Analytische Zahlentheorie

Michael Drmota

Ian Hornik

18. März 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Zahlentheoretische Funktionen

Definition 1.1. Eine *zahlentheoretische Funktion* ist eine Abbildung $a : \{1, 2, \dots\} \to \mathbb{C}$. Einer solchen Funktion ordnet man die (formale) *Dirichletsche Reihe* zu:

$$A(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}, \quad s \in \mathbb{C}.$$

Beispiel 1.2. Beispiele für zahlentheoretische Funktionen sind:

$$d(n) := \#\{k : k \mid n\}$$

$$\varphi(n) := \#\{1 \le a \le n \mid \mathrm{ggT}(a, n) = 1\}$$

$$\mu(n) := \begin{cases} 1, & n = 1, \\ (-1)^r, & n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r, \text{ wobei } p_j \text{ verschiende Primzahlen}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log p, & n = p^k, p \in \mathbb{P}, k \ge 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definition 1.3. Für zahlentheoretische Funktionen a, b definieren eine Summe

$$c(n) := (a + b)(n) := a(n) + b(n) \quad \leftrightarrow \quad C(s) = A(s) + B(s)$$

und die *Dirichlet-Faltung*:

$$c(n) := (a * b)(n) = \sum_{d \mid n} a(d) b(n/d) = \sum_{d_1 d_2 = n} a(d_1) b(d_2)$$

$$\leftrightarrow \quad C(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d_1 d_2 = n} a(d_1) b(d_2)}{n^s} = \sum_{d_1 \geq 1} \frac{a(d_1)}{n^s} \cdot \sum_{d_2 \geq 1} \frac{b(d_2)}{n^s} = A(s) \cdot B(s).$$

Beispiel 1.4. Die Dirchlet-Faltung besitzt ein neutrales Element:

$$I(n) = \begin{cases} 1 & n = 1, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I(n)}{n^s} = 1, \quad a * I = I * a = a$$

Lemma 1.5. *Sei a eine zahlentheoretische Funktion. Dann besitzt a ein (bezüglich $*$) inverses Element a^{-1} genau dann wenn $a(1) \neq 0$.*

Beweis.
"$\Rightarrow$" $(a * a^{-1})(1) = a(1) \cdot a^{-1}(1) = 1 = I(1) \implies a(1) \neq 0$
"$\Leftarrow$" $a^{-1}(1) := \frac{1}{a(1)}, \quad a^{-1}(n) := -\frac{1}{a(1)} \sum_{d|n, d<n} a(\frac{n}{d}) a^{-1}(d), n > 1$

□

Bemerkung 1.6. Besitzt a ein Inverses, so gilt für die Dirichletsche Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{-1}(n)}{n^s} = \frac{1}{A(s)}$$

Definition 1.7. Sei a eine zahlentheoretische Funktion a mit $a \neq 0$.

- a heißt *multiplikativ*, falls $a \neq 0$ und aus $\text{ggT}(m, n) = 1$ folgt $a(mn) = a(m)a(n)$.
- a heißt *vollständig multiplikativ*, falls $a \neq 0$ und stets $a(mn) = a(m)a(n)$.

Bemerkung 1.8.

- Klarerweise folgt aus vollständig multiplikativ auch multiplikativ.
- Ist a multiplikativ so ist $a(1) = 1$, wegen $a(1) = a(1)a(1)$ und $a(n)a(1) = a(n)$.
- Ist a multiplikativ, so legt $a(p^k), p \in \mathbb{P}, k \geq 1$ die Funktion bereits fest.
- Ist a vollständig multiplikativ, so legt $a(p), p \in \mathbb{P}$ die Funktion bereits fest.

Beispiel 1.9. Die Funktion $J(n) = 1$ ist vollständig multiplikativ und die entsprechende Dirichletsche Reihe ist die *Riemannsche Zeta-Funktion*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} =: \zeta(s).$$

Beispiel 1.10. Die *Möbius-Funktion*

$$\mu(n) := \begin{cases} 1, & n = 1, \\ (-1)^r, & n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r, \text{ wobei } p_j \text{ verschiende Primzahlen}, \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases}$$

ist multiplikativ und es gilt $(\mu * J)(1) = 1$. Ist $n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ mit verschiedenen Primzahlen p_j, so folgt

$$(\mu * J)(n) = \sum_{d|n} \mu(d) = \mu(1) + \mu(p_1) + ... + \mu(p_r) + \mu(p_1 p_2) + ... + \mu(p_1 ... p_r) = (1-1)^r = 0,$$

demnach ist $\mu = J^{-1}$ und damit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

Beispiel 1.11. Für die *Von Mangoldtsche-Funktion* gilt $(\Lambda * J)(1) = 1$. Ist $n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ mit verschiedenen Primzahlen p_j, so folgt

$$(\Lambda * J)(n) = \sum_{d|n} \Lambda(d) = k_1 \log p_1 + k_2 \log p_2 + ... k_r \log p_r = \log n,$$

demnach ist $\Lambda = \log^{-1}$. Wegen $(n^{-s})' = -n^{-s} \log n$ erhalten wir weiters

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s} = -\zeta'(s) \quad \text{und damit} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

Beispiel 1.12. Für die *Eulersche Phi-Funktion* gilt

$$(\varphi * J)(n) = \sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Demnach erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^s} = \zeta(s-1) \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}.$$

Satz 1.13. *Sei a multiplikativ, dann ist*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 + \frac{a(p)}{p^s} + \frac{a(p^2)}{p^{2s}} + ...\right).$$

Ist a vollständig multiplikativ, dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{a(p)}{p^s}}.$$

Satz 1.14. *Sind a, b multiplikativ, dann sind $a * b$ und a^{-1} ebenfalls multiplikativ.*

Bemerkung 1.15. Sind a, b vollständig multiplikativ, so müssen $a * b$ und a^{-1} im Allgemeinen nicht vollständig multiplikativ sein.

Jedoch gilt in diesem Fall $a^{-1}(n) = a(n)\mu(n)$, da

$$(a * a\mu)(n) = \sum_{d|n} a(d) a(n/d) \mu(n/d) = a(n) \sum_{d|n} \mu(n/d) = \begin{cases} a(1) = 1, & n = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$