谓词合式公式

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-

四类符号

在基于谓词的形式化中，我们将使用如下四种符号：

1. 常量符号：指所属个体域 D 中的某个元素，用带或不带下标的小写英文字母 $a, b, c, \cdots, a_1, b_1, c_1, \cdots$ 来表示。
2. 变量符号：指所属个体域D 中的任意元素，用带或不带下标的小写英文字母 $x, y, z, \cdots, x_1, y_1, z_1, \cdots$ 来表示。
3. 函数符号：n 元函数符号 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 可以是所属个体域集合$D^n \to D$的任意一个函数，用带或不带下标的小写英文字母 $f, g, h, \cdots, f_1, g_1, h_1, \cdots$ 来表示。
4. 谓词符号：n 元谓词符号 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 可以是所属个体域集合$D^n \to \{0, 1\}$的任意一个谓词，用带或不带下标的大写英文字母 $P, Q, R, \cdots, P_1, Q_1, R_1, \cdots$ 来表示。

为何需要函数符号？

Example

命题“周红的父亲是教授”：

- 若令 $f(x)$：x 的父亲；$P(x)$：x 是教授；c：周红，则该命题符号化为 $P(f(c))$
- 若令 $P(x)$：x 是教授；$F(x,y)$：x 是 y 的父亲；c：周红，则该命题符号化为 $(\forall x)(F(x,c) \rightarrow P(x))$

☞

从上面的例子可以看出，函数可用于表达个体词之间的转换关系，给谓词逻辑中的个体词表示带来了很大的方便。

项

Definition

谓词逻辑中的项（Term），被递归地定义为：

- 任意的常量符号或任意的变量符号是项；
- 若 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 n 元函数符号，$t_1, t_2, \cdots, t_n$ 是项，则$f(t_1, t_2, \cdots, t_n)$是项；
- 仅由有限次使用以上两个规则产生的符号串才是项。

Example

- 命题"周红的父亲是教授"可表示为 $P(f(c))$，这里的 $f(c)$ 是项。
- $f(g(x, y), h(a, g(x, y), z))$ 是项；

合式公式

Definition

若 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 n 元谓词，$t_1, t_2, \cdots, t_n$ 是项，则称 $P(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 为原子谓词公式，简称原子公式。

Definition

满足下列条件的表达式，称为合式公式(well-formed formulae/wff)，简称公式。

1. 原子公式是合式公式；
2. 若 G，H 是合式公式，则 $(\neg G)$，$(\neg H)$，$(G \vee H)$，$(G \wedge H)$，$(G \rightarrow H)$，$(G \leftrightarrow H)$ 也是合式公式；
3. 若 G 是合式公式，x 是个体变量，则$(\forall x) G$、$(\exists x) G$也是合式公式；
4. 由有限次使用以上三个规则产生的表达式才是合式公式。

合式公式

Example

- $(\forall x)(\exists y)(P(x,y) \to (Q(x,y) \vee R(x,a,f(z))))$，$(\forall x)(P(x) \vee (\exists y)R(x,y))$，$(\forall x)(P(x) \to R(x))$ 等都是公式；
- $(\forall x)(P(x) \to R(x)$，$(\exists y)(\forall x)(\vee P(x,y))$ 等则不是公式。

☞ 关于合式公式

- 公式的最外层括号可省略；
- 量词后面的括号省略方式为：一个量词的辖域中仅出现一个原子公式，则此辖域的外层括号可省略，否则不能省略；
- 一个个体词只能受一个量词的约束，否则就是没有意义的。

THE END, THANKS!