

一.  $\vdash (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$

1.  $\neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A))$  (矛盾推一切)
2.  $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A))$  L2
3.  $(\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A)) \rightarrow ((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A)$  L3
4.  $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow ((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A)$  2 3切割
5.  $((\neg A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A)) \rightarrow (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$
6.  $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$  自己蕴含自己
7.  $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$  5 6碰

二.  $\vdash \neg\neg A \rightarrow A$

1.  $\neg\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$  矛盾推一切
2.  $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$  (定理 10) 上一条
3.  $\neg\neg A \rightarrow A$  1 2切割

三  $A \rightarrow \neg\neg A$

- (1)  $A$  假设
- (2)  $\neg\neg A \rightarrow \neg A$  定理  $\neg A \rightarrow \neg A$
- (3)  $(\neg\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow \neg\neg A)$  L3
- (4)  $A \rightarrow \neg\neg A$  (2)(3)MP
- (5)  $\neg\neg A$  (1)(4)MP

答案:

$(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$

- (1)  $\neg A \rightarrow A$  假设
- (2)  $\neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A))$  矛盾定理
- (3)  $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A))) \rightarrow (\neg A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A))$  L2
- (4)  $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A))$  (2)(3)MP
- (5)  $(\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A))$  (1)(4)MP
- (6)  $(\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A)) \rightarrow (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$  L3
- (7)  $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$  (5)(6)
- (8)  $A$  (1)(7)MP

$\neg\neg A \rightarrow A$

- (1)  $\neg\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$  矛盾定理
- (2)  $\neg\neg A$  假设
- (3)  $(\neg A \rightarrow A)$  (1)(2)MP
- (4)  $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$  定理  $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$
- (5)  $A$  演绎定理

$A \rightarrow \neg\neg A$

- (1)  $A$  假设
- (2)  $\neg\neg A \rightarrow \neg A$  定理  $\neg A \rightarrow \neg A$
- (3)  $(\neg\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow \neg\neg A)$  L3
- (4)  $A \rightarrow \neg\neg A$  (2)(3)MP
- (5)  $\neg\neg A$  (1)(4)MP