推理形式和推理规则

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-

推理形式

Definition

设 $G_1, G_2, \cdots, G_n$，H 是公式，称 H 是 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 的逻辑结果(或称 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 共同蕴涵 H) 当且仅当对任意解释 I，若 I 同时满足 $G_1, G_2, \cdots, G_n$，则 I 满足 H，记为$G_1, G_2, \cdots, G_n \Rightarrow H$，此时称 $G_1, G_2, \cdots, G_n \Rightarrow H$ 是有效的，否则称为无效的。$G_1, G_2, \cdots, G_n$ 称为一组前提 (premise)，有时用集合 Γ 来表示，记$\Gamma = \{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$，$H$ 称为结论 (conclusion)，又称 H 是前提集合 Γ 的逻辑结果，记为$\Gamma \Rightarrow H$。

Theorem

设 $G_1, G_2, \cdots, G_n$，H 是公式，公式 H 是前提集合 $\Gamma = \{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$ 的逻辑结果当且仅当$G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n \to H$ 为有效公式。

根据代入实例的特性，命题演算中的基本蕴涵公式 I_1—I_{11} 在谓词演算中仍然成立。

推理规律

Theorem

假设 $G(x), H(x)$ 是只含自由变元 x 的公式，则在全总个体域中，有

1. $I_{12}:(\forall x)G(x) \Rightarrow (\exists x)G(x)$;
2. $I_{13}:(\forall x)G(x) \vee (\forall x)H(x) \Rightarrow (\forall x)(G(x) \vee H(x))$;
   $I_{14}:(\exists x)(G(x) \wedge H(x)) \Rightarrow (\exists x)G(x) \wedge (\exists x)H(x)$.
3. $I_{15}:(\forall x)(G(x) \rightarrow H(x)) \Rightarrow (\forall x)G(x) \rightarrow (\forall x)H(x)$;
   $I_{16}:(\forall x)(G(x) \rightarrow H(x)) \Rightarrow (\exists x)G(x) \rightarrow (\exists x)H(x)$.

推理规律

Theorem

假设 $G(x), H(x)$ 是只含自由变元 x 的公式，则在全总个体域中，有

1. $I_{12}: (\forall x)G(x) \Rightarrow (\exists x)G(x)$;
2. $I_{13}: (\forall x)G(x) \vee (\forall x)H(x) \Rightarrow (\forall x)(G(x) \vee H(x))$;
   $I_{14}: (\exists x)(G(x) \wedge H(x)) \Rightarrow (\exists x)G(x) \wedge (\exists x)H(x)$.
3. $I_{15}: (\forall x)(G(x) \rightarrow H(x)) \Rightarrow (\forall x)G(x) \rightarrow (\forall x)H(x)$;
   $I_{16}: (\forall x)(G(x) \rightarrow H(x)) \Rightarrow (\exists x)G(x) \rightarrow (\exists x)H(x)$.

对于多个量词的公式，设 $G(x, y)$ 是含有自由变元 x, y 的谓词公式，则有

4. $I_{17}: (\exists x)(\forall y)G(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)G(x, y)$;
   $I_{18}: (\forall x)(\forall y)G(x, y) \Rightarrow (\exists y)(\exists x)G(x, y)$;
   $I_{19}: (\forall y)(\forall x)G(x, y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)G(x, y)$;
   $I_{20}: (\exists y)(\forall x)G(x, y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)G(x, y)$;
   $I_{21}: (\forall x)(\exists y)G(x, y) \Rightarrow (\exists y)(\exists x)G(x, y)$;
   $I_{22}: (\forall y)(\exists x)G(x, y) \Rightarrow (\exists x)(\exists y)G(x, y)$;

全称特指规则

US（全称特指规则）：

$(\forall x)G(x) \Rightarrow G(y)$，y 不在 $G(x)$ 中约束出现

或：$(\forall x)G(x) \Rightarrow G(c)$，$c$ 为任意个体常量

Example

设实数集中，语句“不存在最大的实数”可符号化为：$(\forall x)(\exists y)G(x, y)$。其中：$G(x, y)$：$y > x$

如下推导正确吗？为什么？

(1)	$(\forall x)(\exists y)G(x, y)$	P
(2)	$(\exists y)G(y, y)$	$US, (1)$

解 以上推导不正确。正确的推导应为：

(1)	$(\forall x)(\exists y)G(x, y)$	P
(2)	$(\exists y)G(z, y)$	$US, (1)$

存在特指规则

ES（存在特指规则）：$(\exists x)G(x) \Rightarrow G(c)$ ，c 为使得 G(c) 为真的特定的个体常量。
当 $G(x)$ 中还有除 x 之外的自由变元，则必须用关于这些变元的函数符号来取代 c。

Example

设实数集中，语句“不存在最大的实数”可符号化为：$(\forall x)(\exists y)G(x, y)$。其中：$G(x, y)$：$y > x$

如下推导正确吗？为什么？

(1)	$(\forall x)(\exists y)G(x, y)$	P
(2)	$(\exists y)G(z, y)$	$US, (1)$
(3)	$G(z, c)$	$ES, (2)$

解 以上推导不正确。正确的推导应为：

(1)	$(\forall x)(\exists y)G(x, y)$	P
(2)	$(\exists y)G(z, y)$	$US, (1)$
(3)	$G(z, f(z))$	$ES, (2)$

全称推广规则

UG（全称推广规则）: $G(y) \Rightarrow (\forall x)G(x)$，G(y) 中无变元 x

Example

设实数集中，语句“不存在最大的实数”可符号化为：$(\forall x)(\exists y)G(x,y)$。其中：$G(x,y): y > x$
如下推导正确吗？为什么？

$$
\begin{array}{lll}
(1) & (\forall x)(\exists y)G(x,y) & P \\
(2) & (\exists y)G(z,y) & US,(1) \\
(3) & (\forall y)(\exists y)G(y,y) & UG,(2)
\end{array}
$$

解 以上推导不正确。正确的推导应为：

$$
\begin{array}{lll}
(1) & (\forall x)(\exists y)G(x,y) & P \\
(2) & (\exists y)G(z,y) & US,(1) \\
(3) & (\forall z)(\exists y)G(z,y) & UG,(2)
\end{array}
$$

存在推广规则

EG（存在推广规则）：

$G(c) \Rightarrow (\exists x)G(x)$，c 为特定个体常量

或：$G(y) \Rightarrow (\exists x)G(x)$，G(y) 中无变元 x

Example

设：$G(x, y) : y > x$

如下推导正确吗？为什么？

(1)	$G(x, c)$	P
(2)	$(\exists x)G(x, x)$	$EG, (1)$

解 以上推导不正确。正确的推导应为：

(1)	$G(x, c)$	P
(2)	$(\exists y)G(x, y)$	$EG, (1)$

THE END, THANKS!