$(s_n)_{n=0}^{\infty}$ Folge in $\mathbb{R}$ (Daten). Dann $\exists \mu$ pos. Maß (und alle Momente existieren), $\forall n \in \mathbb{N}$: $s_n = \int_{\mathbb{R}} t^n \,\mathrm{d}\mu$ (Lösung).

Idee: Man baut sich ein Operator-Modell und stellt fest, dass ein gewisser Teil von diesem Operatormodell schon durch die Daten festgelegt ist. Wir wollen also diesen Teil erweitern und damit eine Lösung erhalten.

1. Sei μ ein positives Maß af $\mathbb{R}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : \int_R |t|^n \,\mathrm{d}\mu < \infty$.

$$\rightsquigarrow \langle L^2(\mu), M_t, 1\rangle,$$

   wobei M_t den Multiplikationsoperator mit t bezeichnet und 1 die konstante 1-Funktion. Wir haben also einen Hilbertraum ($L^2(\mu)$), einen selbstadjungierten Operator (M_t) und das Element 1. Dieses ist “nicht nur” ein Element, sondern ein erzeugendes Element in dem Sinn, dass $\mathrm{cls}\{(M_t - z)^{-1}1 : z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\} = L^2(\mu)$.

   Aus diesem Modell können wir uns μ rekonstruieren als $E_{1,1}$, wobei E das Spektralmaß von M_t ist.

   Wir sehen also: Hat man ein Tupel $\langle H, A, v\rangle$ bestehend aus einem Hilbertraum H, einem selbstadjungierten Operator A und einem Element v, so kann man “das μ rekonstruieren”, nämlich genau als Maß $E_{v,v}$ (endl. pos. Maß auf $\mathbb{R}$), wobei E das Spektralmaß von A bezeichnet.

2. Sei nun angenommen wir haben Daten und eine Lösung, also μ ein positives Maß auf $\mathbb{R}$ und $\forall n \in \mathbb{N} : \int_{\mathbb{R}} |t|^n \,\mathrm{d}\mu < \infty$. Sei $s_n := \int_{\mathbb{R}} t^n \,\mathrm{d}\mu$. Dann erhalten wir auf $\mathbb{C}[z] \subseteq L^2(\mu)$ ein Skalarprodukt

$$(p, q) := \int_{\mathbb{R}} p\bar{q} \,\mathrm{d}\mu.$$

   Dann ist

$$(\sum_n \alpha_n t^n, \sum_m \beta_m t^m) = \sum_{n,m} s_{n+m} \alpha_n \bar{\beta_m}.$$

   Man kennt also $\mathrm{cl}\mathbb{C}[t]/(\mu - \text{fü}) \subseteq L^2(\mu)$ sogar *nur* aus $(s_n)_{n=0}^{\infty}$. Wir kennen also

$$M_t|_{\mathbb{C}[t]} : \mathbb{C}[t] \to \mathbb{C}[t]$$

   (was wir mit S_0 bezeichnen) bereits *nur* aus ?? (Daten).

3. Sei $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ Folge reeller Zahlen.

$$\rightsquigarrow \langle \mathbb{C}[t], S_0, 1\rangle.$$

   Also einen linearen Raum ($\mathbb{C}[t]$), eine lineare Abbildung (S_0) und ein Element (1). Wir definieren also eine symmetrische Bilinearform

$$(\sum_n \alpha_n t^n, \sum_m \beta_m t^m) := \sum_{n,m} s_{n+m} \alpha_n \bar{\beta_m}.$$

   Wir hätten allerdings gerne ein pos. semidef. Skalarprodukt, bzgl. dem S_0 symmetrisch ist. Das geht also z.B. falls $\forall N : \det(s_{n+m})_{n,m=0}^{N} \geq 0$.

4. Für die Folge
$$s_n := \int_{\mathbb{R}} t^n \, \mathrm{d}\mu$$
gilt $\forall N : \det(s_{n+m})_{n,m=0}^N \geq 0$.

5. Sei $(s_n)_{n=0}^\infty$ eine Folge reeler Zahlen mit $\forall N : \det(s_{n+m})_{n,m=0}^N \geq 0$. Betrachte
$$\langle \mathbb{C}[t], S_0, 1 \rangle$$
und eine Erweiterung
$$\langle H, A, u \rangle,$$
in dem Sinne, dass $\iota : \mathbb{C}[t] \to H$ isometrisch und $\iota \circ S_0 = A \circ \iota$ (beachte $\iota(\mathrm{dom} S_0) \subseteq \mathrm{dom} A$) und $u = \iota(1)$. Setze $\mu := E_{u,u}$, wobei E das Spektralmaß von A ist. Dann ist μ ein positives Maß und es gilt für $n \in \mathbb{N}$
$$\begin{aligned} s_n &= (t^n, 1)_{\mathbb{C}[t]} = (S_0^n 1, 1)_{\mathbb{C}[t]} = ([\iota \circ S_0^n]1, \iota(1))_H = (A^n \iota(1), \iota(1)) = \\ &= (A^n u, u) = \int_{\mathbb{R}} t^n \, \mathrm{d}E_{u,u}. \end{aligned}$$

Wir formulieren also die Fragestellung neu ...

- Für welche $(s_n)_{n=0}^\infty$ gibt es eine Lösung?
- Wenn es eine Lösung, beschreibe alle Lösungen.

... und beantworten sie.

Existenz von Lösungen: Gegeben $(s_n)_{n=0}^\infty$ eine Folge reeller Zahlen. Dann gibt es eine positives Maß μ auf $\mathbb{R}$ mit $s_n = \int_{\mathbb{R}} t^n \, \mathrm{d}\mu$ genau dann wenn für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt $\det(s_{n+m})_{n,m=1}^N \geq 0$. (Dies haben wir in (5) gezeigt.)

Beschreibe alle Lösungen: Es gibt eine Formel die Bijektion zwischen einer Menge von Parametern und Lösungsmenge herstellt (falls die Lösungsmenge mindestens zwei Elemente hat).
$$\int_{\mathbb{R}} = \frac{1}{z-t} \, \mathrm{d}\mu(t) = \frac{A(z)\tau(z) + B(z)}{C(z)\tau(z) + D(z)},$$
wobei A, B, C, D auf $\mathbb{C}$ analytische Funktionen sind welche durch $(s_n)_{n=0}^\infty$ gegeben sind. Der Parameter τ Parameter durchläuft $\{f : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C} : \text{analytisch und } \Im f \geq 0\}$.