定投践行策略的数学分析

版本 2, October 14, 2019

俞一峻
计算及通讯系
开放大学, 米尔顿凯恩斯, 英国
y.yu@open.ac.uk

I. 引言

李笑来在《定投改变命运》 [1] 书里提出定投简单的一招一式: 对合适的投资标的定期买入一定的数额。根据原理，定投有两个成功条件:

条件 1 选中的标的必须能够长期成长：在第三个大周期的最低价位高于第一个大周期的最高价位；

条件 2 标的持有时间必须超过两个大周期。

此外，基于投资人的心理，以下假设也成立:

假设 1 一个大周期包括熊市和牛市两个阶段;

假设 2 熊市的时间比牛市漫长。

虽然选取了股市，比特币和 BOX 交易的历史数据验证这些原理，书中毕竟没有采用数学分析的方法解释为什么通过谨慎选取满足以上条件的标的定投一定会是一个好的投资策略。在同样的前提条件下，本文试图用数学分析的方法比较两种不同的长期定投策略：

策略 1 一把梭 一下子把所有筹码都换成投资标的;

策略 2 分期付款 定投书中建议的，分批多次把筹码逐渐换成投资标的.

II. 定投问题的数学模型

图 1展示了投资标的价格的周期变动曲线。横轴是时间，纵轴是价格。第一个周期起始于价格高点 u_0，然后随着 d_1 漫长的熊市，价格逐渐降到低点 $l_1 < u_0$。随之较短的 i_1 牛市开始，价格回升到更高点 $u_1 > u_0$，完成第一个大周期。第二个大周期价格再次从 u_1 降至 l_2，然后回升到 u_2，依次类推。

根据以上条件和假设，有下列约束:

$$l_i < u_{i-1} < u_i \quad (1)$$
$$l_i < l_{i+1} \quad (2)$$
$$u_i < l_{i+2} \quad (3)$$
$$i_i < d_i \quad (4)$$

不失一般性，我们可以进一步引入一些参数：

$$d_i = \alpha \cdot i_i \quad (5)$$
$$l_{i+2} = \beta \cdot u_i \quad (6)$$
$$u_i = \gamma \cdot u_{i-1} \quad (7)$$
$$l_i = \gamma \cdot l_{i-1} \quad (8)$$

其中 $\alpha > 1, \beta > 1, \gamma > 1$ 分别代表熊牛时间比率，保证价格成长率，以及价格成长率。

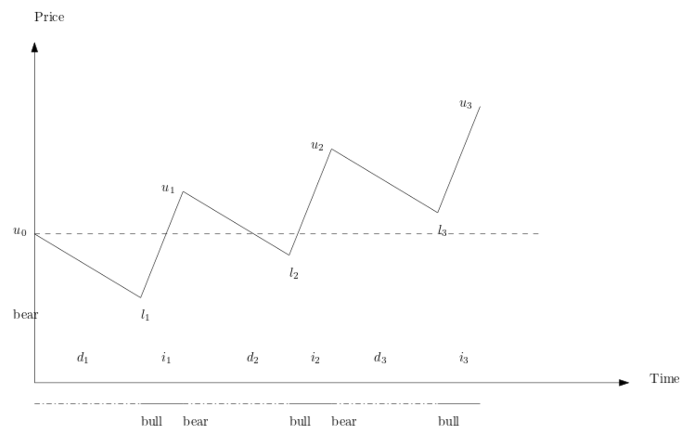

Fig. 1. 投资标的的价格变动曲线

注意这里我们并没有假设这三个参数之间存在任何关系，比如 $\gamma \cdot \gamma = \beta$。只要它们都大于 1，我们就可以比较两种策略的优劣。价格曲线不一定像图 1画出来的那么线性; 但是更复杂的计算也会跟这里的简单模型大同小异。

III. 定投策略比较

定投都至少经历两个以上大周期，投资总额为 X。

A. 一把梭

引理 1. 第 i 个周期 $(i > 0)$ 标的的平均价格 p_i 为数学期望值:

$$\mathbb{E}(p_i) = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma(\alpha+\gamma)}{\beta(1+\alpha)} + 1\right) l_i$$

其中 l_i, α, β, γ 的定义分别由 (5)-(8) 给出。令 $\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma(\alpha+\gamma)}{\beta(1+\alpha)} + 1\right)$, 期望价格跟周期中的最低价格成正比，即 $\mathbb{E}(p_i) = \theta l_i$.

Proof. 假设投资可以在大周期 $d_i + i_i$ 中的任意时刻，那么平均价格就等于曲线下面积除以周期长度。如图 1所示, 这个面积由两个分段梯形组成, 时间跨度分别是 d_i 和 i_i:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(p_i) &= \frac{\frac{(u_{i-1}+l_i)d_i}{2} + \frac{(u_i+l_i)i_i}{2}}{d_i+i_i} \\ &= \frac{u_{i-1}d_i + u_i l_i}{2(d_i+i_i)} + \frac{l_i}{2} \\ &= \frac{(\alpha+\gamma)}{2(1+\alpha)} u_{i-1} + \frac{1}{2} l_i \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma(\alpha+\gamma)}{\beta(1+\alpha)} + 1\right) l_i.\end{aligned}$$

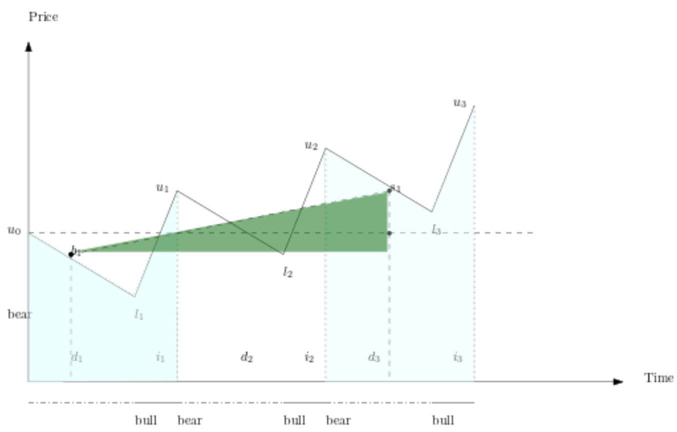

Fig. 2. 一把梭策略的计算

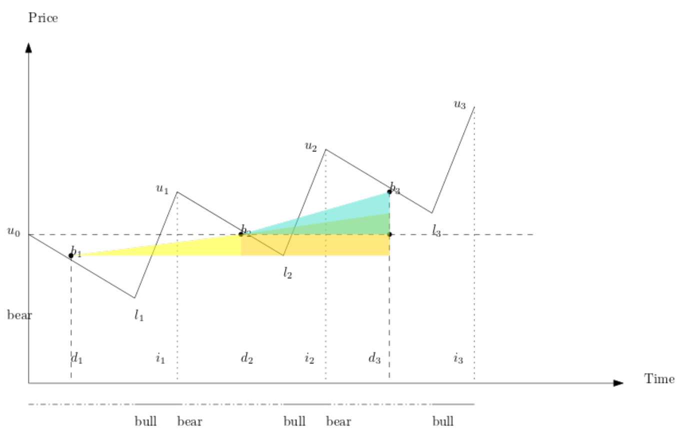

Fig. 3. 分期定投策略的计算

□

推论 1.

$$\frac{\mathbb{E}(p_i)}{\mathbb{E}(p_j)} = \gamma^{i-j}.$$

如果采纳一把梭策略，假设初次买入点可以在第一个大周期的任意位置，最终卖出点可以在最后一个大周期的任意位置。如果有 n 个大周期, b_1 是初始买入价格，那么总的投资数量为 $\frac{X}{b_1}$。图 2展示了买入的成本 X 以及卖出的价格 s_1. 根据引理 1, 一把梭的总利润是阴影部分的三角形面积（图 2）:

$$\mathbb{E}(p_{n+1})\frac{X}{\mathbb{E}(p_1)} - X \quad = \quad (\gamma^n - 1)X.$$

B. 分期定投

为了跟一把梭策略比较，我们这里假设分期定投的总成本金额一样，也是 X, 而分为 n 期买入, 每一次买入的金额是 $\frac{X}{n}$。不失一般性，我们假设 b_i 是第 i 次的买入价格。例如，图 3显示三个买入价格 b_1, b_2 和 b_3。分期定投策略的总利润计算如下：

$$\begin{aligned}(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(p_{n+1})\frac{X}{n\mathbb{E}(p_i)}) - X &= ((\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma^{n+1-i}}{n}) - 1)X \\ &= (\tfrac{\gamma^{n+1}-1}{n(\gamma-1)} - 1)X\end{aligned}$$

比较这两个策略，分期定投的总利润小于一把梭：

$$n\gamma^n > \sum_{i=1}^{n}\gamma^i = \frac{\gamma^{n+1}-1}{\gamma-1}.$$

IV. 概率随机采样

虽然从数学期望看，一把梭比分期定投的利润率高，为什么还推荐分期定投呢？这里有一个没有明确化的隐藏假设。

假设 3 标的价格变动非线性。

参见图 1，熊牛转换明确地按照单调下降（上升）趋势逐渐进行。但是实践中很少会这样。事实上，‘分形性’ 是常态：每个熊/牛市内部还可以递归嵌套更小的熊牛市。

为此，我们需要换个视角考察这两个定投策略。

引理 2. 两个随机变量 x 和 y 分别满足均匀分布 $U[a, b]$ $U[c, d]$, 且 $a < c < b < d$, 那么 $x > y$ 的概率是

$$\frac{(b-c)^2}{2(b-a)(d-c)}$$

Proof. 假设联合分布函数是 $p(x, y)$，且 $a \le x \le b$, $c \le y \le d$.

因为 $a < c < b < d$, 我们有

$$P(x > y) = \int_c^d \int_a^b p(x,y)dxdy = \int_c^b \int_y^b p(x,y)dxdy.$$

x 符合均匀分布, 令

$$\int_y^b p(x,y)dx = \frac{b-y}{(b-a)(d-c)}$$

因此,

$$\begin{aligned}P(x > y) &= \int_c^b \tfrac{b-y}{(b-a)(d-c)}dy \\ &= \tfrac{b(b-c)}{(b-a)(d-c)} - \tfrac{b^2-c^2}{2(b-a)(d-c)} \\ &= \tfrac{(b-c)^2}{2(b-a)(d-c)}\end{aligned}$$

□

我们先考察一把梭，买入价格 p_1 和卖出价格 p_2 分别符合均匀分布 $U(l_1, u_1)$ and $U(l_2, u_2)$，我们有以下推论。

推论 2. 一把梭盈利的概率为

$$1 - P(p_1 > p_2) = 1 - \frac{(u_1 - l_2)^2}{2(u_1 - l_1)(u_2 - l_1)}$$

现在考察分期定投策略，相当于对一个周期内的均匀分布采样 m 次。

引理 3. 假如均匀分布的数学期望值是 $\mu = \frac{u_i + l_i}{2}$, 标准方差是 $\sigma = \frac{u_i - l_i}{\sqrt{12}}$, 那么对均匀分布 $U(l_i, u_i)$ 采样 m 次，得到的概率分布是以下正态分布 $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{m}})$。

Proof. 这是中心极值定理的简单运用。 □

推论 3. 当 m 趋近于无穷大时, 分期定投策略的标准方差趋近于 *0*。

第一个周期采用分期定投策略（正态分布 $N(\frac{l_1+u_1}{2}, 0)$），然后在第二个周期卖出（均匀分布 $U(l_2, u_2)$）的盈利概率计算如下：

$$P(p_1 < p_2) = \Phi(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}) = \Phi(\frac{u_2 - l_1}{u_2 - l_2}\sqrt{3})$$

为了有个直观的比较，我们举个例子。

示例 **1.** 假如标的的第一个周期是在 *10* 元和 *15* 元之间波动，第二个周期在 *12* 元和 *18* 元之间波动，那么分期定投的盈利概率为 $\Phi(\frac{4}{\sqrt{3}}) = 0.989539$, 即 *98.9539%*。反之，一把梭的盈利概率为 *1*-$\frac{9}{32} = 71.875\%$.

从这个例子我们可以看到，在第二个周期卖出，分期定投策略可以比一把梭的盈利更有保证。

当然，如果等到两个大周期之后再卖的话，由于我们的假设条件第三个大周期的最低点高于第一个大周期的最高点，两种定投策略都一定会盈利。

V. 注意事项

以上数学分析基于很多假设，模型比较简化，结论仅供参考。

References

[1] Xiaolai Li. *Changing Your Fate by Regular Investment.* 2019. https://github.com/xiaolai/regular-investing-in-box.