

# 命题逻辑

## 公式的分类和逻辑等价

王丽杰

Email: [ljwang@uestc.edu.cn](mailto:ljwang@uestc.edu.cn)

电子科技大学 计算机学院

2016-

# 真值表告诉我们什么？

命题逻辑

Lijie Wang

命题公式的分类

公式的逻辑等价

## Example

写出下面一组命题公式的真值表：

$$G_1 = \neg(P \rightarrow Q) \rightarrow P$$

$$G_2 = (P \rightarrow Q) \wedge P$$

$$G_3 = \neg(P \wedge \neg Q) \leftrightarrow \neg(P \rightarrow Q)$$

$P$	$Q$	$G_1$	$G_2$	$G_3$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	1	1	0

全为真

有真有假

全为假

# 命题公式分类

命题逻辑

Lijie Wang

命题公式的分类

公式的逻辑等价

## Definition

- 公式  $G$  称为**永真公式**(**重言式**, tautology), 如果在它的所有解释之下其真值都为“真”。
- 公式  $G$  称为**永假公式**(**矛盾式**, contradiction), 如果在它的所有解释之下其真值都为“假”。有时也称永假公式为**不可满足公式**。
- 公式  $G$  称为**可满足公式**(satisfiable), 如果它不是永假的。

### 三种特殊公式之间的关系

- 1  $G$  是永真的当且仅当  $\neg G$  是永假的；
- 2  $G$  是可满足的当且仅当至少有一个解释  $I$ , 使  $G$  在  $I$  下为真。
- 3 若  $G$  是永真式, 则  $G$  一定是可满足式, 但反之可满足公式不一定是永真式；

# 命题公式分类

命题逻辑

Lijie Wang

命题公式的分类

公式的逻辑等价

## Example

写出下列公式的真值表并判定其公式类型。

$$G_1 = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$$

$$G_2 = (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\neg(P \rightarrow Q) \vee \neg(Q \rightarrow P))$$

$$G_3 = (P \rightarrow \neg Q) \vee \neg Q$$

$P$	$Q$	$G_1$	$G_2$	$G_3$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	0	0

重言式

矛盾式

可满足公式

# 公式的等价

命题逻辑

Lijie Wang

命题公式的分类

公式的逻辑等价

考虑上一个例子中的永真公式  $G_1 = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ ，将这个公式拆开，令

$$G = P \rightarrow Q, H = \neg P \vee Q,$$

从而  $G_1 = G \leftrightarrow H$ ，由于  $G_1$  是永真公式，根据等价联接词的定义可知  $G, H$  必同为真或者同为假。此时我们称公式  $G, H$  具有逻辑等价关系。

## Definition

设  $G, H$  是两个命题公式， $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$  是出现在  $G, H$  中所有的命题变元，如果对于  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$  的  $2^n$  个解释， $G$  与  $H$  的**真值结果都相同**，则称公式  $G$  与  $H$  是**等价的**，记作  $G = H$ 。（或  $G \leftrightarrow H$ ）

# 公式等价的充分必要条件

命题逻辑

Lijie Wang

命题公式的分类

公式的逻辑等价

## Theorem

对于任意两个公式  $G$  和  $H$ ,  $G = H$  的充分必要条件是公式  $G \leftrightarrow H$  是永真公式。

## Proof.

- **必要性**: 假定  $G = H$ , 则  $G, H$  在其任意解释  $I$  下或同为真或同为假, 于是由 “ $\leftrightarrow$ ” 的意义知, 公式  $G \leftrightarrow H$  在其任何的解释  $I$  下, 其真值为 “真”, 即  $G \leftrightarrow H$  为永真公式。
- **充分性**: 假定公式  $G \leftrightarrow H$  是永真公式,  $I$  是它的任意解释, 在  $I$  下,  $G \leftrightarrow H$  为真, 因此,  $G, H$  或同为真, 或同为假, 由于  $I$  的任意性, 故有  $G = H$ . □

## 命题公式的可判定性

**可判定性**: 能否给出一个可行方法, 完成对任意公式的判定类问题。(类型或等价判定)  
命题公式是可判定的。

命题逻辑

Lijie Wang

命题公式的分类

公式的逻辑等价



THE END, THANKS!