

命题逻辑

Lijie W.

基本等价关系

判断公式类型

证明公式等价

开关电路化简

逻辑电路化简

智力游戏

命题逻辑

基本等价关系及其应用

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016

基本等价关系

命题逻辑

Lijie W.

基本等价关系

判断公式类型

证明公式等价

开关电路化简

逻辑电路化简

智力游戏

Theorem

设 G, H, S 为任意的命题公式。

① $E_1 : G \vee G = G;$

(幂等律)

$$E_2 : G \wedge G = G.$$

② $E_3 : G \vee H = H \vee G;$

(交换律)

$$E_4 : G \wedge H = H \wedge G.$$

③ $E_5 : G \vee (H \vee S) = (G \vee H) \vee S;$

(结合律)

$$E_6 : G \wedge (H \wedge S) = (G \wedge H) \wedge S.$$

④ $E_7 : G \vee 0 = G;$

(同一律)

$$E_8 : G \wedge 1 = G.$$

基本等价关系

命题逻辑

Lijie W.

基本等价关系

判断公式类型

证明公式等价

开关电路化简

逻辑电路化简

智力游戏

Theorem

- ⑤ $E_9 : G \vee 1 = 1;$ (零律)
 $E_{10} : G \wedge 0 = 0.$
- ⑥ $E_{11} : G \vee (H \wedge S) = (G \vee H) \wedge (G \vee S);$ (分配律)
 $E_{12} : G \wedge (H \vee S) = (G \wedge H) \vee (G \wedge S).$
- ⑦ $E_{13} : G \vee (G \wedge H) = G;$ (吸收律)
 $E_{14} : G \wedge (G \vee H) = G.$
- ⑧ $E_{15} : \neg G \wedge G = 0.$ (矛盾律)
- ⑨ $E_{16} : \neg G \vee G = 1.$ (排中律)
- ⑩ $E_{17} : \neg(\neg G) = G.$ (双重否定律)

基本等价关系

命题逻辑

Lijie W.

基本等价关系

判断公式类型

证明公式等价

开关电路化简

逻辑电路化简

智力游戏

Theorem

⑪ $E_{18} : \neg(G \vee H) = \neg G \wedge \neg H;$

(德摩根律)

$E_{19} : \neg(G \wedge H) = \neg G \vee \neg H.$

⑫ $E_{20} : G \rightarrow H = \neg G \vee H.$

(蕴涵式)

⑬ $E_{21} : G \rightarrow H = \neg H \rightarrow \neg G.$

(假言易位)

⑭ $E_{22} : G \leftrightarrow H = (G \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow G) = (\neg G \vee H) \wedge (\neg H \vee G).$

(等价式)

⑮ $E_{23} : G \leftrightarrow H = \neg G \leftrightarrow \neg H.$

(等价否定等式)

⑯ $E_{24} : (G \rightarrow H) \wedge (G \rightarrow \neg H) = \neg G.$

(归谬论)

判断公式类型

命题逻辑

Lijie W.

基本等价关系

判断公式类型

证明公式等价

开关电路化简

逻辑电路化简

智力游戏

Example

利用命题公式的基本等价关系，证明 $(P \rightarrow Q) \wedge P \rightarrow Q$ 是重言式。

证明

$$\begin{aligned} & (P \rightarrow Q) \wedge P \rightarrow Q \\ = & (\neg P \vee Q) \wedge P \rightarrow Q = \neg((\neg P \vee Q) \wedge P) \vee Q && \text{(蕴含式)} \\ = & (\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg P) \vee Q = ((P \wedge \neg Q) \vee \neg P) \vee Q && \text{(德摩根律)} \\ = & ((P \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee \neg P)) \vee Q && \text{(分配律)} \\ = & (1 \wedge (\neg Q \vee \neg P)) \vee Q && \text{(排中律)} \\ = & (\neg Q \vee \neg P) \vee Q && \text{(同一律)} \\ = & (\neg Q \vee Q) \vee \neg P && \text{(结合律, 交换律)} \\ = & 1 \vee \neg P && \text{(排中律)} \\ = & 1 && \text{(零律)} \end{aligned}$$

证明公式等价

命题逻辑

Lijie W.

基本等价关系

判断公式类型

证明公式等价

开关电路化简

逻辑电路化简

智力游戏

Example

利用命题公式的基本等价关系，证明 $P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \wedge Q) \rightarrow R$ 。

证明

$$\begin{aligned} & P \rightarrow (Q \rightarrow R) \\ = & \neg P \vee (Q \rightarrow R) && \text{(蕴含式)} \\ = & \neg P \vee (\neg Q \vee R) && \text{(蕴含式)} \\ = & (\neg P \vee \neg Q) \vee R && \text{(结合律)} \\ = & \neg(P \wedge Q) \vee R && \text{(德摩根律)} \\ = & (P \wedge Q) \rightarrow R && \text{(蕴含式)} \end{aligned}$$

开关电路化简

命题逻辑

Lijie W.

基本等价关系

判断公式类型

证明公式等价

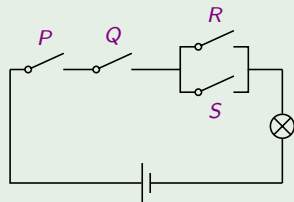
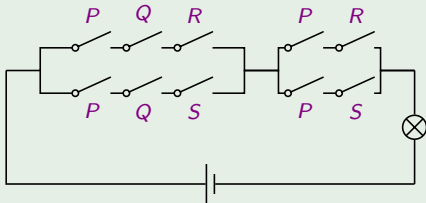
开关电路化简

逻辑电路化简

智力游戏

Example

利用命题公式的基本等价关系，化简如下左图所示开关电路。



解

$$\begin{aligned} & ((P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge S)) \wedge ((P \wedge R) \vee (P \wedge S)) \\ = & (P \wedge Q \wedge (R \vee S)) \wedge (P \wedge (R \vee S)) \\ = & P \wedge Q \wedge (R \vee S) \wedge P \wedge (R \vee S) \\ = & P \wedge Q \wedge (R \vee S) \end{aligned}$$

逻辑电路化简

命题逻辑

Lijie W.

基本等价关系

判断公式类型

证明公式等价

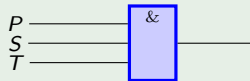
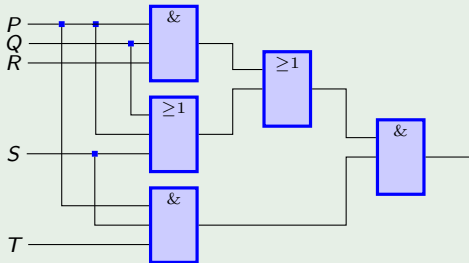
开关电路化简

逻辑电路化简

智力游戏

Example

利用命题公式的基本等价关系，化简如下左图所示逻辑电路。



解

$$\begin{aligned} & ((P \wedge Q \wedge R) \vee (P \vee Q \vee S)) \wedge (P \wedge S \wedge T) \\ = & (P \vee Q \vee S) \wedge (P \wedge S \wedge T) \\ = & P \wedge S \wedge T \end{aligned}$$

智力游戏

命题逻辑

Lijie W.

基本等价关系

判断公式类型

证明公式等价

开关电路化简

逻辑电路化简

智力游戏

Example

侦探调查了罪案的四位证人。从证人的话侦探得出的结论是：如果男管家说的是真话，那么厨师说的也是真话；厨师和园丁说的不可能都是真话；园丁和杂役不可能都在说谎；如果杂役说真话，那么厨师在说谎。侦探能判定这四位证人分别是在说谎还是在说真话吗？解释你的推理。

解 令命题 P : 男管家说的是真话； Q : 厨师说的是真话； R : 园丁说的是真话；

S : 杂役说的是真话。则将上述已知条件符号化并列成真值表，选取真值结果全为真的行如下表：

P	Q	R	S	$P \rightarrow Q$	$\neg(Q \wedge R)$	$\neg(\neg R \wedge \neg S)$	$S \rightarrow \neg Q$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1

可见，我们能确定 P, Q 必然为假，但无法确定 R 和 S 的值，因而侦探只能判定男管家和厨师在说谎，但无法判定园丁与杂役谁在说真话。

命题逻辑

Lijie W.

基本等价关系

判断公式类型

证明公式等价

开关电路化简

逻辑电路化简

智力游戏



THE END, THANKS!