(a) ( ) Language $\{a^m(bc)^n : m, n \in \mathbb{N}\}$ is not regular.

(b) ( ) Language $\{a^ib^jc^k \mid i, j, k \geq 0, i \geq j + k\}$ is context-free.

(c) ( ) Let $F = \{f : f$ be a primitive recursive function from $\mathbb{N}$ to $\mathbb{N}\}$, then 2^F (Power set of F) is uncountable.

(d) ( ) Let $L_1, L_2, \cdots, L_i, \cdots$ be all regular languages, so is $\cup_{i=1}^{\infty} L_i$.

(e) ( ) Suppose language L is context-free and L' is a regular, then $L^*L'^*$ is context-free.

(f) ( ) Every computable function is primitive recursive.

(g) ( ) The complement of every recursive enumerable language is recursive enumerable.

(h) ( ) $a^*b^* \cap c^*d^* = \emptyset^*$.

(i) ( ) Every regular language is recursively enumerable.

(j) ( ) Let L be a language and there is a Turing machine M halts on x for every $x \in L$, then L is decidable.

(a) F 相当于 a*（bc）*。可以构造一个接受这个语言的有限状态机，因此是正则的。而且，直觉上，m 和 n 木有联系，也可以蒙一下。

(b) T 构造一个下推自动机，读到 a 则压栈，读到 b 或者 c 就出栈，最后栈不空则接受。

(c) T 原始递归函数有可数多个，根据定理 1.5.2，拥有可数多个元素的集合的幂集是不可数的。

(d) F 个人对此解析并不准确，但是，正则语言应该只是对有限次并封闭，无限次应该是不封闭的。

(e) T 根据定理 2.3.1，正则语言对 Kleene Star 封闭，定理 3.5.1，上下文无关语言在 Kleene Star 也封闭。因此，L'*是正则的，L*是上下文无关的，可是连在一起还是上下文无关的，因为 L*还是要一个下推自动机接受。

(f) F 原始递归函数是 μ 递归函数的真子集，而 μ 递归函数才是所有可计算函数。

(g) F 根据定理 5.3.2 递归可枚举语言对补运算不封闭。另外，递归语言对补运算封闭。

(h) T 显然交集是空语言

(i) T 正则语言包含于上下文无关，上下文无关包含于递归，递归包含于递归可枚举

(j) F 这条题目十分阴险……根据定义 4.2.1 下面的描述，如果 x∈L 那么 M 接受 x，x∉L 那么 M 拒绝 x，这就说 M 判定了 L。还有定义 4.2.4，x∈L 当且仅当 M 在 x 上停机，那么说 M 半判定了 L。题目只是说 x∈L 的时候 M 停机，因此只能说是半判定而已。

2. **(14%)** Decide whether the following languages are regular or not and provide a formal proof for your answer.

(a) $L_1 = \{a^nb^m : m \equiv n \mod 2\}$

（a）这是正则的。m≡n mod 2 表示 m 和 n 模 2 同余。而模 2 的余要么是 0 要么是 1，因此 m 和 n 只要同为偶数或者奇数就可以了。因此，L1 等价于{ (aa)*(bb)* ∪ a(aa)*b(bb)* }

(b) $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* : w \neq w^R\}$

(b) 这不是正则的。证明的方法个人拿得不太准。因此正则语言对于补运算封闭，我们证明

L3={w∈{a,b}*:w=w^R}不是正则则可。而 L3 是两个语言的并。L4={ww^R:w∈{a,b}*}，L5={w(a∪b)w^R:w∈{a,b}*}。我们用定理 2.4.1 的泵定理来证明 L4 不是正则的。设 s∈L4，s=xyz，l 令 xy=w，z=w^R，显然 xy^iz∉L4，因此 L3 不是正则的，所以 L2 也不是正则的。
这个证明似乎太繁琐了，所以拿得不太准，请诸位吐槽指正。

3. **(18%)**

(a) Give a Context-Free Grammar that generates the language

$$L_3 = \{xy \mid x, y \in \{a,b\}^*, |x| = |y| \text{ and } x \text{ and } y^R \text{ differ in one position }\}.$$

For example, $abbbbaba, abbbbbbb \in L_3$, but $aababb \notin L_3$.

(b) Design a PDA $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ accepting the language L_3.

Solution: (a) We can construct the context-free grammar $G = (V, \Sigma, R, S)$ for language L_3, where

$V = \{a, b, S, A, B\}; \Sigma = \{a, b\}$; and

$$R = \{S \to aSa, S \to bSb, S \to aAb, A \to aAa, A \to bAb, A \to e,$$
$$S \to bBa, B \to aBa, B \to bBb, B \to e\}$$

(b) The PDA $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ is defined below:

$K = \underline{\{p, q\}}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$\Gamma = \underline{\{a, b, S, A, B\}}$

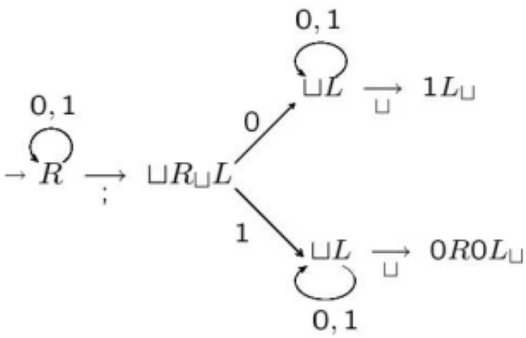
$s = \underline{p}$

$F = \underline{\{q\}}$

(q, σ, β)	(p, γ)
(p, e, e)	(q, S)
(q, e, S)	(q, aSa)
(q, e, S)	(q, bSb)
(q, e, S)	(q, aAb)
(q, e, A)	(q, aAa)
(q, e, A)	(q, bAb)
(q, e, A)	(q, e)
(q, e, S)	(q, bBa)
(q, e, B)	(q, aBa)
(q, e, B)	(q, bBb)
(q, e, B)	(q, e)
(q, a, a)	(q, e)
(q, b, b)	(q, e)

解析：就不解析了，和 04 年的题目一模一样……

4. **(16%)** Let the following Turing machine M computes $f(x,y)$, the alphabet is $\{0,1,;\}$. The head of M begins from the most left blank; $\sqcup$ is the symbol of blank; x and y are presented by binary strings respectively and separated with ;.



(a) Describe the key configurations when M started from the configuration $\triangleright\underline{\sqcup}10111;111$.

(b) Try to give the function $f(x,y)$ that M can compute.

解析：这条题目实质上和 04 年的第五大题一样的，因此无需解析了。字迹潦草恳请原谅。

（a）

$$\triangleright\underline{\sqcup}10111;111 \vdash_M^* \triangleright\sqcup10111\underline{;}111 \vdash_M \triangleright\sqcup10111\sqcup11\underline{1}$$

$$\vdash_M^* \triangleright\sqcup10111\underline{\sqcup} \vdash_M^* \triangleright\underline{\sqcup}1011100$$

（b）

$$f(x,y)=\begin{cases} 2x+1, & \text{if } y \text{ is even} \\ 4x, & \text{if } y \text{ is odd} \end{cases}$$

5. **(12%)** Let $P(x,y)$ be primitive recursive predicate. Prove the following predicate

$$\exists y_{\leq u} P(x,y),\ \forall u \in \mathbb{N}$$

is also primitive recursive.

解析：这条题目和 04 年的第四题相近。同样，

$\exists y_{\leq u} P(x,y) \Leftrightarrow \cup_{y=0}^{u} P(x,y) \neq 0$

因为析取也是原始递归的谓词，因此得证。

6. **(10%)** Show that the following language

$$H = \{\text{“}M\text{”} \mid M \text{ is a Turing Machine and halts on empty string}\}$$

is recursively enumerable. An informal description suffices.

解析：证明语言是递归可枚举的只需要找出半判定这个语言的图灵机。对于这个题目，通用图灵机就可以半判定它。因为对于通用图灵机输入“M”，相当于输入“M”外加一个空字符串。因此 M 在空串上停机则通用图灵机停机，反之不停机。因此通用图灵机半判定 H。