命题逻辑

主析取范式和主合取范式

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-

极小项和极大项

☞ 引入主范式

由于范式的不唯一性，我们考虑对构成范式的子句或短语进一步规范化，从而形成唯一的主析取范式和主合取范式。

定义

在含有 n 个命题变元 $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$ 的短语或子句中，若每个命题变元与其否定不同时存在，但二者之一恰好出现一次且仅一次，并且出现的次序与 $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$ 一致，则称此短语或子句为关于 $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$ 的一个极小项或极大项。

一般来说，若有 n 个命题变元，则应有 2^n 个不同的极小项和 2^n 个不同的极大项。

极小项的性质

		$m_{00}(m_0)$	$m_{01}(m_1)$	$m_{10}(m_2)$	$m_{11}(m_3)$
P	Q	$\neg P \wedge \neg Q$	$\neg P \wedge Q$	$P \wedge \neg Q$	$P \wedge Q$
0	0	**1**	0	0	0
0	1	0	**1**	0	0
1	0	0	0	**1**	0
1	1	0	0	0	**1**

- 没有两个不同的极小项是等价的。
- 每个极小项只有一组成真赋值，因此可用于给极小项编码。 编码规律为：命题变元与 1 对应，命题变元的否定与 0 对应。

极大项的性质

		$M_{11}(M_3)$	$M_{10}(M_2)$	$M_{01}(M_1)$	$M_{00}(M_0)$
P	Q	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg P \vee Q$	$P \vee \neg Q$	$P \vee Q$
0	0	1	1	1	**0**
0	1	1	1	**0**	1
1	0	1	**0**	1	1
1	1	**0**	1	1	1

- 没有两个不同的极大项是等价的。
- 每个极大项只有一组成假赋值，因此可用于给极大项编码。 编码规律为：命题变元与 0 对应，命题变元的否定与 1 对应。

极小项和极大项的编码

例

设有 P, Q, R 三个命题变元，给出以下极小项和极大项的编码：

- $\neg P \wedge Q \wedge R$:　$m_{011}(m_3)$
- $P \wedge \neg Q \wedge R$:　$m_{101}(m_5)$
- $\neg P \vee Q \vee R$:　$M_{100}(M_4)$
- $P \vee \neg Q \vee R$:　$M_{010}(M_2)$

根据编码给出相应的极小项或极大项：

- $m_6 = m_{110} = P \wedge Q \wedge \neg R$
- $M_6 = M_{110} = \neg P \vee \neg Q \vee R$

☞ 注意：极小项和极大项的编码方式刚好相反，不要混淆。

极小项和极大项的性质

P	Q	R	极小项	极大项
0	0	0	$m_0 = \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$M_0 = P \vee Q \vee R$
0	0	1	$m_1 = \neg P \wedge \neg Q \wedge R$	$M_1 = P \vee Q \vee \neg R$
0	1	0	$m_2 = \neg P \wedge Q \wedge \neg R$	$M_2 = P \vee \neg Q \vee R$
0	1	1	$m_3 = \neg P \wedge Q \wedge R$	$M_3 = P \vee \neg Q \vee \neg R$
1	0	0	$m_4 = P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$M_4 = \neg P \vee Q \vee R$
1	0	1	$m_5 = P \wedge \neg Q \wedge R$	$M_5 = \neg P \vee Q \vee \neg R$
1	1	0	$m_6 = P \wedge Q \wedge \neg R$	$M_6 = \neg P \vee \neg Q \vee R$
1	1	1	$m_7 = P \wedge Q \wedge R$	$M_7 = \neg P \vee \neg Q \vee \neg R$

1. $m_i \wedge m_j = 0$
   $M_i \vee M_j = 1$
   $(i \neq j)$
2. $m_i = \neg M_i$
   $M_i = \neg m_i$
3. $\bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1$
   $\bigwedge_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0$

主析取范式和主合取范式

定义

- 在给定的析取范式中，若每一个短语都是极小项，且按照编码从小到大的顺序排列，则称该范式为主析取范式(principal disjunctive normal form)。
- 在给定的合取范式中，若每一个子句都是极大项，且按照编码从小到大的顺序排列，则称该范式为主合取范式(principal conjunctive normal form)。
- 如果一个主析取范式不包含任何极小项，则称该主析取范式为“空”；如果一个主合取范式不包含任何极大项，则称主合取范式为“空”。

定理

任何一个公式都有与之等价的主析取范式和主合取范式。

主范式求解定理

证明.

1. 求出该公式所对应的析取范式和合取范式；
2. 消去重复出现的命题变元，矛盾式或重言式；
   $E_1: G \vee G = G$; $E_2: G \wedge G = G$. (幂等律) $E_{15}: \neg G \wedge G = 0$. (矛盾律)
   $E_7: G \vee 0 = G$; $E_8: G \wedge 1 = G$.(同一律) $E_{16}: \neg G \vee G = 1$. (排中律)
   $E_9: G \vee 1 = 1$; $E_{10}: G \wedge 0 = 0$.(零律)
3. 若析取（合取）范式的某一个短语（子句）B_i 中缺少命题变元 P，则可用如下方式将 P 补进去：
   $B_i = B_i \wedge 1 = B_i \wedge (\neg P \vee P) = (B_i \wedge \neg P) \vee (B_i \wedge P)$;
   $B_i = B_i \vee 0 = B_i \vee (\neg P \wedge P) = (B_i \vee \neg P) \wedge (B_i \vee P)$。
   重复至所有短语或子句都是标准的极小项或极大项为止。
4. 利用幂等律将重复的极小项和极大项合并，并利用交换律进行顺序调整，由此可转换成标准的主析取范式和主合取范式。
   $E_1: G \vee G = G$; $E_2: G \wedge G = G$. (幂等律) $E_3: G \vee H = H \vee G$; $E_4: G \wedge H = H \wedge G$.(交换律) $\square$

范式求解方法一、公式转换法

例

求公式 $(P \to Q) \to (Q \wedge R)$ 的主析取范式和主合取范式。

解

1. 求主析取范式

$$
\begin{aligned}
& (P \to Q) \to (Q \wedge R) \\
= \quad & \neg(\neg P \vee Q) \vee (Q \wedge R) \\
= \quad & (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge R) \qquad \text{——析取范式} \\
= \quad & (P \wedge \neg Q \wedge (\neg R \vee R)) \vee ((\neg P \vee P) \wedge Q \wedge R) \\
= \quad & (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \\
= \quad & (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)
\end{aligned}
$$

——主析取范式$(m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7)$

范式求解方法一、公式转换法

例

解 (续)

2. 求主合取范式

$$
\begin{aligned}
& (P \to Q) \to (Q \wedge R) = (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge R) \\
= \quad & (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R) \\
= \quad & (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R) \qquad \text{–合取范式} \\
= \quad & (P \vee Q \vee (\neg R \wedge R)) \wedge (P \vee (\neg Q \wedge Q) \vee R) \wedge ((\neg P \wedge P) \vee \neg Q \vee R) \\
= \quad & (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R) \\
& \wedge(\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \\
= \quad & (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \\
= \quad & (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)
\end{aligned}
$$

—主合取范式$(M_0 \wedge M_1 \wedge M_2 \wedge M_6)$

范式求解方法二、真值表技术

考虑任意公式 G 的主析取范式应该包含哪些极小项:

							选		不选		
P_1	P_2	$\cdots$	P_n	m_0	m_1	$\cdots$	m_i	$\cdots$	m_j	$\cdots$	G
x_1	x_2	$\cdots$	x_n	0	0	0	1	0	0	0	1
y_1	y_2	$\cdots$	y_n	0	0	0	0	0	1	0	0

考虑任意公式 G 的主合取范式应该包含哪些极大项:

							不选		选		
P_1	P_2	$\cdots$	P_n	M_0	M_1	$\cdots$	M_i	$\cdots$	M_j	$\cdots$	G
x_1	x_2	$\cdots$	x_n	1	1	1	0	1	1	1	1
y_1	y_2	$\cdots$	y_n	1	1	1	1	1	0	1	0

范式求解方法二、真值表技术

真值表技术

利用真值表技术求主析取范式和主合取范式的简要方法:

- 列出真值表，选出公式的真值结果为真的所有的行，在这样的每一行中，找到其每一个解释所对应的极小项，将这些极小项进行析取即可得到相应的主析取范式。
- 列出真值表，选出公式的真值结果为假的所有的行，在这样的每一行中，找到其每一个解释所对应的极大项，将这些极大项进行合取即可得到相应的主合取范式。

从真值表按所给的算法求出主范式的方法，称为真值表技术 (technique of truth table)。

范式求解方法二、真值表技术

例

求公式 $G=\neg(P\to Q)\vee R$ 的主析取范式和主合取范式。

P	Q	R	G
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

1. 主析取范式：
   选出真值为真的行：第 2,4,5,6,8 行，分别对应极小项 m_1, m_3, m_4, m_5, m_7，这 5 个极小项构成了该公式的主析取范式。
   $G=\neg(P\to Q)\vee R=(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$
2. 主合取范式：
   选出真值为假的行：第 1,3,7 行，分别对应极大项 M_0, M_2, M_6，这 3 个极大项构成了该公式的主合取范式。
   $G=\neg(P\to Q)\vee R=$
   $(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$

范式的相互转化

由真值表技术可知，对于任一个命题公式而言，主析取范式所使用的极小项的编码和主合取范式所使用的极大项的编码是“互补”的关系。从而我们在求主析取范式和主合取范式时，可根据公式特点，先求出二者之一，然后可直接写出另一个。

例

$$
\begin{aligned}
G &= (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R) \vee (\neg Q \wedge \neg R) \\
&= (P \wedge Q \wedge (\neg R \vee R)) \vee (\neg P \wedge (\neg Q \vee Q) \wedge R) \vee ((\neg P \vee P) \wedge \neg Q \wedge \neg R) \\
&= (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \\
&\quad \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \\
&= (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \\
&\quad \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \\
&= m_0 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_6 \vee m_7 \qquad \text{— 主析取范式}
\end{aligned}
$$

从而，主合取范式为：$G = M_2 \wedge M_5 = (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$

主范式的应用

主范式可用于了解公式的真值情况，进行公式类型的判定以及等价关系的判定。

- 如果主析取范式包含所有的极小项，则该公式为永真公式；
- 如果主合取范式包含所有的极大项，则该公式为永假公式；
- 若两个公式具有相同的主析取范式或主合取范式，则两公式等价。

主范式的应用

例

某研究所要从 A, B, C 三名科研骨干中挑选 1-2 名出国进修人员，由于工作需要，选派时要满足以下条件：若 A 去，则 C 同去；若 B 去，则 C 不能去；若 C 不能去，则 A 或 B 可以去。问该如何选派?

解 设P: 派 A 去; Q: 派 B 去; R: 派 C 去,

则已知条件表示为:$(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow \neg R) \wedge (\neg R \rightarrow (P \vee Q))$.

求出公式的主析取范式:

$$\begin{aligned} G &= (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow \neg R) \wedge (\neg R \rightarrow (P \vee Q)) \\ &= (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee \neg R) \wedge (R \vee (P \vee Q)) \\ &= ((\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg R) \vee (\neg Q \wedge R)) \wedge (P \vee Q \vee R) \\ &= (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \end{aligned}$$

可见，有三种选派方案:

1. C 去，A, B 都不去;
2. B 去，A, C 都不去;
3. A, C 同去，B 不去。

THE END, THANKS!