Analytische Zahlentheorie / 2025S

Michael Drmota

Ian Hornik

24. März 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Zahlentheoretische Funktionen 1

2 Komplexe Analysis 6

1 Zahlentheoretische Funktionen

Definition 1.1. Eine *zahlentheoretische Funktion* ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Einer solchen Funktion ordnet man die (formale) *Dirichletsche Reihe* zu:

$$A(s) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}, \quad s \in \mathbb{C}.$$

Beispiel 1.2. Beispiele für zahlentheoretische Funktionen sind:

$$\begin{aligned}
d(n) &\coloneqq \#\{k : k \mid n\} \\
\varphi(n) &\coloneqq \#\{1 \le a \le n \mid \mathrm{ggT}(a,n) = 1\} \\
\mu(n) &\coloneqq \begin{cases} 1, & n = 1, \\ (-1)^r, & n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r, \text{ wobei } p_j \text{ verschiende Primzahlen}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \\
\Lambda(n) &\coloneqq \begin{cases} \log p, & n = p^k, p \in \mathbb{P}, k \ge 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Definition 1.3. Für zahlentheoretische Funktionen a, b definieren eine Summe

$$c(n) \coloneqq (a+b)(n) \coloneqq a(n) + b(n) \quad \leftrightarrow \quad C(s) = A(s) + B(s)$$

und die *Dirichlet-Faltung*:

$$c(n) := (a * b)(n) = \sum_{d|n} a(d)b(n/d) = \sum_{d_1 d_2 = n} a(d_1)b(d_2)$$

$$\leftrightarrow \quad C(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d_1 d_2 = n} a(d_1)b(d_2)}{n^s} = \sum_{d_1 \geq 1} \frac{a(d_1)}{n^s} \cdot \sum_{d_2 \geq 1} \frac{b(d_2)}{n^s} = A(s) \cdot B(s).$$

Beispiel 1.4. Die Dirchlet-Faltung besitzt ein neutrales Element:

$$I(n) = \begin{cases} 1 & n = 1, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I(n)}{n^s} = 1, \quad a * I = I * a = a$$

Lemma 1.5. *Sei a eine zahlentheoretische Funktion. Dann besitzt a ein (bezüglich $*$) inverses Element a^{-1} genau dann wenn $a(1) \neq 0$.*

Beweis.
"$\Rightarrow$" $(a * a^{-1})(1) = a(1) \cdot a^{-1}(1) = 1 = I(1) \implies a(1) \neq 0$
"$\Leftarrow$" $a^{-1}(1) := \frac{1}{a(1)}$, $\quad a^{-1}(n) := -\frac{1}{a(1)} \sum_{d|n, d<n} a(\frac{n}{d})a^{-1}(d), n > 1$

□

Bemerkung 1.6. Besitzt a ein Inverses, so gilt für die Dirichletsche Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{-1}(n)}{n^s} = \frac{1}{A(s)}$$

Definition 1.7. Sei a eine zahlentheoretische Funktion a mit $a \neq 0$.

- a heißt *multiplikativ*, falls $a \neq 0$ und aus $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$ folgt $a(mn) = a(m)a(n)$.
- a heißt *vollständig multiplikativ*, falls $a \neq 0$ und stets $a(mn) = a(m)a(n)$.

Bemerkung 1.8.

- Klarerweise folgt aus vollständig multiplikativ auch multiplikativ.
- Ist a multiplikativ so ist $a(1) = 1$, wegen $a(1) = a(1)a(1)$ und $a(n)a(1) = a(n)$.
- Ist a multiplikativ, so legt $a(p^k), p \in \mathbb{P}, k \geq 1$ die Funktion bereits fest.
- Ist a vollständig multiplikativ, so legt $a(p), p \in \mathbb{P}$ die Funktion bereits fest.

Beispiel 1.9. Die Funktion $J(n) = 1$ ist vollständig multiplikativ und die entsprechende Dirichletsche Reihe ist die *Riemannsche Zeta-Funktion*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} =: \zeta(s).$$

Beispiel 1.10. Die *Möbius-Funktion*

$$\mu(n) := \begin{cases} 1, & n = 1, \\ (-1)^r, & n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r, \text{ wobei } p_j \text{ verschiende Primzahlen,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

ist multiplikativ und es gilt $(\mu * J)(1) = 1$. Ist $n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ mit verschiedenen Primzahlen p_j, so folgt

$$(\mu * J)(n) = \sum_{d|n} \mu(d) = \mu(1) + \mu(p_1) + \ldots + \mu(p_r) + \mu(p_1 p_2) + \ldots + \mu(p_1 \ldots p_r) = (1-1)^r = 0,$$

demnach ist $\mu = J^{-1}$ und damit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

Beispiel 1.11. Für die *Von Mangoldtsche-Funktion* gilt $(\Lambda * J)(1) = 1$. Ist $n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ mit verschiedenen Primzahlen p_j, so folgt

$$(\Lambda * J)(n) = \sum_{d|n} \Lambda(d) = k_1 \log p_1 + k_2 \log p_2 + \ldots k_r \log p_r = \log n,$$

demnach ist $\Lambda = \log^{-1}$. Wegen $(n^{-s})' = -n^{-s} \log n$ erhalten wir weiters

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s} = -\zeta'(s) \quad \text{und damit} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

Beispiel 1.12. Für die *Eulersche Phi-Funktion* gilt

$$(\varphi * J)(n) = \sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Demnach erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^s} = \zeta(s-1) \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}.$$

Satz 1.13. *Sei a multiplikativ, dann ist*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 + \frac{a(p)}{p^s} + \frac{a(p^2)}{p^{2s}} + \ldots\right).$$

Ist a vollständig multiplikativ, dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{a(p)}{p^s}}.$$

Lemma 1.14. *Sind a, b zahlentheoretische Funktionen und sind $a * b$ und a multiplikativ, so ist auch b multiplikativ.*

Beweis. Angenommen dem wäre nicht so, so gäbe es m, n mit $mn > 1$, $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$ und $b(mn) \neq b(m)b(n)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei mn kleinstmöglich mit dieser Eigenschaft. Da $\frac{mn}{d_1 d_2} < mn$, gilt

$$\begin{aligned}(a * b)(mn) &= \sum_{d \mid mn} a(d)b(mn/d) = \sum_{\substack{d \mid mn \\ d > 1}} a(d)b(mn/d) + b(mn) = \\ &= \sum_{\substack{d_1 \mid m, d_2 \mid n \\ d_1 d_2 > 1}} a(d_1)a(d_2)b(m/d_1)b(n/d_2) + b(mn) = \\ &= (a * b)(m) \cdot (a * b)(n) - b(m)b(n) + b(mn).\end{aligned}$$

Da $a * b$ multiplikativ ist folgt $b(mn) = b(m)b(n)$, im Widerspruch. □

Satz 1.15. *Sind a, b multiplikativ, dann sind $a * b$ und a^{-1} ebenfalls multiplikativ.*

Beweis. Seien m, n beliebig mit $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$. Gilt $d \mid mn$, so schreiben wir $d = d_1 d_2$ mit $d_1 \mid m$ und $d_2 \mid n$. Dann gilt $\mathrm{ggT}(d_1, d_2) = 1$ und $\mathrm{ggT}(m/d_1, n/d_2) = 1$ und damit

$$\begin{aligned}(a * b)(mn) &= \sum_{d \mid mn} a(d)b(mn/d) = \sum_{d_1 \mid m} \sum_{d_2 \mid n} a(d_1)a(d_2)b(m/d_1)b(m/d_2) = \\ &= \sum_{d_1 \mid m} a(d_1)b(m/d_1) \sum_{d_2 \mid n} a(d_2)b(n/d_2) = (a * b)(m) \cdot (a * b)(n)\end{aligned}$$

Nun sind a und $a * a^{-1}$ multiplikativ, womit nach obigem Lemma folgt, dass a^{-1} multiplikativ ist. □

Bemerkung 1.16. Sind a, b vollständig multiplikativ, so müssen $a * b$ und a^{-1} im Allgemeinen nicht vollständig multiplikativ sein.

Jedoch gilt in diesem Fall $a^{-1}(n) = a(n)\mu(n)$, da

$$(a * a\mu)(n) = \sum_{d \mid n} a(d)a(n/d)\mu(n/d) = a(n) \sum_{d \mid n} \mu(n/d) = \begin{cases} a(1) = 1, & n = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkung 1.17. Wir wollen $\mu * J = I$ zeigen. Zunächst sind μ und J multiplikativ, womit auch $\mu * J$ multiplikativ ist – wir müssen die Gleichheit also nur auf Primzahlpotenzen überprüfen.

Ist $n = p^k, p \in \mathbb{P}, k \geq 1$, so ist

$$(\mu * J)(p^k) = \sum_{d \mid p^k} \mu(d) \cdot 1 = \mu(1) + \mu(p) = 1 - 1 = 0 = I(p^k),$$

was zu zeigen war.

Bemerkung 1.18. Ist $n = p^k, p \in \mathbb{P}, k \geq 1$, so ist

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = (p-1)p^{k-1} = p^k(1 - 1/p).$$

Aus dem und der Multiplikativität folgt damit (für $n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$):

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = p_1^{k_1-1}(p_1 - 1) \cdots p_r^{k_r-1}(p_r - 1).$$

Weiters kann man zeigen

$$\varphi^{-1}(n) = \prod_{p|n}(1-p).$$

Beispiel 1.19. Wir betrachten

$$Q(x) := \#\{1 \leq n \leq x \mid n \text{ quadratfrei}\} = \sum_{n \leq x} |\mu(n)|.$$

Wir behaupten

$$|\mu(n)| = \sum_{d^2|n} \mu(d).$$

Dazu sehen wir zunächst ein, dass beide Seiten multiplikativ sind. Bei der linken Seite ist es klar – bei der rechten Seite zeigt eine analoge Rechnung zu 1.15 die Multiplikativität.

Schreibe nun $n = p^k, p \in \mathbb{P}, k \geq 1$, so ist

$$\sum_{d^2|p^k} \mu(d) = \begin{cases} \mu(1) = 1, & k = 1, \\ \mu(1) + \mu(p) = 0, & k > 1, \end{cases}$$

womit die Behauptung folgt. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} Q(x) &= \sum_{n \leq x} \sum_{d^2|n} \mu(d) = \sum_{\substack{m,d \\ md^2 \leq x}} \mu(d) = \sum_{d \leq \lfloor\sqrt{x}\rfloor} \mu(d) \cdot \sum_{m \leq \lfloor x/d^2 \rfloor} 1 = \sum_{d \leq \lfloor\sqrt{x}\rfloor} \mu(d) \cdot \left\lfloor \frac{x}{d^2} \right\rfloor = \\ &= x \sum_{d \leq \lfloor\sqrt{x}\rfloor} \mu(d) \frac{1}{d^2} + O(\sqrt{x}). \end{aligned}$$

Weiters gilt

$$\sum_{d \geq 1} \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2},$$

sowie die Abschätzung

$$\left| \sum_{d > \lfloor\sqrt{x}\rfloor} \frac{\mu(d)}{d^2} \right| \leq \sum_{d > \sqrt{x}} \frac{1}{d^2} \leq \frac{1}{x} + \int_{\sqrt{x}}^{\infty} \frac{1}{t^2} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Damit erhalten wir

$$Q(x) = x \left(\frac{6}{\pi^2} + O(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}) \right) + O(\sqrt{x}) = x \frac{6}{\pi^2} + O(1 + \sqrt{x}).$$

2 Komplexe Analysis

Im Folgenden sei stets $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet (offen und einfach zusammenhängend).

Definition 2.1. Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ heißt *analytisch*, wenn es für alle $z_0 \in G$ eine Potenzreihenentwicklung von f um z_0 mit positivem Konvergenzradius gibt.

Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ heißt *komplex differenzierbar* wenn für alle $z_0 \in G$ der Grenzwert

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

existiert.

Bemerkung 2.2. Ist f analytisch, so ist f (stetig) komplex differenzierbar.

Definition 2.3. Sei $f : G \to \mathbb{C}$ und $\gamma : [0,1] \to G$ eine differenzierbare Kurve, dann ist das *komplexe Wegintegral von f über γ* definiert als

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Bemerkung 2.4. Schreiben wir $z = u + iv$ und

$$f(z) = f_1(u,v) + i f_2(u,v),$$

so können wir den Grenzwert in der obigen Definition berechnen als

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{u \to u_0} \frac{f(u,v_0) + i f(u,v_0) - f_1(u_0,v_0) - i f_2(u_0,v_0)}{u - u_0} = \frac{\partial f_1}{\partial u} + i \frac{\partial f_2}{u}, \\
f'(z_0) &= \lim_{v \to v_0} \frac{f(u_0,v) + i f(u_0,v) - f_1(u_0,v_0) - i f_2(u_0,v_0)}{u - u_0} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial f_1}{\partial v} + i \frac{\partial f_2}{\partial v}\right) \\
&= \frac{\partial f_2}{\partial v} - i \frac{\partial f_1}{\partial v}.
\end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = \frac{\partial f_2}{\partial v} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f_2}{\partial u} = -\frac{\partial f_2}{\partial v},$$

die *Cauchy-Riemannschen–Differentialgleichungen*. Weiters können wir schreiben

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma (f_1 + i f_2)(\mathrm{d}u + i\,\mathrm{d}v) = \int_\gamma (f_1\,\mathrm{d}u - f_2\,\mathrm{d}v) + i \int_\gamma (f_2\,\mathrm{d}u + f_1\,\mathrm{d}v),$$

wobei mit dem Satz von Green die Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals folgt.

Bemerkung 2.5. Wir können wegen der Wegunabhängigkeit eine Stammfunktion definieren:

$$F(z) := \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

es gilt also $F'(z) = f(z)$.

Satz 2.6. *Sei $f : G \to \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:*

1. *f ist analytisch.*
2. *f ist stetig komplex differenzierbar.*
3. *$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \,\mathrm{d}z$, wobei γ ein Weg in G mit Windungszahl 1 um z_0 ist.*

Satz 2.7. *Seien $f_n : G \to \mathbb{C}$ analytisch und gelte $f_n \to f$ gleichmäßig auf allen Kompakta $K \subset G$. Dann ist auch f analytisch.*

Bemerkung 2.8. Wir wollen zeigen das für $\Re s > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-s \log n}$$

analytisch sind. Sei also $K \subset \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 1\}$ kompakt, so ist $\sigma_0 := \min \Re K > 1$. Weiters gilt für $s \in K$

$$|e^{-s \log n}| \leq e^{-\sigma_0 \log n} = \frac{1}{n^{\sigma_0}},$$

damit die gleichmäßige Konvergenz auf K und damit nach dem vorigen Satz das zu Zeigende.

Beispiel 2.9. Betrachte die Funktion $f(z) = 1/z, z \neq 0$. f ist in genau einem Punkt nicht analytisch – die Funktion $zf(z)$ jedoch überall. Das motiviert die folgende Definition:

Definition 2.10. z_0 ist eine *Polstelle* einer analytischen Funktion $f : G \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$, wenn es ein $\kappa \geq 1$ gibt, sodass $f(z)(z - z_0)^\kappa$ analytisch auf G ist. Das minimale κ mit dieser Eigenschaft heißt *Ordnung* der Polstelle.

Bemerkung 2.11. Schreiben wir in der obigen Situation

$$g(z) = f(z)(z - z_0)^\kappa = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n,$$

so gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^{n-\kappa}.$$

Letztere Reihe wird auch *Laurentreihe* genannt, die Terme mit negativen Exponenten bilden ihren *Hauptteil*, und der Koeffizient von $1/z$ wird *Residuum* von f in z_0 genannt und wird mit $\mathrm{Res}(f, z_0)$ bezeichnet.

Insbesondere gilt für eine geschlossene Kurve γ mit Windungszahl 1 um z_0:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) \,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (z - z_0)^{n-\kappa} \,\mathrm{d}z = b_{\kappa-1} = \mathrm{Res}(f, z_0).$$

Dieses Resultat wird auch *Residuensatz* genannt.

Satz 2.12 (Partielle Summation)**.** *Es gilt:*

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = \sum_{n=1}^{N} a_n b_N - \sum_{n=1}^{N-1} (b_{n+1} - b_n) \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Oder auch in folgender Variante:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n g(n) = \sum_{n=1}^{N} a_n g(N) - \int_1^N g'(t) \left(\sum_{1 \leq k \leq t} a_k \right) \mathrm{d}t.$$

Bemerkung 2.13. Wie wir bereits gezeigt haben ist $\zeta(s)$ analytisch für $\Re s > 1$. Durch partielle Summation erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} 1 \cdot n^{-s} &= \lfloor N \rfloor N^{-s} + s \int_1^N \lfloor u \rfloor u^{-s-1} \, \mathrm{d}u = \\ &= \mathcal{O}(N^{1-\Re s}) + s \int_1^N u^{-s} \, \mathrm{d}u - s \int_1^N \{u\} u^{-s-1} \, \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir mit $N \to \infty$ und für $\Re s > 1$ die folgende Darstellung:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + 1 - s \int_1^\infty \{u\} u^{-s-1} \, \mathrm{d}u.$$

Der rechte Term konvergiert sogar wenn $\Re s > 0$ und ist analytisch.