

命题逻辑

Lijie W.

推理的基本形式

基本蕴涵关系

# 命题逻辑

## 基本推理形式和蕴涵公式

王丽杰

Email: [ljwang@uestc.edu.cn](mailto:ljwang@uestc.edu.cn)

电子科技大学 计算机学院

2016

# 推理形式

命题逻辑

Lijie W.

推理的基本形式

基本蕴涵关系

所谓**推理**，是指从**一组前提**合乎逻辑的推出**结论**的思维过程。在这里，我们使用命题公式来表达前提和结论。

## Definition

设 $G_1, G_2, \dots, G_n, H$ 是公式，称 $H$ 是 $G_1, G_2, \dots, G_n$ 的逻辑结果当且仅当对任意解释 $I$ ，如果 $I$ 使得 $G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_n$ 为真，则 $I$ 也会使 $H$ 为真。记为 $G_1, G_2, \dots, G_n \Rightarrow H$ 。“ $\Rightarrow$ ”称为蕴涵关系。此时称 $G_1, G_2, \dots, G_n \Rightarrow H$ 为有效的，否则称为无效的。 $G_1, G_2, \dots, G_n$ 称为一组前提，有时用集合 $\Gamma$ 来表示，记为 $\Gamma = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ ， $H$ 称为结论。此时也称 $H$ 是前提集合 $\Gamma$ 的逻辑结果。记为 $\Gamma \Rightarrow H$ 。

# 推理的判定定理

命题逻辑

Lijie W.

推理的基本形式

基本蕴涵关系

## Theorem

公式  $H$  是前提集合  $\Gamma = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$  的逻辑结果当且仅当  $(G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_n) \rightarrow H$  为永真公式。

## Proof.

证明略。



### 判定方法

- 真值表技术。
- 公式转换法。
- 主析取范式法。

# 推理的判定定理

命题逻辑

Lijie W.

推理的基本形式

基本蕴涵关系

## Example

判断推理  $P \rightarrow Q, P \Rightarrow Q$  是否有效？

方法一：真值表技术

| $P$ | $Q$ | $((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q$ |
|-----|-----|--|
| 0   | 0   | 1  |
| 0   | 1   | 1  |
| 1   | 0   | 1  |
| 1   | 1   | 1  |

方法二：公式转换法

$$\begin{aligned} & ((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q \\ = & \neg((\neg P \vee Q) \wedge P) \vee Q \\ = & \neg(\neg P \vee Q) \vee \neg P \vee Q \\ = & \neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee Q) \\ = & 1 \end{aligned}$$

方法三：主析取范式法

$$\begin{aligned} & ((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q = \neg((\neg P \vee Q) \wedge P) \vee Q = \neg(\neg P \vee Q) \vee \neg P \vee Q \\ = & (P \wedge \neg Q) \vee \neg P \vee Q = (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge (\neg Q \vee Q)) \vee ((\neg P \vee P) \wedge Q) \\ = & (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \quad (m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3) \end{aligned}$$

# 推理定律-基本蕴涵关系

命题逻辑

Lijie W.

推理的基本形式

基本蕴涵关系

## Theorem

设  $G, H, I$  为任意的命题公式。

①  $I_1 : G \wedge H \Rightarrow G; \quad I_2 : G \wedge H \Rightarrow H.$

(简化规则)

②  $I_3 : G \Rightarrow G \vee H; \quad I_4 : H \Rightarrow G \vee H.$

(添加规则)

③  $I_5 : G, H \Rightarrow G \wedge H;$

(合取引入规则)

④  $I_6 : G \vee H, \neg G \Rightarrow H; \quad I_7 : G \vee H, \neg H \Rightarrow G.$

(选言三段论)

⑤  $I_8 : G \rightarrow H, G \Rightarrow H;$

(假言推理规则)

⑥  $I_9 : G \rightarrow H, \neg H \Rightarrow \neg G;$

(否定后件式)

⑦  $I_{10} : G \rightarrow H, H \rightarrow I \Rightarrow G \rightarrow I;$

(假言三段论)

⑧  $I_{11} : G \vee H, G \rightarrow I, H \rightarrow I \Rightarrow I;$

(二难推论)

# 基本蕴涵关系举例

命题逻辑

Lijie W.

推理的基本形式

基本蕴涵关系

## Example

- 如果  $a$  是偶数，则  $a$  能被 2 整除； $a$  是偶数。所以， $a$  能被 2 整除。  
可描述为： $P \rightarrow Q, P \Rightarrow Q$  (假言推理规则)
- 如果一个人是单身汉，则他不幸福；如果一个人不幸福，则他死得早。所以，单身汉死得早。  
可描述为： $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$  (假言三段论)
- 若你发电子邮件告诉我密码，则我将完成程序的编写；我没有完成程序的编写。所以，你没有发电子邮件告诉我密码。  
可描述为： $P \rightarrow Q, \neg Q \Rightarrow \neg P$  (否定后件式)
- 这个案件的凶手肯定是王某或陈某；经过调查，王某不是凶手。所以，陈某是凶手。  
可描述为： $P \vee Q, \neg P \Rightarrow Q$  (选言三段论)

命题逻辑

Lijie W.

推理的基本形式

基本蕴涵关系



THE END, THANKS!