INFERENCIA ESTADÍSTICA

La inferencia, específicamente la toma y predicción de decisiones, tiene siglos de antigüedad y desempeña un papel muy importante en la vida de casi todas las personas.

Veamos a continuación algunas aplicaciones:

- El gobierno necesita predecir las tasas de interés a corto y largo plazos.
- Un corredor financiero desea pronosticar el comportamiento del mercado de acciones.
- Un metalurgista desea determinar si un nuevo tipo de acero es más resistente a altas temperaturas que el actual.
- Una consumidora desea estimar el precio de venta de su casa antes de ponerla en el mercado.

Hay muchas formas de tomar estas decisiones o predicciones, algunas son subjetivas y otras son objetivas por naturaleza. ¿Qué tan buenas serán las predicciones o decisiones?

- Aun cuando usted pueda pensar que su propia capacidad de tomar decisiones es muy buena, la experiencia sugiere que éste puede no ser el caso.
- La **inferencia estadística** se ocupa de tomar decisiones o predicciones acerca de **parámetros**, es decir, las medidas numéricas descriptivas que caracterizan a una población.
- Tres parámetros conocidos son: la media poblacional $\boldsymbol{\mu}$, la desviación estándar poblacional $\boldsymbol{\sigma}$ y la proporción binomial $\boldsymbol{p}$.
- En inferencia estadística, un problema práctico se expone de otra forma en el marco de una población con un parámetro específico de interés. Por ejemplo, el metalurgista podría medir el ***promedio*** de coeficientes de expansión de ambos tipos de acero y luego comparar sus valores.
- Los métodos para hacer inferencias acerca de parámetros poblacionales caen en una de dos categorías:
  - ✓ **Estimación:** Estimar o predecir el valor del parámetro.
  - ✓ **Prueba de hipótesis:** Tomar una decisión acerca del valor de un parámetro, con base en alguna idea preconcebida acerca de cuál podría ser su valor.

Los procedimientos estadísticos son importantes porque dan dos tipos de información:

- ✓ Métodos para hacer la inferencia.
- ✓ Una medida numérica de la bondad o confiabilidad de la inferencia.

- Una **medida de la bondad de la inferencia** es un criterio o estadístico utilizado para evaluar qué tan confiable y precisa es una estimación o conclusión extraída a partir de datos muestrales en estadística. Se utiliza para determinar si la inferencia realizada sobre una población (como estimar un parámetro o probar una hipótesis) es válida y adecuada.
- **Ejemplos comunes de medidas de bondad de la inferencia:**

1. **Nivel de confianza ($1 - \alpha$):**
   1. Representa la probabilidad de que un intervalo de confianza contenga el valor verdadero del parámetro poblacional.
   2. Ejemplo: Un intervalo con un nivel de confianza del 95% indica que, en el 95% de las muestras tomadas, el intervalo contendrá el valor real del parámetro.
2. **Error estándar:**
   1. Mide la variabilidad esperada de una estimación muestral (como la media muestral).
   2. Un error estándar pequeño indica una estimación más precisa.

4. P-valor:

- En pruebas de hipótesis, el p-valor mide la evidencia contra la hipótesis nula.
- Un p-valor pequeño (por ejemplo, menor que 0.05) indica que es poco probable que los resultados sean producto del azar, lo que respalda la hipótesis alternativa.

5. Coeficiente de determinación (R^2):

- En regresión, mide el porcentaje de variabilidad de la variable dependiente explicado por las variables independientes.
- Un valor cercano a 1 indica un buen ajuste del modelo.

6. Tamaño del efecto:

- Indica la magnitud de la diferencia o relación observada.
- Ejemplo: La diferencia de medias estandarizada (Cohen's d) muestra cuán grande es la diferencia entre dos grupos.

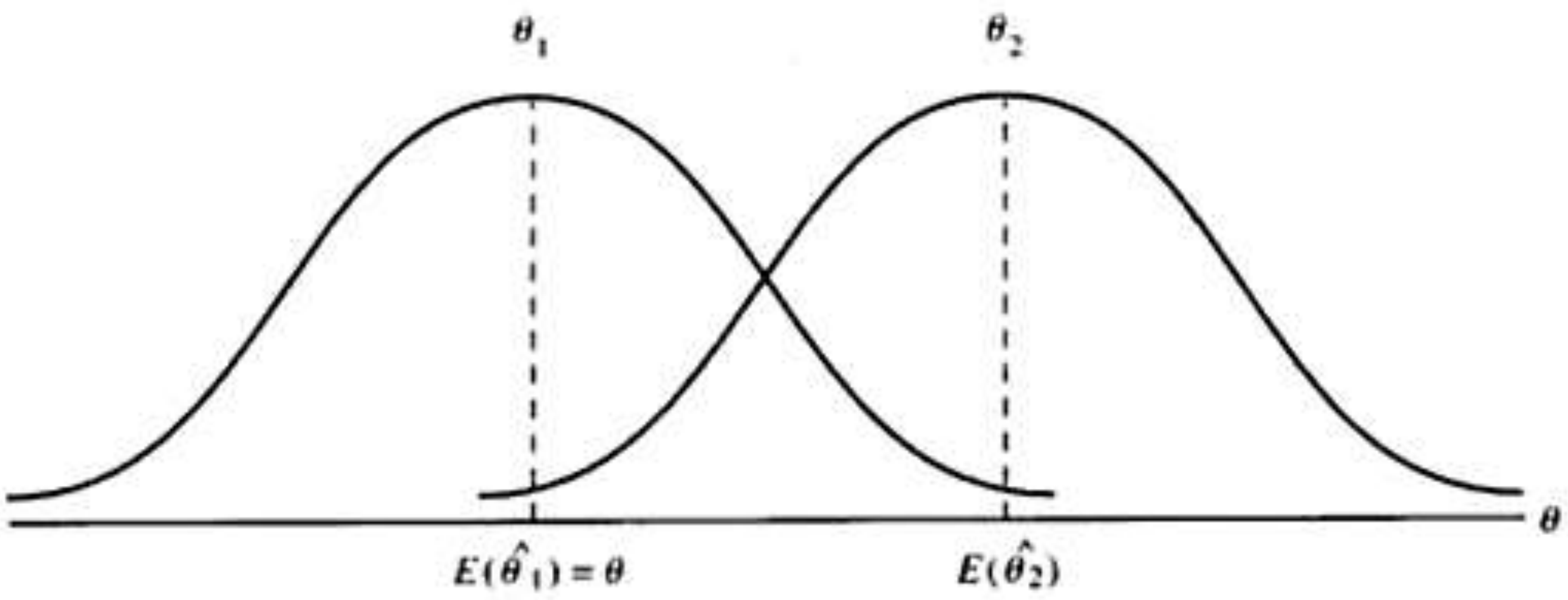
TIPOS DE ESTIMADORES

- Para estimar el valor de un parámetro poblacional, se puede usar información de la muestra en la forma de un **estimador**.
- Los estimadores se calculan usando información de las observaciones muestrales y, en consecuencia, por definición son también ***estadísticos***.
- **Definición:** "Un estimador, es un estadístico que intenta predecir el valor de algún parámetro de cierta población, es decir, se quiere generalizar el resultado obtenido en la muestra para toda la población. Un **estimador** es una regla, generalmente expresada como fórmula, que nos dice cómo calcular una estimación basada en información de la muestra.

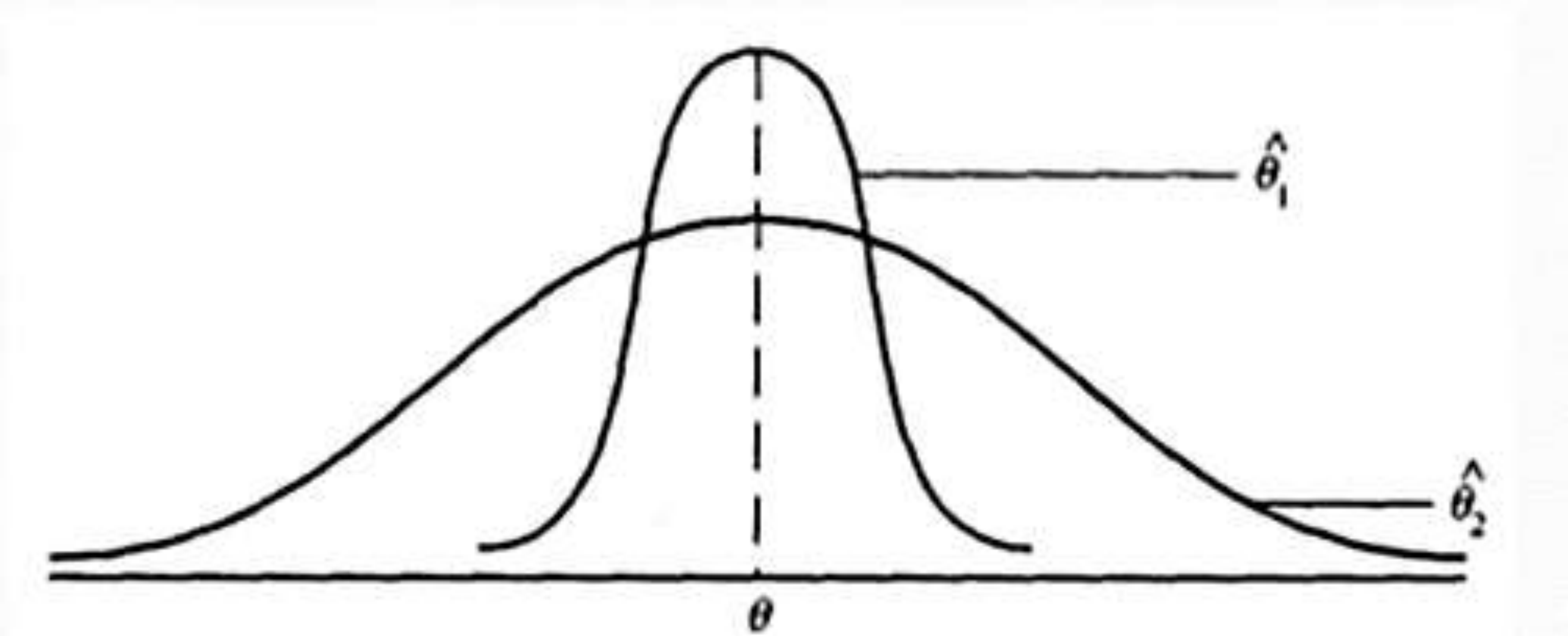
PROPIEDADES DE LOS ESTIMADORES

Propiedad	Definición
Insesgado	Un estimador es insesgado si su esperanza matemática es igual al parámetro que estima, es decir, no tiende a sobrestimar ni subestimar el valor verdadero del parámetro.
Eficiente	Un estimador es eficiente si tiene la varianza más baja entre todos los estimadores insesgados posibles para un parámetro dado, lo que implica mayor precisión en las estimaciones.
Consistente	Un estimador es consistente si, al aumentar el tamaño de la muestra, converge en probabilidad al verdadero valor del parámetro, es decir, proporciona estimaciones más precisas con muestras más grandes.
Suficiente	Un estadístico es suficiente para un parámetro si contiene toda la información necesaria de la muestra para hacer inferencias sobre ese parámetro, es decir, ningún otro estadístico calculado sobre la misma muestra proporciona información adicional sobre su valor.

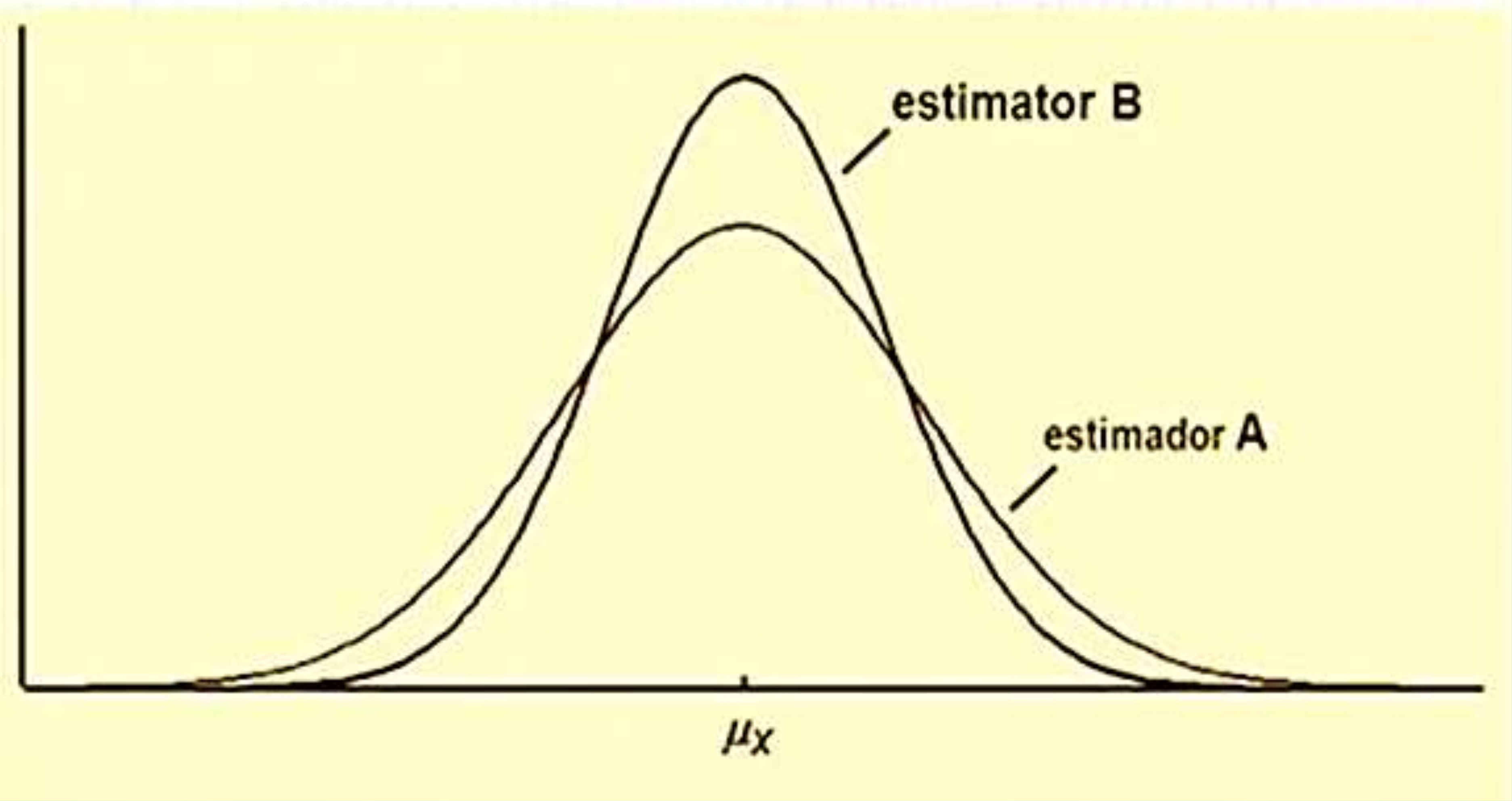
Estimador insesgado



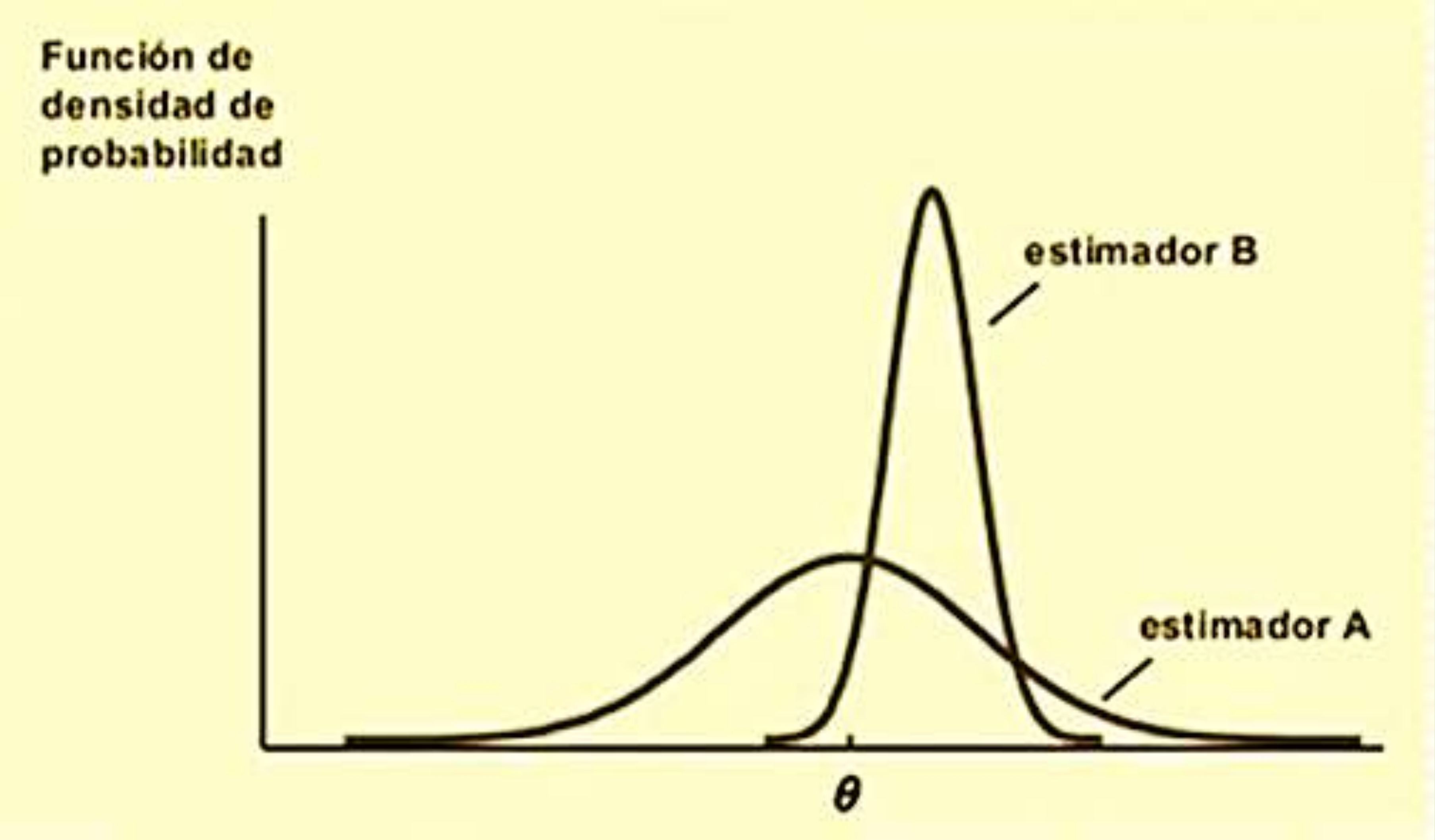
Estimador eficiente



Estimador consistente

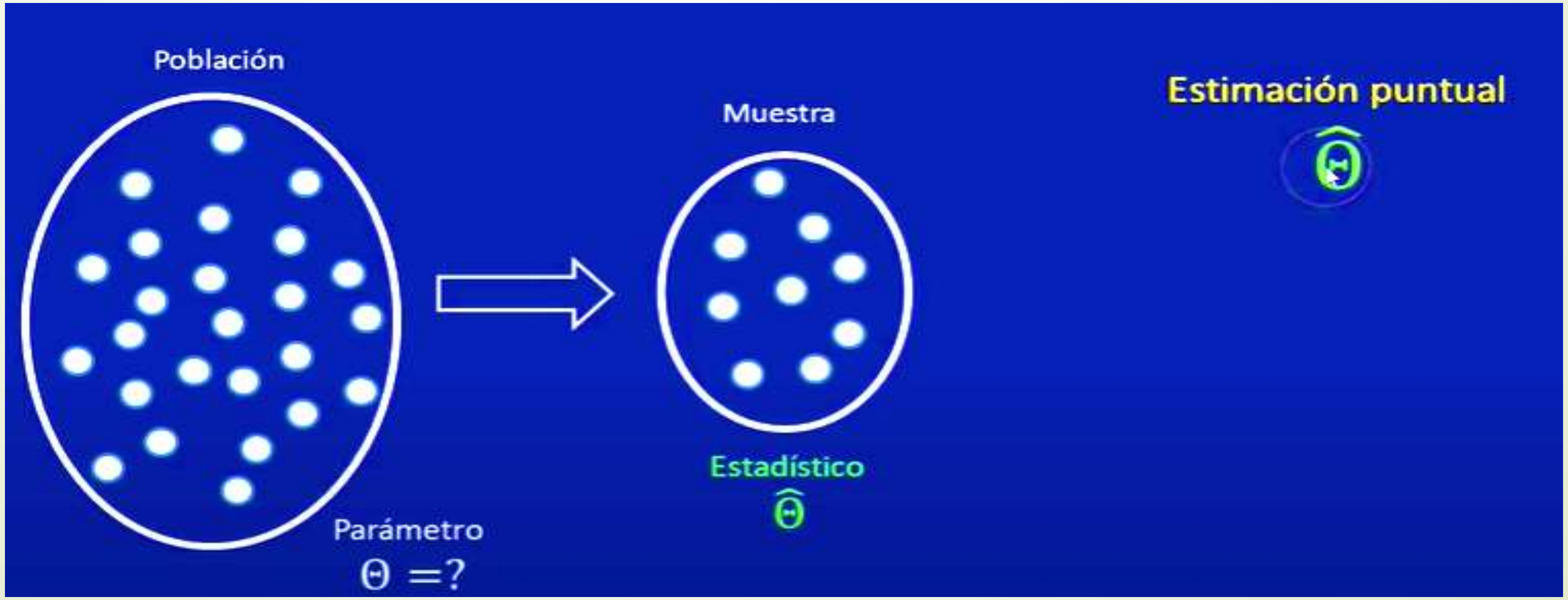


Estimador suficiente



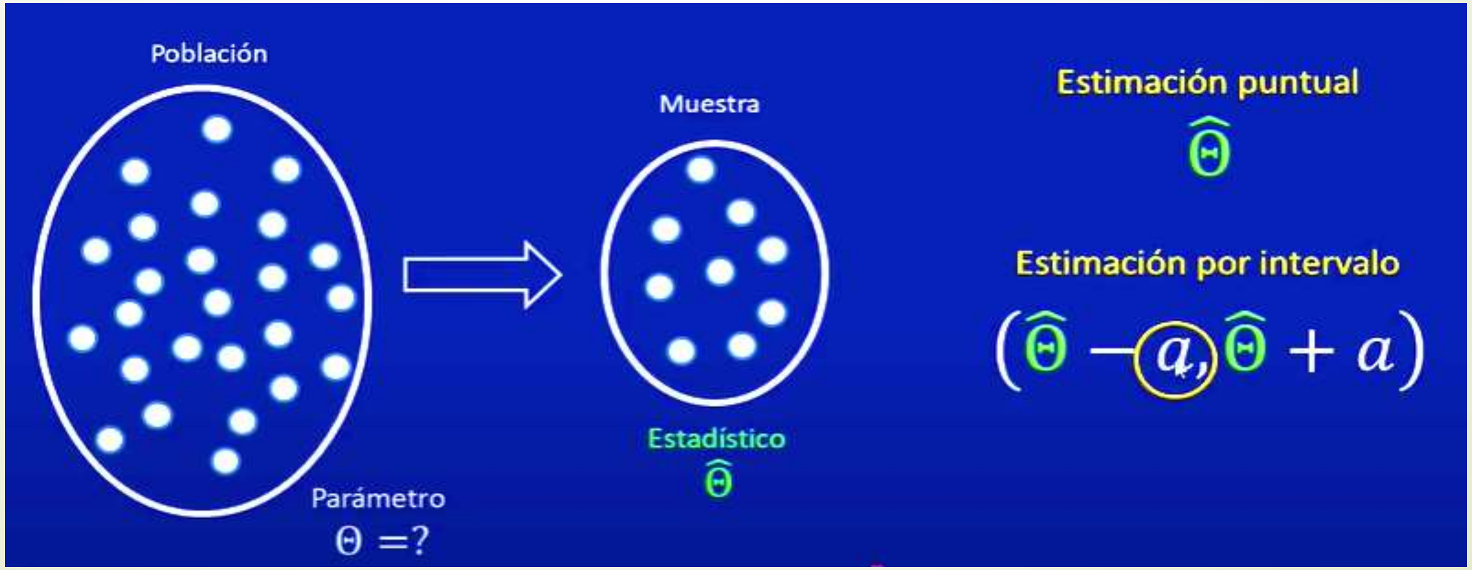
TIPOS DE ESTIMADORES

- Los estimadores se usan en dos formas diferentes:
  - ✓ **Estimación puntual:** Con base en datos muestrales, se calcula un solo número para estimar el parámetro poblacional. La regla o fórmula que describe este cálculo se denomina **estimador puntual** y el número resultante recibe el nombre de **estimación puntual**.



TIPOS DE ESTIMADORES

- Los estimadores se usan en dos formas diferentes:
  - ✓ **Estimación de intervalo:** Con base en datos muestrales, dos números se calculan para formar un intervalo dentro del cual se espera esté el parámetro. La regla o fórmula que describe este cálculo se denomina **estimador de intervalo** y el par de números resultantes se llama **estimación de intervalo** o **intervalo de confianza**.



ESTIMACIÓN PUNTUAL

- Un estimador, es un estadístico que intenta predecir el valor de algún parámetro de cierta población, en pocas palabras se quiere generalizar el resultado obtenido en la muestra para toda la población.
- En una situación práctica, puede haber varios estadísticos que podrían usarse como estimadores puntuales para un parámetro poblacional. Para determinar cuál de las opciones es mejor, usted necesita saber cómo se comporta el estimador en muestreo repetido, descrito por su ***distribución muestral***.
- **Definición:** La **distribución muestral de un estadístico** (por ejemplo la media muestral o una proporción muestral) es la distribución de todos los valores del estadístico cuando se obtienen todas las muestras posibles del mismo tamaño *n* de la misma población.
- La distribución muestral de un estadístico generalmente se representa como la distribución de probabilidad en el formato de tabla, histograma de probabilidad o fórmula.

CONCLUSIONES

Los resultados del ejemplo anterior permiten observar las siguientes dos propiedades importantes de la distribución muestral de la media:

- **1.** Las medias muestrales ***coinciden*** con el valor de la media de la población. (Es decir, la media de las medias muestrales es la media poblacional. El valor esperado de la media muestral es igual a la media poblacional).
- **2.** La distribución de las medias muestrales tiende a ser una distribución normal. (Es decir que, conforme el tamaño de la muestra aumenta, la distribución tiende a acercarse a una distribución normal.

DISTRIBUCIÓN MUESTRAL DE LA MEDIA

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Teorema del límite central

- El ***teorema del límite central***, plantea que, para una población con ***cualquier*** **distribución**, la distribución de las medias muestrales se aproxima a una distribución normal conforme aumenta el tamaño de la muestra.
- En otras palabras, si el tamaño de la muestra es lo suficientemente grande, la distribución de medias muestrales puede aproximarse por medio de una ***distribución normal***, incluso si la población original no está distribuida normalmente.
- Además, si la población original tiene media $\boldsymbol{\mu}$ y desviación estándar $\boldsymbol{\sigma}$, entonces la media de las medias muestrales también será $\boldsymbol{\mu}$, pero la desviación estándar de las medias muestrales será $\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}$, donde *n* es el tamaño de la muestra.

Notación para la distribución muestral de $\bar{x}$

- Si se seleccionan todas las muestras aleatorias posibles de tamaño *n* a partir de una población con media $\boldsymbol{\mu}$ y desviación estándar $\boldsymbol{\sigma}$, la media de las medias muestrales se denota con $\boldsymbol{\mu_{\bar{x}}}$,

  de manera que:

$$\boldsymbol{\mu_{\bar{x}} = \mu}$$

- Asimismo, la desviación estándar de las medias muestrales se denota con $\boldsymbol{\sigma_{\bar{x}}}$, de manera que:

$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

- $\boldsymbol{\sigma_{\bar{x}}}$ suele denominarse el **error estándar de la media.**

A tener en cuenta:

- Cuando se selecciona una muestra aleatoria simple de n sujetos a partir de una población con media $\boldsymbol{\mu}$ y desviación estándar $\boldsymbol{\sigma}$, es esencial conocer los siguientes principios:

1. Para una población con cualquier distribución, si $n > 30$, entonces las medias muestrales tienen una distribución que se puede aproximar por medio de una distribución normal, con una media $\boldsymbol{\mu}$ y una desviación estándar $\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}$.
2. Si $n \leq 30$ y la población original tiene una distribución normal, entonces las medias muestrales tienen una distribución normal con una media $\boldsymbol{\mu}$ y una desviación estándar $\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}$
3. Si $n \leq 30$, pero la población original no tiene una distribución normal, entonces no se aplican los métodos de esta sección.

Distribuciones de medias muestrales

Población (con media μ y desviación estándar σ)	Distribución de medias muestrales	Media de las medias muestrales	Desviación estándar de las medias muestrales
Normal	Normal (para *cualquier* tamaño de muestra *n*)	$\mu_{\overline{x}} = \mu$	$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
No es normal con $n > 30$	Normal (aproximadamente)	$\mu_{\overline{x}} = \mu$	$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
No es normal con $n \leq 30$	*No* es normal	$\mu_{\overline{x}} = \mu$	$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Métodos no parametricas

- **¿Por qué no se aplican los métodos paramétricos tradicionales?**
- Los métodos como las pruebas t o z asumen que los datos provienen de una distribución normal o que el tamaño de la muestra es suficientemente grande ($n>30$) para que se cumpla el **Teorema Central del Límite**. Cuando estas condiciones no se cumplen:
- Las estimaciones pueden ser sesgadas.
- Las probabilidades calculadas para los valores críticos (p-valores) pueden no ser confiables.
- Si $n \leq 30$ y la población original no tiene una distribución normal, no es válido usar métodos que asuman normalidad, como las pruebas t o z para intervalos de confianza o pruebas de hipótesis. En este caso, debes recurrir a **métodos no paramétricos** o técnicas alternativas. A continuación, te detallo algunas opciones:

Métodos no parametricas

- **1. Pruebas no paramétricas**
- Estas pruebas no requieren que los datos provengan de una distribución normal y son adecuadas para muestras pequeñas o cuando la forma de la población es desconocida.
- **Para comparación de una muestra con una mediana conocida**:
  - **Prueba de signos**.
  - **Prueba de Wilcoxon de rango con signo**.
- **Para comparar dos muestras independientes**:
  - **Prueba U de Mann-Whitney** (equivalente no paramétrico a la prueba ttt para dos muestras independientes).
- **Para comparar más de dos grupos**:
  - **Prueba de Kruskal-Wallis** (equivalente no paramétrico a ANOVA).

Métodos no parametricas

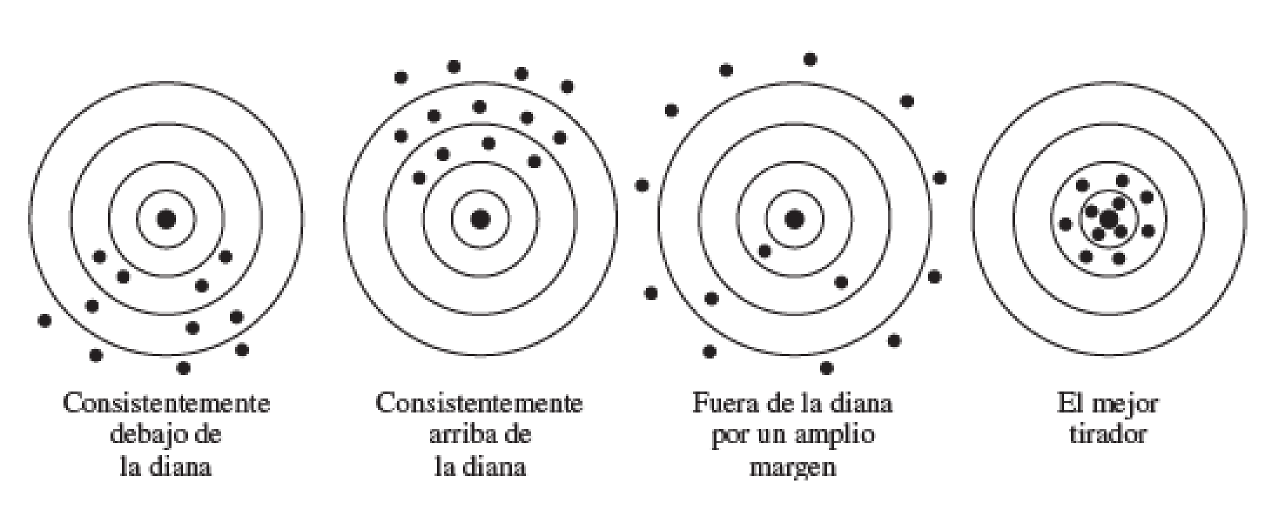
- **2. Bootstraping**
- Es un método resampling que permite estimar parámetros estadísticos (como la media o la mediana) generando múltiples muestras simuladas a partir de los datos originales.
- Es útil para construir intervalos de confianza o realizar pruebas de hipótesis cuando los supuestos clásicos no se cumplen.
- **3. Transformaciones de datos**
- Si sospechas que la población original no es normal pero tiene una forma conocida (como sesgada), puedes intentar una transformación de datos para aproximarla a la normalidad, por ejemplo:
- Transformación logarítmica.
- Transformación de Box-Cox.
- Después de transformar los datos, puedes intentar aplicar métodos paramétricos como la ttt-prueba.

Métodos no parametricas

- **4. Pruebas basadas en permutaciones**
- Estas son una alternativa robusta cuando el tamaño de la muestra es pequeño. Reorganizan los datos múltiples veces y calculan estadísticas para obtener distribuciones empíricas. Ejemplos incluyen:
- Prueba de permutación para comparar medias o medianas entre grupos.

¿Cuál tirador es el mejor?

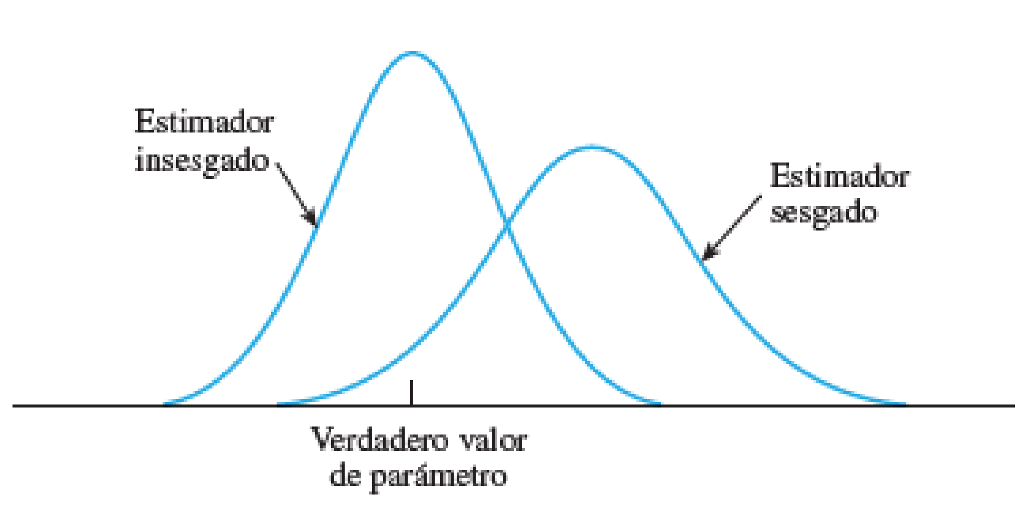
- **¿Cuál blanco escogería usted como perteneciente al mejor tiro?**



- Las distribuciones muestrales dan información que se puede usar para seleccionar el **mejor estimador**.
- **¿Qué características serían valiosas?**
- Primero, la **distribución muestral del estimador puntual debe estar centrada sobre el verdadero valor del parámetro a ser estimado**. Esto es, el estimador no debe subestimar o sobreestimar de manera consistente al parámetro de interés.
- Un estimador como éste se dice que es **insesgado**.

Estimadores: Sesgados e insesgados

- Se dice que un estimador de un parámetro es **insesgado** si la media de su distribución es igual al verdadero valor del parámetro. De otro modo, se dice que el estimador está **sesgado**.
- Las distribuciones muestrales para un estimador insesgado y estimador sesgado se ven en la siguiente figura.



- La distribución muestral para el estimador sesgado está corrida a la derecha del verdadero valor del parámetro. Este estimador sesgado es más probable que uno insesgado para sobreestimar el valor del parámetro.

Ejemplos

Estimadores insesgados

Los siguientes estadísticos son estimadores insesgados. Es decir, coinciden con el valor del parámetro poblacional:

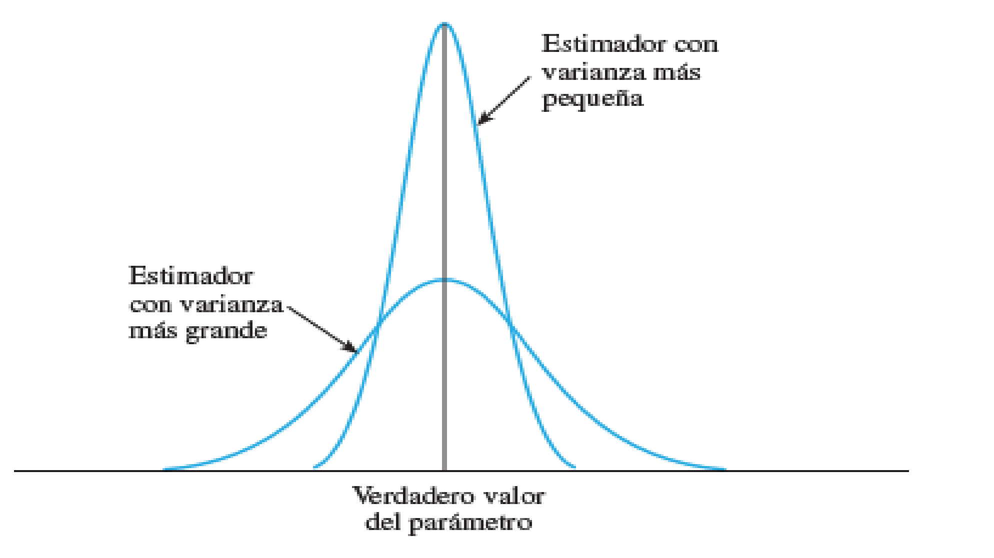
- Media $\bar{x}$
- Varianza S^2
- Proporción $\hat{p}$

Estimadores sesgados

Los siguientes estadísticos son estimadores sesgados. Es decir, *no* coinciden con el parámetro poblacional:

- Mediana
- Rango
- Desviación estándar S.

- La segunda característica deseable de un estimador es que **la dispersión** (**medida por la varianza**) **de la distribución muestral debe ser tan pequeña como sea posible**.
- Esto asegura que, con una alta probabilidad, una estimación individual caerá cerca del valor verdadero del parámetro.
- Las distribuciones muestrales para dos estimadores insesgados, una con una varianza pequeña y la otra con una varianza más grande, se pueden observar en la siguiente figura.



- En general, los estadísticos usan el término ***varianza de un estimador*** cuando en realidad es la varianza de la distribución muestral del estimador. Esta expresión contraída se usa casi universalmente.

- Por supuesto que sería preferible el estimador con la varianza más pequeña, porque las estimaciones tienden a estar más cerca del verdadero valor del parámetro que en la distribución con la varianza más grande.
- En situaciones muestrales prácticas, es posible saber que la distribución muestral de un estimador está centrada alrededor del parámetro que se trate de estimar, pero todo lo que se tiene es la estimación calculada de las *n* mediciones contenidas en la muestra.
- **¿A qué distancia del verdadero valor del parámetro estará esta estimación?**
- **¿Qué tan cercana está la diana o blanco de la bala del tirador?**
- La distancia entre la estimación y el verdadero valor del parámetro se denomina **error de estimación**.
- **Definición:** La distancia entre una estimación y el parámetro estimado recibe el nombre de **error de estimación**.

Estimación de la proporción de una población

Estimación puntual

Si queremos estimar una proporción poblacional con un solo valor, la mejor estimación es la proporción muestral $\hat{p}$. Como consiste en un solo valor, se le denomina ***estimación puntual***.

- Usamos $\hat{p}$ como la estimación puntual de p, ya que no está sesgado y es el más consistente de los estimadores que podrían usarse.
- No está sesgado en el sentido de que la distribución de las proporciones muestrales tiende a concentrarse alrededor del valor de p; esto es, las proporciones muestrales no tienden sistemáticamente a subestimar ni a sobrestimar p.
- La proporción muestral es la estimación más consistente en el sentido de que la desviación estándar de las proporciones muestrales tiende a ser menor que la desviación estándar de cualquier otro estimador insesgado.

¿Por qué necesitamos intervalos de confianza?

- En el ejemplo anterior vimos que 0.70 era la ***mejor*** estimación puntual de la proporción poblacional $\boldsymbol{p}$, pero no tenemos ningún indicador de qué tan *buena* es la mejor estimación.
- Como una **estimación puntual tiene la grave falla de no revelar información sobre qué tan buena es**, los especialistas en estadística han desarrollado otro tipo de estimación, llamada ***intervalo de confianza o estimación del intervalo***, que consiste en un rango (o un intervalo) de valores, en vez de un solo valor.
- **Definición:** Un **intervalo de confianza** (o **estimación del intervalo**) es un rango (o un intervalo) de valores que se usa para estimar el valor real de un parámetro poblacional. El intervalo de confianza suele abreviarse como IC.
- Un intervalo de confianza se asocia con un **nivel de confianza**, por ejemplo 0.95 (o 95%).
- **El nivel de confianza** nos da la tasa de éxitos del procedimiento que se utiliza para construir el intervalo de confianza. El nivel de confianza suele expresarse como la probabilidad o área $1 - \alpha$. El valor de α es el complemento del *nivel de confianza*.

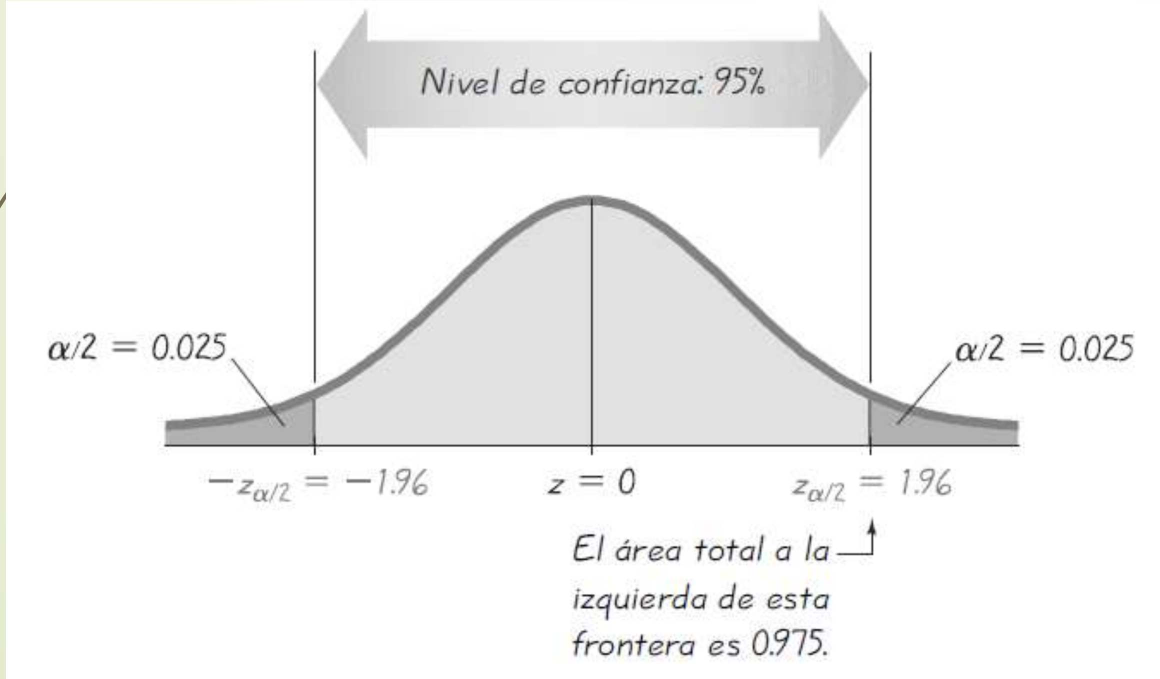
DEFINICIÓN

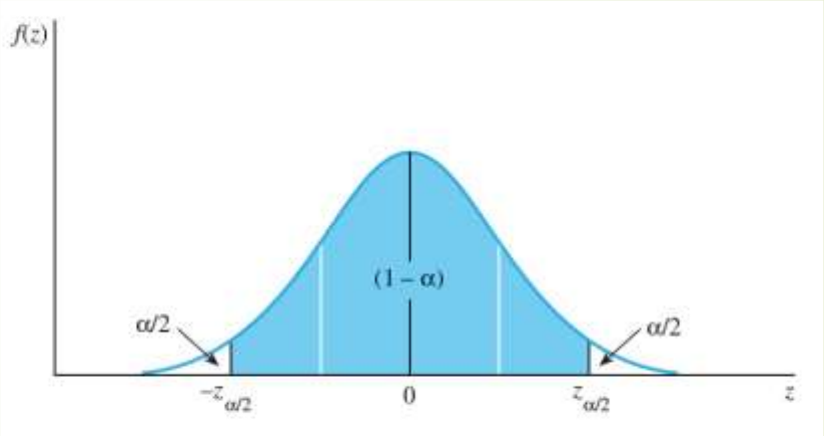
- El **nivel de confianza** es la probabilidad $1-\alpha$ de que el intervalo de confianza realmente contenga el parámetro poblacional, suponiendo que el proceso de estimación se repite un gran número de veces.
- El nivel de confianza también se llama **grado de confianza** o **coeficiente de confianza**.
- Las opciones más comunes para el nivel de confianza son 90% (con $\alpha = 0.10$), 95% (con $\alpha = 0.05$) y 99% (con $\alpha = 0.01$). La opción del 95% es la más común, puesto que provee un buen equilibrio entre precisión (reflejada en el ancho del intervalo de confianza) y confiabilidad (expresada por el nivel de confianza).
- **Observación:** Es común que los informes de los medios de comunicación incluyan afirmaciones como esta: **"Con base en una encuesta del Pew Research Center, se estima que la proporción de adultos que creen en el calentamiento global es del 70%, con un margen de error de 2 puntos porcentuales".**
- Observe que no se menciona el nivel de confianza. Aunque el nivel de confianza se debe incluir al reportar información sobre una encuesta, por lo general, los medios de comunicación no lo incluyen.

Valores críticos

Un **valor crítico** es el número en la línea limítrofe que separa estadísticos muestrales que tienen mayor probabilidad de ocurrir de aquellos que no tienen probabilidad de ocurrir. El número $\boldsymbol{Z}\alpha/_{2}$ es un valor crítico, una puntuación z con la propiedad de que separa un área de $\frac{\alpha}{2}$ en la cola derecha de la distribución normal estándar.

Cálculo de $\boldsymbol{Z}\alpha/_{2}$ para un nivel de confianza del 95%





Nivel de confianza 1-α	α	α/2	Valor crítico Z(α/2)
0,90	0,10	0,050	1,64
0,95	0,05	0,025	1,96
0,99	0,01	0,005	2,58

Margen de error

- Cuando se utilizan los datos de una muestra aleatoria simple para estimar una proporción poblacional $\boldsymbol{p}$, el **margen de error,** denotado con ***E*****,** es la diferencia máxima probable (con probabilidad $1-\alpha$, como 0.95) entre la proporción muestral $\hat{\boldsymbol{p}}$ observada y el valor real de la proporción poblacional $\boldsymbol{p}$.
- El margen de error ***E*** también se llama ***error máximo de la estimación*** y se calcula multiplicando el valor crítico por la desviación estándar de las proporciones muestrales, como se indica en la siguientes fórmula:

$$\boldsymbol{E = z\alpha/_{2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}}$$

Intervalo de confianza de muestra grande para una proporción poblacional p

- Muchos experimentos de investigación o estudios muestrales tienen como objetivo la estimación de la proporción de personas u objetos de un grupo grande, que posean cierta característica. Veamos algunos ejemplos:
  - ✓ La proporción de ventas que se puede esperar en un gran número de contactos de clientes.
  - ✓ La proporción de semillas que germinan.
  - ✓ La proporción de votantes "probables" que planean votar para un candidato político particular.
- Cada uno es un ejemplo práctico del experimento binomial y el parámetro a estimarse es la proporción binomial $\boldsymbol{p}$.
- Cuando el tamaño muestral es grande, la proporción muestral:

$$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{\text{Número total de éxitos}}{\text{Número total de intentos}}$$

  es el mejor estimador puntual para la proporción poblacional $\boldsymbol{p}$.
- Como su distribución muestral es aproximadamente normal, con media $\boldsymbol{p}$ y error estándar $\mathrm{SE} = \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$, $\hat{\boldsymbol{p}}$ puede usarse para construir un intervalo de confianza.

Intervalo de confianza de muestra grande para una media poblacional μ

- Es muy frecuente que problemas prácticos lleven a $\boldsymbol{\mu}$, la media de una población de mediciones cuantitativas. He aquí algunos ejemplos:
  - ✓ El promedio de calificaciones de estudiantes universitarios en una universidad particular.
  - ✓ El promedio de resistencia de un nuevo tipo de acero.
  - ✓ El número promedio de fallecimientos por categoría de edad.
  - ✓ El promedio de demanda para un nuevo producto de cosmético.

- Cuando el tamaño muestral *n* sea grande, la media muestral $\bar{x}$ es el mejor estimador puntual para la media poblacional $\boldsymbol{\mu}$.
- Como su distribución muestral es aproximadamente normal, puede usarse para construir un intervalo de confianza.

UN INTERVALO DE CONFIANZA DE MUESTRA GRANDE $(1-\alpha)100\%$ PARA UNA MEDIA POBLACIONAL μ

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

donde:

- $z_{\alpha/2}$ = puntuación z correspondiente a un área de $\alpha/2$ en la cola derecha de la distribución normal estándar z
- n = tamaño muestral
- σ = desviación estándar de la población muestreada
- Si σ es desconocida, puede ser aproximada por la desviación estándar muestral s cuando el tamaño muestral sea grande $(n \geq 30)$ y el intervalo aproximado de confianza es:

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Determinación del tamaño de la muestra requerido para estimar μ

- Cuando se reúne una muestra aleatoria simple de datos que se usarán para estimar una media poblacional $\boldsymbol{\mu}$, *¿cuántos* valores muestrales deben obtenerse?
- Si tomamos la expresión para el margen de error *E* y despejamos *n*, obtenemos la fórmula:

$$\boldsymbol{n} = \left(\frac{\boldsymbol{Z\alpha/_2\sigma}}{\boldsymbol{E}}\right)^{\mathbf{2}}$$

- Esta fórmula indica que el tamaño de la muestra no depende del tamaño de la población (*N*); el tamaño de la muestra depende del nivel de confianza deseado, del margen de error deseado y del valor de la desviación estándar $\boldsymbol{\sigma}$.

Estimación de la media poblacional: σ desconocida

- Con frecuencia debemos tratar de estimar la media de una población sin conocer la varianza.
- Si tenemos una muestra aleatoria obtenida a partir de una ***distribución normal***, entonces la variable aleatoria:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

- tiene una distribución t de Student con $\mathbf{n-1}$ grados de libertad. Aquí S es la desviación estándar de la muestra.
- En esta situación, en la que se desconoce σ, se puede utilizar T para construir un intervalo de confianza para μ. El procedimiento es igual que cuando se conoce σ, sólo que en este caso σ se reemplaza con S y la distribución normal estándar se reemplaza con la distribución t..

Definición: Grados de libertad

- El número de **grados de libertad** para un conjunto de datos muestrales recolectados es el **número de valores muestrales que pueden variar después de haber impuesto ciertas restricciones a todos los valores de los datos**. El número de grados de libertad suele abreviarse como **gl**.
- **Por ejemplo:**
- Si tenemos que escoger a 10 personas de un grupo grande de modo tal que el peso promedio sea de 60 Kg, tenemos la libertad de elegir a los diez que nosotros consideremos. Obviamente pueden existir muchas muestras de diez diferentes personas, pero siempre debemos tener en cuenta que el promedio de los pesos debe ser 60 Kg. Fácilmente nos podemos dar cuenta que solo podemos elegir libremente a las primeras 9 personas, dado que para elegir al décimo este debe ser elegido de manera tal que el promedio del grupo no sea mayor ni menor de 60 Kg. Es decir, podemos elegir con libertad a los 9 primeros, y el décimo queda automáticamente restringido por la condición de que su peso debe ser tal que la media de los diez pesos debe ser 60 Kg. Por lo tanto, para una muestra de 10 personas escogidas al azar, bajo la condición de que la media de los pesos sea 60 Kg, tenemos 9 grados de libertad.

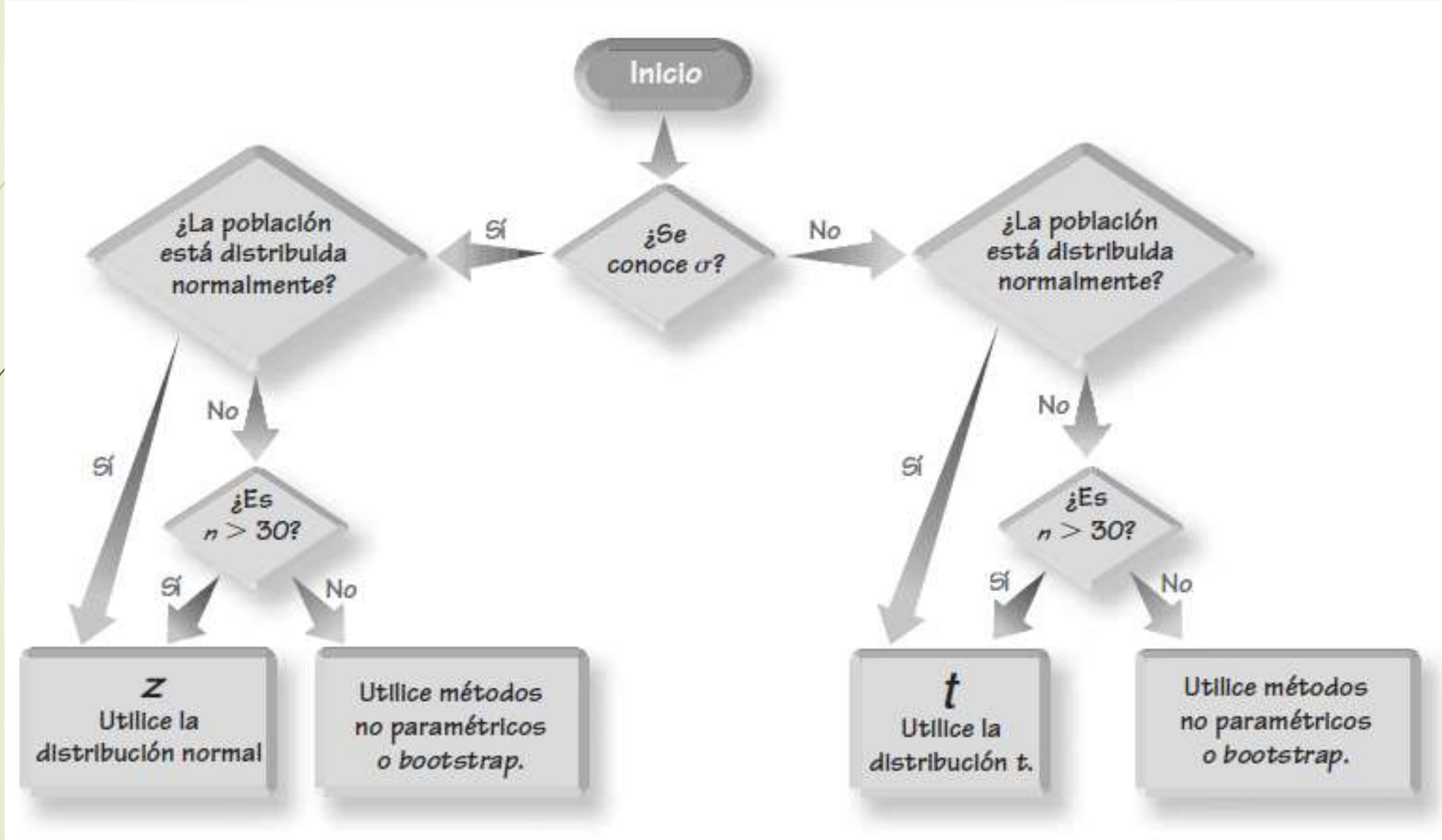
Estimación de la media poblacional: σ desconocida

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

donde:

- $t_{\alpha/2}$ = es el valor crítico de t que proporciona un área de $\alpha/2$ en la cola derecha de la distribución *t* para *n* − 1 grados de libertad.
- n = tamaño muestral
- S = desviación estándar muestral

Elección de la distribución adecuada



Estimación de la varianza poblacional

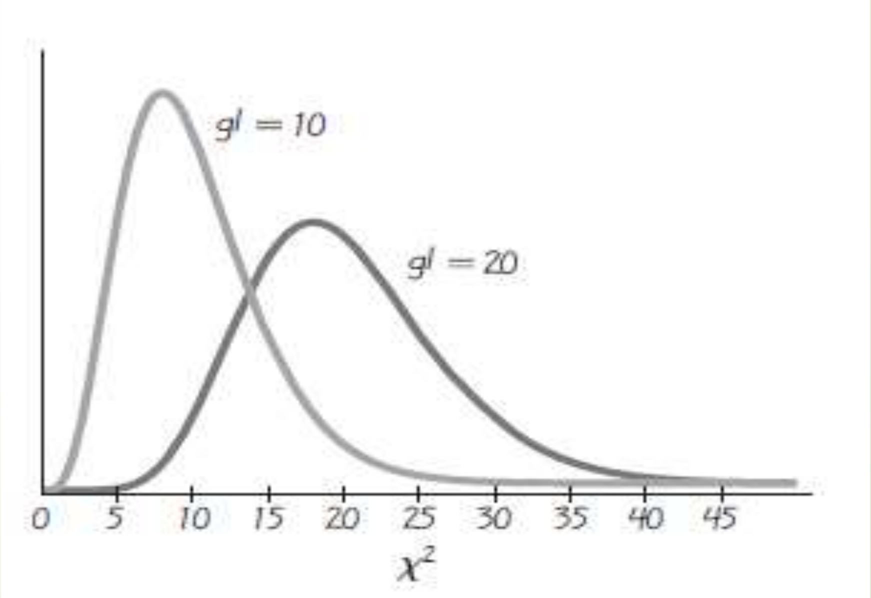
- Cuando consideramos estimaciones de proporciones y medias, utilizamos las distribuciones normal y *t* de Student.
- Cuando desarrollamos estimaciones de varianzas o desviaciones estándar, utilizamos otra distribución, conocida como la distribución chi cuadrada. Examinaremos características importantes de esta distribución antes de proceder con el desarrollo de intervalos de confianza.

Distribución chi cuadrada

- En una población distribuida normalmente con varianza σ^2, suponga que seleccionamos al azar muestras independientes de tamaño *n* y, para cada muestra, calculamos la varianza muestral S^2. El estadístico muestral $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ tiene una distribución llamada **distribución chi cuadrada**.
- Denotamos chi cuadrada con χ^2, que se pronuncia "ji cuadrada". Para calcular valores críticos de la distribución chi cuadrada, debemos remitirnos a su correspondiente tabla.
- La distribución chi cuadrada se determina por el número de grados de libertad, y en esta parte usaremos n-1 grados de libertad.

Propiedades de la distribución chi cuadrada

1. La distribución chi cuadrada no es simétrica, a diferencia de las distribuciones normal y *t* de Student. (Conforme aumenta el número de grados de libertad, la distribución se vuelve más simétrica).
2. Los valores de chi cuadrada pueden ser cero o positivos, pero no pueden ser negativos.
3. La distribución chi cuadrada es diferente para cada número de grados de libertad, y el número de grados de libertad está dado por gl= *n*-1. Conforme aumenta el número de grados de libertad, la distribución chi cuadrada se aproxima a una distribución normal.



Propiedades de la distribución chi cuadrada

- Puesto que la distribución chi cuadrada no es simétrica, el intervalo de confianza para σ^2 no se ajusta al formato de $S^2 \pm E$ y debemos hacer cálculos separados para los límites de intervalos de confianza superior e inferior.
- Si utiliza la tabla de la distribución chi cuadrada para calcular valores críticos, observe la siguiente característica:
- En la tabla mencionada cada valor crítico de χ^2 corresponde a un área que se encuentra en el renglón superior de la tabla, y esa área representa la *región acumulada localizada* a la derecha del valor crítico.

Intervalo de confianza para estimar una desviación estándar o una varianza poblacional

Intervalo de confianza para la varianza poblacional σ^2

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi_D^2} < \boldsymbol{\sigma^2} < \frac{(n-1)S^2}{\chi_I^2}$$

Intervalo de confianza para la desviación estándar poblacional $\boldsymbol{\sigma}$

$$\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi_D^2}} < \boldsymbol{\sigma} < \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi_I^2}}$$

Donde:

σ = desviación estándar poblacional	σ^2 = varianza poblacional
s = desviación estándar muestral	s^2 = varianza muestral
n = número de valores muestrales	E = margen de error
χ_I^2 = valor crítico de χ^2 de cola izquierda	χ_D^2 = valor crítico de χ^2 de cola derecha