Beschrijving Algoritmes

Roel Matthysen - 21 september 2012

Algemene structuur

$$\begin{array}{cccc} z_{1n} & z_{1n-1} & \cdots & z_{11} \\ z_{2n} & & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ z_{sn} & & \cdots & z_{s1} \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} a_{1n} & a_{1n-1} & \cdots & a_{11} \\ a_{2n} & & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{sn} & & \cdots & a_{s1} \end{array} \tag{1}$$

- Het aantal kolommen n duidt op het aantal punten $p = 2^n$
- Het aantal rijen s is het aantal dimensies
- De getallen $a_{1n}, ..., a_{sn}$ zijn de generatoren modulo 2^n
- De getallen $z_{i1}, ..., z_{ij}$ zijn de coefficiënten in de binaire voorstelling van a_{ij},

$$a_{ij} = a_{ij-1} + z_{ij} * 2^{j-1} \tag{2}$$

- Notatie bij de kleurcodes in de algoritmen:
  - a_{ij} staat voor de elementen die reeds gekend zijn
  - a_{ij} staat voor de elementen die in de huidige stap gevariëerd worden als $a_{ij} = a_{ij-1} + z_{ij} * 2^{j-1}$ met z_{ij} 0 of 1.
  - a_{ij} staat voor de elementen die in de huidige stap als gekende waarde expliciet in de gewichtsfunctie nodig zijn. Voor de berekening van de gewichtsfunctie zijn dus enkel de blauwe en groene elementen nodig.

1 Algoritme 1

- Initialiseer kolom 1 op 1 voor elke dimensie
- Itereer over de kolommen met index $v = 2..n$
- Voor kolom v: evalueer de gewichtsfunctie

$$h_v(x_1, x_2, ..., x_s) = \frac{1}{2^v} \sum_{m=1}^{2^v}{}^* \left(2n - 2v + \frac{1}{||mx_1/2^v||}\right) \cdots \left(2n - 2v + \frac{1}{||mx_s/2^v||}\right) \tag{3}$$

  voor elke mogelijke $h_v(a_{1v-1} + 2^{v-1}z_{1v}, ..., a_{sv-1} + 2^{v-1}z_{sv})$ waarbij de z_{iv} onafhankelijk de waarde 0 of 1 kunnen aannemen. Kies voor de configuratie waarbij h_v minimaal wordt.

- Structuur:

$$\begin{array}{c} \xleftarrow{ v=2,\ldots,n } \\ \begin{array}{cccccc} a_{1n} & \cdots & \color{blue}{a_{1v}} & \color{magenta}{a_{1v-1}} & \cdots & \color{magenta}{1} \\ a_{2n} & \cdots & \color{blue}{a_{2v}} & \color{magenta}{a_{2v-1}} & \cdots & \color{magenta}{1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{sn} & \cdots & \color{blue}{a_{sv}} & \color{magenta}{a_{sv-1}} & \cdots & \color{magenta}{1} \end{array} \end{array} \tag{4}$$

2 Algoritme 2

- Initialiseer kolom 1 op 1 voor elke dimensie
- Itereer over de kolommen met index $v = 2..n$
- Itereer over de rijen met index $r = 1..s$
- Voor kolom v en rij s: evalueer de gewichtsfunctie

$$h_{rv}(x_1, x_2, ..., x_s) = \frac{1}{2^v} \sum_{m=1}^{2^v}{}^* \prod_{j=1}^{r} \left(2n - 2v + \frac{1}{||mx_j/2^v||}\right) \prod_{j=r+1}^{s} \left(2n - 2v + 2 + \frac{1}{||mx_j/2^{v-1}||}\right) \tag{5}$$

  voor $h_{rv}(a_{1v}, ..., a_{r-1v}, a_{rv-1} + 2^{v-1}z_{rv}, a_{r+1v-1}, ..., a_{sv-1})$ waarbij z_{rv} de waarden 0 en 1 aanneemt. Kies de waarde waarbij h_{rv} minimaal wordt.

- Structuur:

$$\begin{array}{c} \xleftarrow{ v=2,\ldots,n } \\ \begin{array}{cccccc|c} a_{1n} & \cdots & \color{teal}{a_{1v}} & \color{magenta}{a_{1v-1}} & \cdots & \color{magenta}{1} & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{r-1n} & \cdots & \color{teal}{a_{r-1v}} & \color{magenta}{a_{r-1v-1}} & \cdots & \color{magenta}{1} & \\ a_{rn} & \cdots & \color{blue}{a_{rv}} & \color{magenta}{a_{rv-1}} & \cdots & \color{magenta}{1} & \downarrow r=1,\ldots,s \\ a_{r+1n} & \cdots & a_{r+1v} & \color{teal}{a_{r+1v-1}} & \cdots & \color{magenta}{1} & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{sn} & \cdots & a_{sv} & \color{teal}{a_{sv-1}} & \cdots & \color{magenta}{1} & \end{array} \end{array} \tag{6}$$

3 Algoritme 3

- Initialiseer a_{1n} op 1 (dus $a_{1n-1}, ..., a_{11}$ zijn per definitie ook 1)
- Itereer over de rijen met index $r = 2, ..., s$, en initialiseer a_{r1} op 1
- Itereer over de kolommen met index $v = 1, ..., n$
- Voor kolom v en rij s: evalueer de gewichtsfunctie

  $$h_{rv}(x) = \sum_{k=v}^{n} \frac{1}{2^{k-v}} \sum_{m=1}^{2^k}{}^{*} \ln \frac{1}{\sin^2 \pi(ma_{1n}/2^k)} \cdots \ln \frac{1}{\sin^2 \pi(ma_{r-1n}/2^k)} \ln \frac{1}{\sin^2 \pi(mx/2^v)} \tag{7}$$

  voor $h_{rv}(a_{rv-1} + 2^{v-1} z_{rv})$ waarbij z_{rv} de waarden 0 en 1 aanneemt. Kies de waarde waarbij h_{rv} minimaal wordt.

- Structuur

$$\begin{array}{c} \xleftarrow{\qquad\qquad\qquad v=1,\dots,n \qquad\qquad\qquad} \\ \begin{array}{cccccc} 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{2n} & \cdots & a_{2v} & a_{2v-1} & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r-1n} & \cdots & a_{r-1v} & a_{r-1v-1} & \cdots & 1 \\ a_{rn} & \cdots & a_{rv} & a_{rv-1} & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{sn} & \cdots & a_{sv} & a_{sv-1} & \cdots & 1 \end{array} \Bigg\downarrow {\scriptstyle r=2,\dots,s} \end{array} \tag{8}$$