Kernreproduzierende Hilberträume

nach der 2024S Vorlesung von Michael Kaltenbäck

Ian Hornik

11. März 2024

Inhaltsverzeichnis

※ Einführung

Definition 1.1. Sei $\Omega \neq \emptyset$, $H \leq \mathbb{K}^{\Omega}$, wobei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Sei $(\cdot,\cdot)_H$ ein positiv definites Skalarprodukt so, dass $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ ein Hilbertraum ist.

Dann heißt $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ *kernreproduzierender Hilbertraum* (kurz RKHS), falls für alle $t \in \Omega$ die Abbildungen

$$\pi_t : \begin{cases} H \to \mathbb{K} \\ f \mapsto f(t) \end{cases}$$

beschränkt sind.

Bemerkung 1.2. In Hilberträumen $(H, (\cdot,\cdot))$ ist die Abbildung

$$\Phi : \begin{cases} H \to H' \\ x \mapsto (\cdot, x) \end{cases}$$

stets bijektiv, konjugiert linear und isometrisch. Somit ist es sinnvoll, für $t \in \Omega$ zu setzen

$$k_t^H := \Phi^{-1}(\pi_t).$$

Ist klar um welchen Hilbertraum es geht, so schreiben wir oft auch nur k_t. Damit gilt für $f \in H$ stets $f(t) = \pi_t(f) = (f, k_t^H)$ und $\|k_t^H\| = \|\pi_t$.

Beispiel 1.3. Wir betrachten den Raum

$$\ell^2(I,\mathbb{R}) = \{(x_i)_{i\in I} : \sum_{i\in I} |x_i|^2 < +\infty\} \leq \mathbb{R}^I,$$

versehen mit dem Skalarprodukt

$$((x_i),(y_i))_{\ell^2} = \sum_{i\in I} x_i y_i.$$

Sei $j \in I$ beliebig, so ist die Abbildung $\pi_j((x_i)) = x_j$ klarerweise beschränkt, womit $(\ell^2(I,\mathbb{R}),(\cdot,\cdot)_{\ell^2})$ einen kernreproduzierenden Hilbertraum bildet. Es gilt

$$k_j^{\ell^2(I,\mathbb{R})} = \delta_j (= (\delta_{ij})_{i\in I}).$$

Beispiel 1.4. Wir betrachten $\mathbb{C}_{<n}[z] \leq \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ mit dem Skalarprodukt

$$(f,g) = \int_{-1}^{5} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Da dieser Raum endlichdimensional ist, sind die Abbildungen π_t beschränkt, womit ein RKHS vorliegt. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ existiert also ein $k_t \in \mathbb{C}_{<n}[z]$ mit

$$p(t) = \int_{-1}^{5} p(s)\overline{k_t(s)}\,\mathrm{d}s.$$

Lemma 1.5. Sei $H \leq \mathbb{K}^\Omega$ ein RKHS. Dann gilt

$$\operatorname{clspan}\{k_t : t \in \Omega\} = H.$$

Beweis. Sei $f \in \{k_t : t \in \Omega\}^\perp$, so gilt für alle $t \in \Omega$

$$f(t) = (f,k_t) = 0,$$

womit $f = 0 \in H$ folgt. □

Korollar 1.6. Sei $H \leq \mathbb{C}^\Omega, \Omega \subseteq \mathbb{C}$ nichtleer und offen, und seien alle $f \in H$ holomorph in Ω. Habe nun $M \subseteq \Omega$ einen Häufungspunkt in Ω. Dann gilt

$$\operatorname{clspan}\{k_t : t \in M\} = H.$$

Beweis. Sei $f \perp k_t$ für alle $t \in \Omega$, so folgt $f(z) = 0$ für alle $z \in M$ und damit $f = 0$. □

Bemerkung 1.7. Sei $(G,(\cdot,\cdot)_G)$ ein Hilbertraum über $\mathbb{K}$, sowie $\Omega \neq \emptyset$ und $k : \Omega \to G$. Dann definieren wir:

- $Z := \operatorname{clspan}\{k(t) : t \in \Omega\}$
- $\Psi : G \to \mathbb{K}^\Omega, \Psi(x) = (t \mapsto (x, k(t))_G)$

Dann ist Z ein abgeschlossener Unterraum von G und $\ker \Psi = Z^\perp$. Weiters können wir $\Psi = \Psi|_Z \circ P_Z$ schreiben, wobei P_Z die orthogonale Projektion von auf Z bezeichnet.

Wir definieren $H := \Psi(G) = \Psi(Z) \leq \mathbb{K}^\Omega$, sowie für $f, g \in H$

$$(f, g)_H := ((\Psi|_Z)^{-1}(f), (\Psi|_Z)^{-1}(g))_G.$$

Damit ist $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ ein Hilbertraum.

Für $f \in H$ existiert ein $z \in Z$ mit $f = \Psi(z)$ und es gilt

$$\pi_t(f) = f(t) = \Psi(z)(t) = (z, k(t))_G = (\Psi(z), \Psi(k(t)))_H = (f, \Psi(k(t)))_H.$$

Damit ist also Punktauswertung stetig, und es gilt $k_t^H = \Psi(k(t))$.

Beispiel 1.8. Wir wollen die vorige Bemerkung auf den Raum $G = \ell^2(\mathbb{N}_0, \mathbb{C})$ und

$$k : \begin{cases} \mathbb{D} & \to \ell^2(\mathbb{N}_0) \\ k(w) & = (\overline{w}^n)_{n \in \mathbb{N}_0} \end{cases}$$

anwenden. Es gilt

$$\|k(w)\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=0}^\infty |\overline{w}^n|^2 = \frac{1}{1-|w|^2} < +\infty.$$

Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi : \begin{cases} \ell^2(\mathbb{N}_0) & \to \mathbb{C}^\mathbb{D} \\ (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} & \mapsto (z \mapsto \sum_{n=0}^\infty a_n z^n) \end{cases}.$$

und setzen $H^2(\mathbb{D}) := \Psi(\ell^2(\mathbb{N}_0))$.

Ist nun $(a_n) \in \ker \Psi$, so ist dies äquivalent zu $(a_n) = 0$, womit (mit den Bezeichnungen obiger Bemerkung) $Z = \ell^2(\mathbb{N}_0)$ gilt.

Damit ist $(H^2(\mathbb{D}), (\cdot,\cdot)_{H^2(\mathbb{D})})$ ein Hilbertraum und es gilt

$$k_w^{H^2(\mathbb{D})} = \Psi(k(w)) \in \mathbb{C}^\mathbb{D}.$$

Tatsächlich gilt

$$k_w^{H^2(\mathbb{D})}(z) = \Psi(k(w))(z) = (k(w), k(z))_{\ell^2} = \sum_{n=0}^\infty \overline{w}^n \overline{\overline{z}^n} = \sum_{n=0}^\infty z^n \overline{w}^n = \frac{1}{1-z\overline{w}}.$$

Bemerkung 1.9. Auf dem Raum $H^2(\mathbb{D})$ kann Operatortheorie betrieben werden. Wir betrachten den Rechtsshiftoperator $R : \ell^2(\mathbb{N}_0) \to \ell^2(\mathbb{N}_0)$. Wir setzen $M_. = \Psi \circ R \circ \Psi^{-1}$. Es gilt (mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} := \Psi^{-1}(f)$)

$$\begin{aligned} M_.(f)(z) &= (M_.f, k_z^{H^2(\mathbb{D})})_{H^2(\mathbb{D})} = (\Psi(R\Psi^{-1}(f)), \Psi(k(z)))_{H^2(\mathbb{D})} = \\ &= (R(\Psi^{-1}(f)), k(z))_{\ell^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^n = z \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = z f(z). \end{aligned}$$

Bemerkung 1.10. Wir behaupten, dass

$$H^2(\mathbb{D}) = \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \sup_{r\in[0,1)} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 \,\mathrm{d}t < +\infty\}.$$

Ist $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, so können wir $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ schreiben. Schreiben wir $z = z(t) = re^{it}$, so gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 \,\mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi} \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} a_n r^n e^{itn}\right) \overline{\left(\sum_{m=0}^{N} a_m r^m e^{itm}\right)} \,\mathrm{d}t = \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{m,n=0}^{N} a_n \overline{a_m} r^{n+m} \int_0^{2\pi} e^{it(n-m)} \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}. \end{aligned}$$

Für $r \to 1$ konvergiert dieser Ausdruck gegen $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \in [0, +\infty]$.

TODO: Andere Richtung.

Bemerkung 1.11. Sei $h : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $\|h\|_\infty < +\infty$. Wir betrachten den Operator

$$M_h : \begin{cases} H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D}) \\ \quad f \quad\; \mapsto h \cdot f \end{cases}.$$

Es gilt

$$\sup_{r\in[0,1)} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h(re^{it}) f(re^{it})|^2 \,\mathrm{d}t \le \sup_{r\in[0,1)} \|h\|_\infty^2 \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 \,\mathrm{d}t < +\infty.$$

Damit folgt $\|M_h f\|_{H^2(\mathbb{D})} \le \|h\|_\infty \cdot \|f\|_{H^2(\mathbb{D})}$, womit M_h ein beschränkter Operator mit Abbildungsnorm höchstens $\|h\|_\infty$ ist.

Beispiel 1.12. Wir betrachten $G = \ell^2(\mathbb{N}_0, \mathbb{C})$, sowie die Abbildung $k : \mathbb{D} \to \ell^2(\mathbb{N}_0)$, wobei $k(w) = (c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $c_0 = 0, c_n = \frac{\overline{w}}{\sqrt{n}}$. Dann ist

$$\Psi((a_n)) \cdot z = ((a_n), k(z))_{\ell^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} z^n.$$

Es folgt

$$Z = (\ker \Psi)^\perp = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} : a_0 = 0\}$$

und

$$\mathcal{D} = \Psi(\ell^2(\mathbb{N}_0)) = \Psi(Z)$$

liefert den *Dirichletraum*. Weiters gilt

$$k_w^{\mathcal{D}} = \Psi(k(w))(z) = (k(w), k(z))_{\ell^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{w}^n z^n}{n} = \log \frac{1}{1 - z\overline{w}},$$

wobei log die Umkehrabbildung der komplexen Exponentialfunktion ist. Da $1 - z\overline{w}$ in der rechten Halbebene liegt, liegt auch $\frac{1}{1-z\overline{w}}$ in dieser, womit die letzte Gleichheit gerechtfertigt ist.

Definition 1.13. Sei $H \leq \mathbb{K}^\Omega$ ein RKHS. Wir definieren den *reproduzierenden Kern* von $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ als

$$K_H : \begin{cases} \Omega \times \Omega \to \mathbb{K} \\ (s,t) \mapsto (k_t^H, k_s^H)_H \end{cases}.$$

Satz 1.14. Sei Ω eine nichtleere Menge.

- Seien $H, L \leq \mathbb{K}^\Omega$ RKHS. Gilt $K_H = K_L$, so folgt bereits $H = L$.
- Sei $H \leq \mathbb{K}^\Omega$ ein RKHS. Dann gilt $K_H(s,t) = \overline{K_t(t,s)}$ und für $N \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_N \in \Omega, \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{K}$
$$\sum_{m,n=1}^{N} \overline{\lambda_m} \lambda_n K_H(t_m, t_n) \geq 0.$$
- Erfüllt eine Abbildung $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{K}$ eine Abbildung wie in dem vorigen Punkt, dann existiert ein RKHS H mit $K_H = K$.

Beispiel 1.15. Sei $(G, (\cdot,\cdot)_G)$ ein Hilbertraum. Wir setzen $\Omega = G$ und betrachten

$$k : \begin{cases} \Omega \to G \\ y \mapsto y \end{cases},$$

also $k = \mathrm{id}_G$. Wir setzen

$$\Psi : G \to \mathbb{K}^G, \Psi(y)(x) = (y, x)_G,$$

so gilt $\ker \Psi = \{0\}$ und Ψ bildet bijektiv, linear und isometrisch auf $H := \Psi(G)$ ab. Nun gilt $\Psi(y) = (y, \cdot)_G$ und

$$K_H(x,y) = (k_y^H, k_x^H)_H = (k(y), k(x)) = (y, x)_G.$$