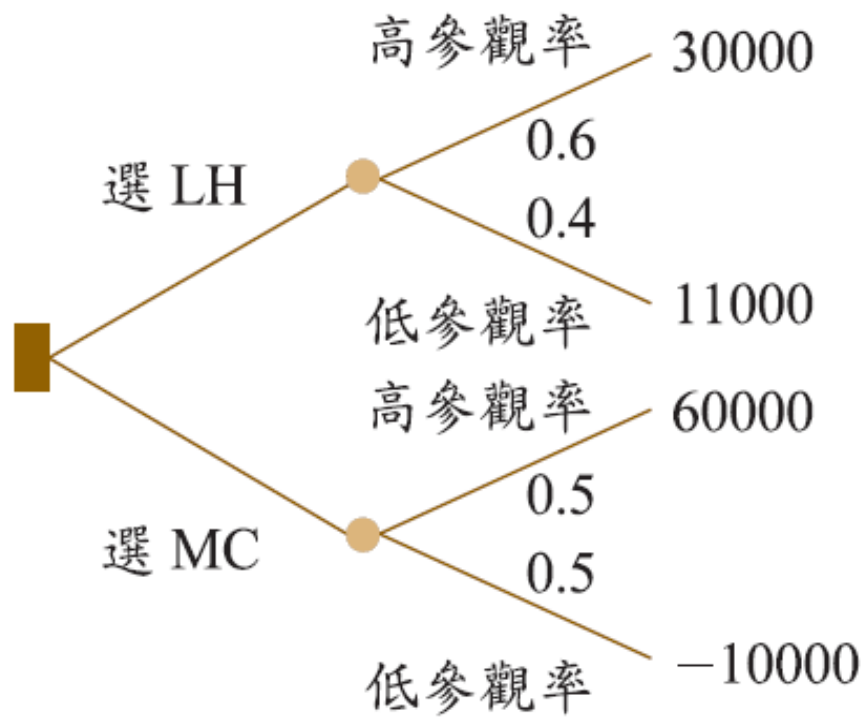


圖 12.9 決策樹圖

如果依據 EMV 準則來做決定：

$$\begin{aligned}\text{選 LH 的期望值} &= 30000(0.6) + 11000(0.4) \\ &= 18000 + 4400 \\ &= 22400\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{選 MC 的期望值} &= 60000(0.5) + (-10000)(0.5) \\ &= 30000 - 5000 \\ &= 25000\end{aligned}$$

What choice do you prefer?

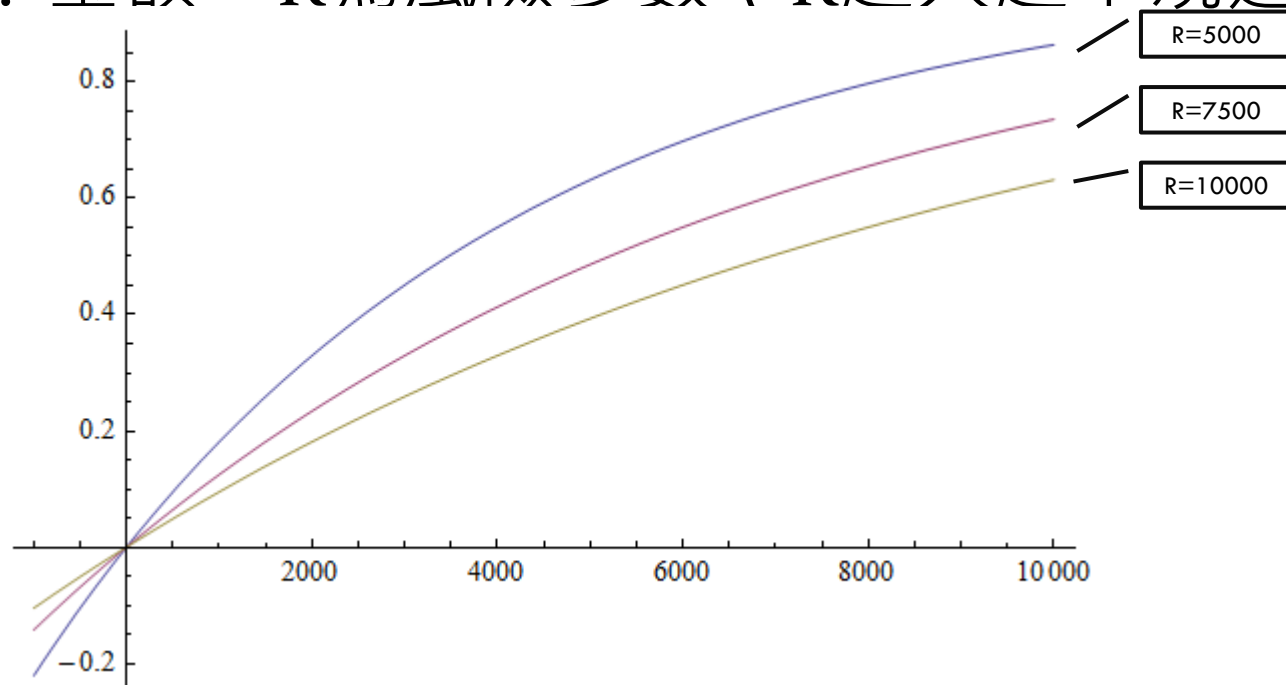
效用

89

- 承上，若我們考慮一個指數型態效用函數

$$U(M) = 1 - e^{-M/R}$$

- M：金額，R為風險參數（R越大越不規避風險）



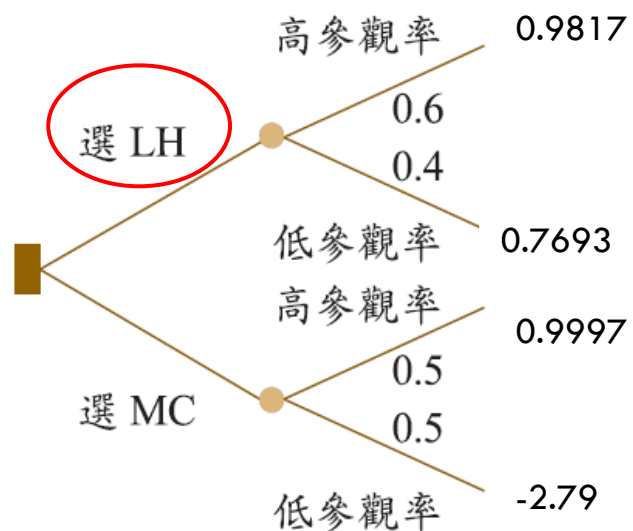
Utility

90

$$U(M) = (1 - e^{M/7500})$$

```
In[60]:= 0.6 * utility[30 000, 7500] + 0.4 * utility[11 000, 7500]
```

```
Out[60]= 0.896733
```



```
0.5 * utility[60 000, 7500] + 0.5 * utility[-10 000, 7500] - 0.897002
```

圖 12.9 決策樹圖

如果依據 EMV 準則來做決定：

References

- Ch5, Decision theory, in Operations Management, Stevenson, W and Sum, C. C, 14th edition, McGraw Hill Education
- Ch 12 決策分析 in 作業研究典範--觀念深入剖析, 2009, 黃元(黃卓研), 好優文化