第一章機率與統計(Ⅱ)

§1−1 條件機率與貝氏定理

(甲)條件機率

(1)條件機率的意義：

例一：

假設小安參加一個電視益智節目，他必須在 3 個信封(顏色分別是紅、黃、綠)中選一個，然後會得到所選信封中紙片上所寫的金額：其中有兩個信封中的紙片寫的是 100 元，第三個寫的是十萬元。

情況一：如果主持人沒有給任何提示，小安任選一個信封，得到十萬元的機率是$\frac{1}{3}$。

情況二：如果主持人在小安選擇之前，先打開紅信封，並給小安看裡面的紙片寫著 100 元，那麼小安再選信封，得到十萬元的機率是$\frac{1}{2}$，而非情況一中的$\frac{1}{3}$。

在這個例子中很容易可以看出，得到十萬元的機率有兩個不同的值，因此一個事件的機率會隨著情境的不同(提供訊息的改變)而可能會有所改變，這便是**條件機率**的意義。

(2)條件機率的定義：

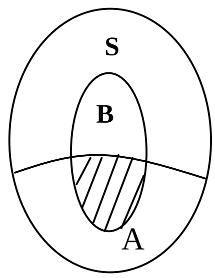
(a)定義：

若設 A、B 爲樣本空間 S 的兩事件，且 P(A)≠0，則在事件 A 發生的條件下，

事件 B 發生的機率稱爲**條件機率**，符號爲 P(B|A)，其值定義成 $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$。

[討論]：

(1)在古典機率的情形下，$P(A\cap B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(S)}$，$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$



故 $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}}=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}$

[結論]：

(a) $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

$=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}$ (在古典機率的情形下)

(b)根據前面的式子，在 A 已發生的狀況下，事件 B 的條件機率，可以有兩種解釋，以樣本空間 S 的觀點來說，P(B|A)爲 P(A∩B)與 P(A)的比值；

另一觀點，若以事件 A 爲新的樣本空間，則 P(B|A)可視爲 A∩B 發生的機率，

因此 $P(B|A)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}$。

例如：擲一均勻骰子，在點數和爲 6 的條件下，求其中有一骰子出現 2 點的機率。

[解法]：

設 A 代表點數和爲 6 的事件，B 代表其中有一骰子出現 2 點的事件

樣本空間 S={$(x,y)|1\le x,y\le 6$，x,y 爲自然數}，$n(A)=5$，$n(B)=6$，$n(A\cap B)=2$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}}=\frac{2}{5}=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}。$$

(3)條件機率的性質：

P(•|A)是「在A發生的條件下」，就是把樣本空間換成A來看，

設A、B、B_1、B_2爲樣本空間S中的事件

(a)$P(\phi|A)=0$，

(b)$P(A|A)=1$

(c)$0\leq P(B|A)\leq 1$

(d)$P(B'|A)=1-P(B|A)$

(e)$P(B_1\cup B_2|A)=P(B_1|A)+P(B_2|A)-P(B_1\cap B_2|A)$

[證明]：

[例題1] 擲一均勻骰子 3 次，令A表示 3 次出現點數和爲 12 的事件，B表示第 1 次出現偶數點之事件，則$P(B'|A)$=？

Ans：$\frac{12}{25}$

[例題2] 設 A，B 爲二事件，$P(A)=\frac{3}{8}$，$P(B)=\frac{3}{4}$，$P(A\cup B)=\frac{7}{8}$，試求：

(1) $P(A\,|\,B)=$________。(2) $P(A'\,|\,B)=$________。(3) $P(A'\,|\,B')=$_________。

Ans：(1)$\frac{1}{3}$ (2)$\frac{2}{3}$ (3)$\frac{1}{2}$

[例題3] 設袋中有 8 個白球 4 個紅球。從袋中逐次取出 4 球，若每次取球時，每一球被取中的機會相等，逐次在抽中 3 個白球的條件下，第三次抽中白球的機率。

Ans：$\frac{3}{4}$

[取後放回]：

[取後不放回]：

(練習1) 設A,B為樣本空間S中的二事件，且P(A)=$\frac{1}{3}$，P(B)=$\frac{1}{4}$，P($A\cap B$)=$\frac{1}{6}$，求(1)P(A|B) (2)P(B|A) (3)P(A'|B') (4)P(B'|A')

Ans：(1) $\frac{2}{3}$ (2)$\frac{1}{2}$ (3)$\frac{7}{9}$(4)$\frac{7}{8}$

(練習2) 某鎮患有眼疾 12%，牙疾者 10%，二者兼有者 4%，則：

(1)從患眼疾中選一人，恰有患牙疾之條件機率為_________？

(2)從患牙疾中選一人，恰有患眼疾之條件機率為_________？

Ans：(1)$\frac{1}{3}$ (2)$\frac{2}{5}$

(練習3) 假設根據統計，汽車駕駛人中有 0.005 是酒醉駕車，又酒醉駕車且肇事者占駕駛人的 0.003，求駕駛人在酒醉的情況下肇事的機率為_______。

Ans：$\frac{3}{5}$

(練習4) 某一家庭有兩個小孩，

(1)若已知兩個小孩至少有一個男孩，求兩個均為男孩的機率=______。

(2)若已知大孩子為男孩，求兩個都是男孩的機率=______。

Ans：(1)$\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$

(練習5) 擲三次均勻骰子，設三次中至少出現一次 6 點的事件為 A，至少出現一次 1 點的事件為 B，則 $P(B|A)$=______________。Ans：$\frac{30}{91}$

(練習6) 擲三枚相同且均勻的銅板一次，則在至少出現一個正面的條件下，恰好出現兩個正面的機率為 __________ 。Ans：$\frac{3}{7}$

(練習7) 設袋中有 10 個球，其中白球 6 個，紅球 4 個，今自袋中取球每次取一個，取後不放回共取三次，假設在取出之三球中恰有二白球的條件下，求第二次抽到白球的機率。 Ans：$\frac{2}{3}$

(3)條件機率的乘法原理：

例子：

設甲袋中有藍球 3 個、白球 5 個；乙袋中有藍球 2 個、白球 1 個、紅球 2 個。先依機會均等的原則選出甲袋或乙袋，再從中取出一球，求取出藍球的機率。

[解法]：

設A代表選出甲袋的事件，B代表取出藍球的事件，

因為整個隨機試驗的過程是先選袋子再取球，因此我們取球之前要先考慮取出來是甲袋或乙袋。

若取中甲袋，則取出藍球的機率=$\frac{3}{8}$；若取中乙袋，則取出藍球的機率=$\frac{2}{5}$。

因此取出藍球的機率=$\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{31}{80}$ 。

上述的過程牽涉到條件機率，我們用符號來說明：

$P(A)=P(A')=\frac{1}{2}$，$P(B|A)=\frac{3}{8}$，$P(B|A')=\frac{2}{5}$

因為$B=(B\cap A)\cup(B\cap A')$且$(B\cap A)\cap(B\cap A')=\phi$

所以$P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap A')$

$=P(A)\cdot P(B|A)+P(A')\cdot P(B|A')$

$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}$

$=\frac{31}{80}$

(a)由某事件的條件機率求該事件的機率：

$P(B)=P(A\cap B)+P(A'\cap B)=P(A)P(B|A)+P(A')P(B|A')$

(b)逐層求機率(**條件機率的乘法原理**)：

①設A,B為任意二事件，若$P(A)>0$，$P(B)>0$，則$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$。

②設A、B、C爲任意三事件，若$P(A\cap B)>0$，則$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|A\cap B)$

(c)一般而言，我們可利用數學歸納法，得出以下的結果：

條件機率的乘法原理：

設$A_1,A_2,\ldots,A_k$爲k事件，若$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{k-1})>0$，

則$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_k)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1\cap A_2)\cdots P(A_k|A_1\cap A_2\cap\ldots A_{k-1})$

[例題4] 一袋中有 5 個白球、8 個黑球。從袋中連續取出 3 個球，取出之球不再放回。求(1)依序取出白球、黑球、白球的機率。(2)第一次取出爲黑球的機率。(3)第二次取出黑球的機率。Ans： (1)$\frac{160}{1716}$ (2)$\frac{8}{13}$ (3) $\frac{8}{13}$

[例題5] 一袋內有 m 支籤，其中 n 支是獎籤($3<n<m$)，甲、乙、丙依次抽籤，每人各取一次，每次從袋內任取 1 支籤取後不放回，則甲、乙、丙三人抽中獎籤的機率依次爲________________。Ans：三人均爲$\frac{n}{m}$。

[例題6] 從 n 為學生中逐次任意抽出 k 個學生組成樣本，若在每一次學生被抽出的機會都相等，則每一樣本被抽中的機率都等於 $\frac{1}{C_k^n}$ 。

[證明]：因為第一次抽選時有 n 位學生，每一學生被抽到的機率為$\frac{1}{n}$，在第二次抽選時，剩下$(n-1)$位學生，每位學生被抽中的機率為$\frac{1}{n-1}$，依此類推，在第 k 位抽選時，每一位學生被抽到的機率為$\frac{1}{n-k+1}$。k 位學生按某一次序被抽出，則抽出 k 位學生組成的樣本之機率為$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n-k+1}=\frac{(n-k)!}{n!}$

又因為 k 位學生被抽出之可能次序共有 $k!$ 種，不管那一種次序，它們都代表同一樣本，又每一種次序之出現機率都等於$\frac{(n-k)!}{n!}$，所以任意 k 位學生被抽到的機率為 $k!\cdot\frac{(n-k)!}{n!}=\frac{1}{C_k^n}$ 。

(練習8) 設甲袋中有 5 個白球、2 個紅球，乙袋中有 4 個白球、3 個紅球，今擲骰子一次，擲得 1,2 點則選取甲袋，擲得 3,4,5,6 點則選取乙袋，從選出的袋中任取 2 球，求選出的球為 1 白、1 紅的機率。Ans：$\frac{34}{63}$

(練習9) 袋中有 4 個白球，3 個黑球，
(1)任取 3 球，求取得 2 白球 1 黑球之機率。
(2)每次任取一球，取後不放回，求依次取得白球、白球、黑球的機率。
(3)每次任取一球，取後放回，取 3 次，求取得 2 次白球、1 次黑球的機率。
Ans：(1)$\frac{18}{35}$ (2)$\frac{6}{35}$ (3)$\frac{144}{343}$

(練習10) 某公司產 20 個產品中，有 4 個不良品，現在逐一加以檢查，
(1)取出後不放回，在第四次發現第二個不良品之機率為_________。
(2)取出後放回，在第四次發現第二個不良品之機率為_________。
Ans：(1) $\frac{24}{323}$ (2) $\frac{48}{625}$

(練習11) 袋中有 5 白球，4 紅球，今自袋中連取 3 球（每次取一球），
(1)若取出$\boxed{\text{不放回}}$，求依次是紅球，白球，紅球之機率=__________。
(2)若取出$\boxed{\text{再放回}}$，求依次是紅球，白球，紅球之機率=__________。

(練習12) 10 支籤中，有獎籤 3 支，今依甲、乙之順序抽籤，試求下列問題：
(1)甲乙均抽中有獎籤的機率為________。
(2)甲沒抽中有獎籤，乙抽中有獎籤的機率為_______。
(3)在甲沒抽中有獎籤的條件下，乙抽中有獎籤的機率為_______。
(4)甲抽中有獎籤和乙抽中有獎籤之機率為_______。

Ans：(1)$\frac{1}{15}$ (2)$\frac{7}{30}$ (3)$\frac{1}{3}$ (4)都是$\frac{3}{10}$

(乙)貝氏定理

(1)貝氏定理的引入：

例一：

勤業公司由甲乙兩個供應商分別提供 70%與 30%的映像管，經過組裝生產出電腦螢幕。若從勤業公司生產的電腦螢幕中任意抽出一個，則此電腦螢幕的映像管來自甲供應商的機率是 0.7，來自乙供應商的機率是 0.3，這兩個機率稱為「**事前機率**」。如果提供抽樣的螢幕是不良品，而且由過去的資料顯示：甲供應商提供的映像管有 3%是不良品，乙供應商提供的映像管有 6%是不良品，以上的資訊即為映像管是不良品的資訊，那麼此不良品來自甲供應商的機率是否仍為 0.7 呢？

[解法]：

令A表示映像管來自甲供應商的事件，B表示映像管是不良品的事件

則「事前機率」電腦螢幕的映像管來自甲、乙供應商的機率分別是

$P(A)=0.7$、$P(A')=0.3$

但當我們提供了映像管是不良品的資訊，

即$P(B|A)=0.03$、$P(B|A')=0.06$

那麼不良品來自甲供應商的機率$=P(A|B)= \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

我們分別計算$P(A\cap B)$與$P(B)$

$P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap A')=P(A)\cdot P(B|A)+P(A')\cdot P(B|A')$

$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(A)\cdot P(B|A)+P(A')\cdot P(B|A')} = \frac{0.7\cdot 0.03}{0.7\cdot 0.03+0.3\cdot 0.06} = \frac{21}{39}$。

因此當未提供「不良品」資訊時，映像管來自甲供應商的機率是 0.7，但是提供了「不良品」資訊後，此映像管來自甲供應商的機率是$\frac{21}{39}\approx 0.5385$，此機率稱為「**事後機率**」，機率可能會隨著提供的資訊而有所變化。

例二：

醫學上常用心電圖篩檢心臟疾病，根據統計，有 90%的心肌梗塞病患可由心電圖篩檢出來，但也有 5%的健康者的心電圖會被誤判為患有心肌梗塞。如果某一個城市有 0.2%的市民患有心肌梗塞的疾病。請問若某人的心電圖檢查結果被判定成患有心肌梗塞的疾病，則他真正患有心肌梗塞疾病的機率是多少？

[解法]：

令A表示此城市真正患有心肌梗塞人之事件，

B表示此城市心電圖檢查顯示有心肌梗塞的人之事件。

根據所給的資料可知$P(A)=0.002$，$P(A')=0.998$，$P(B|A)=0.9$，$P(B|A')=0.05$

對於一個醫療檢查而言，已知有病，再檢查出有病，並不是關注的問題，而檢查出有病，真的有病才是醫療檢查是否有效的關鍵。

因此事前機率$P(A)=0.002$，$P(A')=0.998$ 會隨著提供心電圖的新資訊：$P(B|A)=0.9$，$P(B|A')=0.05$，而得出事後機率$P(A|B)$，$P(A|B)$代表心電圖的準確率。

$P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap A')=P(A)\cdot P(B|A)+P(A')\cdot P(B|A')$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(A)\cdot P(B|A)+P(A^{/})\cdot P(B|A^{/})}$$

$$=\frac{0.002\times 0.9}{0.002\times 0.9+0.998\times 0.05}=\frac{0.0018}{0.0018+0.0499}=\frac{18}{517}\fallingdotseq 0.0348。$$

從已知資訊看來，事後機率 0.0348 這個值似乎太低了，不過在沒做心電圖檢查之前，我們假設某個人患有心肌梗塞的機率是 0.002，提供了「心電圖檢查被判定成患有心肌梗塞」的資訊之後，某人患有心臟病的機率增加到了 0.0348。

(2)貝氏定理

貝氏定理：西元 1763 年在貝士(Thomas Bayes，十八世紀英國牧師)的遺著中所發現的。

(a)分割：

設$A_1,A_2\ldots A_r$為樣本空間S中的任意r個事件。若這r個事件滿足：聯集為S，兩兩的交集為ϕ，則稱{ $A_1,A_2\ldots A_r$}為樣本空間S的一個分割。

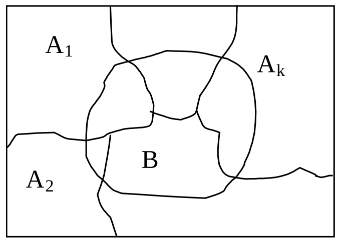
例如：設S={a,b,c,d}， 則{{a},{b},{c},{b}}，{{a,b},{c},{d}}都是S的分割。

(b)設A,B為樣本空間S中的任意二事件，若P(A)>0，P(B)>0，則

$P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(B)}$，而由條件機率的乘法原理，

可得$P(B)==P(B\cap A)+P(B\cap A^{/})=P(A)\cdot P(B|A)+P(A^{/})\cdot P(B|A^{/})$

$\Rightarrow P(A|B)=\dfrac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(A)\cdot P(B|A)+P(A^{/})\cdot P(B|A^{/})}$。



(c)設{ $A_1,A_2\ldots A_r$}為樣本空間S的一個分割，B為任意的事件。

若P(B)>0，$P(A_i)>0$，$i=1,2\ldots,r$，對自然數k而$1\le k\le r$

則 $P(A_k\mid B)=\dfrac{P(A_k)P(B\mid A_k)}{\sum_{i=1}^{r}P(A_i)P(B\mid A_i)}$

[證明]：

由條件機率的定義，可知$P(A_k|B)=\dfrac{P(A_k\cap B)}{P(B)}$

又$A_1,A_2\ldots A_r$為樣本空間S的一個分割，且B為樣本空間S中的一事件。

$\Rightarrow B=B\cap S=B\cap(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_r)=(B\cap A_1)\cup(B\cap A_2)\cup\ldots\cup(B\cap A_r)$

又對於任意$i\neq j$，$(i,j=1,2,\ldots,r)$，$A_i\cap A_j=\phi$，所以$(B\cap A_i)\cap(B\cap A_j)=\phi$

因此$P(B)=P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+\ldots+P(B\cap A_r)$

$$=\sum_{i=1}^{r}P(B\cap A_i)=\sum_{i=1}^{r}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

故 $P(A_k\mid B)=\dfrac{P(A_k)P(B\mid A_k)}{\sum_{i=1}^{r}P(A_i)P(B\mid A_i)}$。

貝氏定理是統計推理的基礎，在定理中$P(A_i)$ $(i=1,2,\ldots,r)$稱為**事前機率**，必須知道它，才能推算$P(A_i|B)$，稱為**事後機率**。通常$P(A_i)$的值已過去的經驗為基礎，由事件發生前的資訊為依據，才能推算事後機率。

[例題7] 醫療主管機關在持續追蹤某傳染病多年後，發現如果體檢受檢人感染該傳染病，就一定可以檢測出來。但是卻有 4%的機率，將一不患該傳染病之受檢者誤檢爲患有該病。已知全部男性人口中有 0.2%的機率患有此病。現於兵役體檢時進行檢測，若該梯次役男共有十萬人受檢，而且某役男被告知患有該病。請問下列哪些敘述爲真？

(A)該役男確實染病的機率大於 3% (B)該役男確實染病的機率大於 4%

(C)該役男確實染病的機率大於 5% (D)該役男確實染病的機率大於 90%

Ans：(A)(B) (2002 指定考科甲)

[例題8] 設某工廠由甲、乙、丙三台機器製造某一產品。甲生產全部產品的 50%，乙生產全部產品的 30%，丙生產全部產品的 20%。又依過去的經驗知甲的產品中有 3%，乙有 4%，丙有 5%爲不良品。從產品中任選一產品，

(1)求選出之產品爲不良品的機率；(2)若該產品爲不良品，求此產品爲甲機器製造的機率。Ans：(1)0.037(2)$\frac{15}{37}$

(練習13) 調查某新興工業都市的市民對市長施政的滿意情況，依據隨機抽樣，共抽樣男性 600 人、女性 400 人，由甲、乙兩組人分別調查男性與女性市民。調查結果男性中有 36%滿意市長的施政，女性市民中有 46%滿意市長的施政，則滿意市長施政的樣本佔全體樣本的百分比爲＿＿＿＿＿%。

Ans：40【90 學測】

(練習14) 有某種診斷方法，依過去的經驗知道患癌症的人，經過檢驗後發現有癌症的可能性爲 0.90，不患癌症的人經過同樣的檢驗後發現有癌症的可能性爲 0.05。假設一群人中有 6%的人患有癌症。現從此群人中任選一人而加以檢驗，求

(1)檢驗出有癌症的機率；(2)設檢驗出有癌症，求此人確有癌症的機率。

Ans：(1)0.101(2)$\frac{54}{101}$

(練習15) 某校橋藝社由甲、乙、丙三班同學組成，各佔 40%，30%，30%。社員中甲班人數的$\frac{1}{4}$，乙班人數的$\frac{1}{5}$，丙班人數的$\frac{1}{3}$也是籃球校隊的隊員。某次橋藝社推選新社長，每人當選的機會均等，則籃球隊員當選的機率為(A)$\frac{11}{50}$ (B)$\frac{12}{50}$ (C)$\frac{13}{50}$ (D)$\frac{14}{50}$ (E)$\frac{15}{50}$ Ans：(C)

(練習16) 甲說實話的機率為$\frac{7}{10}$，乙說實話的機率為$\frac{9}{10}$，今有一袋內藏 3 白球，7 黑球，自袋中任取一球，甲乙二人均說是白球，則此球確實為白球之機率為何？ Ans：$\frac{9}{10}$

[例題9] (樹狀圖求機率)

彩票公司每天開獎一次，從 1、2、3 三個號碼中隨機開出一個。開獎時，如果開出的號碼和前一天相同，就要重開，直到開出與前一天不同的號碼為止。如果在第一天開出的號碼是 3,則在第五天開出號碼同樣是 3 的機率是________(以最簡分數表示)。Ans：$\frac{3}{8}$【91 自】

[例題10] (樹狀圖求機率)

設 A,B 兩箱中，A 箱內有 1 黑球 1 白球，B 箱內有 1 白球。甲乙兩人輪流取球，每次先由甲自 A 箱內任取一球，放入 B 箱內，再由乙自 B 箱內任取一球，放入 A 箱內，這樣的動作完成後稱為一局。

(1)當一局結束時，A 箱內兩球為一黑一白的機率為__________。

(2)當第三局結束時，A 箱內兩球為一黑一白的機率為_________。

Ans：(1)$\frac{3}{4}$ (2)$\frac{43}{64}$

(練習17) 設 A，B 兩盒子內各有兩個球，其中 A 盒子內有二白球，B 盒子內有一白球一黑球。甲、乙兩人輪流取球，每次先由甲自 A 盒子內任取一球放入 B 盒內，再由乙自 B 盒內任取一球，放入 A 盒內，這樣的動作完成後稱爲一局。

(1)求第一局結束時，A 盒內還是二白球的機率=＿＿＿＿＿。

(2)求第二局結束時，A 盒內還是二白球的機率=＿＿＿＿＿。

(3)求第三局結束時，A 盒內還是二白球的機率=＿＿＿＿＿。

Ans：(1)$\frac{2}{3}$ (2)$\frac{5}{9}$ (3)$\frac{14}{27}$

(練習18) 某人上班有甲、乙兩條路線可供選擇。早上定時從家裡出發，走甲路線有 $\frac{1}{10}$ 的機率會遲到，走乙路線有 $\frac{1}{5}$ 的機率會遲到。無論走哪一條路線，只要不遲到，下次就走同一路線，否則就換另一條路線。假設他第一天走甲路線，則第三天也走甲路線的機率爲＿＿＿＿。Ans：$\frac{83}{100}$【86 學測】

綜合練習

(1) 擲三粒均勻的骰子，已知點數和爲 5 的倍數，求點數和不超過 10 的機率爲＿＿＿＿＿＿＿。

(2) 由 1 到 9 的 9 個數字中任取 2 數，且取過的數字不再取，若其和爲偶數，求二者均爲偶數的機率。

(3) 自一副撲克牌中任取一張。若取得紅色牌的事件爲 A，求下列二事件中至少有一件事發生的機率。
事件 C：取出之牌爲偶數點。事件 D：取出之牌的點數大於或等於 10 點。

(4) 設正整數 x,y,z 為偶數的機率為$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{3}$,$\frac{1}{4}$ ，在 xy 為偶數的條件下，$xy+z$ 為奇數的機率為_____。

(5) 甲乙丙三袋中，甲袋有 2 黑球 3 白球，乙袋有 2 黑球 2 白球，丙袋有 1 黑球 2 白球，今自甲乙丙三袋中各取一球，則至少取出 2 黑球的機率為_____。
(83 社)

(6) 若一個袋子中有 20 個球，其中 4 個白球，每次取一個球，取出後不放回，若第二次取到白球，求第三次也取到白球的機率為________。

(7) 設袋中有 12 個球，其中有 8 個白球，從袋中逐次取出 4 球，
若每次取球時，每球被取到的機會相等，試求
(a)取後放回，抽中 3 白球的機率=_________。
(b)取後放回，在抽中 3 白球的條件下，第三個是白球的機率=_______。
(c)取後不放回，抽中 3 白球的機率=_________。
(d)取後不放回，在抽中 3 白球的條件下，第三個是白球的機率=______。

(8) 袋中有 4 紅球，3 白球，今自袋中每次取一球，連取 4 次，每次均不放回，問第 3 次取到白球的機率=_______。

(9) 課外活動社團共有 20 位同學參加，已知其中高一、高二、高三同學所佔的比例分別為 55%、25%、20%。若由該社團中任選二人，
則此二人是不同年級學生的機率=_______________。 (90 社)

(10) 某校橋藝社由甲乙丙三班同學組成，各佔 40%、30%、30%。社員中甲班人數的$\frac{1}{5}$ ，乙班人數的$\frac{1}{5}$ ，丙班人數的$\frac{1}{3}$ 亦為籃球校隊隊員。某次橋藝社推選新社長，每人當選的機會相等，求(a)籃球隊員當選的機率；(b)若籃球隊員當選社長，求他是甲班同學的機率。

(11) 交通規則測驗時，答對有兩種可能：一種是會做而答對，一種是不會做但猜對。已知小華練習交通規則筆試測驗，會做的機率是 0.8。現有一題 5 選 1 的交通規則選擇題，設小華會做就答對，不會做就亂猜。已知此題小華答對，試問在此條件之下，此題小華是因為會做而答對(不是亂猜)的機率是多少？(以最簡分數表示)
(89.學科)

(12) 某地區之天氣，依多年的統計得知，每年晴天佔了 40%，非晴天佔了 60%，又天氣預報可能不完全準確，將晴天說成晴天的機率為 0.7，將非晴天說成晴天之機率為 0.2，試問：若天氣預報說明天是晴天，則明天確為晴天的機率為______。

(13) 假設被選中參加一項刑案審判的陪審團，不論被告有罪或無罪，都有 0.95 的機率做出正確判決。另外還假設當地警方執法非常嚴謹，在被審判的人當中，有 99% 事實上是有罪的。若已知陪審團判某被告無罪，則該名被告真的是無罪之機率是多少？

(14) 根據過去紀錄知，某電腦工廠檢驗其產品的過程中，
將良品檢驗為不良品的機率為 0.20，將不良品檢驗為良品的機率為 0.16。

又知該產品中，不良品佔 5%，良品佔 95%。若一件產品被檢驗爲良品，但該產品實際上爲不良品之機率爲________。

(15) 某項胸部 X 光檢查的可靠程度如下：
對於有結核病者，90%可發現，10%未發現。對於無結核病者，90%爲正確，1%不正確。設地區廣大人口中患有結核病者佔 0.1%，若其中任意一人經 X 光檢查有結核病嫌疑，則此人確有結核病的機率爲____。

(16) 宿舍大門在晚上 10 點到 11 點之間上鎖的機率爲 $\frac{1}{2}$。某生的抽屜中有 10 把鑰匙，其中有兩把是大門鑰匙。有一天中午，此生任意抓走 3 把鑰匙外出。請問他在晚上 10 點半回來時，能打開宿舍大門的機率是 ________？

(17) 設每次甲訪問別人家裏而告辭時忘記帶傘的機率爲 $\frac{1}{5}$，某日甲帶傘出去，順次去乙，丙，丁的家訪問，最後回家時發現傘沒有帶回，問此傘遺忘在丙家之機率是________？

(18) 設有甲、乙兩個袋子，甲袋內有一白球、一黑球，乙袋內有兩個白球。
今從甲袋取一球放入乙袋，再從乙袋取一球放入甲袋，然後再由甲袋取一球放入乙袋，最後再由乙袋取一球放入甲袋。試求：
(a)最後甲袋內有一白球一黑球的機率=________。
(b)最後乙袋內有一白球一黑球的機率=________。

進階問題

(19) 有 8 個人(含甲乙兩人)同時乘坐一輛有 4 節車廂的火車，在已知剛好每兩人乘坐一車廂的情形下，求甲乙兩人同坐一車廂的機率？

(20) 設甲袋中有 5 個銀幣、1 個金幣，乙袋中有 3 個銀幣，今自甲袋中任取 4 個硬幣放入乙袋，再由乙袋中任取 5 個硬幣放入甲袋．試求
(a)金幣在乙袋的機率? (b)若金幣在甲袋，則甲取得 4 銀幣的機率?

(21) 一袋中有 6 個紅球，4 個黑球，依次在袋中任取一球，取後不放回，在已知紅球先取完的情形下，求前 6 次取出皆爲紅球的機率=？

綜合練習解答

(1) $\frac{33}{43}$

(2) $\frac{3}{8}$

(3) $\frac{8}{13}$ [提示：依題意求 $P(C\cup D|A)=P(C|A)+P(D|A)-P(C\cap D|A)$]

(4) $\frac{3}{4}$

(5) 11/30

(6) $\frac{3}{19}$

(7) (a) $\frac{32}{81}$　(b) $\frac{3}{4}$　(c) $\frac{224}{495}$　(d) $\frac{3}{4}$

(8) 這是抽籤問題，P（第 3 次白球）＝P（第 1 次白球）＝ $\frac{3}{7}$

(9) $\frac{119}{190}$

(10) (a) $\frac{24}{100}$　(b) $\frac{1}{3}$

(11) 20/21

(12) $\frac{7}{10}$

(13) 0.161(這個機率看起來，好像太低了，不過在沒審判之前，我們假設這名被告無罪的機率是 0.01，在經過審判獲判無罪之後，這個值增加到了 0.161)

(14) $\frac{1}{96}$

(15) $\frac{10}{121}$

(16) $\frac{23}{30}$[提示：正面解法 $(1-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\cdot\frac{C_2^2\cdot C_1^8+C_1^2\cdot C_2^8}{C_3^{10}}=\frac{1}{2}+\frac{8}{30}=\frac{23}{30}$ 。

反面解法 $1-\frac{1}{2}\cdot\frac{C_3^8}{C_3^{10}}=1-\frac{7}{30}=\frac{23}{30}$ 。]

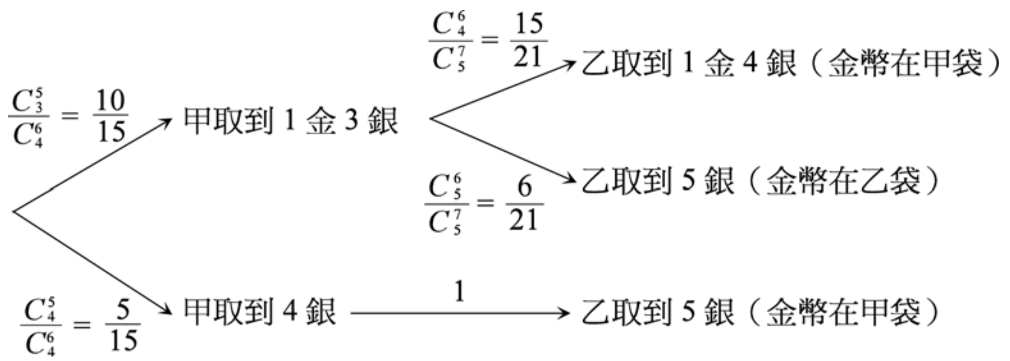
(17) $\dfrac{\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}}=\frac{20}{61}$

(18) (a) $\frac{5}{9}$　(b) $\frac{4}{9}$

(19) $\frac{1}{7}$

(20) (a) $\frac{4}{21}$，(b) $\frac{7}{17}$

[提示：



(a)金幣在乙袋的機率爲$\frac{10}{15}\cdot\frac{6}{21}=\frac{4}{21}$．

(b)所求條件機率爲$\dfrac{\frac{5}{15}\cdot 1}{\frac{10}{15}\cdot\frac{15}{21}+\frac{5}{15}\cdot 1}=\frac{7}{17}$．]

(21)$\frac{1}{84}$ [提示：設 A 代表紅球先取完的情形，B 代表前 6 次取出皆爲紅球的情形

P(A)=$\frac{4}{10}$，P(A∩B)=$\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{10\times9\times8\times7\times6\times5}=\frac{1}{210}$]