



*Two things fill the mind with ever new and increasing admiration and awe, the more often and steadily we reflect upon them: the starry heavens above me and the moral law within me.*

— Immanuel Kant



### 3. 有心运动

北京大学物理学院 (2022年秋季学期)

主讲人：邵立晶

Theoretical Mechanics

# 本章内容

1 两体问题

2 有心运动的轨道微分方程

- 有心运动中质点的广义坐标和守恒量
- 运动方程
- 轨道微分方程

3 平方反比力作用下的轨道

- 轨道方程
- 轨道形状与物理量之间的关系
- 人造星体的运动
- 潮汐现象

4 圆轨道的稳定性

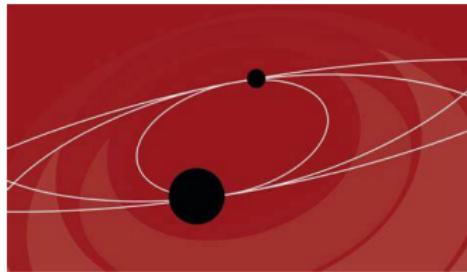
5  $\alpha$  粒子的散射

- 轨道方程
- 散射角
- 散射截面

# 1. 两体问题

# 两体问题

- **两体问题** 两个质点构成的孤立系统，在其内力作用下的运动
- **例** 两个相距很远的星体在它们之间的万有引力作用下的运动
- 两体运动是一个没有约束的运动，因此可以看作**理想、完整、稳定约束**的特例
- 故有  $s = d = 6$



# 两体问题

- 取质心的坐标  $\mathbf{r}_c$  和相对运动坐标  $\mathbf{r}$  为广义坐标

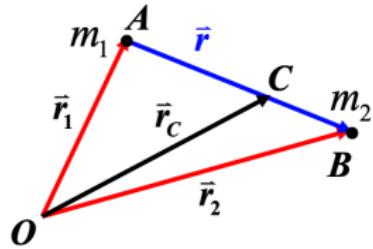
$$\mathbf{r}_c = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{M}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

其中  $M = m_1 + m_2$

- 折合（约化）质量

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$



# 两体问题

## ■ 动能

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{r}}_c^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2$$

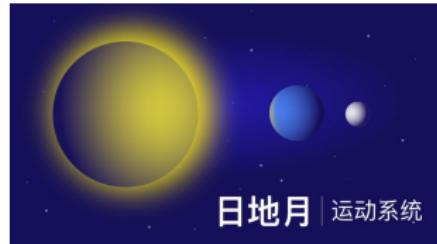
## ■ 拉格朗日量

$$L_t = T - U = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{r}}_c^2 + \left[ \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \right] = L_c + L$$

- 质心运动和相对运动的自由度在拉氏量中是分开的
- 所以，这两部分的运动方程是分离的，即没有耦合

# 两体问题

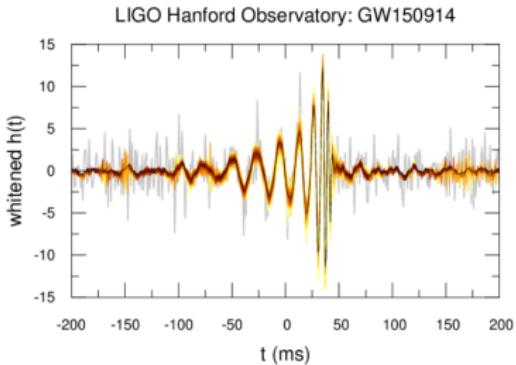
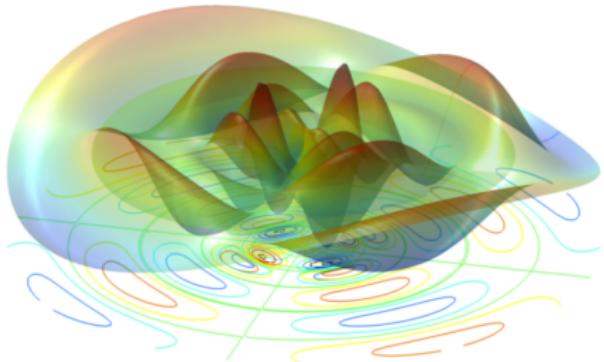
- 由于拉氏量不显含质心坐标，所以  $\mathbf{p}_c = M\dot{\mathbf{r}}_c = \text{const}$ ，即质心动量是守恒量
- 从拉氏量看，相对运动的矢径的变化规律与一个质量为  $\mu$  的质点在势场  $U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$  中运动时矢径的变化规律完全相同
- 但注意两体运动时，相对运动矢径  $\mathbf{r}$  的起点（即  $m_1$  所在的位置）是运动的
  - 当  $m_1 \gg m_2$  时， $m_1$  可以近似看作不动





# 两体问题（引力）

- 在牛顿引力中，两体问题是解析可解的（也就是这章要学习的主要内容）
- 在广义相对论中，两体问题尚无解析解
- 广义相对论中两体绕转问题的第一个完整解来自于数值相对论（2005年）



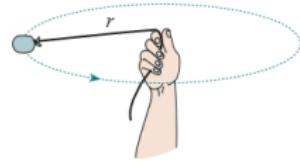
## 2. 有心运动的轨道微分方程

## 2.1 有心运动中质点的广义坐标和守恒量

- 一个质点在势场  $V(\mathbf{r})$  中运动,  $\mathbf{r}$  的起点为 O

$$\mathbf{F} = -\nabla V = - \left( \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{e}}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) = -\hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial V}{\partial r}$$

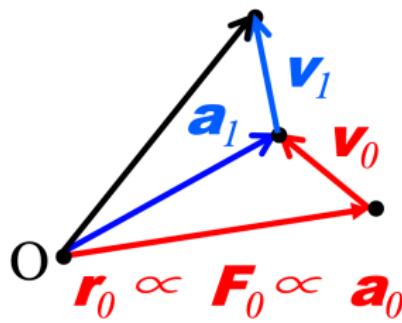
- 即, 在势场  $V(\mathbf{r})$  中受到的作用力始终沿矢径方向
- 有心力** 始终沿矢径方向 (或始终通过某一固定中心) 的作用力
  - 这里的 O 点称为 **力心**
- 质点在有心力场中必定限于某一固定平面内运动



## 2.1 有心运动中质点的广义坐标和守恒量

### ■ 质点在有心力场中必定限于某一固定平面内运动

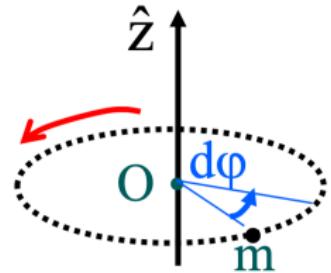
- 初始时刻  $t_0$  质点在  $\mathbf{r}_0$  处，初速度为  $\mathbf{v}_0$
- $\mathbf{r}_0$  和  $\mathbf{v}_0$  组成一个平面  $S$
- 下一个时刻  $t_1$  的速度  $\mathbf{v}_1$ （由  $\mathbf{v}_0$ 、 $\mathbf{a}_0$  确定）一定在  $S$  内
- 这时质点的位置矢径  $\mathbf{r}_1$  ( $\propto \mathbf{a}_1$ )，由  $\mathbf{r}_0$ 、 $\mathbf{v}_0$  确定，也在  $S$  内
- 因此可知，质点将永远在固定平面  $S$  内运动



## 2.1 有心运动中质点的广义坐标和守恒量

- 质点在有心力场中运动应该有三个广义坐标，即  $s = 3$
- 但由于在  $S$  内运动，可以只选 2 个广义坐标： $s = 2$
- 两个广义坐标可以取平面极坐标，即  $\rho, \varphi$
- 这时

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) - V(\rho)$$



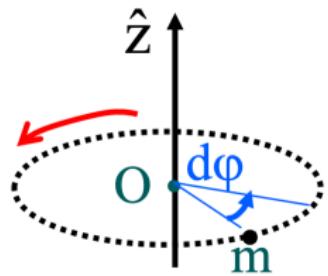
## 2.1 有心运动中质点的广义坐标和守恒量

- 由  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0$  得

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2 \dot{\varphi} = \text{const}$$

其中,  $p_\varphi$  就是质点的角动量在转动轴  $z$  方向的投影

- **量子力学** 课程中的一个要点、也是难点
- 角动量的参考点可以在  $z$  轴上任取, 这里取**力心**  $O$  作参考点
- 这样角动量矢量本身就在  $z$  方向, 有  $p_\varphi = J$   
(回忆:  $p_\varphi = \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}$ )



## 2.1 有心运动中质点的广义坐标和守恒量

- 如果广义坐标取为  $x, y$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

- 这时体系没有循环坐标，也就没有守恒的广义动量
- 由此可见，广义动量积分是与广义坐标的选取有关
  - 选取“好”的坐标使问题简化  $\Leftarrow$  具体问题，具体分析



## 2.1 有心运动中质点的广义坐标和守恒量

- 在极坐标中，由广义动量守恒可得

$$\rho^2 \dot{\varphi} = \text{const} \equiv C$$

其中  $p_\varphi = J = mC$

- 因为

$$dA = \frac{1}{2}\rho(\rho d\varphi) = \frac{1}{2}\rho^2 d\varphi$$

所以

$$\rho^2 \dot{\varphi} = 2 \frac{dA}{dt}$$

即，两倍的矢径扫过面积的速度（回忆：开普勒第二定律）

## 2.1 有心运动中质点的广义坐标和守恒量

■ 变换方程  $x = \rho \cos \varphi$ 、 $y = \rho \sin \varphi$  不显含  $t$ ，并且

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

■ 所以有<sup>1</sup>

$$T + V = E = \text{const}$$

即

$$\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) + V(\rho) = E = \text{const}$$



<sup>1</sup> 回忆《拉格朗日方程》章节的“初积分”内容。

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) - V(\rho)$$

## 2.2 运动方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = \frac{\partial L}{\partial \rho} \Rightarrow m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = -\frac{dV}{d\rho} \quad (= F_\rho)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \Rightarrow m(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) = 0, \quad (\mathbf{j} = \mathbf{N} = 0)$$

■ 或者，2个初积分（循环坐标  $\varphi$  和角动量守恒）

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) + V(\rho) = E \\ m\rho^2\dot{\varphi} = J \end{cases}$$

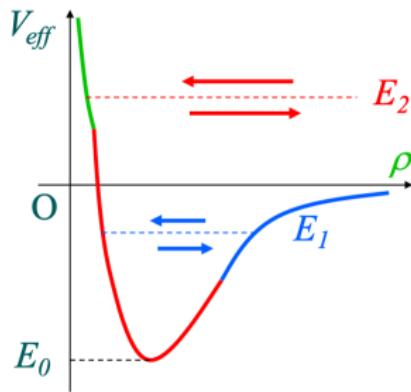
■ 初积分对  $t$  求导可得上述 2 个运动方程

■ 反之，对 2 个运动方程积分一次，即得 2 个初积分<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup> 生命在于折腾。

## 2.2 运动方程

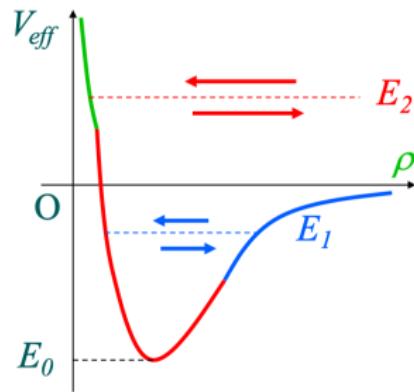


■ 由2个初积分消去  $\dot{\varphi}$ , 得

$$\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{J^2}{2mr^2} + V = E$$

■ 这是一个关于  $\rho$  的方程, 可以定性说明质点运动轨道的性质

## 2.2 运动方程



■ 设  $V = -k/\rho$ , 且  $k > 0$

■ 引入有效势

$$V_{\text{eff}} = \frac{j^2}{2m\rho^2} + V$$

■  $\rho \rightarrow 0, V_{\text{eff}} \rightarrow \infty; \quad \rho \rightarrow \infty, V_{\text{eff}} \rightarrow 0^-$

■ 并且,  $dV_{\text{eff}}/d\rho$  在 0 到  $\infty$  之间只有一个零点

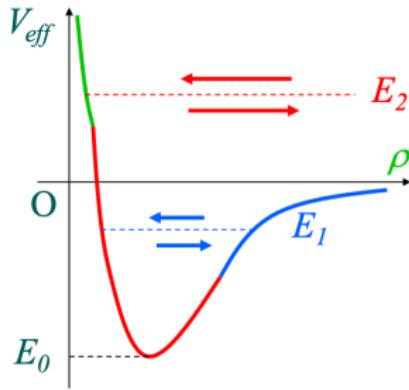
## 2.2 运动方程

1  $E$  不会小于  $V_{\text{eff}}$ , 所以  $E$  的最小值为  $E_0$

⇒ 这时  $\rho$  为常量, 即质点在圆周上运动

2 当  $E$  为  $E_1$  时, 质点到  $O$  的距离  $\rho$  在最大值和最小值之间变化

3 当  $E$  为  $E_2$  时, 质点如果从无穷远来, 将回到无穷远去



## 2.3 轨道微分方程

■ 这里我们不求  $\rho(t)$  和  $\varphi(t)$  随时间的变化关系，而求  $\rho$  随  $\varphi$  的变化关系，这是因为

1 求出  $\rho$  随  $\varphi$  的变化关系，就知道了运动轨道

2 由于  $\rho^2\dot{\varphi} = C$ ，有  $\rho^2(\varphi)d\varphi = Cdt$ ；积分便得  $\varphi$  随  $t$  的变化关系

■ 计算

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi} \frac{C}{\rho^2} = -C \frac{d(1/\rho)}{d\varphi}$$

令  $u = 1/\rho$ ，所以  $\dot{\rho} = -C \frac{du}{d\varphi}$ ；同理，

$$\ddot{\rho} = \frac{d\dot{\rho}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -C \frac{d^2u}{d\varphi^2} \frac{C}{\rho^2} = -C^2 u^2 \frac{d^2u}{d\varphi^2}$$

## 2.3 轨道微分方程

$$\rho^2 \dot{\varphi} = C, \quad \dot{\rho} = -C \frac{du}{d\varphi}, \quad \ddot{\rho} = -C^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\varphi^2}$$

### ■ 运动方程 (拉格朗日方程)

$$m(\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) = -\frac{dV}{d\rho}, \quad m(\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi}) = 0$$

### ■ 能量守恒方程 (初积分)

$$\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{J^2}{2m\rho^2} + V = E$$

■ 代入  $\rho$  的运动方程或能量初积分，得

### 轨道微分方程 (Binet 公式)

$$-mC^2 u^2 \left( \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right) = F \left( \frac{1}{u} \right)$$

$$\frac{1}{2}mC^2 \left[ \left( \frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right] + V \left( \frac{1}{u} \right) = E$$

### 3. 平方反比力作用下的轨道

# 3.1 轨道方程



## ■ 对万有引力

$$V(\rho) = -\frac{GMm}{\rho} = -GMmu$$

其中， $G$  为万有引力常数， $M$  为力心处的星体的质量，通常  
 $M \gg m$

## ■ 由第二种形式的 Binet 公式

$$\frac{1}{2}mC^2 \left[ \left( \frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right] - GMmu = E$$

得

$$\left( \frac{du}{d\varphi} \right)^2 = A^2 - (B - u)^2$$

## 3.1 轨道方程

■ 其中

$$A \equiv \left( \frac{2E}{mC^2} + \frac{G^2 M^2}{C^4} \right)^{1/2} \geq 0$$
$$B \equiv \frac{GM}{C^2} > 0$$

■ 所以有

$$\frac{du}{\sqrt{A^2 - (B - u)^2}} = \pm d\varphi$$

■ 积分得

$$\cos^{-1} \frac{u - B}{A} = \pm \varphi + \alpha$$

$\alpha$  为任意常数

# 3.1 轨道方程

■ 得到<sup>3</sup>

$$u = B + A \cos(\varphi \pm \alpha)$$

$$\rho = \frac{1/B}{1 + A/B \cos(\varphi - \beta)} = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \beta)}$$

■ 圆锥曲线方程

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \beta)}$$



<sup>3</sup> 其中，初始角度  $\pm \alpha$  可以写为  $-\beta$ ，因为它只是个积分常数，由初条件决定罢了。

同理， $e$  总是可以取为 **正值**，因为如果是负值的话，做变换  $\beta \rightarrow \beta + \pi$  罢了。

### 3.1 轨道方程

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \beta)}$$

- 这里  $\beta$  为转角，与极轴的方向有关，与轨道的形状无关

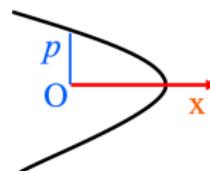
$$p = \frac{1}{B} = \frac{C^2}{GM} > 0 \quad \text{为半正交弦}$$

$$e = \frac{A}{B} = \sqrt{1 + \frac{2EC^2}{G^2 M^2 m}} \quad \text{为偏心率 (eccentricity)}$$

- 对确定的体系 ( $M$ 、 $m$ )， $p$ 、 $e$  依赖  $C$ 、 $E$ ，即初始条件
- 反解，得

$$C = \sqrt{GMp}$$

$$E = \frac{G^2 M^2 m}{2C^2} (e^2 - 1) = \frac{GMm}{2p} (e^2 - 1)$$



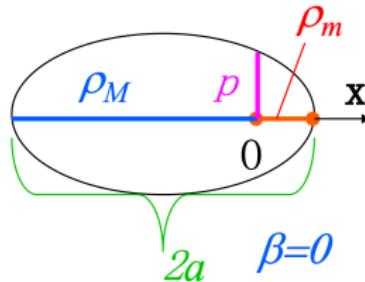
## 3.2 轨道形状与物理量之间的关系

1

椭圆

$$-\frac{G^2 M^2 m}{2C^2} \leq E < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq e < 1$$

- 当能量满足上述关系时，轨道为 椭圆
- 取等号时， $e = 0$ ，轨道为椭圆中的特殊情形，即圆
- 在椭圆的 5 个几何参量  $\{p, e, a, \rho_m, \rho_M\}$  中只有 2 个是独立的
- 其中， $a, \rho_m, \rho_M$  分别为椭圆的长半轴、近心点、远心点



## 3.2 轨道形状与物理量之间的关系

■ 由  $\rho = \frac{p}{1+e\cos\varphi}$  得

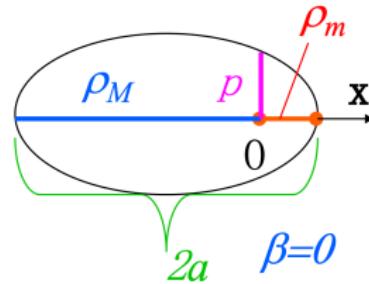
$$\rho_m = \frac{p}{1+e}$$

$$\rho_M = \frac{p}{1-e}$$

$$a = \frac{1}{2}(\rho_m + \rho_M) = \frac{p}{1-e^2}$$

$$E = \frac{GMm}{2p} (e^2 - 1) = -\frac{GMm}{2a} \propto -\frac{1}{2a}$$

■ 由上述关系得， $a$  越大、能量  $E$  越大



## 3.2 轨道形状与物理量之间的关系

### ■ 贝特朗定理 轨道的闭合性 $\Leftrightarrow$ 势能 $\propto 1/r$ 或 $\propto r^2$

- 比一般的有心势具有更高的对称性
- 该对称性由势能的特殊形式造成  $\Rightarrow$  动力学对称性
- 倘若势能不满足  $\propto 1/r$  或  $\propto r^2$ , 将会产生轨道 **进动** 行为<sup>4</sup>
- 在势  $V(r) = \alpha/r$  下, 系统具有 **守恒量**

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} + m\alpha \frac{\mathbf{r}}{r}$$

称为 **拉普拉斯-龙格-楞次矢量** (Laplace-Runge-Lenz vector)

<sup>4</sup> 关于进动的计算, 有兴趣的同学可以参考刘川《理论力学》例题 3.3 和第 17 节。

## 3.2 轨道形状与物理量之间的关系

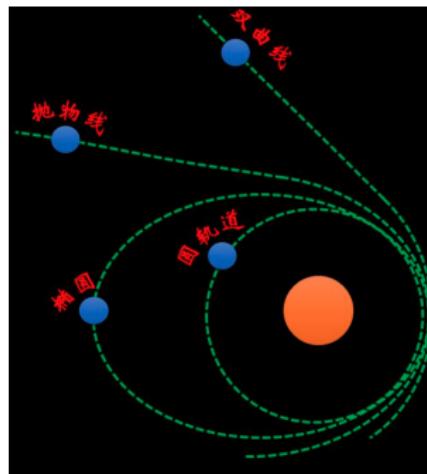
■ 证明

$$\begin{aligned}& \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) \\&= \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L} \quad (\text{因为 } \mathbf{L} \text{ 是守恒量}) \\&= \frac{m\alpha}{r^3} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})] \quad (\text{利用了 } \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} = (\alpha/r^3) \mathbf{r}) \\&= \frac{m\alpha}{r^3} [\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - r^2 \dot{\mathbf{r}}] \\&= -m\alpha \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (\text{利用了 } \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = r\dot{r})\end{aligned}$$

■ 有时，人们也常定义椭率矢量  $\mathbf{e} \equiv e\hat{\mathbf{M}}$ ，其中  $\hat{\mathbf{M}}$  为  $\mathbf{M}$  方向的单位矢量

## 3.2 轨道形状与物理量之间的关系

- 2 当  $E = 0$  时,  $e = 1$ , 轨道为 **抛物线**
- 3 当  $E > 0$  时,  $e > 1$ , 轨道为 **双曲线** 的一支<sup>5</sup>



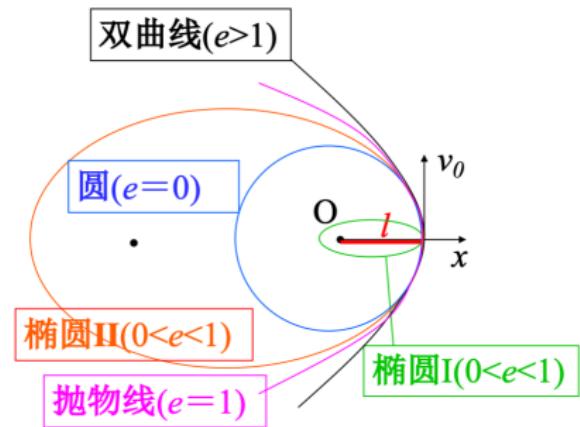
<sup>5</sup> 此时相对于椭圆, 数学公式中的某一种参数化方式常常需要做以下替换:

$\sin \rightarrow \sinh$ ,  $\cos \rightarrow \cosh$ ; 形式上与椭圆情况极为相似。此处不再累述。

## 3.2 轨道形状与物理量之间的关系

- 初速度与轨道图形 从距力心  $O$  为  $\ell$  处, 以垂直于  $x$  轴的初速度  $v_0$  发射一质点

- 当初速度很小时, 形成椭圆
- 速度大到某一值时, 形成圆
- 速度再增加, 又会形成椭圆
- 再增加, 形成抛物线
- 然后形成双曲线



### 3.3 人造星体的运动

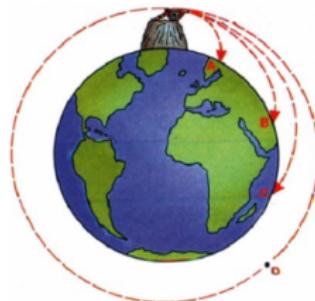
1

第一宇宙速度（环绕速度） $v_1$

忽略空气的阻力，在地球表面附近射出一物体，使其不落回地面，物体射出的最小初速度

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}} = \sqrt{R_{\oplus}g}$$

- 其中， $M_{\oplus}$ 、 $R_{\oplus}$ 、 $g$  分别为地球的质量、地球的半径、地球表面附近的重力加速度
- 初速度应在水平方向



### 3.3 人造星体的运动

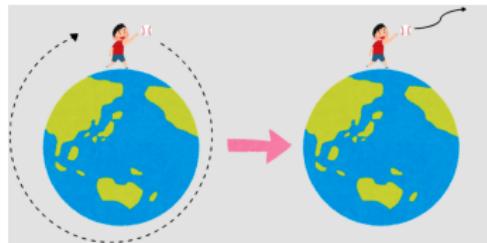
2

第二宇宙速度（逃逸速度） $v_2$

忽略空气的阻力，在地球表面附近射出一物体，使其完全离开地球，物体射出的最小初速度

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}} = \sqrt{2}v_1$$

- 这里完全离开指能相距无穷远
- 初速度可沿向上的  $2\pi$  立体角



### 3.3 人造星体的运动

3

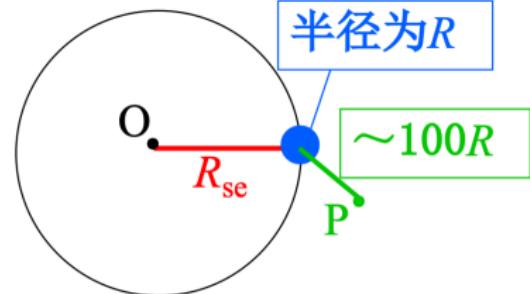
第三宇宙速度（在地球表面逃逸太阳系的速度） $v_3$  忽略空气

的阻力，在地球表面附近射出一物体，使其完全离开太阳系，物体射出的最小初速度

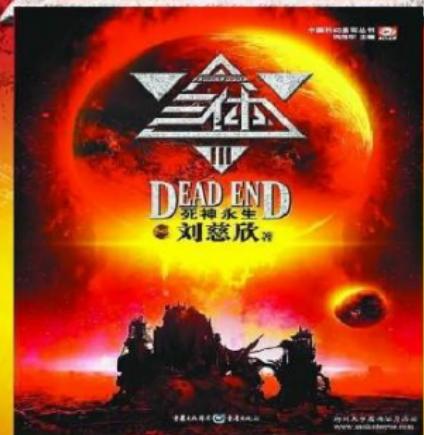
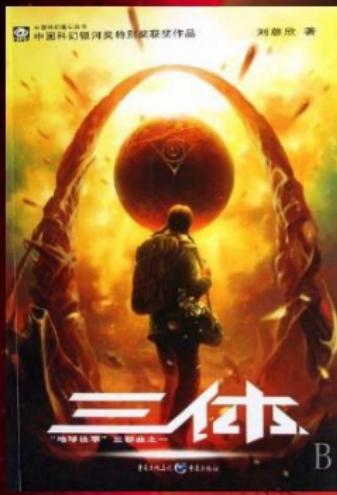
- 由于讨论的物体即要脱离地球，又要脱离太阳，所以实际上是一个三体问题
- 由于本问题的特殊情况，这里的三体问题可以化为 2 个 两体问题 处理<sup>6</sup>

$$R_{\oplus} \sim 6.4 \times 10^6 \text{ m}$$

$$R_{\odot\oplus} \sim 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$$



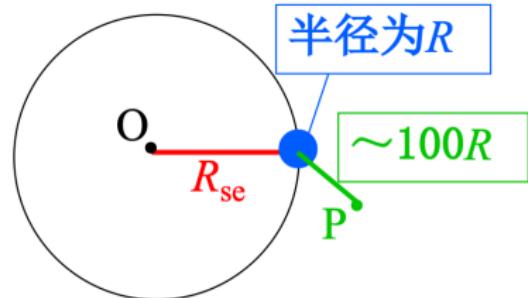
<sup>6</sup> 其中  $R_{\oplus}$  为图中的  $R$ ,  $R_{\odot\oplus}$  为图中的  $R_{se}$ 。



### 3.3 人造星体的运动

■ 脱离太阳系的过程可以分解为 **2个** 两体问题

- 1 从地球表面到  $P$ : 在这个过程中, 物体到太阳的距离变化不到  $R_{\odot\oplus}$  的  $1/200$ , 因此, 太阳的作用可以忽略
- 2 从  $P$  到无穷远: 在  $P$  点, 物体与地球的相互作用势能只有在表面时的  $1/100$ , 因此, 地球对物体的作用已经可以忽略了

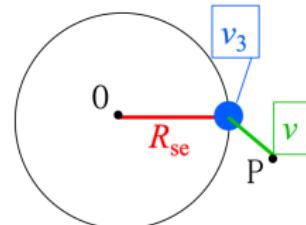


### 3.3 人造星体的运动

- 在地球参考系，以第三宇宙速度  $v_3$  发射物体到  $P$  点，机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_3^2 - \frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}} = \frac{1}{2}mv^2$$

即  $v_3^2 = v^2 + \frac{2GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}$



- 太阳参考系中，在地球的环绕轨道上（不考虑地球的作用），发射一物体脱离太阳，需要初速度  $V_2$ <sup>7</sup>

$$V_2 = \sqrt{\frac{2GM_{\odot}}{R_{\odot\oplus}}} = \sqrt{2}V_1$$

这里， $M_{\odot}$  为太阳的质量， $V_1$  为在地球的环绕轨道处，物体绕太阳的环绕速度，也就是地球绕太阳的运动速度

<sup>7</sup>计算方法与地球的第二宇宙速度一致。

### 3.3 人造星体的运动

- 要求  $v_3$  是最小值，即  $v$  是最小值
- $v$  是对地球的， $V_1$  是地球对太阳的， $v$  加  $V_1$  达到脱离太阳的速度  $V_2$
- 要使  $v$  最小，需要这 3 个矢量同向，即： $V_2 = V_1 + v$
- 所以

$$v = (\sqrt{2} - 1) V_1$$

$$v_3 = \sqrt{v_2^2 + v^2} = \sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{R_{\oplus}} + (\sqrt{2} - 1)^2 \frac{GM_{\odot}}{R_{\odot\oplus}}} = 16.7 \text{ km s}^{-1}$$

发射方向应使  $v$  与  $V_1$  同向

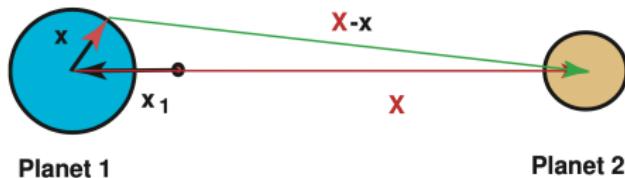
## 3.4 潮汐

- 引力是种潮汐力<sup>8</sup>
- 考虑圆轨道运动的两个星体

$$\Omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{R^3}$$

- 在随着星体转动的参考系（非惯性系）里，会有额外的离心势

$$\Phi(\mathbf{x}) = -\frac{Gm_1}{r} - \frac{Gm_2}{|\mathbf{X} - \mathbf{x}|} - \frac{1}{2}\Omega^2(\mathbf{x} + \mathbf{x}_1)^2$$



<sup>8</sup>这句话非常重要，但暂时听不太懂的话，也没有关系。

## 3.4 潮汐

■ 记  $R = |\mathbf{X}|$ , 利用  $|\mathbf{x}| \ll R$ ,

$$\frac{1}{|\mathbf{X} - \mathbf{x}|} \simeq \frac{1}{R} \left[ 1 + \frac{\hat{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{x}}{R} - \frac{\mathbf{x}^2}{2R^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{\hat{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{x}}{R} \right)^2 + \dots \right]$$

■ 代入势能表达式, 整理得到

$$\Phi(\mathbf{x}) = -\frac{Gm_1}{r} - \frac{Gm_2}{R} - \frac{1}{2}\Omega^2 (\mathbf{x}^2 + \mathbf{x}_1^2) + \frac{Gm_2 \mathbf{x}^2}{2R^3} - \frac{3}{2} \frac{Gm_2}{R} \left( \frac{\hat{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{x}}{R} \right)^2$$

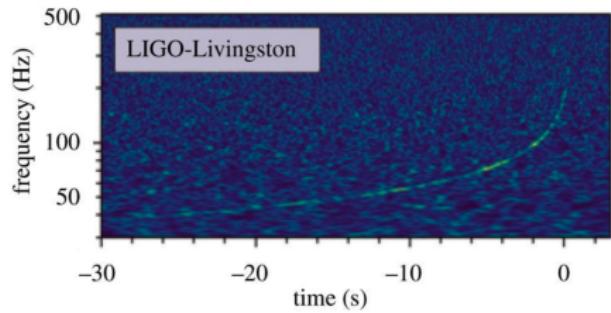
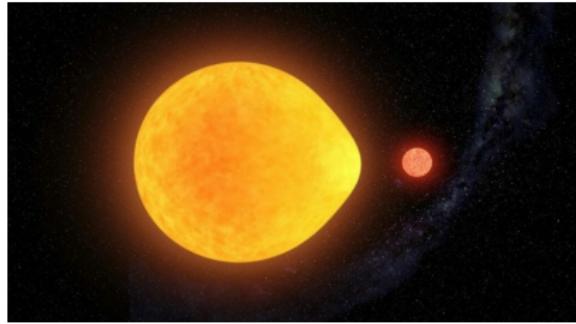
■ 其中最后一项依赖于  $\mathbf{x}$  的具体位置, 当其与  $\mathbf{X}$  平行或反平行时  
势能最低  $\Rightarrow$  对应的力称为引潮力

## 3.4 潮汐



■ 美 有多种欣赏方式

- 地球上的潮汐现象
- 星球“吸积”现象
- 双中子星并合的引力波



## 4. 圆轨道的稳定性

# 圆轨道的稳定性

- 一个质点做圆周运动,  $\rho = a = \text{const}$
- 某一时刻, 质点受到一个微扰, 使  $\rho = a + x$  ( $x \ll a$ ) , 但  $C, m$  始终不变
- 径向的运动方程为

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) = F(\rho)$$

并且  $\dot{\phi} = C/\rho^2$ ; 所以

$$m\ddot{\rho} - \frac{mC^2}{\rho^3} = F(\rho)$$

# 圆轨道的稳定性

- 对半径为  $a$  的圆轨道,  $-\frac{mC^2}{a^3} = F(a)$

- 半径变化后,

$$m\ddot{x} - \frac{mC^2}{(a+x)^3} = F(a+x)$$

- 对小量展开,

$$m\ddot{x} - \frac{mC^2}{a^3} \left( 1 - 3\frac{x}{a} + \dots \right) = F(a) + F'(a)x + \dots$$

得到

$$\ddot{x} - \frac{1}{m} \left[ \frac{3}{a} F(a) + F'(a) \right] x \cong 0$$

记为  $\ddot{x} - kx \cong 0$

# 圆轨道的稳定性

■  $\ddot{x} - kx \cong 0$  中，令  $\omega \equiv \sqrt{|k|}$  ( $\geq 0$ )

■ 稳定与否由  $k$  确定

■ 如果  $k > 0$

$$x = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}, \quad (A, B \text{ 为任意常数})$$

这里  $Ae^{\omega t}$  会使  $x$  的值不满足  $x \ll a$  的要求，这对应圆轨道的不稳定情形

■ 如果  $k < 0$

$$x = D \cos(\omega t + \alpha), \quad (D, \alpha \text{ 为任意常数})$$

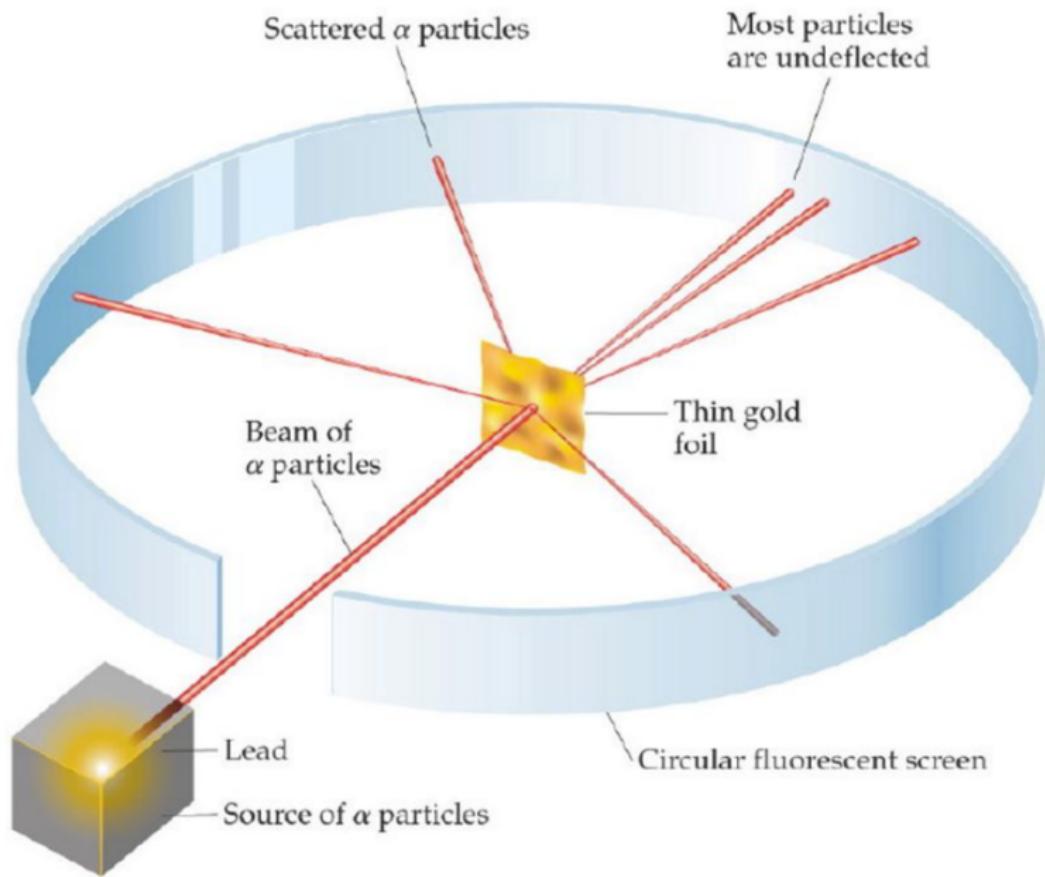
这会使质点在圆轨道附近做微小振动，对应圆轨道的稳定情形

# 圆轨道的稳定性

$$\frac{3}{a}F(a) + F'(a) \left\{ \begin{array}{ll} < & \text{稳定} \\ > & \text{不稳定} \\ = & \text{需要根据展开式中的 } x^2 \text{ 项判断} \end{array} \right. 0$$



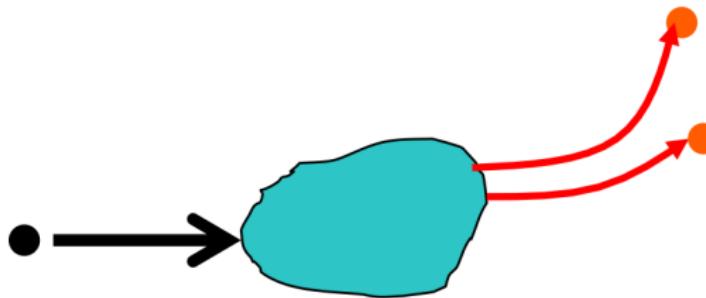
## 5. $\alpha$ 粒子的散射



Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

## 5.1 轨道方程

- 我们通过宏观仪器观测宏观体系的运动状况和性质
- 对微观体系，通过被粒子打击并观测射出的粒子来了解其性质
- 可以先假定已知微观体系性质，再看射出的粒子的运动状况与假定是否相符
- 这里，仅限于讨论入射粒子和出射粒子相同，并且两者在与体系相距无穷远时，动能相等的情形  $\Rightarrow$  弹性散射



# 5.1 轨道方程

■ 以  $\alpha$  粒子被金核散射为例

- $\alpha$  粒子就是氦 ( ${}^4\text{He}$ ) 原子核,  $q = 2e > 0$ , 质量  $m$  约为 4 倍的质子质量
- 金原子核的电量  $Q = 79e > 0$ , 由于很多金原子整体固定在实验室, 因此, 质量可以当作无限大<sup>9</sup>
- 前面我们得到, 当  $V = -\frac{GMm}{r}$  时, 有

$$\rho = \frac{1/B}{1 + A/B \cos(\varphi - \beta)}$$

$$A \equiv \left( \frac{2E}{mC^2} + \frac{G^2 M^2}{C^4} \right)^{1/2}, \quad B \equiv \frac{GM}{C^2}$$

---

<sup>9</sup> 所以, 这是一个被简化的“单体”问题; “两体”问题的讨论见 Landau & Lifshitz, Mechanics (3rd ed), 1987

## 5.1 轨道方程

■ 现在,  $V = \frac{k}{\rho} > 0$ ,  $k = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}$

■ 这就相当于做替换

$$GM \Rightarrow -\frac{k}{m}$$

■ 所以, 我们有

$$A \equiv \left( \frac{2E}{mC^2} + \frac{k^2}{m^2C^4} \right)^{1/2} > 0$$

$$B \equiv -\frac{k}{mC^2} < 0$$

# 5.1 轨道方程

■ 令

$$p = \left| \frac{1}{B} \right| = \frac{mC^2}{k}$$

$$e = \left| \frac{A}{B} \right| = \left( 1 + \frac{2EC^2 m}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} > 1$$

■ 轨道方程为

$$\rho = \frac{-p}{1 - e \cos(\varphi - \beta)}$$

■ 这类方程的特点是： $e$  的前面的负号可以吸收到  $\beta$  中去

■ 即， $\beta \rightarrow \beta + \pi$

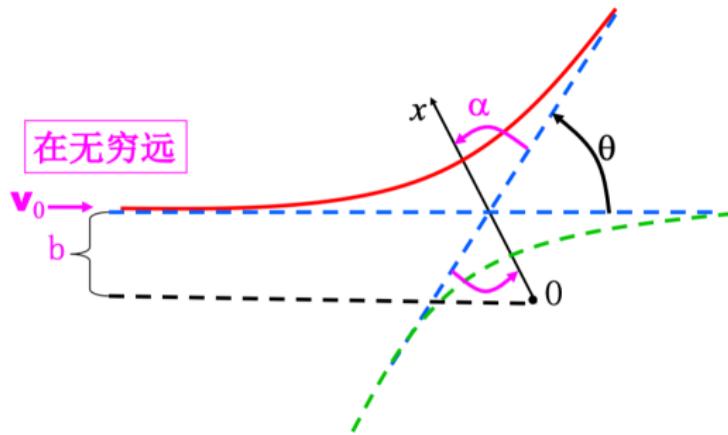
■  $p$  前面取正号或负号，曲线是形状完全相同的双曲线<sup>10</sup>

---

<sup>10</sup> 双曲线的两支

# 5.1 轨道方程

- 这也同时说明，只要吸引势和排斥势的绝对值相同， $C$ 、 $E$ 、 $m$  相同，轨道方程是相同的
  - 吸引势： $E > 0$  时为双曲线
  - 排斥势：双曲线

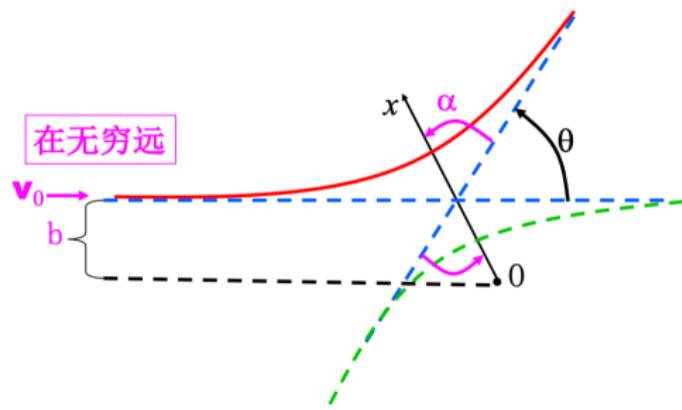


## 5.2 散射角

- 设粒子  $q$  以初速度  $v_0$  从无穷远、**碰撞距离  $b$**  射向力心处的质点  $Q$ ，出射方向与入射方向的夹角  $\theta$  称为**散射角**
- 轨道方程为

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$$

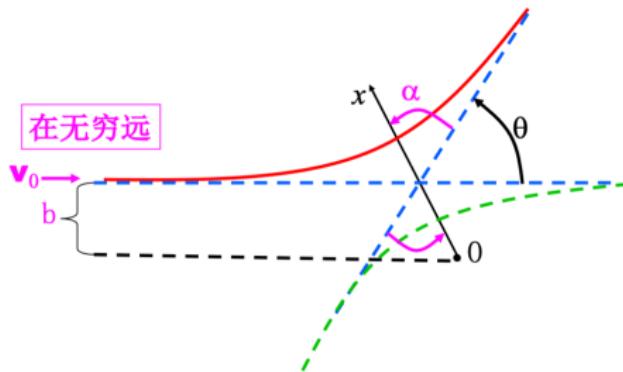
排斥力这一支的  $\rho$  为负



## 5.2 散射角

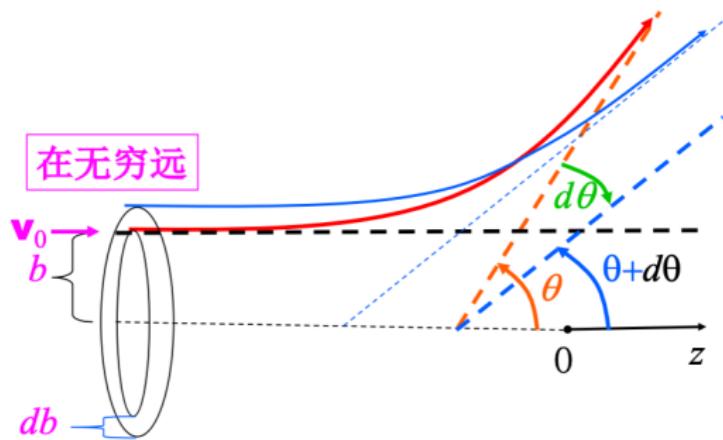
- 由  $1 + e \cos \varphi = 0$ , 可以求出渐近线的位置对应的角度为  $\pi - \alpha$  和  $\pi + \alpha$
- 其中  $\alpha = \cos^{-1}(1/e)$ ,  $\theta = \pi - 2\alpha$
- 所以,

$$\cot \frac{\theta}{2} = \cot \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \tan \alpha = \sqrt{e^2 - 1}$$



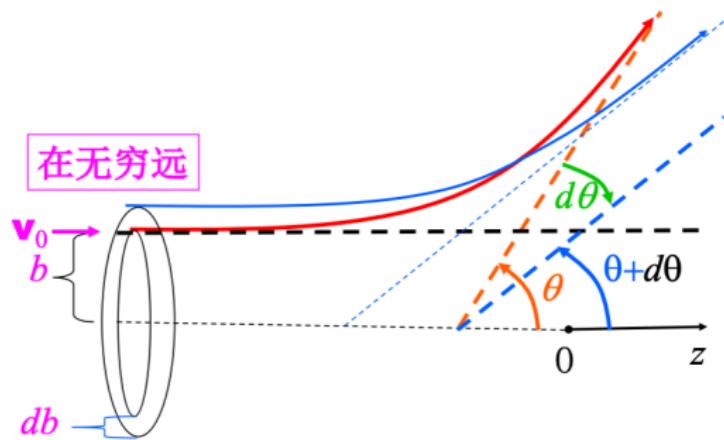
## 5.3 散射截面

- 设  $m$ 、 $q$ 、 $Q$  已知， $v_0 = \text{const}$ ，则  $b \uparrow \Rightarrow C \uparrow \Rightarrow e \uparrow \Rightarrow \theta \downarrow$
- 所以，当  $db > 0$  时， $d\theta < 0$



## 5.3 散射截面

- 考虑大量的均匀分布的相同粒子，在无穷远处，以同样的初速度  $v_0$ 、不同的碰撞距离  $b$  射向力心方向
- 引入粒子的 **入射强度  $I$**  在入射方无穷远处，单位时间通过垂直于入射初速度  $v_0$  的单位面积的粒子数



## 5.3 散射截面

- 单位时间，通过上图环形横截面的粒子数为

$$dN = I dA = I(2\pi b db)$$

- 在出射方，与  $d\theta$  对应的立体角元为  $d\Omega = 2\pi \sin \theta |d\theta|$
- 引入微分散射截面

$$\sigma \equiv \frac{dN}{d\Omega} = \frac{I dA}{I d\Omega} = \frac{2\pi b db}{2\pi \sin \theta |d\theta|} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|$$

- 微分散射截面的几何意义：在  $\theta$  角处，单位立体角对应的无穷远处入射方垂直于入射初速度的横截面积

## 5.3 散射截面

■  $\sigma(\theta)$  是一个可以 测量 的物理量

■ 由前面得,

$$\cot \frac{\theta}{2} = \frac{1}{k} \sqrt{2EmC}$$

$$E = \frac{1}{2} mv_0^2$$

$$C = bv_0$$

■ 所以

$$\cot \frac{\theta}{2} = \frac{1}{k} (mv_0)(bv_0) = \frac{1}{k} 2Eb$$

## 5.3 散射截面

■ 由

$$d \cot \frac{\theta}{2} = -\frac{d\theta}{2 \sin^2(\theta/2)} = \frac{1}{k} 2E db$$

得到

$$\left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{k}{4E} \frac{1}{\sin^2(\theta/2)}$$

■ 所以有

### Rutherford 散射公式

$$\sigma(\theta) = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{k \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)/2E}{\sin \theta} \frac{k}{4E} \frac{1}{\sin^2(\theta/2)} = \left( \frac{k}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

## 5.3 散射截面

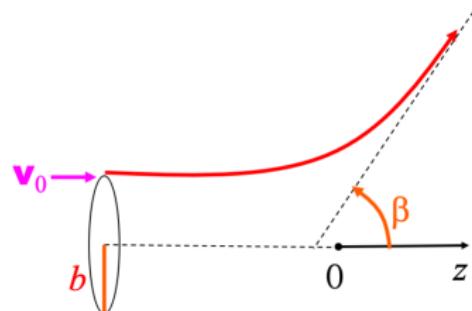
Rutherford 散射公式

$$\sigma(\theta) = \left( \frac{k}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

■ 总散射截面为

$$\sigma_t = \int_{4\pi} \sigma d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\theta) \sin \theta d\theta$$

## 5.3 散射截面

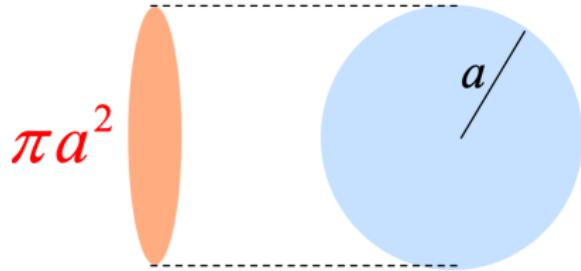


- 从微分散射截面的几何意义，可以得总散射截面的几何意义：无穷远处入射方向垂直于入射初速度的横截面面积，凡是通过这个横截面的粒子都受到势场的作用而发生偏转
- 可以算出，Rutherford 散射的总截面

$$\sigma_T = \int_0^\pi \left( \frac{k}{4E} \right)^2 \left( \sin \frac{\theta}{2} \right)^{-4} \cdot 2\pi \sin \theta d\theta = \infty$$

## 5.3 散射截面

- 这是因为，入射的整个横截面上的粒子都受到库仑势的影响
- 半径为  $a$  的刚性球散射，其总散射截面显然是有限的
- 在有心力问题中，总散射截面取有限值的力称为**短程力**，否则就称为**长程力**
- 库仑力是长程力，而刚球势属于短程力



# 有关散射截面的说明

## 1 微分截面的表达式

$$\sigma(\theta) = \left( \frac{k}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

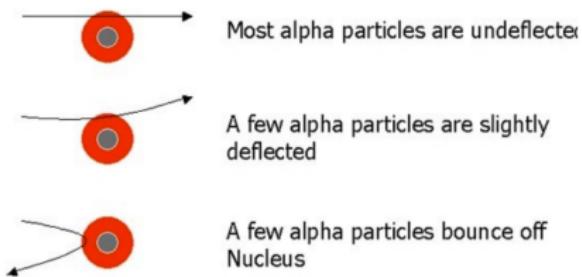
$k$ 、 $\sin^4(\theta/2)$  是由相互作用势的形式确定的

■ 反之，由实验测得微分截面，可以帮助我们了解相互作用。这正是微观物理中广泛应用散射的原因

2 1911年，Rutherford 等人用  $\alpha$  粒子去打击金箔，发现每 20000 个中，有一个被反弹回去。从原子核的 Thomson 模型来看，这是不可能的

# 有关散射截面的说明

- 由于Rutherford的实验，确立了原子核的 **Rutherford 模型**，否定 **Thomson 模型**

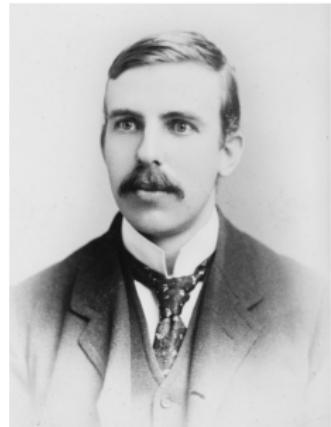




# Raisin Cake



# Rutherford

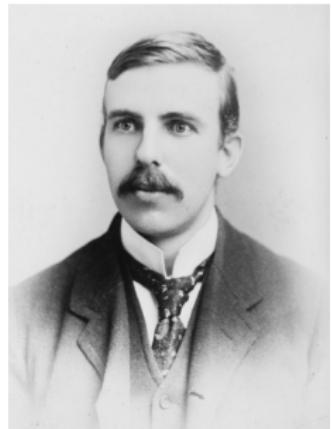


- 英国著名物理学家，为原子核物理学之父
- 学术界公认他为继 法拉第 之后最伟大的实验物理学家
- 1937年因病在剑桥逝世，与牛顿和法拉第并排安葬
- 提出了原子结构的行星模型，为原子结构的研究做出很大的贡献
- Nobel 化学奖（1908年）：“我一个搞物理的怎么就得了个化学奖呢？”



# Rutherford

- 1895年，在农场挖土豆的卢瑟福收到了英国剑桥大学发来的通知书，通知他已被录取为伦敦国际博览会的奖学金生。卢瑟福接到通知书后扔掉挖土豆的锄头喊道：“**这是我挖的最后一个土豆啦！**”
- 有个外号叫“鳄鱼”：因为鳄鱼从不回头，他张开吞食一切的大口，不断前进
- 他的助手和学生中，先后荣获诺贝尔奖的竟多达12人



# 有关散射截面的说明

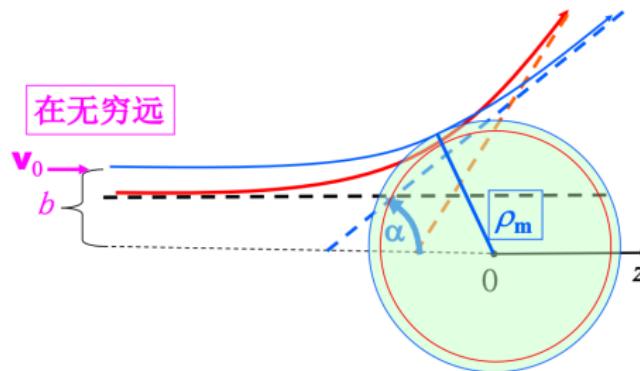
- 3 在 Rutherford 模型中,  $b \downarrow \Rightarrow \theta \uparrow$
- 4 对很大的  $v_0$ , 当  $\theta$  大于某一确定角度  $\alpha$  时,  $\sigma(\theta)$  开始偏离 Rutherford 散射公式
  - 这是因为入射粒子已经开始经过原子核内部, 对入射粒子作用的电量减小, 同时, 非电磁作用即核力 (强相互作用) 开始起作用
  - 由  $\alpha$  角可求出原子核的半径  $R = \rho_m$
  - 更换靶核, 可得原子核半径的经验公式:

$$R = r_0 A^{1/3}$$

其中,  $A$  为质子与中子数之和,  $r_0 \approx 1.2 \text{ fm}$

# 有关散射截面的说明

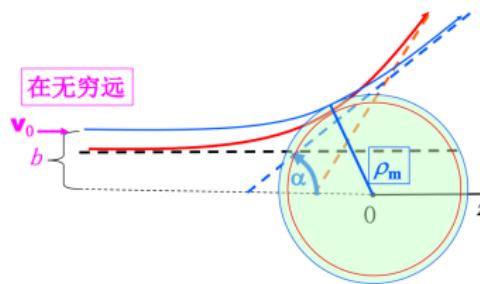
- 4 散射截面这个概念被广泛用于电动力学、量子力学，特别是核物理、粒子物理等学科
- 5 尽管在其它学科，对散射截面的理解与经典力学有所不同，但基本思想是一致的
- 6 量子力学得出的 Rutherford 散射的微分截面的公式与经典力学完全相同



# 有关散射截面的说明

7 普遍情况下，散射中心的质量相对于被散射粒子的质量并不是无穷大

- 此时，散射中心与被散射粒子都会有相应的运动
- 虽然背后的物理规律并没有太复杂（动量守恒等），但公式复杂度与计算量可能会有较大提升
- 有兴趣的同学可以参考 L.D. Landau & E.M. Lifshitz 的 Mechanics (3rd ed), 1987 第四章；Enjoy calculating!





细推物理须行乐，  
何用浮名绊此身。

唐·杜甫《曲江二首·其一》



**THANK YOU FOR LISTENING**



**ANY QUESTIONS?**