命题逻辑

自然演绎法推理

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016

推理规则

Theorem

- **规则** P (称为**前提引用规则**)：在推导的过程中，可随时引入前提集合中的任意一个前提；
- **规则** T (称为**逻辑结果引用规则**)：在推导的过程中，可以随时引入公式 S，该公式 S 是由其前的一个或多个公式推导出来的逻辑结果。
- **规则** CP (称为**附加前提规则**)：如果能从给定的前提集合 Γ 与公式 P 推导出 S，则能从此前提集合 Γ 推导出 $P \rightarrow S$。

☞ 关于规则 CP

- 原理：$P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \wedge Q) \rightarrow R$。
- 使用场合: 当结论公式是蕴涵式或析取式时使用。

自然演绎法

三个推理规则加上全部的基本等价公式和基本蕴涵公式，可作为推理与演绎的基础，从而构造一个完整的命题演算推理系统。即所有命题逻辑的定理都可以用这些规则严格地证明出来。

Definition

从前提集合 Γ 推出结论 H 的一个演绎是构造命题公式的一个有限序列：

$$H_1, H_2, H_3, \cdots, H_{n-1}, H_n$$

其中，H_i 或者是 Γ 中的某个前提，或者是前面的某些 $H_j (j < i)$ 的有效结论，并且 H_n 就是 H，则称公式 H 为该演绎的有效结论，或者称从前提 Γ 能够演绎出结论 H 来。

演绎–直接证明法

Example

设前提集合 $\Gamma = \{P \vee Q, Q \to R, P \to S, \neg S\}$，结论 $H = R \wedge (P \vee Q)$。
证明 $\Gamma \Rightarrow H$。

Proof.

(1)	$P \to S$	P
(2)	$\neg S$	P
(3)	$\neg P$	$T, (1), (2), I$
(4)	$P \vee Q$	P
(5)	Q	$T, (3), (4), I$
(6)	$Q \to R$	P
(7)	R	$T, (5), (6), I$
(8)	$R \wedge (P \vee Q)$	$T, (4), (7), I$

$\square$

演绎–规则 CP 证明法

Example

设前提集合 $\Gamma = \{P \to (Q \to S), \neg R \vee P, Q\}$，结论 $H = R \to S$。
证明 $\Gamma \Rightarrow H$。

Proof.

(1)	R	P(附加前提)
(2)	$\neg R \vee P$	P
(3)	P	$T, (1), (2), I$
(4)	$P \to (Q \to S)$	P
(5)	$Q \to S$	$T, (3), (4), I$
(6)	Q	P
(7)	S	$T, (5), (6), I$
(8)	$R \to S$	$CP, (1), (7)$

□

演绎–间接证明法（反证法，归谬法）

要证明：$G_1, G_2, \cdots, G_n \Rightarrow H$

根据判定定理：$(G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n) \rightarrow H$ 为永真公式

即：$G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n \wedge \neg H$ 是矛盾式

因此：$G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n \wedge \neg H \Rightarrow R \wedge \neg R$

演绎–间接证明法（反证法，归谬法）

Example

设前提集合 $\Gamma = \{P \vee Q, P \to R, Q \to R\}$，结论 $H = R$。证明 $\Gamma \Rightarrow H$。

Proof.

(1)	$\neg R$	P(附加前提)
(2)	$P \to R$	P
(3)	$\neg P$	$T, (1), (2), I$
(4)	$Q \to R$	P
(5)	$\neg Q$	$T, (1), (4), I$
(6)	$P \vee Q$	P
(7)	P	$T, (5), (6), I$
(8)	$P \wedge \neg P$	$T, (3), (7), I$

$\square$

演绎–间接证明法

☞ 说明

反证法在逻辑推理中有时也十分方便。（想一下，什么时候会特别有用？）然而，总可以不使用它而用规则 CP 证明法来代替它。因为，它实际上本身就是规则 CP 的一种变型。

反证法：$G_1, G_2, \cdots, G_n, \neg H \Rightarrow R \wedge \neg R$

↓

根据规则 CP：$G_1, G_2, \cdots, G_n \Rightarrow \neg H \to (R \wedge \neg R)$

↓

即：$G_1, G_2, \cdots, G_n \Rightarrow \neg\neg H \vee (R \wedge \neg R)$

↓

也就是：$G_1, G_2, \cdots, G_n \Rightarrow H$

命题演绎举例一

Example

符号化下面的语句，并使用演绎法证明：

"若数 a 是实数，则它不是有理数就是无理数。若 a 不能表示成分数，则它不是有理数。a 是实数且它不能表示成分数。所以，a 是无理数。"

解

设命题 P : a 是实数;

Q : a 是有理数;

R : a 是无理数;

S : a 能表示成分数.

则推理符号化成：

$$P \to (Q \vee R), \neg S \to \neg Q, P \wedge \neg S \Rightarrow R$$

命题演绎举例一

$$P \rightarrow (Q \vee R), \neg S \rightarrow \neg Q, P \wedge \neg S \Rightarrow R$$

Proof.

(1)	$P \wedge \neg S$	P
(2)	P	$T, (1), I$
(3)	$\neg S$	$T, (1), I$
(4)	$P \rightarrow (Q \vee R)$	P
(5)	$Q \vee R$	$T, (2), (4), I$
(6)	$\neg S \rightarrow \neg Q$	P
(7)	$\neg Q$	$T, (3), (6), I$
(8)	R	$T, (5), (7), I$

$\square$

命题演绎举例二

Example

符号化下面的语句，并使用演绎法证明：

“如果马会飞或羊吃草，则母鸡就会是飞鸟；如果母鸡是飞鸟，那么烤熟的鸭子还会跑；烤熟的鸭子不会跑。所以羊不吃草。”

解

设命题 P : 马会飞;

Q : 羊吃草;

R : 母鸡是飞鸟;

S : 烤熟的鸭子会跑.

则推理符号化成：

$$(P \vee Q) \rightarrow R, R \rightarrow S, \neg S \Rightarrow \neg Q$$

命题演绎举例二

$$(P \vee Q) \to R, R \to S, \neg S \Rightarrow \neg Q$$

Proof.

(1)	$\neg S$	P
(2)	$R \to S$	P
(3)	$\neg R$	$T, (1), (2), I$
(4)	$(P \vee Q) \to R$	P
(5)	$\neg(P \vee Q)$	$T, (3), (4), I$
(6)	$\neg P \wedge \neg Q$	$T, (5), E$
(7)	$\neg Q$	$T, (6), I$

□

THE END, THANKS!