

Diskrete Methoden

nach der 2025W Vorlesung von Alois Panholzer

Ian Hornik

3. März 2025

Inhaltsverzeichnis

❖ Abzählprobleme

Sei \mathcal{A} eine Menge und $w : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Gewichtsfunktion mit der Restriktion $w^{-1}(n) = |\{\sigma \in \mathcal{A} : w(\sigma) = n\}| < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 1.1. Wir betrachten die Familie der Binärbäume, also ein Baum mit der Eigenschaft dass jeder Knoten entweder 0 oder 2 Kinder hat. Erstere Knoten werden auch *externe Knoten* (oder *Blatt*) genannt, letztere auch *interne Knoten*. Als Gewichtsfunktion $w(t)$ wollen wir die Anzahl der internen Knoten von t setzen, also die “Größe” von t .

Wir stellen uns die Frage wieviele Binärbäume es zu einer fixen Größe gibt. Setzen wir $b_n := |w^{-1}(n)|$, so erkennt man leicht, dass

$$b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 5.$$

Man kann folgern

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^n b_k b_{n-k}, \quad n > 0$$

mit $b_0 = 1$.

Beispiel 1.2. Wir betrachten reguläre Ausdrücke und zulässige Klammerungen. Sei \circ eine binäre Operation, welche nicht assoziativ und nicht kommutativ ist. Wir betrachten einen Ausdruck der Form

$$x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_{n+1}$$

mit Variablen x_1, \dots, x_{n+1} . Es stellt sich die Frage auf wieviele (verschiedene) Arten dieser Ausdruck durch Klammerung ausgewertet werden kann. Diese Klammierungen entsprechen auf eindeutiger Weise Binärbaumen, bei denen die Wurzeln gerade die Variablen sind.

Ist $\pi \in S_{n+1}$, so wollen wir wissen auf wieviele Arten man Ausdrücke der Form $x_{\pi(1)} \circ \dots \circ x_{\pi(n+1)}$ zulässig Klammern kann. Bezeichnen wir diese Anzahl mit a_n , so folgt

$$a_n = (n+1)!b_n.$$

Es stellt sich die Frage auf wie viele Arten wir aus zulässigen Klammierungen von x_1, \dots, x_{n+1} ein x_{n+1} einfügen können um auf eine zulässige Klammerung von x_1, \dots, x_{n+2} zu erhalten.