量词的引入

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-

量词

虽然目前有了个体词和谓词，但对于有些命题而言，还是无法准确描述。

Example

- 所有的老虎都要吃人；
- 每一个大学生都会说英语；
- 有一些人登上过月球；
- 存在自然数是素数。

量词

Definition

- **全称量词** $(\forall x)$: 所有的 x；任意的 x；一切的 x；每一个 x；$\cdots$
- **存在量词** $(\exists x)$: 有些 x；至少有一个 x；某一些 x；存在 x；$\cdots$

其中的 x 称为作用变量。一般将其量词加在其谓词之前，记为 $(\forall x)F(x)$，$(\exists x)F(x)$。此时，$F(x)$ 称为全称量词和存在量词的辖域。

Example

- 所有的老虎都要吃人；P(x):x 要吃人。$(\forall x)P(x), x\in$\{老虎\}
- 每一个大学生都会说英语；Q(x):x 会说英语。$(\forall x)Q(x), x\in$\{大学生\}
- 有一些人登上过月球； R(x):x 登上过月球。$(\exists x)R(x), x\in$\{人\}
- 存在自然数是素数。S(x):x 是素数。$(\exists x)S(x), x\in$\{自然数\}

更准确的表达

以上符号化必须要特别注明个体域，在表达比较复杂的命题时会容易混淆。下面引入更准确的表达方式：

Example

- 所有的老虎都要吃人；
  T(x):x 是老虎，P(x):x 要吃人。$(\forall x)(T(x) \rightarrow P(x))$
- 每一个大学生都会说英语；
  C(x):x 是大学生，Q(x):x 会说英语。$(\forall x)(C(x) \rightarrow Q(x))$
- 有一些人登上过月球；
  H(x):x 是人，R(x):x 登上过月球。$(\exists x)(H(x) \wedge R(x))$
- 存在自然数是素数。
  N(x):x 是自然数，S(x):x 是素数。$(\exists x)(N(x) \wedge S(x))$

谓词逻辑符号化的两条规则

统一个体域为全总个体域，而对每一个句子中个体变量的变化范围用一元特性谓词刻划之。这种特性谓词在加入到命题函数中时必定遵循如下原则：

- 对于全称量词 $(\forall x)$，刻划其对应个体域的特性谓词作为蕴涵式之前件加入。
- 对于存在量词 $(\exists x)$，刻划其对应个体域的特性谓词作为合取式之合取项加入。

想一想，为什么要这样规定特性谓词加入的原则呢？若不遵循会出现什么样的问题？

量词相关的真值确定

考虑命题"所有同学都通过了离散数学考试"，这个命题在什么情况下取值为真，什么情况下取值为假？那么，命题"有些同学通过了离散数学考试"的真值又如何确定呢？

- $(\forall x)G(x)$：对 $\forall x \in D, G(x)$ 都成立。
  - $(\forall x)G(x)$ 取值为 1 当且仅当对任意 $x \in D, G(x)$ 都取值为 1；
  - $(\forall x)G(x)$ 取值为 0 当且仅当存在 $x_0 \in D$, 使得 $G(x_0)$ 取值为 0。
- $(\exists x)G(x)$：存在一个 $x_0 \in D$, 使得 $G(x_0)$ 成立。
  - $(\exists x)G(x)$ 取值为 1 当且仅当存在 $x_0 \in D$, 使得 $G(x_0)$ 取值为 1；
  - $(\exists x)G(x)$ 取值为 0 当且仅当对任意 $x \in D, G(x)$ 都取值为 0。

谓词翻译和真值

Example

设 P(x)：x 是素数；I(x)：x 是整数；Q(x, y)：x+y=0。用语句描述下述句子，并判断其真假值。

- $(\forall x)(I(x) \rightarrow P(x))$; “所有整数都是素数”， 真值为假
- $(\exists x)(I(x) \wedge P(x))$ “有一些整数是素数”， 真值为真
- $(\forall x)(\forall y)(I(x) \wedge I(y) \rightarrow Q(x, y))$
  “对任意整数 x,y 都有 x+y=0”， 真值为假
- $(\forall x)(I(x) \rightarrow (\exists y)(I(y) \wedge Q(x, y)))$
  “对任意整数 x, 都存在整数 y，使得 x+y=0”， 真值为真
- $(\exists x)(\forall y)(I(x) \wedge (I(y) \rightarrow Q(x, y)))$
  “存在整数 x, 对任意的整数 y，都有 x+y=0”， 真值为假

个体域有限的情况下

特别的，当个体域 $D = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ 是有限集合时，$(\forall x)G(x)$ 和 $(\exists x)G(x)$ 的真值可以用与之等价的命题公式来进行表示。

$$(\forall x)G(x) = G(x_0) \wedge G(x_1) \wedge \cdots \wedge G(x_n)$$

$$(\exists x)G(x) = G(x_0) \vee G(x_1) \vee \cdots \vee G(x_n)$$

Example

设个体域 $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}, P(x)$：$x$ 是素数，则

$$(\forall x)P(x) = P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4) \wedge P(5) = 0 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0 \wedge 1 = 0$$

$$(\exists x)P(x) = P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4) \vee P(5) = 0 \vee 1 \vee 1 \vee 0 \vee 1 = 1$$

THE END, THANKS!