Лабораторная работа 2

Задача о погоне

Ланцова Яна Игоревна

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель работы

Построить математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задаче о погоне.

2 Теоретическое введение

Кривая погони — кривая, представляющая собой решение задачи о «погоне», которая ставится следующим образом. Пусть точка A равномерно движется по некоторой заданной кривой. Требуется найти траекторию равномерного движения точки P такую, что касательная, проведённая к траектории в любой момент движения, проходила бы через соответствующее этому моменту положение точки A.

3 Выполнение лабораторной работы

Формула для выбора варианта: `(113222649%70)+1` = 30 вариант.

Запишем уравнение описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).

Принимем за $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ – место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения,$x_{k0} = k$ - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.

Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров x_{k0} ($\theta = x_{k0} = 0$), а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны.

Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса θ , только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки. Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.

Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстояниих от полюса. За это время лодка пройдет x , а катер $k - x$ (или $k + x$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как $\frac{x}{v}$ или $\frac{k-x}{4.1v}$ (во втором случае $\frac{k+x}{4.1v}$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояниех можно найти из следующего уравнения:

$$\frac{x}{v} = \frac{k-x}{4.1v} \text{ – в первом случае}$$
$$\frac{x}{v} = \frac{k+x}{4.1v} \text{ – во втором}$$

Отсюда мы найдем два значения $x_1 = \frac{12.2}{5,1}$ и $x_2 = \frac{122}{3,1}$, задачу будем решать для двух случаев.

После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v. Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r - радиальная скорость и - v_τ тангенциальная скорость. Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса, $v_r = \frac{dr}{dt}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $\frac{dr}{dt} = v$.

Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $\frac{d\theta}{dt}$ на радиус r, $r\frac{d\theta}{dt}$.

Получаем:

$$v_\tau = \sqrt{16.81v^2 - v^2} = \sqrt{15.81}v$$

Из чего можно вывести:

$$r\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{15.81}v$$

Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений:

$$
\begin{cases}
\frac{dr}{dt} = v \\
r\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{15.81}v
\end{cases}
$$

С начальными условиями для первого случая:

$$
\begin{cases}
\theta_0 = 0 \\
r_0 = \frac{12.2}{5.1}
\end{cases} \tag{1}
$$

Или для второго:

$$
\begin{cases}
\theta_0 = -\pi \\
r_0 = \frac{12.2}{3.1}
\end{cases} \tag{2}
$$

Зададим расстояние от лодки до катера, начальные условия, решим ДУ и нарисуем график

```
using DifferentialEquations, Plots

# расстояние от лодки до катера

k = 12.2

# начальные условия для 1 и 2 случаев

r0 = k/5.1
r0_2 = k/3.1
theta0 = (0.0, 2*pi)
theta0_2 = (-pi, pi)

# данные для движения лодки браконьеров
```

```
fi = 3*pi/4;
t = (0, 50);

# функция, описывающая движение лодки браконьеров

x(t) = tan(fi)*t;

# функция, описывающая движение катера береговой охраны

f(r, p, t) = r/sqrt(15.81)

# постановка проблемы и решение ДУ для 1 случая

prob = ODEProblem(f, r0, theta0)

sol = solve(prob, saveat = 0.01)

# отрисовка траектории движения катера

plot(sol.t, sol.u, proj=:polar, lims=(0, 15), label = "Траекория движения катера")
```

В результате получаем такой рисунок (рис. 3.1).

Рис. 3.1: траекория движения катера в 1 случае

Построим траекторию движения лодки вместе с катером(рис. 3.2).

```
## необходимые действия для построения траектории движения лодки

ugol = [fi for i in range(0,15)]

x_lims = [x(i) for i in range(0,15)]

# отрисовка траектории движения лодки вместе с катером

plot!(ugol, x_lims, proj=:polar, lims=(0, 15), label = "Траекория движения лодки")
```

Рис. 3.2: код программы

В результате получаем такой рисунок (рис. 3.3):

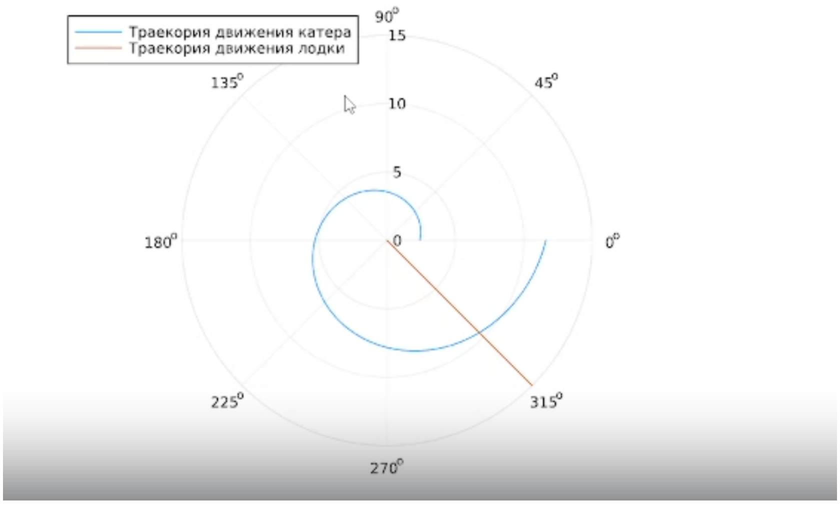

Рис. 3.3: траекория движения катера и лодки

Найдем точное решение ДУ в первом случае и перейдем к решению задачи во втором случае (рис. 3.4).

```
[27]: # точное решение ДУ, описывающего движение катера береговой охраны

      y(x)=(122*exp((10*x)/(sqrt(1581))))/(51)

      # подставим в точное решение угол, под которым движется лодка браконьеров для нахождения точки

      y(fi)

      # точка пересечения лодки и катера для 1 случая

[27]: 4.326560876761801

[21]: # постановка проблемы и решение ДУ для 2 случая

      prob_2 = ODEProblem(f, r0_2, theta0_2)

      sol_2 = solve(prob_2, saveat = 0.01)

      # отрисовка траектории движения катера

      plot(sol_2.t, sol_2.u, proj=:polar, lims=(0,15), label = "Траекория движения катера")

[21]:
      90°
      15  Траекория движения катера
```

Рис. 3.4: код программы

В результате получаем такой рисунок (рис. 3.5).

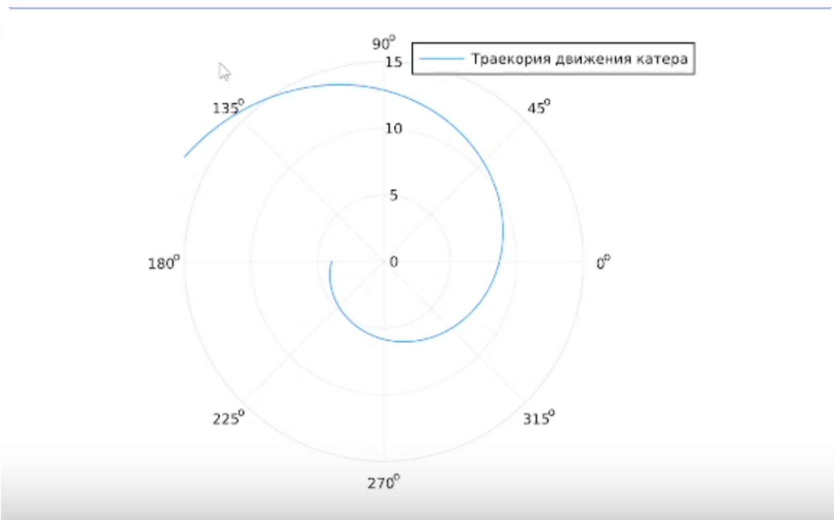

Рис. 3.5: траекория движения катера во 2 случае

Добавим движение лодки к данному изображению.

```
# отрисовка траектории движения лодки вместе с катером

plot!(ugol, x_lims, proj=:polar, lims=(0, 15), label = "Траекория движения лодки")
```

В результате получаем такой рисунок (рис. 3.6).

Рис. 3.6: траекория движения катера во 2 случае

Аналогично найдем точное решение ДУ (рис. 3.7).

```
[25]: # точное решение ДУ, описывающего движение катера береговой охраны

      y2(x)=(122*exp((10*x+10*pi)/(sqrt(1581))))/(31)

      # подставим в точное решение угол, под которым движется лодка браконьеров для нахождения точки

      y2(fi-pi)

      # точка пересечения лодки и катера для 1 случая

[25]: 7.11789047467264
```

Рис. 3.7: решение ДУ

4 Выводы

В процессе выполнения данной лабораторной работы я построила математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задаче о погоне.