Komplexe Analysis

Martin Blümlinger
Inst. 101
TU Wien

SS 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Möbiustransformationen

1.1 Definition und Darstellung

Abbildungen der Form $\mathbb{C}^* \mapsto \mathbb{C}^* : \ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ heißen für $ad - bc \neq 0$ *Möbiustransformation* (MT).

Für $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0$ entartet die Abbildung zu einer konstanten Abbildung bzw. ist überhaupt nicht definiert. Für

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq 0$$

sind die entsprechenden Möbiustransformationen gleich bzw. wir dürfen bei der Untersuchung von Möbiustransformation o.B.d.A. annehmen, dass $ad - bc = 1$ oder für $c \neq 0$ dass $c = 1$ gilt.

Man verifiziert unmittelbar durch Nachrechnen:

Lemma 1. *Eine Möbiustransformation $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ ist bijektiv $\mathbb{C}^* \mapsto \mathbb{C}^*$ mit Umkehrabbildung*

$$z \mapsto \frac{dz-b}{-cz+a}. \tag{1}$$

und die Zusammensetzung von Möbiustransformationen ergibt eine Möbiustransformation.

Wählt man insbesondere für jede Möbiustransformation jene Matrixdarstellung für die $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1$ *gilt, so erhält man einen Gruppenisomorphismus von der Gruppe der Möbiustransformationen auf $SL(2)$ (Gruppe der 2x2-Matrizen mit Determinante 1).*

Satz 2. *Jede Möbiustransformation kann als Zusammensetzung folgender drei Möbiustransformationen dargestellt werden:*

- *Translation $\tau_s : \ z \mapsto z + s$, $s \in \mathbb{C}$*
- *Drehstreckung $m_a : \ z \to az$, $a \in \mathbb{C}$*
- *Inversion $\iota : \ z \to \frac{1}{z}$, $z \neq 0, \iota(0) = \infty$.*

Beweis. Wir betrachten die Möbiustransformation $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$. Für $c = 0$ oder $a = 0$ ist die Behauptung klar. Für $c \neq 0$ können wir o.B.d.A. $c = 1$ wählen und erhalten

$$\frac{az+b}{z+d} = \frac{az+ad+b-ad}{z+d} = a + \frac{b-ad}{z+d} = \tau_a \circ m_{b-ad} \circ \iota \circ \tau_d(z)$$

und diese Möbiustransformation ist als Zusammensetzung obiger elementarer Transformationen darstellbar. $\square$

1.2 Kreistreue Abbildungen

Definition 3. *Ein verallgemeinerter Kreis ist ein Kreis oder eine Gerade in* $\mathbb{C}^*$.

Eine Abildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *heißt kreistreu, wenn sie verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise abbildet.*

Lemma 4. *Möbiustransformationen sind kreistreu.*

Beweis. Die elementaren Möbiustransformationen τ_s und m_a sind klarerweise kreistreu, d.h. sie bilden Kreis auf Kreis und Gerade auf Gerade ab, wie man unmittelb. aus den Kreis bzw. Geradengleichungen

$$|z-a|^2 = z\bar{z} - a\bar{z} - \bar{a}z + a\bar{a} = r^2 \quad \text{und} \quad az + \bar{a}\bar{z} = d$$

abliest.

Unter Inversion $z \mapsto \frac{1}{z} = w$ geht obige Kreisgleichung in

$$(r^2 - a\bar{a})w\bar{w} + aw + \bar{a}\bar{w} = 1$$

über. Für $r^2 - a\bar{a} = 0$ ist dies eine Geradengleichung.

Anderenfalls erhält man nach Division durch $r^2 - a\bar{a}$ die Kreisgleichung

$$\left(w + \frac{\bar{a}}{r^2 - |a|^2}\right)\left(\bar{w} + \frac{a}{r^2 - |a|^2}\right) = \frac{r^2}{(r^2 - |a|^2)^2}.$$

Die Geradengleichung

$$az + \bar{a}\bar{z} = d$$

geht für $d = 0$ unter $w = \frac{1}{z}$ in die Geradengleichung $a\bar{w} + \bar{a}w = 0$ über.

Für $d \neq 0$ gibt obige Geradengleichung die Kreisgleichung

$$\left(w - \frac{\bar{a}}{d}\right)\left(\bar{w} - \frac{a}{d}\right) = \frac{|a|^2}{d^2} + 1 = \frac{|a|^2 + d^2}{d^2}. \qquad \square$$

Satz 5. *[von Ptolemäus (2. Jht. n. C.)] Die Eckpunkte eines Vierecks liegen genau dann auf einem Kreis, wenn die Summe der Produkte der Längen gegenüberliegender Seiten gleich dem Produkt der Längen der Diagonalen sind, also genau wenn für* $z_1, \ldots, z_4$ *die aufeinanderfolgenden Eckpunkte bezeichnen* $|z_1 - z_2||z_3 - z_4| + |z_2 - z_3||z_4 - z_1| = |z_1 - z_3||z_2 - z_4|$ *gilt.*

Beweis. Wir fassen $\mathbb{R}^2$ als $\mathbb{C}$ auf und dürfen, da Translationen kreistreu sind annehmen, dass $z_1 = 0$ gilt. Die Inversion ist ebenfall kreistreu und führt z_1 in ∞ über, also einen Kreis, der z_1 enthält in eine Gerade. Nach der Dreiecksungleichung sind die drei Punkte $\frac{1}{z_2}, \frac{1}{z_3}, \frac{1}{z_4}$ genau dann kollinear, wenn

$$\left|\frac{1}{z_3} - \frac{1}{z_2}\right| + \left|\frac{1}{z_4} - \frac{1}{z_3}\right| = \left|\frac{1}{z_4} - \frac{1}{z_2}\right|$$

gilt. Wegen

$$\left|\frac{1}{z_3}-\frac{1}{z_2}\right|+\left|\frac{1}{z_4}-\frac{1}{z_3}\right|=\left|\frac{1}{z_4}-\frac{1}{z_2}\right| \Leftrightarrow |z_2-z_3||z_4|+|z_3-z_4||z_2|=|z_2-z_4||z_3|$$

$$\Leftrightarrow |z_2-z_3||z_4-z_1|+|z_3-z_4||z_2-z_1|=|z_2-z_4||z_3-z_1| \tag{2}$$

folgt die Behauptung. □

1.3 Dreipunkteformel und Doppelverhältnis

Satz 6. *Für paarweise verschiedene Punkte $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}^*$ ist jede Möbiustransformation f durch die Bilder $f(\alpha),f(\beta),f(\gamma)$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Für $\alpha=0,\beta=1,\gamma=\infty$ und $c\neq 0$ ($\Leftrightarrow f(\infty)\neq\infty$) können wir o.B.d.A. $c=1$ annehmen, also $f(z)=\frac{az+b}{z+d}$ folgt $f(0)=\frac{b}{d}$ und $f(\infty)=a$. Weiters gilt

$$f(1)=\frac{a+b}{1+d}=\frac{f(\infty)+f(0)d}{1+d}, \text{ also } d=\frac{f(\infty)-f(1)}{f(1)-f(0)}$$

und damit

$$\begin{aligned} f(z)&=\frac{f(\infty)z+f(0)\frac{f(\infty)-f(1)}{f(1)-f(0)}}{z+\frac{f(\infty)-f(1)}{f(1)-f(0)}}\\ &=\frac{f(\infty)(f(1)-f(0))z+f(0)(f(\infty)-f(1))}{(f(1)-f(0))z+f(\infty)-f(1)}. \end{aligned} \tag{3}$$

Für $c=0$ ($\Leftrightarrow f(\infty)=\infty$) wählen wir o.B.d.A. $d=1$ und erhalten $f(0)=b$ und $f(1)=a+b$ also $a=f(1)-f(0)$, womit $f(z)=(f(1)-f(0))z+f(0)$ folgt.

Im allgemeinen Fall (Bestimmen der Möbiustransformation, die z_1,z_2,z_3 auf w_1,w_2,w_3 abbildet) bestimmen wir zuerst eine Möbiustransformation $f^{-1}_{z_1,z_2,z_3}$, die z_1,z_2,z_3 nach $0,1,\infty$ abbildet als Inverse der Transformation f_1 die $0,1,\infty$ auf $z_1,z_2.z_3$ abbildet wie in (3) berechnet. Danach eine Transformation f_{w_1,w_2,w_3}, die $0,1,\infty$ auf w_1,w_2,w_3 abbildet und erhalten so die gesuchte Abbildung

$$w=f(z)=f_{w_1,w_2,w_3}\circ f^{-1}_{z_1,z_2,z_3}(z). \tag{4}$$

Insbesondere ist jede Möbiustransformation durch die Bilder von 3 Punkten eindeutig bestimmt. □

Aus der Darstellung (4) erhalten wir

$$f^{-1}_{z_1,z_2,z_3}(z)=f^{-1}_{w_1,w_2,w_3}(w) \tag{5}$$

und mit (3) und dem *Doppelverhältnis* $DV(z,z_1,z_2,z_3)$

$$f^{-1}_{z_1,z_2,z_3}(z)=\frac{(z_2-z_3)z+z_1(z_3-z_2)}{(z_2-z_1)z+z_3(z_1-z_2)}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z_1-z_2)(z_3-z)}=: DV(z,z_1,z_2,z_3).$$

Gleichung (5) lässt sich wie folgt formulieren:

Lemma 7. *Für eine Möbiustransformation f und 4 paarweise verschiedene Punkte in $\mathbb{C}^*$ ist das Doppelverhältnis dieser Punkte gleich dem Doppelverhältnis ihrer Bildpunkte:*

$$DV(z,z_1,z_2,z_3) = DV(f(z),f(z_1),f(z_2),f(z_3)). \tag{6}$$

Diese Gleichung kann zur Berechnung einer Möbiustransformation bei Kenntnis der Bildpunkte dreier verschiedener Punkte verwendet werden:

Lemma 8. *Für jede Möbiustransformation f, welche die paarweise verschiedenen Punkte z_1,z_2,z_3 in die Punkte w_1,w_2,w_3 überführt gilt:*

$$\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z_1-z_2)(z_3-z)} = \frac{(f(z)-w_1)(w_2-w_3)}{(w_1-w_2)(w_3-f(z))}.$$

Diese Beziehung wird *Sechspunkteformel* genannt. Löst man diese Gleichung nach $f(z)$ so erhält man die Möbiustransformation f.

1.4 Spezielle Möbiustransformationen

Lemma 9. *Möbiustransformationen, die $\mathbb{R}$ auf sich abbilden sind genau jene, welche eine Darstellung mit reellen Koeffizientan haben.*

Beweis. Sind in der Abbildung $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ alle Koeffizienten a,b,c,d reell, so bildet diese Abbildung klarerweise $\mathbb{R}$ auf sich ab.

Löst man für $z,z_1,z_2,z_3,w,w_1,w_2,w_3 \in \mathbb{R}$ die Gleichung $DV(z,z_1,z_2,z_3) = DV(w,w_1,w_2,w_3)$ nach w, so sind alle auftretenden Terme reell und w hat als Funktion eine Darstellung $\frac{az+b}{cz+d}$ mit a,b,c,d reell. □

Beispiel 10. *Wir bestimmen alle Möbiustransformationen, die die obere Halbebene $\mathbb{H}$ auf sich abbilden.*

Eine Möbiustransformation die $\mathbb{H}$ auf sich abbildet bildet $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ ab.

Jede Möbiustransformation, die $\mathbb{R}^*$ auf $\mathbb{R}^*$ abbildet, bildet als Bijektion von $\mathbb{C}^*$ auf sich die zusammenhängenden Teilmengen $\pm\mathbb{H}$ auf $\pm\mathbb{H}$ ab und zwar $\mathbb{H}$ genau dann auf $\mathbb{H}$, wenn $\Im\left(\frac{a\mathrm{i}+b}{c\mathrm{i}+d}\right) > 0$ gilt, was wegen

$$\frac{a\mathrm{i}+b}{c\mathrm{i}+d} = \frac{(a\mathrm{i}+b)(-c\mathrm{i}+d)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \mathrm{i}\frac{ad-bc}{c^2+d^2}$$

genau für $ad-bc > 0$ gilt.

Für eine Möbiustransformation die $\mathbb{R}^*$ auf sich abbildet sind für z,z_i,w_i, $1 \le i \le 3$ reell alle auftretenden Terme in der Sechspunkteformel reell und die Möbiustransformation hat damit eine Darstellung mit reellen Koeffizienten.

Umgekehrt ist für eine gebrochen lineare Abbildung mit reellen Koeffizienten klarerweise w reell, wenn z reell ist.

Die gesuchten Möbiustransformationen sind also genau jene mit einer Darstellung mit reellen Koeffizienten und $ad-bc > 0$.

Korollar 11. *4 Punkte in $\mathbb{C}^*$ liegen genau dann auf einem verallgemeinerten Kreis, wenn ihr Doppelverhältnis reell ist.*

Beweis. Für eine Möbiustransformation f, die 3 dieser Punkte nach $\mathbb{R}$ abbildet, muss auch der 4. Punkt nach R abgebildet werden, wenn er auf dem durch diese 3 Punkte bestimmten Kreis liegt. Das Doppelverhältnis der 4 gegebenen Punkte ist aber gleich dem DV ihrer Bildpunkte und damit reell.

Ist das DV von 4 Punkten reell und f eine Möbiustransformation, die z_2, z_3, z_4 nach $\mathbb{R}$ abbildet, so erhält man, wenn man das DV von $f(z_1), \dots, f(z_4)$ nach $f(z_1)$ auflöst eine lineare Gleichung in $f(z_1)$ mit reellen Koeffizienten, womit auch $f(z_1)$ reell ist. Damit liegen dann die Bilder $z_1 \dots, z_4$ von $f(z_1), \dots, f(z_4)$ unter der Möbiustransformation f^{-1} auf einem verallgemeinerten Kreis. $\square$

Bemerkung 12. *Mit dem Doppelverhältnis kann man Satz 5 von Ptolemäus auch wie folgt beweisen: Durch direktes Nachrechnen verifiziert man, dass für $z_1, \dots, z_4 \in \mathbb{C}$ immer*

$$(z_1 - z_3)(z_2 - z_4) = (z_1 - z_2)(z_3 - z_4) + (z_3 - z_2)(z_4 - z_1),$$

also

$$DV(z_1, z_3, z_2, z_4) = -DV(z_1, z_2, z_3, z_4) + 1 \tag{7}$$

gilt. Die Behauptung (2) kann aber als

$$|DV(z_1, z_3, z_2, z_4)| = |DV(z_1, z_2, z_3, z_4)| + 1 \tag{8}$$

geschrieben werden. Aus (2) folgt

$$|DV(z_1, z_3, z_2, z_4)| = |DV(z_1, z_2, z_3, z_4) + 1| \tag{9}$$

(8) und (9) gelten beide genau wenn $DV((z_1, z_2, z_3, z_4)$ positiv reell ist. Nach Korollar 11 ist das genau dann der Fall, wenn $z_1, \dots, z_4$ auf einem verallgemeinerten Kreis liegen und diese Punkte beim Durchlaufen des Kreises in dieser Reihenfolge auftreten.

Lemma 13. *Möbiustransformationen, die den Einheitskreis $\mathbb{D}$ auf sich abbilden sind genau jene der Gestalt*

$$e^{i\xi}\varphi_{z_0}(z) = e^{i\xi}\frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}, \quad \xi \in [0, 2\pi),\ z_0 \in \mathbb{D}. \tag{10}$$

Die Inverse der Abbildung φ_{z_0} ist φ_{-z_0}, $\varphi_{z_0}(0) = -z_0$ und für die Ableitung gilt $\varphi'_{z_0} = \frac{1 - z_0\bar{z}_0}{(1-\bar{z}_0 z)^2}$.

Beweis. Eine Abbildung, welche die reelle Gerade auf den Rand $\partial\mathbb{D}$ des Einheitskreises $\mathbb{D}$ abbildet erhalten wir, wenn wir jene Möbiustransformation σ berechnen, die $-1, 0, 1$ auf $-1, -i, 1$ abbildet, denn wegen der Kreistreue wird $\mathbb{R}$ (der einzige verallg. Kreis der $-1,0,1$ enthält) auf einen Kreis abgebildet. Der einzige Kreis in $\mathbb{C}$ der $-1,-\mathrm{i},1$ enthält ist aber der Einheitskreis. Die Sechspunkteformel gibt

$$\frac{-(z+1)}{-(1-z)} = \frac{(w+1)(-\mathrm{i}-1)}{(-1+\mathrm{i})(1-w)}$$

und durch Lösen nach w: $w = \sigma(z) = \frac{\mathrm{i}z+1}{z+\mathrm{i}}$ bzw. durch Lösen nach z : (oder Berechnung der Umkehrtransformation) $z = \sigma^{-1}(w) = \frac{-\mathrm{i}w+1}{z-\mathrm{i}}$.

Möbiustransformationen θ, die $\mathbb{R}$ auf sich abbilden entsprechen so vermöge $\theta = \sigma^{-1} \circ \psi \circ \sigma$ Möbiustransformationen ψ die $\mathbb{D}$ auf sich abbildet. Nach Lemma 9 bilden genau die Möbiustransformationen mit reellen Koeffizienten $\mathbb{R}$ auf sich ab und wir erhalten für eine Möbiustransformation θ, die $\partial\mathbb{D}$ auf sich abbildet die Matrixdarstellung

$$\begin{aligned}\theta =& \sigma^{-1} \circ \psi \circ \sigma \sim \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 \\ 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} a+d+\mathrm{i}(c-b) & c+b+\mathrm{i}(d-a) \\ c+b+\mathrm{i}(a-d) & a+d+\mathrm{i}(b-c) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

mit a,b,c,d reell. Für $\alpha = a+d+\mathrm{i}(c-b)$, $\beta = c+b+\mathrm{i}(a-d)$ und $\frac{\alpha}{\bar\alpha} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}$, $\frac{\beta}{\alpha} = -z_0$ erhalten wir

$$\theta(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\bar\beta z+\bar\alpha} = \frac{\alpha}{\bar\alpha}\frac{z+\frac{\beta}{\alpha}}{\frac{\bar\beta}{\bar\alpha}z+1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}\frac{z-z_0}{1-\bar z_0 z}.$$

Offensichtlich bildet $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}\varphi_{z_0}$ z_0 auf 0 ab und genau für $z_0 \in \mathbb{D}$ ist $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}\varphi_{z_0}$ das Bild von $\mathbb{D}$ gleich $\mathbb{D}$ (für $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\bar{\mathbb{D}}$ ist das Bild $\mathbb{C}\setminus\bar{\mathbb{D}}$).

Die Berechnung der Inversen und der Ableitung ist elementar. □

Lemma 14. *Zu je 2 disjunkten Kreisen in $\mathbb{C}^*$ gibt es eine Möbiustransformation f, die diese Kreise auf konzentrische Kreise abbildet.*

Beweis. Zunächst dürfen wir nach Anwendung einer geeigneten Möbiustransformation annehmen, dass der erste Kreis die Gerade $1+\mathrm{i}\mathbb{R}$ ist und der zweite Kreis in der Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 1\}$ liegt, die reelle Achse im rechten Winkel in $a,b > 1$ schneidet und damit Mittelpunkt $(a+b)/2$ hat.

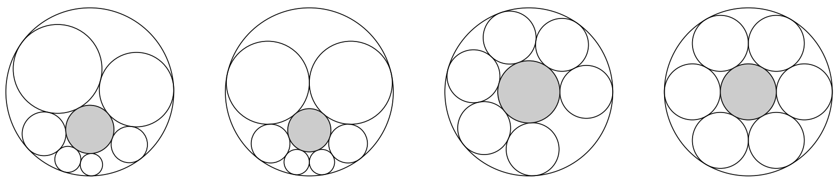
Unter einer Möbiustransformation wird ein Kreismittelpunkt i.A. nicht in den Kreismittelpunkt des Bildkreises übergeführt. Allerdings sind Möbiustransformationen konform. Da unsere Kreise die reelle Achse im rechten Winkel schneiden, schneiden die Bilder dieser Kreise unter einer Möbiustransformation auch das Bild der reellen Achse unter dieser Transformation im rechte Winkel. Wir betrachten für $\lambda > 0$ die Abbildung $\iota_\lambda : z \mapsto \frac{1}{1+\lambda(z-1)}$. Diese bildet $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ auf sich ab und 1 auf

1, sowie ∞ auf 0. Damit ist das Bild von $1+\mathrm{i}\mathbb{R}$ unter ι_λ der Kreis mit Radius $1/2$ und Mittelpunkt $1/2$ und der Mittelpunkt des zweiten Kreises ist

$$\frac{\iota_\lambda(a)+\iota_\lambda(b)}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\lambda(a-1)}+\frac{1}{1+\lambda(b-1)}\right).$$

Für $\lambda = ((a-1)(b-1))^{-1/2}$ sind die beiden Bildkreise dann konzentrisch mit Mittelpunkt $1/2$. $\square$

Beispiel 15. *Als Anwendung betrachten wir einen Kreis K der den Abschluss eines zweiten Kreises K_i im Inneren enthält. Dann wählen wir einen Kreis K_1 der beide Kreise berührt, dann einen weiteren K_2, der diese drei Kreise berührt und fahren so fort solange der Kreis K_1 nicht schneidet.*



Man würde annehmen, dass es bei gegebenem K, K_i von der Wahl des Kreises K_3 abhängt, ob der letzte Kreis K_3 berührt oder schneidet. Durch Möbiustransformationen bleibt aber diese Eigenschaft erhalten. Wenden wir gemäß Lemma 14 eine Möbiustransformation an, die die beiden Kreise K und K_i in konzentrische Kreise überführt, so sieht man, dass es nur von K und K_i, aber nicht von der Wahl des Kreises K_1 abhängt ob der letzte Kreis den ersten berührt oder nicht.

2 Integralformeln und Reihenentwicklungen

2.1 Integralsätze

Für Funktionen f, die eine Stammfunktion F besitzen Wegintegrale über geschlossene rektifizierbare Wege γ stets 0 sind, folgt, dass für geschlossene Wege γ stets $\int_\gamma c\,dz = \int_\gamma z\,dz = 0$ gilt. Insbesondere gilt für geschlossene Wege γ:

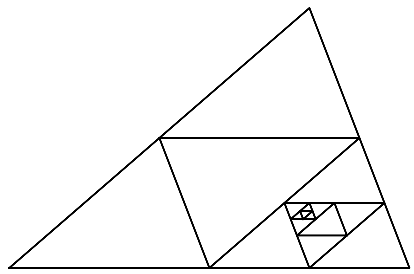
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)\,dz. \tag{11}$$

Satz 16 (Cauchyscher Integralsatz für Dreiecke)**.** *Sei f in einem Gebiet G holomorph und Δ ein abgeschlossenes Dreieck in G. Dann gilt*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0.$$

Beweis. Es bezeichne $\operatorname{diam}(\Delta)$ den Durchmesser des Dreiecks Δ, d.h. die längste Seitenlänge von Δ und U den Umfang, d.h. die Summe der Seitenlängen.

Angenommen es sei $|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz| =: I \neq 0$. Wir betrachten die Folge $\Delta = \Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \cdots \supset \Delta_j$ von Dreiecken, die wir induktiv wie folgt definieren: Gilt $|\int_{\partial\Delta_j} f(z)\,dz| \geq I4^{-j}$, so muss für mindestens eines der 4 Teildreiecke $\Delta_{j,1}, \ldots \Delta_{j,4}$ von Δ_j die wir erhalten, wenn wir die Seitenmittelpunkte miteinander verbinden wegen



$$\left|\sum_{k=1}^{4} \int_{\partial\Delta_{j,k}} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{\partial\Delta_j} f(z)\,dz\right| \geq 4^{-j}I$$

$\left|\int_{\partial\Delta_{j,k}} f(z)\,dz\right| \geq 4^{-(j+1)}I$ für mindestens ein $k \in \{1, \ldots, 4\}$ gelten. Wir wählen Δ_{j+1} als $\Delta_{j,k}$ für ein solches k. Wegen $\Delta_j \supset \Delta_{j+1}$ und $\operatorname{diam}(\Delta_j) = 2^{-j}\operatorname{diam}(\Delta)$ gilt $\cap_j \Delta_j = \{z_0\}$ für ein $z_0 \in \Delta$.

Die komplexe Differenzierbarkeit von f in z_0 besagt aber, dass es für alle $\varepsilon > 0$ eine Umgebung V von z_0 gibt für die $|f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)| < \varepsilon(z - z_0)$ für alle $z \in V$ gilt. Wählen wir $\varepsilon < I/(U\operatorname{diam}(\Delta))$, so erhalten wir mit (11) und j so groß, dass Δ_j in V liegt:

$$\left|\int_{\partial\Delta_j} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{\partial\Delta_j} f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)\,dz\right| < \varepsilon U 2^{-j}\operatorname{diam}(\Delta)2^{-j} < 4^{-j}I$$

im Widerspruch zu unserer Konstruktion der Folge $(\Delta_j)_j$. $\square$

Dieser Satz lässt sich auf konvexe Gebiete verallgemeinern:

Satz 17 (Cauchyscher Integralsatz für kompakte konvexe Mengen)**.** *Ist K kompakt und konvex, ∂K rektifizierbar, f holomorph im Inneren von K und stetig auf K fortsetzbar, so gilt*

$$\int_{\partial K} f(\zeta)\,d\zeta = 0.$$

Beweis. Wir beweisen den Satz zuerst unter der Annahme, dass f in einem Gebiet G, das K enthält, holomorph ist.

Für ein Wegintegral über einen geschlossenen Polygonzug P, der eine konvexe Teilmenge von G berandet erhalten wir

$$\int_P f(\zeta)\,d\zeta = \sum_{j=0}^{N} \int_{[p_j,p_{j+1}]} f(\zeta)\,d\zeta = \sum_{j=0}^{N} \int_{\partial\Delta_j} f(\zeta)\,d\zeta = 0, \tag{12}$$

wenn für ein a aus dem Inneren des vom Poylgonzug P berandeten Gebietes Δ_j das Dreieck mit den Eckpunkten a, ζ_j, ζ_{j+1} bezeichnet, da sich die bei der Integration über $\partial\Delta_j$ und $\partial\Delta_{j+1}$ auftretenden Integrale $\int_{[a,\zeta_{j+1}]} f(\zeta)\,d\zeta$ bzw, $\int_{[\zeta_{j+1},a]} f(\zeta)\,d\zeta$ aufheben und $\int_{\Delta_j} f(\zeta)\,d\zeta = 0$ nach Satz 16 gilt.

Es folgt mit (12) für die Riemannsummen

$$\begin{aligned} \left|\sum_{j=0}^{N} f(\gamma(\alpha_j))(\gamma_{j+1}-\gamma_j)\right| &= \left|\sum_{j=0}^{N} \int_{[\gamma_j,\gamma_{j+1}]} f(\gamma(\alpha_j)) - f(\zeta)\,d\zeta\right| \\ &\leq \sup_{t\in[t_i,t_{i+1}]} |f(\gamma(\alpha_j)) - f(\gamma(t))| L(P) \end{aligned} \tag{13}$$

definiert, wobei $L(P)$ die Länge des Polygonzuges P ist. Da K kompakt und f auf K stetig ist, ist f auf K gleichmäßig stetig, d.h. für $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit $|f(\zeta) - f(\zeta')| < \varepsilon$ für $|\zeta - \zeta'| < \delta$. Der Weg γ ist stetig, also gleichmäßig stetig, womit folgt, dass $|\gamma(t) - \gamma(\alpha_j)| < \delta$ für $|t - \alpha_j| < \delta'$ gilt. Ist die Feinheit der Zerlegung in obiger Riemannsumme kleiner δ', so folgt $|f(\gamma(\alpha_j)) - f(\gamma(t))| < \varepsilon$ für $t \in [t_j, t_{j+1}]$ und mit (12) und (13):

$$\left|\int_{\partial K} f(\zeta)\,d\zeta\right| < \varepsilon L(\partial K).$$

Da ε beliebig war, folgt die Behauptung des Satzes für f holomorph in $G \supset K$.

Ist f holomorph im Inneren von K und stetig auf K fortsetzbar, so gilt die Behauptung für $F_{\lambda,a}(K)$, $0 < \lambda < 1$ und $F_{\lambda,a}(x) := a + \lambda(x-a)$ für einen Innerer Punkt a von K, da $F_{\lambda,a}(K)$ im Inneren von K liegt, wo f holomorph ist. f ist auf der kompakten Menge K gleichmäßig stetig, damit konvergiert für jeden Polygonzug P mit Eckpunkten ζ_j in ∂K die Folge der Riemannsummen $\sum_j f(F_{\lambda,a}(\alpha_j))(F_{\lambda,a}(\zeta_{j+1}) - F_{\lambda,a}(\zeta_j))$ für $\lambda \to 1$ gegen $\sum_j f(\alpha_j)(\zeta_{j+1} - \zeta_j)$ woraus mit dem zuvor bewiesenen Spezialfall

$$\begin{aligned}
\int_{\partial K} f(\zeta)\,d\zeta &= \lim_{P} \sum_{j} f(\alpha_j)(\zeta_{j+1}-\zeta_j) \\
&= \lim_{F_{\lambda,a}(P)} \sum_{j} f(F_{\lambda,a}(\alpha_j))(F_{\lambda,a}(\zeta_{j+1})-F_{\lambda,a}(\zeta_j)) \\
&= \int_{F_{\lambda,a}(\partial K)} f(\zeta)\,d\zeta = 0
\end{aligned}$$

folgt. □

Korollar 18. *Ist G ein Gebiet, K ein Kreis in G der ein offenes Dreieck Δ beinhaltet und f eine in $G \setminus \Delta$ holomorphe Funktion. Dann gilt*

$$\int_{\partial\Delta} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{\partial K} f(\zeta)\,d\zeta. \tag{14}$$

Insbesondere gilt für $z \in \Delta$

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial\Delta} \frac{1}{(\zeta-z)^n}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial K} \frac{1}{(\zeta-z)^n}\,d\zeta = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & n>1. \end{cases}$$

Beweis. Wir wählen drei Punkte B_1, B_2, B_3 des Kreises K so, dass wenn wir sie mit den Eckpunkten A_1, A_2, A_3 des eingeschlossenen Dreiecks Δ verbinden, der Kreis in drei von je einer Dreiecksseite $[A_i, A_j]$, den Strecken $[A_i, B_i]$ und $[B_j, A_j]$ sowie den zwischen B_i und B_j liegenden Kreisbogen berandeten Teilmengen M_1, M_2, M_3 und dem Dreieck Δ zerlegt wird und die Mengen M_i konvex sind.

Wegen Satz 17 gilt $\int_{\partial M_i} f(\zeta)\,d\zeta = 0$ und damit

$$0 = \sum_{i=1}^{3} \int_{\partial M_i} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{\partial K} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{\partial\Delta} f(\zeta)\,d\zeta,$$

da sich die Integrale über die Strecken $[A_i, B_i]$ wegen ihrer entgegengesetzten Orientierung aufheben, womit (14) folgt.

Wenden wir dieses Ergebnis auf die in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ holomorphe Funktion $f(\zeta) = \frac{1}{(\zeta-z_0)^n}$ und ein Dreieck, das z_0 im Inneren enthält an, sowie einen Kreis mit Mittelpunkt z_0 und Radius r, der Δ enthält an, so erhalten wir mit (14):

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Delta} \frac{1}{(\zeta-z_0)^n}\,d\zeta &= \int_{\partial K} \frac{1}{(\zeta-z_0)^n}\,d\zeta = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} \frac{r}{(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,dt \\
&= \mathrm{i}r^{1-n}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-n)t}\,dt = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i} & n=1 \\ 0 & n>1. \end{cases}
\end{aligned}$$

□

2.2 Integralformeln

Ähnlich wie den Cauchyschen Integralsatz für Dreiecke beweisen wir:

Satz 19 (Cauchysche Integralformel für Dreiecke)**.** *Sei f in einem Gebiet G holomorph und Δ ein abgeschlossenes Dreieck in G. Dann gilt, für $z \in \Delta \setminus \partial\Delta$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Beweis. Die Definition der komplexen Differenzierbarkeit besagt, dass $\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}$ für $\zeta \to z$ gegen ein $f'(z) \in \mathbb{C}$ konvergiert. Damit wird $\int_{\partial\tilde{\Delta}} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} d\zeta$ beliebig klein, wenn $\tilde{\Delta}$ ein Dreieck in einer hinreichend kleinen Umgebung von z ist. Nach Korollar 18 gilt $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\tilde{\Delta}} \frac{1}{\zeta-z} d\zeta = 1$, woraus

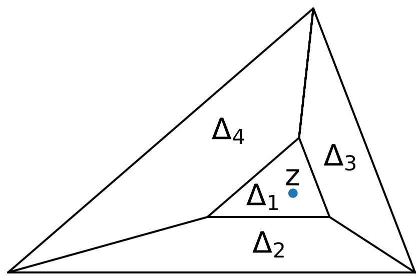
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\tilde{\Delta}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\tilde{\Delta}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{f(z)}{2\pi i} \int_{\partial\tilde{\Delta}} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$$

folgt.

Aus $\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\tilde{\Delta}} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} d\zeta \right| < \varepsilon$ folgt $\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\tilde{\Delta}} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - f(z) \right| < \varepsilon$ wenn $\tilde{\Delta}$ eine hinreichend kleine Umgebung von z ist.

Es bleibt also zu zeigen, dass es für jede Umgebung V von z ein abgeschlossenes Dreieck $\tilde{\Delta}$ mit $z \in \tilde{\Delta} \setminus \partial\tilde{\Delta} \subset V$ gibt mit

$$\int_{\partial\tilde{\Delta}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\partial\Delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{15}$$



Wir wählen ein abgeschlossenes Dreieck $\tilde{\Delta}$, das aus Δ durch eine Streckung mit einem reellen Faktor und einer Translation hervorgeht, ganz in $\Delta \setminus \partial\Delta$ liegt und z als inneren Punkt hat. Dann verbinden wir die einander entsprechenden Eckpunkte dieser Dreiecke und erhalten so eine Zerlegung von Δ in $\tilde{\Delta}$ und 3 konvexe 4-Ecke und es gilt

$$\int_{\partial\Delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\Delta_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{16}$$

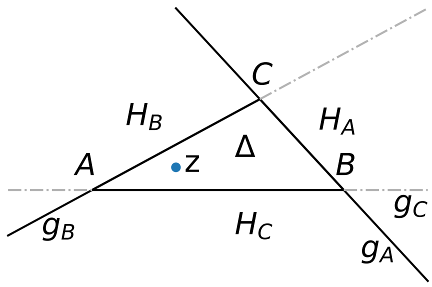
Wegen $z \in \Delta_1$, $z \notin \Delta_j$ für $2 \leq j \leq 4$ ist $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ holomorph in den konvexen Vierecken Δ_j, womit $\int_{\partial\Delta_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = 0$ nach Satz 16 für $2 \leq j \leq 4$ gilt. Damit folgt (15) aus (16). $\square$

Satz 20. *Ist K kompakt und konvex in dem Gebiet G, f holomorph in G und $z \in \mathbb{C} \setminus \partial K$, so gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z) & z \in K \setminus \partial K \\ 0 & z \in K^{\complement}. \end{cases}$$

Beweis. Sei Δ ein in K liegendes abgeschlossenes Dreieck mit den Eckpunkten A, B, C, das z als inneren Punkt enthält.

Es seien g_A, g_B, g_C die drei durch die durch Punktepaare B, C bzw. A, C bzw. A, B definierten Geraden, sowie H_A, H_B, H_C jene durch diese Geraden definierten offenen Halbebenen von $\mathbb{C}$, die disjunkt zu Δ sind. Dann ist $\mathbb{C} \setminus (g_A \cup g_B \cup g_C)$ die disjunkte Vereinigung von $\Delta \setminus \partial\Delta$, $M_1 := H_A$, $M_2 := H_B \cap \overline{H_A}^{\complement}$ und $M_3 := H_C \cap \overline{H_B}^{\complement} \cap \overline{H_C}^{\complement}$.



Als Durchschnitt konvexer Mengen sind die Mengen M_j konvex und damit auch die Schnitte mit der konvexen Menge K. Da sich die Integrale im Inneren von K aufheben gilt

$$\int_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\partial\Delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \sum_{j=1}^{3} \int_{M_j \cap K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ ist aber in den Mengen $M_j \cap K$ für $j = 1, 2, 3$ holomorph, sodass obige Integrale über diese Mengen nach Satz 17 verschwinden, womit $\int_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\partial\Delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ gilt. Das Integral rechts ist aber nach Satz 19 gleich $2\pi i f(z)$.

Für $z \in \mathbb{C} \setminus K$ ist der Integrand holomorph in K und die Aussage folgt aus Satz 17. $\square$

2.3 Reihenentwicklungen

Aus dieser Integralformel für Kreisscheiben erhalten wir

Satz 21 (Taylorreihenentwicklung)**.** *Ist die Funktion f holomorph in einem Gebiet G, das die offene Kreisscheibe $K_{z_0,R}$ enthält, so gilt für $z \in K_{z_0,R}$:*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad mit \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z - z_0| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta.$$

Beweis. Es gilt nach der Cauchyschen Integralformel Satz 20

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\zeta - z_0| = R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\zeta - z_0| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\zeta - z_0| = R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^k d\zeta \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\zeta - z_0| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta (z - z_0)^k,
\end{aligned}
$$

wobei die in ζ gleichmäßige Konvergenz der Reihe wegen $|z - z_0| < R = |\zeta - z_0|$ klar ist und die Vertauschung von Summation mit Integration rechtfertigt. □

Hat eine holomorphe Funktion f in z_0 eine Nullstelle, so bezeichnen wir das kleinste $n \in \mathbb{N}$ für das $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ gilt als die *Ordnung der Nullstelle* bzw. wir sagen f hat in z_0 eine Nullstelle unendlicher Ordnung falls $f^{(n)}(z_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Korollar 22. *Holomorphe Funktionen sind unendlich oft komplex differenzierbar mit Ableitung*

$$
f^{(n)}(z_0) = n! a_n = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z - z_0| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.
$$

Damit ist jede holomorphe Funktion stetig komplex differenzierbar.

Beweis. Als holomorphe Funktion erlaubt sie eine Potenzreihenentwicklung. Durch Potenzreihen definierte Funktionen sind im Inneren ihres Konvergenzkreises unendlich oft differenzierbar mit obiger Ableitung. □

Korollar 23. *Ist f in einem Gebiet G holomorph und hat in $z_0 \in G$ eine Nullstelle der Ordnung $n \in \mathbb{N}$, so gibt es eine in G holomorphe Funktion g mit $g(z_0) \neq 0$ und $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ in G.*

Hat f in z_0 eine Nullstelle unendlicher Ordnung, so ist f in G konstant 0.

Beweis. Hat f die Taylorentwicklung $f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ mit $a_n \neq 0$, so ist nach Korollar 22 n die Ordnung der Nullstelle und f kann faktorisiert werden: $f(z) = (z - z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n} (z - z_0)^k$ wobei der Konvergenzradius von $\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n} (z - z)$ gleich dem von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = f(z)$ ist und $\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n} (z - z_0)^k$ die gesuchte Funktion g darstellt. □

Im Folgenden werden wir noch die Cauchysche Integralformel für Kreisringe benötigen:

Satz 24. *Ist f holomorph in dem Kreisring $R = \{w : r_1 \leq |w - z_0| \leq r_2\}$, so gilt:*

$$\int_{K_{z_0,r_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{K_{z_0,r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} 2\pi i f(z) & z \in R \setminus \partial R \\ 0 & z \in \mathbb{C} \setminus R, \end{cases} \tag{17}$$

wobei K_{z_0,r_i} den Kreis mit Radius r_i um z_0 bezeichnet.

Beweis. Da f in R holomorph ist, gibt es zu $w \in K_{z_0,r_1}$ ein $\rho_w > 0$ mit f ist holomorph in der offenen ρ_w- Kugel um w. Wählt man ρ_w maximal, so ist ρ_w als Funktion von w stetig und es gibt, da K_{z_0,r_1} kompakt ist ein $\rho > 0$, sodass f holomorph in $\{w : r_1 - \rho \leq |w - z_0| \leq r_2\}$ ist.

Für geschlossene Polygonzüge $\mathcal{P}$ mit Eckpunkten P_j in K_{z_0,r_1}, deren Feinheit hinreichend klein ist, ist sichergestellt, dass sie in $\{w : r_1 - \rho \leq |w - z_0| \leq r_1\}$ enthalten sind. Da das von $[P_j, P_{j+1}]$ und dem Kreisbogen von K_{z_0,r_1}, der P_j mit P_{j+1} verbindet definierte Kreissegment S_i konvex ist, folgt wegen $z \notin S_i$ aus Satz 17 $\int_{S_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0$. Das Integral über den Rand des Schnittes des P_j, P_{j+1} enthaltenden Kreissegments mit der z_0 nicht enthaltende Halbebene mit Randpunkten P_j, P_{j+1} ist damit gleich dem Integral über den Schnitt des Kreisringes mit diesem Sektor. Erstere Menge ist aber konvex und wir erhalten, wenn wir den Polygonzug so wählen, dass z nicht auf einem Strahl $\overrightarrow{z_0, P_j}$ liegt (17) aus Satz 20.

Für $z \in \mathbb{C} \setminus K$ kann der Polygonzug $\mathcal{P}$ so fein gewählt werden, dass z nicht in dem von K_{z_0,r_2} und $\mathcal{P}$ berandeten Gebiet liegt. Schreibt man das Integral über den Rand dieser Menge wieder als Grenzwert der Summe der Integrale über die Schnitte mit den durch die Punkte P_i erzeugten Kreissegmente, so folgt aus Satz 17, dass das Integral in (17) verschwindet. □

Satz 25 (Laurentreihenentwicklung)**.** *Ist f in einem Kreisring $R := \{z : r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2\}$ holomorph, so hat f eine für $r_1 \leq |z| \leq r_2$ in R konvergente Reihenentwicklung*

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n \text{ mit } a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_{z_0,\rho}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Dabei ist $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (z - z_0)^n$ für $|z - z_0| < r_2$ und $\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}} a_n (z - z_0)^n$ für $|z - z_0| > r_1$ konvergent und das Integral über $|\zeta - z_0| = \rho$ für $r_1 \leq \rho \leq r_2$ unabhängig von ρ. Die Reihe $\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0} a_n (z - z_0)^n$ heißt Hauptteil.

Die Laurentreihenentwicklung ist eindeutig, d.h. ist f in R durch $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n (z - z_0)^n$ darstellbar, so gilt $a_n = b_n$ für $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Es gilt nach der Cauchyschen Integralformel für Kreisringe Satz 24:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{K_{z_0,r_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{K_{z_0,r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{K_{z_0,r_2}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)(1-\frac{z-z_0}{\zeta - z_0})}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{K_{z_0,r_1}} \frac{f(\zeta)}{(z - z_0)(1-\frac{\zeta-z_0}{z - z_0})}\,d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{K_{z_0,r_2}} f(\zeta)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{K_{z_0,r_1}} f(\zeta)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^k}{(z - z_0)^{k+1}}\,d\zeta
\end{aligned}$$

Die Reihe im ersten Integral konvergiert für $|\zeta - z_0| = r_2$ gleichmäßig, die im zweiten Integral für $|\zeta - z_0| = r_1$. Damit kann die Integration mit der Summation vertauscht werden und wir erhalten

$$\begin{aligned}
f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k \frac{1}{2\pi i}\int_{K_{z_0,r_2}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,d\zeta \\
+ \sum_{k=-\infty}^{-1}(z-z_0)^k \frac{1}{2\pi i}\int_{K_{z_0,r_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,d\zeta.
\end{aligned}$$

Da $\frac{f(\zeta)}{(z-z_0)^k}$ in R holomorph ist, bleiben obige Integrale unverändert, wenn wir für den Integrationsweg $K_{z_0,\rho}$ statt K_{z_0,r_1} bzw. K_{z_0,r_2} für ein ρ mit $r_1 < \rho < r_2$ wählen. Damit erhalten wir

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(z-z_0)^k \frac{1}{2\pi i}\int_{K_{z_0,\rho}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,d\zeta.$$

Gilt $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n(z-z_0)^n$ in R, so konvergiert diese Potenzreihe im kompakten Teilmengen von R gleichmäßig. Damit darf die Reihenentwicklung mit Integration über $K_{z_0,\rho}$ für $r_1 < \rho < r_2$ vertauscht werden und es folgt:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_{z_0,\rho}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_{z_0,\rho}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta. \qquad \square$$

2.4 Folgerungen

Lemma 26. *Ist Ω offen und konvex, f holomorph in Ω und $a \in \Omega$. Dann ist*

$$F(z) := \int_{[a,z]} f(\zeta)\,d\zeta \quad z \in \Omega \tag{18}$$

eine Stammfunktion von f in Ω.

Beweis. Für $z_0 \in \Omega$ folgt wegen Satz 16 $F(z) - F(z_0) = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta$, wenn $\int_{[z_0,z]}$ das Integral längs des Weges $\gamma(t) = tz + (1-t)z_0$, $t \in [0,1]$

$$\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z-z_0}\int_{[z_0,z]} f(\zeta) - f(z_0)\,d\zeta = 0. \qquad \square$$

In diesem Beweis wurde nur für $\int_{[a,z]} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{[a,z_0]} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta$ die komplexe Differenzierbarkeit verwendet. Setzt man diese Eigenschaft voraus, so erhalten wir die Existenz einer Stammfunktion und damit die komplexe Differenzierbarkeit der Funktion F aus (18) und damit:

Satz 27 (Morera)**.** *Gilt für eine stetige Funktion f in einem Gebiet G und alle abgeschlossenen Dreiecke Δ in G*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0,$$

so ist f holomorph in G.

Satz 28. *Eine ganze Funktion die einer Wachstumsbedingung $|f(z)| \leq A + B|z|^n$ genügt ist ein Polynom höchstens n-ter Ordnung.*

Beweis. Nach Satz 21 hat f eine in $\mathbb{C}$ konvergente Taylorreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \text{ mit } a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{K(0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}\,d\zeta.$$

Aus der Wachstumsbedingung folgt

$$|a_k| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\varphi})|}{r^{k+1}} r\,d\varphi \leq \frac{1}{2\pi} \frac{A + Br^n}{r^{k+1}} 2\pi r = \frac{A + Br^n}{r^k}$$

und da $\frac{A+Br^n}{r^k} \to 0$ für $r \to \infty$ und $k > n$ folgt $a_k = 0$ für $k > n$. □

Korollar 29 (Liouville)**.** *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Satz 30. *[Fundamentalsatz der Algebra] Jedes Polynom n-ten Grades hat mit ihrer Vielfacheit gezählt genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$.*

Beweis. Jedes Polynom n-ten Grades gibt bei Division durch ein Polynom m-ten Grades ein Polynom $n-m$-ten Grades mit Restpolynom vom Grad kleiner m. Bei Division des Polynoms P durch das Polynom $x - x_0$ muss dieses Restpolynom konstant c sein, und wenn x_0 eine Nullstelle von P ist wegen $P = Q(x - x_0) + c$ c gleich 0, wie man durch Einsetzen von 0 für x sieht. Man kann also jedes Polynom P das eine Nullstelle x_0 hat durch Abspalten des linearen Faktors $x - x_0$ als $P = (x - x_0)Q$ mit einem Polynom Q, dessen Grad um 1 kleiner ist als der von P ist, darstellen und es genügt zu zeigen, dass jedes Polynom vom Grad > 0 eine Nullstelle hat.

Hat ein Polynom P keine Nullstelle in $\mathbb{C}$, so ist $1/P$ eine ganze Funktione, die falls P nicht konstant ist für $x \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Damit ist $1/P$ in $\mathbb{C}$ ganz und beschränkt und nach Liouville konstant. Dann ist aber auch P im Widerspruch zur Annahme konstant. □

Als Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes beweisen wir

Satz 31 (Caylay-Hamilton)**.** *Für das charaktersitische Polynom p einer $n \times n$-Matrix A gilt $p(A) = 0$.*

Beweis. Für eine $n \times n$ Matrix ist die von Neumann-Reihe

$$(zE-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-1}A^k, \quad |z| > \|A\|$$

die matrixwertige Verallgemeinerung der geometrischen Reihe (Beweis wie bei ebendieser durch Multiplikation der Partialsummen mit $zE - A$), wobei die Reihe für $|z| > \rho > \|A\|$ gleichmäßig konvergiert.

Für eine in der abgeschlossenen Kreisscheibe mit Radius R um 0 holomorphe Funktion f gilt für das matrixwertige Integal

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{K_{0,R}} f(z)(zE-A)^{-1}\,dz =& \frac{1}{2\pi i}\int_{K_{0,R}} f(z)\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-1}A^k\,dz\\ =& \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty} A^k \int_{K_{0,R}} f(z)z^{-k-1}\,dz.\end{aligned}$$

Hier ist das matrixwertige Integral als komponentenweises Integral aufzufassen. Speziell gilt für ein Monom $f(z) = z^l$ nach Korollar 18:

$$\int_{K_{0,R}} z^l z^{-k-1}\,dz = \begin{cases} 2\pi i & l = k \\ 0 & l \neq k \end{cases}$$

und damit, wenn wir $(zE-A)^{-1}$ nach der Cramerschen Regel als $\frac{1}{p(z)}M(z)$ darstellen,

$$q(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_{0,R}} q(z)(zE-A)^{-1}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_{0,R}} \frac{q(z)}{p(z)}M(z)\,dz,$$

wobei p das charakteristische Polynom der Matrix $zE - A$ und $M(z)$ die durch die Minoren von $zE - A$ gebildete Matrix ist, deren Eintragungen Polynome in z sind. Es folgt mit dem Cauchyschen Integralsatz 17

$$p(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_{0,R}} M(z)\,dz = 0. \qquad \square$$

2.5 Nullstellen und isolierte Singularitäten

Satz 32. *Ist f in z_0 holomorph mit $f'(z_0) \neq 0$, so gibt es eine Umgebung U von z_0, sodass auf $f(U)$ eine holomorphe Umkehrfunktion von f existiert.*

Ist f in der Nullstelle z_0 der Ordnung $1 \leq n < \infty$ holomorph, so gibt es eine in z_0 holomorphe Funktion g mit $g(z_0) \neq 0$ für die

$$f(z) = ((z-z_0)g(z))^n \tag{19}$$

in einer Umgebung von z_0 gilt.

Ist f holomorph nicht konstant, so ist f eine offene Abbildung, d.h. das Bild offener Mengen ist offen.

Für $n > 1$ gibt es eine Umgebung V von z_0 für die $f(V)$ ein Kreis K um $f(z_0)$ ist, in dem es für $w \in K \setminus \{z_0\}$ genau n Lösungen der Gleichung $f(z) = w$ in V gibt.

Beweis. Aus Korollar 23 folgt, dass f die Darstellung $f(z) = (z - z_0)^n \phi(z)$ mit einer in einer Umgebung U von z_0 holomorphen Funktion ϕ mit $\phi(z_0) \neq 0$ erlaubt. Damit ist ϕ'/ϕ in z_0 holomorph und besitzt nach Lemma 26 in einer Umgebung von z_0 eine Stammfunktion h. Es folgt $(\exp(-h)\phi)' = \exp(-h)(\phi' - h'\phi) = \exp(-h)(\phi' - \frac{\phi'}{\phi}\phi) = 0$ und damit $\phi = c\exp(h)$ für eine Konstante c und es folgt (19) mit $\tilde{c}\exp(h(z)/n) = g(z)$ und $\tilde{c}$ einer n-ten Wurzel von c.

Für $n = 1$ folgt die lokale Existenz einer Umkehrabbildung und deren Differenzierbarkeit aus dem Hauptsatz über implizite Funktionen. Die komplexe Differenzierbarkeit der Umkehrabbildung folgt, da die Inverse einer Matrix der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ wieder von dieser Form ist, womit die Umkehrabbildung dort holomorph ist. Insbesondere ist für $n = 1$ $f(U)$ eine Umgebung von $f(z_0)$.

Ist die Ordnung der Nullstelle > 1, so hat $\psi(z) := (z - z_0)g(z)$ eine Nullstelle 1. Ordnung und bildet nach dem soeben bewiesenen z_0-Umgebungen U auf $\psi(z_0)$-Umgebungen W ab. Für einen hinreichend kleinen Kreis $K_{0,r}$ um $\psi(z_0)$ ist $\psi^{-1}(K_{0,r})$ wegen der Stetigkeit von ψ eine Umgebung V von z_0 und ψ ist biholomorph von V auf $K_{0,r}$. Die Gleichung $z^n = w$ hat für $w \in K_{0,r} \setminus \{z_0\}$ genau n Lösungen, womit es genau n Lösungen der Gleichung $f(z) = u$ für $u \in K_{0,r^n} \setminus \{0\}$ und $z \in V$ gibt. Insbesondere ist dann das Bild einer z_0-Umgebung eine $f(z_0)$-Umgebung.

Ist z_0 keine Nullstelle von f, so ist z_0 eine Nullstelle von $\tilde{f}$: $\tilde{f}(z) := f(z) - f(z_0)$ und bildet für f nicht konstant Umgebungen U von z_0 auf Umgebungen V von $\tilde{f}(z_0)$ ab, womit f U auf die $f(z_0)$-Umgebung $f(z_0) + V$ abbildet. f ist also falls nicht konstant eine offene Abbilung. □

Korollar 33 (Maximumsprinzip)**.** *Eine in einem Gebiet G nichtkonstante holomorphe Funktion hat in G kein betragsmäßiges Maximum.*

Beweis. Da eine nichtkonstante Funktion f nach Satz 32 eine offene Abbildung ist, kann Sie in einem Gebiet kein betragsmäßiges Maximm annehmen. □

Korollar 34 (Satz von der Gebietstreue)**.** *Ist f nicht konstant und holomorph in einem Gebiet G, so ist $f(G)$ ein Gebiet.*

Beweis. Das stetig Bild einer zusammenhängenden Menge ist zusammenhängend und f ist nach Satz 32 offen. □

Ist G offen in $\mathbb{C}$ $z_0 \in G$ und f definiert und holomorph in $G \setminus \{z_0\}$. Dann heißt z_0 *isolierte Singularität* von f. Ist G offen und f eine in $G \setminus \{z_1, z_2, \ldots\}$ holomorphe Funktion so sagen wir f ist bis auf isolierte Singularitäten in $\{z_1, z_2, \ldots\} \subset G$ holomorph in G.

Existiert für eine isolierte Singularität in z_0 eine holomorphe Fortsetzung auf G, so heißt z_0 eine *hebbare Singularität*.

Satz 35 (Klassifikation isolierter Singularitäten)**.** *Für eine isolierte Singularität der Funktion f in z_0 gilt genau einer der folgenden Fälle:*

i) (Hebbare Singularität) $\lim_{z \to z_0} f(z)$ *existiert in $\mathbb{C}$ und f hat in z_0 eine hebbare Singularität und der Hauptteil der Laurantreihe um z_0 verschwindet.*

ii) (Pol) $f(z)$ konvergiert für $z \to z_0$ gegen ∞ und der Hauptteil ist nichttrivial aber endlich. Der kleinste Index $l \in \mathbb{Z}$ für den der Koeffizient $a_l \neq 0$ der Laurentreihenentwicklumg von f um z_0 ungleich Null ist heißt Ordnung des Pols.

iii) (Wesentliche Singularität) Für jede Umgebung V von z_0 ist $f(V)$ dicht in $\mathbb{C}$ und der Hauptteil der Laurentreihenentwicklung ist unendlich.

Beweis. f hat nach Satz 25 eine eindeutige Laurentreihenentwicklung, deren Hauptteil damit genau eine der obigen Eigenschaften hat.

i) Ist der Hauptteil trivial, so ist die Laurentreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ eine Potenzreihe, die wenn wir $f(z_0)$ als a_0 definieren, in ihrem Konvergenzkreis holomorph ist. Damit ist diese Fortsetzung von f in z_0 und somit in G holomorph und f hat in z_0 eine hebbare Singularität.

Umgekehrt gilt für eine hebbare Singularität und ein durch M betragsmäßig beschränktes f für die Koeffizienten nach Satz 25

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{K_{z_0,\rho}} \frac{|f(\zeta)|}{\rho^{n+1}} d\zeta \leq M\rho^{-n} \text{ für } 0 < \rho < \rho_0,$$

womit $a_n = 0$ für $n < 0$ gilt.

ii) Ist der Hauptteil endlich aber nichttrivial, so schreiben wir die Laurantreihe um:

$$f(z) = (z-z_0)^{-N} \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^k \qquad \text{mit } b_k = a_{k-N},\ b_0 \neq 0,\ N > 0.$$

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^k$ konvergiert für $|z-z_0| < \rho$ und definiert eine holomorphe Funktion g mit $g(z_0) \neq 0$, womit $\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^{-N} g(z) = \infty$ folgt.

Hat f in z_0 einen Pol (d.h. es gilt $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$), so gilt $\lim_{z \to z_0} 1/f(z) = 0$ und $1/f$ hat nach i) eine hebbare Singularität mit einer Nullstelle endlicher Ordnung N und erlaubt eine Darstellung $1/f(z) = (z-z_0)^N h(z)$ mit h holomorph und $h(z_0) \neq$

0. Dann ist $1/h$ in z_0 holomorph und $f(z)(z-z_0)^N = 1/h(z)$ ist holomorph, womit f einen endlichen Hauptteil hat.

iii) Ist $f(V)$ für eine Umgebung V von z_0 nicht dicht in $\mathbb{C}$, so gibt es $\zeta_0 \in \mathbb{C}$ mit $\frac{1}{f(z)-\zeta_0}$ beschränkt in V. $\frac{1}{f(z)-\zeta_0}$ hat damit in z_0 eine hebbare Singularität, d.h. es gibt eine holomorphe Fortsetzung g für die gilt $f(z) = \zeta_0 + \frac{1}{g(z)}$ in $V \setminus \{z_0\}$. g kann nicht konstant sein also ist g nach Korollar 23 darstellbar als $g(z) = (z-z_0)^N h(z)$ mit einem in G holomorphen h mit $h(z_0) \neq 0$ und $0 \leq N < \infty$. Dann ist $1/h$ in z_0 holomorph und f hat wegen $f(z) = \zeta_0 + (z-z_0)^{-N} 1/h(z)$ einen Pol oder eine hebbare Singularität in z_0 und nach i) oder ii) einen endlichen oder trivialen Hauptteil der Laurentreihenentwicklung. Hat die Laurentreihe von f also einen unendlichen Hauptteil, so ist $f(V)$ für jede Umgebung V von z_0 dicht in $\mathbb{C}$.

Umgekehrt ist für einen endlichen Hauptteil nach i) und ii) das Bild $f(V)$ klarerweise nicht für alle Umgebungen V von z_0 dicht. $\square$

Bemerkung 36. *Die einzige Möglichkeit, dass eine holomorphe Funktion in einer Umgebung einer isolierten Singularität z_0 beschränkt ist, ist i). Aus der Beschränktheit von f in einer Umgebung von z_0 folgt also bereits die Konvergenz von $\lim_{z\to z_0} f(z)$ und sogar die Existenz einer holomorphen Fortsetzung. i) wird Riemannscher Hebbarkeitssatz genannt.*

iii) wird Satz von Casorati-Weierstraß genannt. Es gilt aber eine wesentlich stärkere Aussage: In jeder Umgebung einer wesentlichen Singularität nimmt f alle Werte aus $\mathbb{C}$ mit höchstens einer Ausnahme unendlich oft an (großer Satz von Picard 105). Die Funktion $z \to \exp(1/z)$ nimmt den Wert 0 nicht an. Den Ausnahmepunkt in der Bildmenge von f einer Umgebung einer wesentlichen Singularität kann es also tatsächlich geben.

Ist f bis auf isolierte Singularitäten hololmorph in G und hat f Pole in diesen Singularitäten, so heißt f meromorph in G. Die Menge aller in einem Gebiet G meromorphen Funktionen bildet in natürlicher Weise einen Körper den Körper der meromorphen Funktionen auf G.

3 Analytische Fortsetzung

Beispiel 37. *Nach Satz 32 hat die Potenzfunktion $z \mapsto z^n$ in $z_0 \neq 0$ n lokale Umkehrfunktionen die wir Wurzelfunktionen nennen. Stellen wir z in einer 1-Umgebung in Polarkoordinaten $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ mit $\varphi(1) = 0$ dar, so sind die Lösungen der Gleichung $w^n = (\tilde{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde{\varphi}})^n = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ Funktionen $w_l = \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+2\pi l)/n}$, $l = 0,\dots,n-1$. Jede dieser Funktionen ist in $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ holomorph und erfüllt dort $(w_l(z))^n = z$. Bei Annäherung an die negative reelle Achse unterscheiden sich die beiden Grenzwerte aber um den Faktor $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/l}$, womit es keine in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ holomorphe Umkehrfunktion dieser Potenzfunktion gibt. Lokal gibt es aber auch für $w \in \mathbb{R}_-$ Umkehrfunktionen.*

Beispiel 38. *Die komplexe Exponentialfunktion hat überall eine nichtverschwindende Ableitung und somit nach Satz 32 überall eine lokale holomorphe Umkehrabbildung. Beim Umlaufen der 0 im positiven Sinn erhöht sich der Imaginärteil um 2π: Durchlaufen wir den Einheitskreis im positiven Sinn durch $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, so ist lokal durch das Argument eine Umkehrfunktion definiert bzw. durch $z \mapsto \log|z| + \mathrm{i}\arg(z)$ eine lokale stetige Umkehrfunktion gegeben, wann man* arg *so definiert, dass* arg *in $z \neq 0$ stetig ist, was aber nicht auf ganz $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ möglich ist.*

3.1 Schwarz'sches Spiegelungsprinzip

Eine wichtige Möglichkeit eine analytische Funktion von einem Gebiet in der oberen Halbebene auf sein Spiegelbild bezüglich der reellen Achse fortzusetzen gibt

Satz 39 (Schwarz'sches Spiegelungsprinzip)**.** *Sei G ein bezüglich der reellen Achse symmetrisches Gebiet (d.h. $z \in G \Leftrightarrow \bar{z} \in G$) und $G_+ := \{z \in G : \Im z > 0\}$, $G_- := \{z \in G : \Im z < 0\}$ und $G_0 := \{z \in G : \Im z = 0\}$. Ist f in G_+ holomorph, auf $G_+ \cup G_0$ stetig und auf G_0 reell. Dann ist die Funkton*

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \Im z \geq 0 \\ \overline{f(\bar{z})} & \Im z < 0 \end{cases}$$

holomorph in G.

Beweis. Nach dem Satz von Morera genügt es zu zeigen, dass die Integrale $\int_{\partial\Delta} F(z)\,dz$ für in G liegende abgeschlossene Dreiecke Δ verschwinden. Für $\Delta \subseteq G_+ \cup G_0$ folgt dies aus dem Cauchyschen Integralsatz 17.

Für $\Delta \subseteq G_- \cup G_0$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{\partial\Delta}} F(\zeta)\,d\zeta &= -\lim_P \sum_j F(\bar{\alpha}_j)(\bar{\zeta}_{j+1} - \bar{\zeta}_j) = -\lim_P \sum_j \overline{f(\alpha_j)}(\bar{\zeta}_{j+1} - \bar{\zeta}_j) \\ &= -\overline{\lim_P \sum_j f(\alpha_j)(\zeta_{j+1} - \zeta_j)} = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

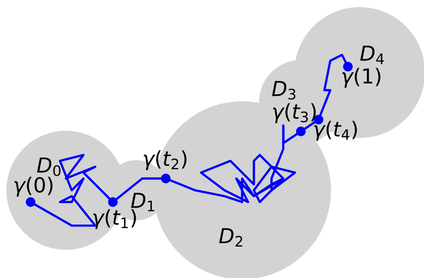
Hier bezeichnet $\widehat{\partial\Delta}$ das Bild von $\partial\Delta$ unter komplexer Konjugation. Das negative Vorzeichen kommt von der negativen Orientierung des gespiegelten Polygonzuges $\hat{P}$.

Hat Δ nichtleeren Schnitt mit G_+ und mit G_-, so teilt $\mathbb{R}$ das Dreieck Δ in zwei konvexe Vierecke, über deren Rand die Integrale nach Satz 17 und (20) verschwinden. Die beiden Integrale über das Intervall in R haben gegensätzliche Orientierung und der Integrand ist gleich, womit sie sich aufheben. Es folgt $\int_{\partial\Delta} F(\zeta)\,d\zeta = 0$. $\square$

3.2 Analytische Fortsetzung längs eines Weges

Für eine in dem Gebiet G holomorphe Funktion f bezeichnen wir das geordnete Paar (f,G) als *Funktionselement*. Für $a \in \mathbb{C}$ wird durch $(f_1,G_1) \sim (f_2,G_2)$ für $f_1|_V = f_2|_V$ für eine Umgebung V von a eine Äquivalenzrelation auf den Funktionselementen (f,G) mit $a \in G$ definiert.

Wir bezeichnen für $a \in \mathbb{C}$ die Äquivalenzklasse, die (f,G), $a \in G$ enthält mit $[f]_a$ und sprechen von einem *Keim*.



Für einen stetigen Weg $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ gebe es $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ und offene Kreise

$$D_k,\ 0 \le k < n,\ \gamma([t_k,t_{k+1}]) \subseteq D_k, \tag{21}$$

sowie Funktionen f_k, die in D_k holomorph sind und für die $f_0 \in [f]_{\gamma(0)}$ sowie $f_k = f_{k+1}$ in $D_k \cap D_{k+1}$ gilt. Dann heißt $[f_n]_{\gamma(1)}$ die *analytische Fortsetzung* von $[f_0]_{\gamma(0)}$ längs des Weges γ..

Satz 40. *Die analytische Fortsetzung längs eines Weges γ ist, falls sie existiert, wohldefiniert, d.h. von der Wahl der Punkte t_i und Kreise D_i unabhängig. Insbesondere hängt $[f_n]_{\gamma(1)}$ nur von $[f_0]_{\gamma(0)}$ und dem Weg γ ab und bleibt bei Übergang zu einer äquivalenten Parametrisierung (d.h. einer streng monoton steigenden stetigen Abbildung $[0,1] \to [0,1]$) gleich.*

Sie bleibt weiters gleich, wenn wir von γ zu einem Weg γ' übergehen für den für alle $t \in [0,1]$

$$|\gamma(t) - \gamma'(t)| < d(\gamma, (\cup_i D_i)^{\complement}), \quad \gamma(1) = \gamma'(1). \tag{22}$$

gilt. Für Polygonzüge $\mathcal{P} = (\overrightarrow{(\gamma(t_0)\gamma(t_1)}, \overrightarrow{(\gamma(t_1)\gamma(t_2)}, \ldots, \overrightarrow{(\gamma(t_{n-1})\gamma(t_n)})$ folgt

$$\int_c f(z)\,dz = \int_{\mathcal{P}} f(z)\,dz,$$

wobei das Integral rechts als klassisches komplexes Wegintegral zu verstehen ist, wenn die Feinheit der Zerlegung sicherstellt, dass (22) für $\gamma' = \mathcal{P}$ gilt. Dieser Polygonzug kann darüberhinaus achsenparallel gewählt werden.

Beweis. Seien $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = 1 = s_{m+1}$ und $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1 = s_{n+1}$ zwei Zerlegungen des Intervalls $[0,1]$ mit zugehörigen Kreisen D_i, $0 \leq i \leq m$ bzw. $\tilde{D}_j$, $0 \leq j \leq n$.

Seien f_1, f_2 zwei analytische Fortsetzungen des Funktionskeimes $[f]_{\gamma(0)}$ längs ses Weges γ. Dann stimmen f_1 und f_2 in einer Umgebung von $\gamma(0)$ überein. Sind f_1 und f_2 nicht auf $\gamma([0,1])$ gleich, so betrachten wir $t_0 := \{\inf\{s \in [0,1] : f_1(\gamma(s)) \neq f_2(\gamma(s))\}$ mit $t_0 \in D_i \cap \tilde{D}_j$. Dann stimmen f_1 und f_2 auf $\gamma[0,t_0]$ überein und nach dem Eindeutigkeitssatz auch auf $D_i \cap \tilde{D}_j$, insbesondere auf $\gamma[0,t_1]$ für jedes t_1 mit $\gamma[t_0,t_1] \subset D_i \cap \tilde{D}_j$ im Widerspruch zu unserer Defnition von t_0.

Beim Übergang zu einer äquivalenten Parametrisierung bleibt die Forderung (21) erhalten, wenn wir die Punkte t_i durch ihre Bildpunkte unter der Transformation des Parameterintervalls $[0,1]$ ersetzen. Damit ist auch die Fortsetzung von $[f]_{\gamma(0)}$ invariant unter dem Übergang zu einem äquivalenten Weg.

Erfüllt der Weg γ' die Bedingung (22), so ist die Überdeckng von $\gamma([0,1])$ wegen

$$d(\gamma'(t), D_i^{\complement}) \geq d(\gamma(t), D_i^{\complement}) - d(\gamma(t), \gamma'(t))$$

gilt $d(\gamma'(t), D_i^{\complement} > 0$ für $t \in [t_i, t_{i+1}]$ zugleich eine Überdeckung, die (21) für γ' erfüllt. Damit bilden die Funktionen f_k auch für γ' eine analytische Fortsetzungen längs γ'. $f_n(\gamma(1)$ ist dann die Fortsetzung in $\gamma(1) = \gamma'(1)$ längs γ sowie längs γ'.

Der Polygonzug kann achsenparallel gewählt werden, wenn wir einen Polygonzug durch Hinzufügen weiterer Stützstellen achsenparallel machen. $\square$

3.3 Monodromiesatz

In der Konstruktion einer analytischen Fortsetzung längs eines Weges wurde ausgehend von einem Weg γ die analytische Fortsetzung mithilfe einer Überdeckung der Kurve $\gamma([0,1])$ durch offene Kreise D_i konstruiert und in Satz 40 gezeigt dass die Wahl der zulässigen Kreise keine Auswirkung auf die analytische Fortsetzung im Endpunkt hat. Man kann aber auch ausgehend von einer endlichen Folge $(D_k)_{k \in \{0,1,\ldots,n\}}$ offener Kreise in einem Gebiet G für die gilt: $D_k \cap D_{k+1} \neq \emptyset$, D_0 hat Mittelpunkt a, D_n hat Mittelpunkt b bei gegebener holomorpher Funktion f_0 in D_0 versuchen induktiv holomorphe Funktionen f_k in D_i als Fortsetzung von f_{k-1} von $D_{k-1} \cap D_k$ auf D_k zu konstruieren. Dies muss nicht möglich sein. Ist dies aber möglich, so ist diese Fortsetzung eindeutig und liefert nach Satz 40 die analytische Fortsetzung längs aller Wege γ für die (21) für geeignete Punkte $0 = t_0 < t_1 < \ldots t_n = 1$ gilt.

Gilt für eine Folge $(D_k)_{k \in \{0,1,\ldots,n\}}$ von offeenen Kreisen mit $D_{k-1} \cap D_k \neq \emptyset$, so sprechen wir von einer *Kette* und bei gegebener holomorpher Funktion f_0 in D_0 falls dies möglich ist von der *analytischen Fortsetzung von f_0 längs der Kette* $(D_k)_{k \in \{0,1,\ldots,n\}}$.

Satz 41 (Monodromiesatz). *Ist in dem Gebiet G jeder Funktionskeim $[f]_a$ längs jedem in G verlaufenden Weges analytisch fortsetzbar, so ist die analytische Fortsetzung längs zweier homotoper Wege γ_0, γ_1 mit Anfangspunkten $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = a \in G$ und Endpunkten $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = b \in G$ die gleiche.*

Beweis. Sei H eine Homotopie von γ_0 nach γ_1 in G, also eine stetige Abbildung von $I \times I$ nach G ($I = [0,1]$), die

- $H(t,0) = \gamma_0(t)\ \forall t \in I$
- $H(t,1) = \gamma_1(t)\ \forall t \in I$
- $H(0,s) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0) = a$
- $H(1,s) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1) = b$

erfüllt. Nach Voraussetzung gibt es für alle $s \in I$ eine analytische Fortsetzung von $[f]_a$ zu einem Keim $[g_s]_b$ längs $\gamma_s := H(\cdot, s)$. Für festes s gibt es nach der Definition einer analytischen Fortsetzung längs des Weges γ_s offene Kreise D_k, die $\gamma_s(I)$ überdecken. Die Menge $(\cup D_k)^{\complement} =: A$ ist abgeschlossen und disjunkt zu $\gamma_s(I)$. Der Abstand eines Punktes z in G zu A ist als Funktion von z wegen $|d(z,A) - d(w,A)| \leq d(z,w)|$ stetig. Damit nimmt die Funktion $I \to \mathbb{R}_+ : t \mapsto d(\gamma_s(t), A)$ als stetige Funktion auf dem Kompaktum I ihr Minimum m_s an, welches größer als 0 ist. Damit ist für jeden Weg $\gamma_{s'}$ für den $|\gamma_s(t) - \gamma_{s'}(t)| < m_s$ für alle $t \in I$ gilt $[f_m]_b$ die analytische Fortsetzung des Keimes $[f_0]_a$ längs des Weges $\gamma_{s'}$. Es folgt, dass die Menge aller $s \in I$ für die die analytische Fortsetzung von $[f_0]_a$ längs γ_s den Keim $[f_m]_b$ ergibt offen. Sind nicht alle analytischen Fortsetzungen längs γ_s gleich $[f_m]_b$, so definieren wir s_0 als das Infimum aller $s \in I$ für die die analytische Fortsetzung längs γ_s nicht $[f_m]_b$ ergibt. Dann sind aber für $|\tilde{s} - s_0| < \varepsilon$ für hinreichend kleines ε auch die analytischen Fortsetzungen längs $\gamma_{\tilde{s}}$ gleich der analytischen Fortsetzung längs γ_{s_0} und damit ungleich $[f_m]_b$ im Widerspruch zu unserer Definition von s_0. □

3.4 Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Um analytische Funktionen mit Verzweigungspunkten beschreiben zu können könnte man mehrwertige Funktionen zulassen mit den damit verbundenen Komplikationen. Man kann den Definitionsbereich einschränken, sodass ein Umlaufen des Verzweigungspunktes in dem neuen Gebiet nicht mehr möglich ist. Beim Logarithmus oder der Wurzelfunktion kann man etwa statt $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ die "geschlitzte komplexe Ebene" $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ als Definitionsbereich betrachten. Eine weitere anschauliche Möglichkeit besteht darin die lokal wohldefinierten Funktionselemente zu "verkleben" (Riemann's Zugang). Anschaulich erhält man so etwa für den Logarithmus ein an eine Wendeltreppe erinnerndes Objekt.

Wir definieren Riemannsche Flächen über einen topologischen Zugang wie folgt: Zunächst bezeichnen wir die Menge O aller Keime als die *Garbe der Keime*, also

$$O = \{[f]_a : f \text{ ist holomorph in einer Umgebung von } a \in \mathbb{C}\}.$$

Einem Funktionselement (f,G) ordnen wir die Menge $N(f,G)$ aller Keime zu, die man mithilfe dieses Funktionselementes definieren kann, also alle Äquivalenzklassen $[\phi]_a$ für ein $a \in G$, für die (f,G) in dieser Äquivalenzklasse liegt:

$$N(f,G) := \{\phi \in O : (f,G) \in \phi\} = \{\phi \in O : \exists a \in G \text{ mit } \phi = [f]_a\}.$$

Die Mengen $N(f,G)$ werden wir im Folgenden als Umgebungsbasis in O auffassen, die offene Mengen G in $\mathbb{C}$ zusätzlich mit den Werten einer holomorphen Funktion f indiziert.

Umgekehrt ordnen wir einem Keim ϕ die Menge

$$\mathcal{N}_\phi := \{N(f,G) : \exists a \in G \text{ mit } [f]_a = \phi\}$$

aller "offenen Umgebungen" zu, die ϕ enthalten, die eine Umgebungsbasis von $\phi \in O$ bilden werden.

Für ein Funktionselement (f,G) ist die Mengen $N(f,G)$ die Basis einer Topologie $\mathcal{T}_O$ auf O, denn ist $\phi \in N(f_1,G_1) \cap N(f_2,G_2)$, so folgt $\exists a \in G_1 \cap G_2$ und eine Umgebung V von a, sodass $f_1 = f_2$ in V gilt. Wir können dann V o.B.d.A. als Gebiet wählen, womit $\phi \in N(f_1,V) = N(f_2,V) \subset N(f_1,G_1) \cap N(f_2,G_2)$ gilt.

Bezüglich dieser Topologie bilden die Mengen $\mathcal{N}_\phi$ eine Umgebungsbasis von ϕ, denn diese wird für jede Basis der Topologie durch jene Mengen erzeugt, die ϕ enthalten. Diese Mengen sind aber hier genau die Mengen in $\mathcal{N}_\phi$.

Die Abbildung $p:\ O \to \mathbb{C} :\ [f]_a \mapsto a$ wird *Fußpunktabbildung* genannt.

Lemma 42. *Die Fußpunktabbildung $p:\ O \to \mathbb{C}$ ist stetig und ein lokaler Homöomorphismus.*

Die Abbildung $\mathcal{F} :\ O \to \mathbb{C}$, $[f]_a \mapsto f(a)$ ist stetig und $\mathcal{T}_O$ ist eine Hausdorfftopologie

Beweis. Es ist zu zeigen, dass $p^{-1}(O)$ für offene Mengen $O \subseteq \mathbb{C}$ in $\mathcal{T}_O$ ist. Jede offene Menge in $\mathbb{C}$ ist Vereinigung von offenen Kreisen D_i also von Gebieten. Es gilt

$$p^{-1}(D_i) = \{\phi \in O : \phi = [f]_a \text{ mit } a \in D_i,\ f \text{ holomorph in } D_i\} = \cup_f N(f,D_i),$$

also offen in $\mathcal{T}_O$. Da Vereinigung von Mengen verträglich mit der Urbildbildung ist, folgt

$$p^{-1}(O) = p^{-1}(\cup_i D_i) = \cup_{i,f} N(f,D_i) \in \mathcal{T}_O.$$

Wir können darüberhinaus alle Kreise D_i so klein wählen, dass es in D_i eine holomorphe Funktionen f_i gibt. Dann bildet p die offene Menge $N(f_i,D_i)$ injektiv und stetig auf D_i ab. Die Topologie auf $N(f_i, D_i)$ ist nicht echt feiner als die von p^{-1} induzierte, da alle offenen Mengen in $N(f_i, D_i)$ Vereinigungen von $N(f_i, G_j)$ mit einem Gebiet G_j in D_i sind, also von der Form $\cup_j p^{-1}(G_j) \cap N(f_i, D_i)$ sind. p ist also ein lokaler Homöomorphismus.

Die Abbildung $\mathcal{F}$, $[f]_a \to a$ kann als Zusammensetzung $\mathcal{F}([f]_a) = f \circ p([f]_z)$ dargestellt werden und ist damit stetig.

Für die Hausdorffsche Trennungseigenschaft sei $[f_1]_a \neq [f_2]_b$. Dann gilt für $a \neq b$, dass die Fußpunktabbildung diese Keime auf $a \neq b$ abbildet. $\mathbb{C}$ ist aber ein Hausdorffraum, also gibt es disjunkte Umgebungen von a und b deren Urbilder wegen der Stetigkeit der Fußpunktabbildung disjunkte Umgebungen von $[f_1]_a$ resp. $[f_2]_b$ sind. Gilt $[f_1]_a \neq [f_2]_a$, so gibt es Kreise mit Radien r_1, r_2 in denen die Taylorreihen um a von f_1 bzw. von f_2 konvergieren. Für $r = \min(r_1, r_2)$ sind $N(f_1, K_{a,r})$ und $N(f_2, K_{a,r})$ Umgebungen von $[f_1]_a$ und $[f_2]_a$, die wegen dem Eindeutigkeitssatz disjunkt sind. Man beachte, dass die Hausorffeigenschaft nicht aus der Existenz eines lokalen Homöomophismus auf eine offene Teilmenge des Hausdorffraumes $\mathbb{C}$ folgt! $\square$

Wir definieren eine *Riemannsche Fläche* als eine Zusammenhangskomponente des topologischen Raumes $(O, \mathcal{T}_O)$. Da aus wegzusammenhängend zusammenhängend folgt ist für gegebenes $\phi = [f]_a \in O$ die Zusammenhangskomponente, welche ϕ enthält genau die Menge aller Keime, die wir durch analytische Fortsetzung von ϕ längs einer Kurve γ erhalten.

Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis der lokal homöomorph zum $\mathbb{R}^n$ ist. Sie besitzt eine differenziebare Struktur, wenn es Karten (d.h. lokale Homöomorphismen auf offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ gibt), deren Definitionsbereiche die Mannigfaltigkeit überdecken und für die Kartenwechsel differenzierbar sind. Analog dazu definiert man eine analytische Struktur auf einer 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit, wenn es Karten gibt für die der Kartenwechsel analytisch ist. Obige Eigenschaften geben im Wesentlichen die analytische Struktur einer Riemannschen Mannigflatigkeit, bis auf die abzählbare Basis. Nach einem Satz von Radó folgt diese Eigenschaft aber aus den gezeigten Eigenschaften.

Mit diesem Zugang kann Funktionentheorie statt auf $\mathbb{C}$ auf Riemannschen Flächen untersucht werden.

3.5 Integration längs eines Weges

Für holomorphe Funktionen f und einen stetigen Weg γ kann man das Integral $\int_\gamma f(z)\,dz$ über die analytische Fortsetzung längs γ, falls diese existiert, wie folgt definieren:

Eine in $\gamma(0)$ holomorphe Funktion f hat in einem geeigneten offenen Kreis D_0 um $\gamma(0)$ eine Stammfunktion F mit $F(\gamma(0)) = 0$, da $(f, D_0) \in [f]_{\gamma(0)}$ in D_0 holomorph ist und damit in dem Kreis D_0 mit Mittelpunkt z_0 eine Taylorreihenentwicklung $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ für die $F(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k/k(z-z_0)^k$ ebenfalls in D_0 konvergiert und eine Stammfunktion von f darstellt.

In den Kreisen D_i haben die in (21) definierten Funktionen f_k Stammfunktionen F_k, die bis auf eine additive Konstante eindeutig sind. Damit gibt es genau eine Stammfunktion F_{k+1} von f_{k+1} für die $F_{k+1} = F_k$ in $D_k \cap D_{k+1}$ gilt.

Wir definieren $\int_\gamma f(z)\,dz$ als $F_n(\gamma(1))$. Da der Funktionskeim $[F_n]_{\gamma(1)}$ nach Satz 40 von der Wahl der Kreise D_k unabhängig ist, hängt dieses Integral nur von γ ab.

Wir müssen noch zeigen, dass das soeben definierte Integral für Funktionen und Wege für die auch das Wegintegral existiert übereinstimmen:

Satz 43. *Ist f holomorph längs eines rektifizierbaren Weges γ, so stimmt das oben definierte Integral mit dem Wegintegral überein.*

Beweis. Sei $(D_k)_{k=0}^n$ eine Überdeckung von γ durch Kreise wie in (21). Ist die Feinheit einer Zerlegung $0 = \zeta_0, \dots, \zeta_n = 1$ hinreichend klein, so kann man die Zerlegungspunkte $t_0, \dots, t_n$ in (21) als $t_l = \zeta_{i_l}$ wählen. Es gilt nach dem Hauptsatz für $t_{l_k} \le i \le i+1 < t_{l_{k+1}}$: $F_k(\gamma(\zeta_{i+1})) - F_k(\gamma(\zeta_i)) = \int_{[\gamma(\zeta_i),\gamma(\zeta_{i+1})]} f_k(\zeta)\,d\zeta$ und damit für jeden Zwischenwert $\alpha_i \in [\zeta_i, \zeta_{i+1}]$:

$$
\begin{aligned}
|F_k(\gamma(\zeta_{i+1})) - & F_k(\gamma(\zeta_i)) - (\gamma(\zeta_{i+1}) - \gamma(\zeta_i)) f_k(\gamma(\alpha_i))| && (23)\\
&= \left| \int_{[\gamma(\zeta_i),\gamma(\zeta_{i+1})]} f_k(z) - f_k(\gamma(\alpha_i))\,dz \right| \\
&\le |\gamma(\zeta_{i+1}) - \gamma(\zeta_i)| \sup_{z \in [\gamma(\zeta_i),\gamma(\zeta_{i+1})]} |f_k(z) - f_k(\gamma(\alpha_i))|. && (24)
\end{aligned}
$$

$f \circ \gamma$ ist als stetige Funktion auf dem kompakten Intervall $[0,1]$ gleichmäßig stetig. Damit gibt es für $\varepsilon > 0$, sodass $|f_k(\gamma(\zeta)) - f_k(\gamma(\alpha_i))| < \varepsilon$ wenn die Feinheit der Zerlegung kleiner δ ist. Die Summe $\sum_i |\gamma(\zeta_{i+1}) - \gamma(\zeta_i)|$ ist durch die Weglänge $l(\gamma)$ von γ beschränkt und es folgt jede Riemannsumme die aus einer Zerlegung mit Feinheit kleiner δ hervorgeht und das über die analytische Fortsetzung gewonnene Integral wegen $\sum_{i=0}^{n-1} F(t_{k+1}) - F(t_k) = F_n(\gamma(1)) - F_0(\gamma(0))$ und (23):

$$
\begin{aligned}
&|F_n(\gamma(1) - F_0(\gamma(0)) - \sum_i (\gamma(\zeta_{i+1}) - \gamma(\zeta_i)) f_k(\gamma(\alpha_i))| \\
\le &\sum_i |\gamma(\zeta_{i+1}) - \gamma(\zeta_i)| \sup f_k(\gamma(\alpha_i))| \le \varepsilon l(\gamma).
\end{aligned}
$$

Das über die analytische Fortsetzung gewonnene Integral $F_n(\gamma(1)) - F_0(\gamma(0))$ ist also der Grenzwert der Riemannsummen die das Wegintegral defnieren, also gleich dem Wegintegral. □

Die so gewonnen Möglichkeit alle in einem Gebiet G holomorphen Funktionen über in G verlaufende Wege integrieren zu können erlaubt uns die Cauchysche Integralformel und den Integralsatz allgemeiner als zuvor zu formulieren. Es erweist sich als zweckmäßig 1-Zyklen als Verallgemeinerung von Wegen zu betrachten, da dann das “Aufheben zweier gegensätzlich orientierter Wege” formal sauber beschrieben werden kann.

Für eine endliche Familie von Wege c_i betrachten wir die formale Summe $\oplus n_i c_i$ mit $n_i \in \mathbb{Z}$ und bezeichnen sie als einen *1-Zyklus*, wenn für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $\sum_{\{i:\, c_i(0)=z\}} n_i = \sum_{\{i:\, c_i(1)=z\}} n_i$, wenn also die Anzahl der Wege für die ein Punkt z Anfangspunkt eines Weges c_i gleich der Anzahl der Wege für die dieser Punkt Endpunkt ist, wobei die Anzahl mit den Koeffizienten n_i gewichtet zu verstehen ist. Dies gibt uns eine Verallgemeinerung eines geschlossenen Weges. 1-Zyklen in einem Gebiet G können wir als die Elemente der von den Wegen c_i in G erzeugten freien Abelschen Gruppe auffassen und so addieren, bzw, die Inverse $-c$ bilden.

Wir bezeichnen $\sum_i n_i \int_{c_i} f(z)\,dz$ als das Integral $\int_c f(z)\,dz$ der holomorphen Funktion f über den 1-Zyklus $c = \oplus n_i c_i$.

Weiters definieren wir als die *Spur* $\mathrm{Tr}(c)$ eines 1-Zyklus $c = \oplus n_i c_i$ die Vereinigung der Bildmengen der Wege c_i für die $n_i \neq 0$ gilt, und für $z_0 \neq \mathrm{Tr}(c)$ die *Umlaufzahl* $\mathrm{Ind}(c, z_0)$ als

$$\mathrm{Ind}(c, z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_c \frac{1}{\zeta - z_0}\,d\zeta.$$

Gilt für alle $z \in \mathbb{C} \setminus G:\ \mathrm{Ind}(c, z) = 0$, so heißt der Zyklus c *nullhomolog* in dem Gebiet G. Zwei Zyklen c_1, c_2 in G heißen *homolog* wenn $c_1 - c_2$ nullhomolog in G ist. Wir schreiben dann $c_1 \sim_G c_2$.

Anschaulich sind nullhomologe 1-Zyklen c in G jene, die nur Punkte in G umlaufen, deren “Inneres” also eine Teilmenge von G ist.

Beispiel 44. *Betrachtet man einen Kreisring $G = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ und die Wege $\gamma_1(t) = \rho_1 \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$, $\gamma_2(t) = \rho_2 \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$ mit $r < \rho_1 < \rho_2 < R$. Dann ist der Zyklus $\gamma_2 \ominus \gamma_1$ nullhomolog, nicht aber der Zyklus $\gamma_2 \oplus \gamma_1$ (wegen $\mathrm{Ind}(\gamma_2 \oplus \gamma_1, 0) = \mathrm{Ind}(\gamma_1, 0) + \mathrm{Ind}(\gamma_2, 0) = 1 + 1 = 2 \neq 0$).*

Proposition 45. *Umlaufzahlen sind ganzzahlig.*

Beweis. Setzen wir eine lokale Stammfunktion von $\frac{1}{z - z_0}$ längs eines Weges γ_z in $G \setminus \{z_0\}$ mit Anfangspunkt w_0 und Endpunkt z analytisch fort, so erhalten wir für die Funktion

$$\Theta(z) = \frac{1}{z - z_0} \mathrm{e}^{\int_{\gamma_z} \frac{1}{\zeta - z_0}\,d\zeta} : \quad \frac{d}{dz}\Theta(z) = \left(\frac{-1}{(z - z_0)^2} + \frac{1}{(z - z_0)^2} \right) \mathrm{e}^{\int_{\gamma_z} \frac{1}{\zeta - z_0}\,d\zeta} = 0.$$

Θ ist also konstant. Damit ist die Funktion

$$\Psi(z) = \mathrm{e}^{\int_{\gamma_z} \frac{1}{\zeta - z_0}\,d\zeta} = K(z - z_0)$$

als ganze Funktion von der Wahl des Weges γ von w_0 nach z unahängig, womit für jeden Zyklus $c = \gamma_{1,z} - \gamma_{2,z}$ gilt

$$\mathrm{e}^{\int_c \frac{1}{\zeta - z_0}\,d\zeta} = \mathrm{e}^{\int_{\gamma_{1,z}} \frac{1}{\zeta - z_0}\,d\zeta - \int_{\gamma_{2,z}} \frac{1}{\zeta - z_0}\,d\zeta} = \mathrm{e}^0 = 1$$

und es folgt für Zyklen c: $\int_c \frac{1}{\zeta - z_0}\,d\zeta = 2k\pi \mathrm{i}$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, bzw. $\mathrm{Ind}(c, z_0) \in \mathbb{Z}$. $\square$

Korollar 46. *Umlaufzahlen sind in jeder Zusammenhangskomponente von* $\mathbb{C}\setminus \mathrm{Tr}(c)$ *konstant.*

Beweis. Wir schreiben das Integral über c nach Satz 40 auf ein Integral über einen Polygonzug und dann als Linearkombination reeller Integrale um und verwenden, dass der Integrand stetig in $\mathrm{Tr}(c)\times\mathbb{C}\setminus\mathrm{Tr}(c)$ ist. □

Satz 47 (Homologe Version des Cauchyschen Integralsatzes)**.** *Für einen in einem Gebiet G 0-homologen 1-Zyklus c und eine in G holomorphe Funktion f gilt*

$$\int_c f(\zeta)\,d\zeta = 0.$$

Da der Cauchysche Integralsatz aus der Cauchyschen Integralformel folgt, wenn wir für den Integranden $f(z)(z-z_0)$ statt $f(z)$) wählen, genügt es die Integralformel zu beweisen:

Satz 48 (Homologe Version der Cauchyschen Integralformel)**.** *Für einen in einem Gebiet G 0-homologen 1-Zyklus c und eine in G holomorphe Funktion f gilt für $z\notin\mathrm{Tr}(c)$:*

$$\frac{2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Ind}(c,f)}{k!}f^{(k)}(z) = \int_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}\,d\zeta.$$

Beweis. Es genügt die Integralformel für $n=0$ zu beweisen, da obige Integralformel aus dieser nach k-maliger Differentiation des Integranden $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ nach z folgt. Dabei kann die Vertauschung von Integration mit Differentiation wie folgt gerechtfertigt werden: Nach Satz 40 gilt $\int_c \frac{f(z)}{\zeta-z}\,d\zeta = \int_{\mathcal{P}} \frac{f(\zeta}{\zeta-z}\,d\zeta$ für einen geeigneten Polygonzug $\mathcal{P}$. Die k-te Ableitung des Integranden nach z ist gleichmäßig in ζ beschränkt. Schreibt man das Integral über den Polygonzug durch Aufspalten in Real und Imaginärteil als Linearkombination reeller Integrale, so folgt die Vertauschbarkeit mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz.

Hierzu betrachten wir die in $G\setminus\mathrm{Tr}(c)$ holomorphe Funktion

$$h(z) = \int_c \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\,d\zeta = \int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta - f(z)2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Ind}(c,z) \tag{25}$$

und wollen zeigen, dass diese in $\mathbb{C}\setminus\mathrm{Tr}(c)$ 0 ist. Wir zeigen zuerst, dass der Integrand durch

$$g(\zeta,z) := \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} & \zeta\neq z \\ f'(z) & \zeta = z \end{cases}$$

stetig von $G\times G\setminus\{(z,z): z\in G\}$ auf $G\times G$ fortgesetzt werden kann. Es gilt für $\zeta\neq z$

$$g(\zeta,z)-g(z_0,z_0) = \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} - f'(z_0) = \frac{1}{\zeta-z}\int_{[z,\zeta]} f'(w)-f'(z_0)\,dw.$$

Wegen der Stetigkeit der Ableitung einer holomorphen Funktion (Korollar 22) folgt

$$|g(\zeta,z)-g(z_0,z_0)| \leq \sup_{w\in[z,\zeta]} |f'(w)-f'(z_0)| < \varepsilon$$

für $\zeta \neq z$ in einer hinreichend kleinen Umgebung von z_0. Für $\zeta = z$ gilt $g(\zeta,z) = f'(z)$ und die Ungleichung folgt direkt aus der Stetigkeit der Ableitung. Damit ist g in (z_0,z_0) stetig. g ist für festes ζ offensichtlich holomorph in $G\setminus\{\zeta\}$. Da $g(\cdot,\zeta)$ stetig auf G fortgesetzt werden kann folgt aus dem Riemannschen Hebbarkeitssatz, dass diese Fortsetzung holomorh in z ist. Analog sieht man dass $g(\zeta,z)$ bei festem z in G holomorph in ζ ist und h kann durch

$$h(z) = \int_c g(\zeta,z)\,d\zeta$$

auf ganz G definiert werden. Approximiert man nach Satz 40 c durch einen achsenparallelen Polygonzug, so ist der Integrand gleichmäßig stetig in z und das so erhaltene Parameterintegral defniert eine stetige Funktion h auf G.

Mit dem Cauchyschen Integralsatz für Dreiecke $\Delta \subseteq G$ folgt für alle $\zeta \in G$:

$$\int_\Delta g(\zeta,z)\,dz = 0. \tag{26}$$

Für die Funktion h aus (25) und ein Dreieck Δ in G erhalten wir mit (26)

$$\int_\Delta h(z)\,dz = \int_\Delta \int_c g(\zeta,z)\,d\zeta dz = \int_c \int_\Delta g(\zeta,z)\,dz d\zeta = 0.$$

Dabei kann die Vertauschung der Integrationsreihenfolge wegen der Stetigkeit von g gerechtfertigt werden, wenn wir das Integral über c gemäß Satz 40 als ein Integral über einen achsenparallelen Polygonzug umschreiben und auf die so erhaltenen Integrale den Satz von Fubini anwenden. Mit dem Satz von Morera 27 folgt, dass h holomorph in ganz G ist.

Sei $U_0 := \{z \in \mathbb{C}\setminus \mathrm{Tr}(c) : \mathrm{Ind}(c,z) = 0\}$ dann gilt für $z \in U_0 \cap G$ wegen (25)

$$h(z) = \int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

und wir können den Definitionsbereich von h durch $h(z) = \int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$ für $z \in U_0$ zu einer holomorphen Funktion auf $G\cup U_0$ erweitern. Für $z \notin G$ folgt, da c nullhomolog in G ist $\mathrm{Ind}(c,z) = 0$, also $z \in U_0$. Damit gilt $G \cup U_0 = \mathbb{C}$ und h ist eine ganze Funktion. Es gilt aber offensichtlich $\lim_{z\to\infty} h(z) = 0$ und mit dem Satz von Liouville (Korollar 29) folgt $h = 0$. □

4 Residuen

4.1 Residuensatz

Für eine isolierte Singularität z_0 einer in einem Gebiet G holomorphen Funktion f sei die Laurentreihenentwicklung in $K_{z_0,r} \setminus \{z_0\}$ gleich $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(z-z_0)^k$. Dann ist der Koeffizient a_{-1} dadurch ausgezeichnet, dass gilt

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{K_{z_0,\rho}} f(\zeta)\, d\zeta = a_{-1}$$

vgl. Kor. 18. Dieser Koeffizient wird das *Residuum* von f in z_0 genannt und mit $\mathrm{Res}(f,z_0)$ bezeichnet.

Lemma 49. *Sei f eine in dem Gebiet G bis auf die isolierten Singularitäten z_l, $l \in I$ holomorphe Funktion, deren Singularitäten keinen Häufungspunkt in Ghaben. Für jeden in G nullhomologen 1-Zyklus c für den $z_l \notin \mathrm{Tr}(c)$ $\forall l \in I$ gilt dann:* $\mathrm{Ind}(c,z_l) \neq 0$ *nur für endlich viele $l \in I$.*

Beweis. $\mathrm{Tr}(c)$ ist als stetiges Bild einer kompakten Menge kompakt und damit in einem Kreis $K_{0,r}$ um 0 enthalten. Für $z \notin K_{0,r}$ ist $\frac{1}{z-\zeta}$ in $K_{0,r}^{\complement}$ holomorph als Funktion von z und es folgt $\int_c \frac{1}{z-\zeta}\, d\zeta = 0$ nach dem Cauchyschen Integralsatz 47, also $\mathrm{Ind}(c,z) = 0$. Gäbe es unendlich viele $l \in I$ mit $\mathrm{Ind}(c,z_l) \neq 0$, so gäbe es einen Häufungspunkt z_0 dieser Singularitäten der nach Voraussetzung nicht in G liegen kann. Da c in G nullhomolog ist gilt dann $\mathrm{Ind}(c,z_0) = \int_c \frac{1}{z_0-\zeta}\, d\zeta = 0$. Nach Korollar 46 ist aber $\mathrm{Ind}(c,z)$ in der Zusammenhangskomponente von z_0 konstant. Damit müsste $\mathrm{Ind}(c,z_l) = 0$ für alle z_l aus einer Umgebung von z_0 gelten, im Widerspruch zu unserer Annahme, dass z_0 Häufungspunkt von z_l mit $\mathrm{Ind}(c,z_l) \neq 0$ gilt. $\square$

Mithilfe der Residuen einer Funktion können wir eine wichtige Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes gewinnen:

Satz 50 (Residuensatz)**.** *Ist eine Funktion f in einem Gebiet G bis auf isolierte Singularitäten in einer Teilmenge Σ von G holomorph, so gilt für einen in G nullhomologen 1-Zyklus c in $G \setminus \{l_i;\, i \in I\}$:*

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_c f(\zeta)\, d\zeta = \sum_{z\in\Sigma} \mathrm{Ind}(c,z)\,\mathrm{Res}(f,z)$$

Beweis. Da die Singularitäten isoliert sind, finden wir zu $l \in I$ abgeschlossene Kreise K_{z_l,r_l} um z_l die keine weiteren Singularitäten enthalten. Sei c_l ein 1-Zyklus mit $\mathrm{Tr}(c_l) = \partial K_{z_l,r_l}$ und $\mathrm{Ind}(c_l,z_l) = \mathrm{Ind}(c,z_l)$. Dann sind nach Lemma 4.1 nur für $z_l \in \Sigma'$ für eine endliche Teilmenge Σ' von Σ die Umlaufzahlen $\mathrm{Ind}(c,z_l)$ ungleich

0 und der 1-Zyklus $\tilde{c} := c - \oplus_{l\in\Sigma'} c_l$ ist nullhomolog in G. Mit dem Cauchyschen Integralsatz 47 erhalten wir

$$\int_{\tilde{c}} f(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Wegen $\int_{\tilde{c}} = \int_c - \sum_{l\in\Sigma'} \int_{c_l}$ und $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{c_l} f(\zeta)\, d\zeta = \mathrm{Ind}(c, z_l)\, \mathrm{Res}(f, z_l)$ folgt die Behauptung. □

Beispiel 51. *Wir berechnen das reelle Integral*

$$I := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx$$

mithilfe des Residuensatzes:

Nach dem Residuensatz gilt für $R > 1$*:* $\int_{-R}^{R} \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx + \int_{K_{R,+}} \frac{1}{(1+z^2)^2}\, dz = 2\pi\mathrm{i}\, \mathrm{Res}(f, i)$*, wobei* $K_{R,+}$ *der Halbkreis um 0 mit Radius* R *in der oberen Halbebene und* $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$ *ist. Die Halbkreise* $K_{R,+}$ *sind wegen* $\mathbb{C}^{\complement} = \emptyset$ *nullhomolog in* $\mathbb{C}$*. Es gilt* $\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx$ *und*

$$\left| \int_{R,+} f(z)\, dz \right| \le \frac{\pi R}{R^2 - 1} \to 0 \textit{ für } R \to \infty.$$

Damit gilt $I = 2\pi\mathrm{i}\, \mathrm{Res}(f, \mathrm{i})$ *und es bleibt das Residuum von* f *in* i *zu berechnen.*

Es gilt nach der Cauchyschen Integralformel für $0 < \varepsilon < 2$

$$\mathrm{Res}(f, \mathrm{i}) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{K_{\mathrm{i},\varepsilon}} \frac{\frac{1}{(z+\mathrm{i})^2}}{(z-\mathrm{i})^2}\, dz = \frac{d}{dz} \frac{1}{(z+\mathrm{i})^2}\Big|_{z=\mathrm{i}} = \frac{-\mathrm{i}}{4}$$

und da $\partial K_{R,+}$ *in* $\mathbb{C} \setminus \{\pm\mathrm{i}\}$ *homotop zu* $K_{\mathrm{i},1}$ *ist, folgt* $\mathrm{Ind}(\partial K_{R,+}, \mathrm{i}) = 1$*,* $\mathrm{Ind}(\partial K_{R,+}, -\mathrm{i}) = 0$ *und*

$$I = \frac{\pi}{2}.$$

Beispiel 52. *Wir berechnen*

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{b^2 + x^2}\, dx, \quad a, b > 0$$

mit dem Residuensatz: Die Funktion f *ist bis auf die isolierten Singularitäten in* $\pm\mathrm{i}b$ *in* $\mathbb{C}$ *holomorph. Jeder 1-Zyklus ist wegen* $\mathbb{C}^{\complement} = \emptyset$ *in* $\mathbb{C}$ *nullhomolog. Wir betrachten den 1-Zyklus* $c = \gamma_{1,R} \oplus \gamma_{2,R}$*, mit* $\gamma_1(t) = -R + 2tR$ *und* $\gamma_2(t) = R\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}t}$*. Es gilt* $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{2,R}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{b^2+z^2}\, dz = 0$ *und*

$$\begin{aligned} I =& \frac{1}{2} \lim_{R\to\infty} \Re \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{b^2 + x^2}\, dx = \Re\left(\pi\mathrm{i}\, \mathrm{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{(z+\mathrm{i}b)(z-\mathrm{i}b)}, \mathrm{i}b\right)\right) \\ =& \Re\left(\pi\mathrm{i} \frac{\mathrm{e}^{-ab}}{2\mathrm{i}b}\right) = \frac{\pi}{2b\mathrm{e}^{ab}} \end{aligned}$$

Beispiel 53. *Wir zeigen: Für die n-ten Einheitswurzeln* $z_0, \dots, z_{n-1}$ *und* $z \in \mathbb{C}$ *gilt:*

$$\frac{nz^{n-1}}{z^n - 1} = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{z - z_l}:$$

$\frac{nz^{n-1}}{z^n-1} = \frac{(z^n-1)'}{z^n-1}$ *hat nach Lemma 54 Pole erster Ordnung in* z_l *mit* $\operatorname{Res}(\frac{nz^{n-1}}{z^n-1}, z_l) = 1$. *Es folgt, dass*

$$F := \frac{nz^{n-1}}{z^n - 1} - \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{z - z_l}$$

eine ganze Funktion ist. Wegen $F(z) \to 0$ *für* $z \to \infty$ *folgt aus dem Satz von Liouville die Behauptung.*

4.2 Logarithmisches Residuum

Lemma 54. *Hat eine in einem Gebiet G holomorphe Funktion f eine a-Stelle der Ordnung m in* $z_0 \in G$, *so hat* $\frac{f'}{f-a}$ *einen Pol erster Ordnung in* z_0 *mit*

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f-a}, z_0\right) = m.$$

Hat f einen Pol der Ordnung m in z_0, *so hat* $\frac{f'}{f-a}$ *einen Pol erster Ordnung in* z_0 *und es gilt*

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f-a}, z_0\right) = -m.$$

Beweis. Hat f eine a-Stelle m-ter Ordnung in z_0, so gibt es nach Korollar 23 eine in G holomorphe Funktion g mit $f(z) - a = (z - z_0)^m g(z)$ in G. Es folgt

$$\frac{f'}{f-a} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{g'}{g}.$$

$\frac{g'}{g}$ ist in z_0 holomorph, also gilt $\operatorname{Res}(\frac{g'}{g}, z_0) = 0$. Wegen $\operatorname{Res}\left(\frac{m}{z-z_0}, z_0\right) = m$ folgt die erste Behauptung.

Hat f einen Pol der Ordnung m in z_0, so hat $f - a$ eine Laurentreihenentwicklung $f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ mit $a_{-m} \neq 0$ und erlaubt eine Darstellung

$$f(z) - a = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} \text{ mit } g(z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_{l-m} (z - z_0)^l$$

mit einer in z_0 holomorphen Funktion g mit $g(z_0) \neq 0$. Es folgt

$$\frac{f'}{f-a} = \frac{-m}{z - z_0} + \frac{g'}{g}$$

und analog zur Berechnung des Residuums in einer Nullstelle $\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f-a}, z_0\right) = -m$.

□

Beispiel 55. *Wir zeigen, dass für die n-ten Einheitswurzeln $z_0,\dots,z_{n-1}$ und $z\in\mathbb{C}$*

$$\frac{nz^{n-1}}{z^n-1}=\sum_{l=0}^{n-1}\frac{1}{z-z_l}$$

gilt. $\frac{nz^{n-1}}{z^n-1}=\frac{(z^n-1)'}{z^n-1}$ *hat nach Lemma 54 Pole erster Ordnung in z_l mit Residuen 1. Es folgt, dass*

$$F(z):=\frac{nz^{n-1}}{z^n-1}-\sum_{l=0}^{n-1}\frac{1}{z-z_l}$$

eine ganze Funktion definiert. Wegen $F(z)\to_{z\to\infty}0$ erhalten wir die Behauptung mit Liouville.

Als Folgerung von Lemma 54 erhalten wir den

Satz 56 (vom logarithmischen Residuum)**.** *Ist f in einem Gebiet G meromorph und habe in $\Sigma_\infty\subseteq G$ Pole der Ordnung m_z. Für $a\in\mathbb{C}$ habe f in $\Sigma_a\subset G$ a-Stellen der Ordnung m_z. Dann gilt für einen in G nullhomologen 1-Zyklus c mit $(\Sigma_a\cup\Sigma_\infty)\cap\mathrm{Tr}(c)=\emptyset$:*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_c\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)-a}d\zeta &= \sum_{z\in\Sigma_a}\mathrm{Ind}(c,z)\,\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f-a},z\right)+\sum_{z\in\Sigma_\infty}\mathrm{Ind}(c,z)\,\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f-a},z\right)\\ &= \sum_{z\in\Sigma_a}\mathrm{Ind}(c,z)m_z-\sum_{z\in\Sigma_\infty}\mathrm{Ind}(c,z)m_z.\end{aligned}$$

Beweis. Die Funktion $f'/(f-a)$ ist meromorph in G mit Polen erster Ordnung in $\Sigma_a\cup\Sigma_\infty$. Die Residuen sind nach Lemma 54 m_z für a-Stellen z der Ordnung m_z und $-m_z$ für Pole der Ordnung m_z in z. Damit folgt die Behauptung aus dem Residuensatz 50. □

4.3 Satz von Rouché

Satz 57 (Rouché symmetrische Formulierung)**.** *Sei G ein Gebiet und c ein in G nullhomologer 1-Zyklus. Die Funktionen f und g seien in G bis auf isolierte Singularitäten in $\Sigma_{f,\infty}\subseteq G\setminus\mathrm{Tr}(c)$ resp. $\Sigma_{g,\infty}\subseteq G\setminus\mathrm{Tr}(c)$ in denen diese Funktionen Pole der Ordnung $m_{f,z}$ resp. $m_{g,z}$ habe holomorph. In $\Sigma_{f,0}\subseteq G\setminus\mathrm{Tr}(c)$ resp. $\Sigma_{g,0}\subseteq G\setminus\mathrm{Tr}(c)$ haben diese Funktionen Nullstellen der Ordnungen $m_{f,z}$ resp. $m_{g,z}$.*

Gilt

$$|f(z)+g(z)|<|f(z)|+|g(z)|\quad\forall z\in\mathrm{Tr}(c),\tag{27}$$

dann folgt mit $\Sigma_f=\Sigma_{f,0}\cup\Sigma_{f,\infty}$ und $\Sigma_g=\Sigma_{g,0}\cup\Sigma_{g,\infty}$

$$\sum_{z\in\Sigma_f}\mathrm{Ind}(c,z)m_{f,z}=\sum_{z\in\Sigma_g}\mathrm{Ind}(c,z)m_{g,z}.\tag{28}$$

Beweis. Aus der Gültigkeit der Ungleichung (27) folgt $g(z) \neq 0$ für $z \in \mathrm{Tr}(c)$ und damit dass $(f/g)'(f/g)^{-1}$ auf $\mathrm{Tr}(c)$ holomorph ist und f/g auf $\mathrm{Tr}(c)$ nie positiv reell sein kann. Dann können wir aber auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ eine holomorphe Umkehrfunktion log von exp definieren und $\log\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)$ ist auf G holomorph und für einen in G nullhomologen 1-Zyklus c folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz 47

$$\int_c \frac{(f(\zeta)/g(\zeta))'}{f(\zeta)/g(\zeta)} d\zeta = 0.$$

Wegen $(f/g)'/(f/g) = f'/f - g'/g$ folgt aus Lemma 54 die Behauptung (28). $\square$

Satz 58 (Rouché klassische Formulierung)**.** *Sei G ein Gebiet und c ein in G nullhomologer 1-Zyklus. Die Funktionen f und g seien in G bis auf isolierte Singularitäten in $\Sigma_{f,\infty} \subseteq G \setminus \mathrm{Tr}(c)$ resp. $\Sigma_{g,\infty} \subseteq G \setminus \mathrm{Tr}(c)$ in denen diese Funktionen Pole der Ordnung $m_{f,z}$ resp. $m_{g,z}$ habe holomorph. In $\Sigma_{f,0} \subseteq G \setminus \mathrm{Tr}(c)$ resp. $\Sigma_{g,0} \subseteq G \setminus \mathrm{Tr}(c)$ haben diese Funktionen Nullstellen der Ordnungen $m_{f,z}$ resp. $m_{g,z}$.*

Gilt

$$|h(z)| < |f(z)| \quad \forall z \in \mathrm{Tr}(c), \tag{29}$$

dann folgt mit $\Sigma_f = \Sigma_{f,0} \cup \Sigma_{f,\infty}$ und $\Sigma_{f+h} = \Sigma_{f+h,0} \cup \Sigma_{f+h,\infty}$

$$\sum_{z \in \Sigma_f} \mathrm{Ind}(c,z) m_{f,z} = \sum_{z \in \Sigma_{f+h}} \mathrm{Ind}(c,z) m_{f+h,z}. \tag{30}$$

Beweis. Wählen wir in Satz 57 $g = h - f$ und fordern statt (27) die stärkere Bedingung $|h| = |f+g| < |f|$ auf c, so folgt, dass für f und g die Zahl der Nullstellen und der Polstellen gleich sind. Für $g = h - f$ ist also die Zahl von Null -Zahl der Polstellen die gleiche wie von f. Die Zahl von Null -Zahl der Polstellen von $f - h$ und $h - f$ ist aber offensichtlich gleich. $\square$

Eine unmittelbare Folgerung ist der Fundamentalsatz der Algebra: Für ein Polynom p gilt für R hinreichend groß und geeignete Koeffizienten a, b: $|p(z)| < a + b|z|^n$ für $|z| = R$. Für $R > \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ hat das Polynom $a + bz^n$ genau n Nullstellen in $K_{0,R}$ und nach dem Satz von Rouché angewandt auf die Polynome p und $a + bz^n$ auch das Polynom p. Mehr als n Nullstellen kann p aber nicht haben also hat p genau n Nullstellen.

Beispiel 59. *Ist F holomorph in $K_{0,r}$ für ein $r > 1$ und Bild in der offenen Kreisscheibe $K_{0,1}$. Dann hat F einen Fixpunkt.*

Dies folgt aus dem Satz von Rouché, wenn wir für $f(z) = -2z$ und $g(z) = F(z) + z$ wählen: Es folgt für $|z| = 1$:

$$|f(z) + g(z)| = |F(z) - z| < |F(z)| + |z| < 1 + 1 = 2 \textit{ und } |f(z)| = 2.$$

f hat in $K_{0,1}$ genau eine Nullstelle. Nach Rouché damit auch $f(z) + g(z) = F(z) - z$. Diese Nullstelle ist der Fixpunkt.

Beispiel 60. *Wir zeigen, dass die Gleichung $\lambda - z - \mathrm{e}^{-z} = 0$ für $\lambda > 1$ in der Halbebene $\mathbb{H} = \{z : \Re z > 0\}$ genau eine Lösung hat:*

Außerhalb des Kreises $K_{\lambda,1}$ gilt in $\mathbb{H}$: $|z-\lambda| > 1$ aber $|\mathrm{e}^{-z}| < 1$, dort gibt es also keine Lösungen. Auf $\partial K_{\lambda,1}$ gilt $|\lambda - z| = 1 > |\mathrm{e}^{-z}|$ und nach Rouché hat damit $\lambda - z - \mathrm{e}^{-z} = 0$ in $K_{\lambda,1}$ soviele Lösungen wie $\lambda - z = 0$, nämlich eine.

4.4 Satz von Jensen

Satz 61 (Jensen)**.** *Für eine in $\overline{K_{0,R}}$ meromorphe Funktion f mit Nullstellen der Ordnung p_k in a_k, $1 \le k \le m$ und Polen der Ordnung q_k in b_k, $1 \le k \le n$, mit $a_k, b_k \neq 0\ \forall k$ gilt:*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})|\,d\varphi = \log|f(0)| + \sum_{k=1}^m p_k \log(R/|a_k|) - \sum_{k=1}^n q_k \log(R/|b_k|).$$

Beweis. Unter Verwendung von Satz 56 und dem Hauptsatz erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})|\,d\varphi &= \log|f(0)| + \Re\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{d}{dr}\log(f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}))\,dr\,d\varphi \\
&= \log|f(0)| + \Re\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{\frac{d}{dr}f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})}{f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})}\,dr\,d\varphi \\
&= \log|f(0)| + \Re\int_0^R \frac{1}{2\pi\mathrm{i}r}\int_0^{2\pi} \frac{f'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})}{f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})}\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,d\varphi\,dr \\
&= \log|f(0)| + \int_0^R \left(\sum_{k=1}^m p_k \mathbb{1}_{[|a_k|,R]}(r) - \sum_{k=1}^n q_k \mathbb{1}_{[|b_k|,R]}(r)\right)\frac{1}{r}\,dr \\
&= \log|f(0)| + \sum_{k=1}^n p_k \int_0^R \mathbb{1}_{[|a_k|,R]}(r)\frac{1}{r}\,dr - \sum_{k=1}^m q_k \int_0^R \mathbb{1}_{[|b_k|,R]}(r)\frac{1}{r}\,dr \\
&= \log|f(0)| + \sum_{k=1}^m p_k \int_{|a_k|}^R \frac{1}{r}\,dr - \sum_{k=1}^n q_k \int_{|b_k|}^R \frac{1}{r}\,dr \\
&= \log|f(0)| + \sum_{k=1}^m p_k \log(R/|a_k|) - \sum_{k=1}^n q_k \log(R/|b_k|).
\end{aligned}$$

Wegen $|f'(z)/f(z)| \le C_k|z-a_k|$ bzw. $|f'(z)/f(z)| \le \tilde{C}_k|z-b_k|$ in hinreichend kleinen Umgebungen von a_k bzw. b_k ist f'/f in $K_{0,R}$ integrierbar und die Vertauschung der Integrationsreihenfolge ist mit Fubini gerechtfertigt. □

Satz 62. *Seien a_k, $k = 1, \ldots$ die Nullstellen einer in $\mathbb{D}$ holomorphen beschränkten Funktion, die sich entsprechend der Ordnung der Nullstelle wiederholen. Dann gilt, wenn f nicht die Nullfunktion ist,*

$$\sum_k (1 - |a_k|) < \infty.$$

Beweis. Aus dem Satz von Jensen 61 folgt für $|f| < M_f$ für alle $R < 1$:

$$\begin{aligned}0 \le \sum_{\{|a_k|<R\}} \log(R/|a_k|) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\varphi})|\,d\varphi - \log|f(0)| \\ &\le \log(M_f) - \log|f(0)| =: C_f\end{aligned}$$

und damit wegen $\log(R/|a_k|) > 0$ für $R < R_1$

$$0 \le \sum_{\{|a_k|<R\}} \log(R/|a_k|) \le \sum_{\{|a_k|<R\}} \log(R_1/|a_k|) \le \sum_{\{|a_k|<R_1\}} \log(R_1/|a_k|) < C_f.$$

Für $R_1 \uparrow 1$ erhalten wir

$$\sum_{\{|a_k|<R\}} \log(1/|a_k|) = -\sum_{\{|a_k|<R\}} \log(|a_k|) < C_f. \tag{31}$$

Zugleich gilt für die Funktion $f(x) = 1 - x + \log(x)$ und $0 < x < 1$: $f(1) = 0$ und $f'(x) > 0$ für $0 < x < 1$ und damit mit dem Mittelwertsatz $-\log(x) > 1 - x$. Damit folgt aus (31) für alle $R < 1$:

$$0 \le \sum_{\{|a_k|<R\}} 1 - |a_k| < -\sum_{\{|a_k|<R\}} \log(|a_k|) < C_f$$

und hiermit die Konvergenz von $\sum_k 1 - |a_k|$. □

5 Folgen holomorpher Funktionen

5.1 Kompakte Konvergenz

Eine Folge $(f_n)_n$ von Funktionen in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt *kompakt konvergent* gegen f, wenn $(f_n)_n$ auf kompakten Teilmengen von G gleichmäßig gegen f konvergiert.

Man sieht unmittelbar, dass diese Forderung äquivalent dazu ist, dass es für jedes $z \in G$ eine Umgebung U von z in G gibt, auf der $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

Satz 63 (von Weierstraß über kompakte Konvergenz)**.** *Konvergiert die Folge $(f_n)_n$ holomorpher Funktionen in einem Gebiet G kompakt gegen die Funktion f, so ist f in G holomorph und für $k \in \mathbb{N}$ konvergiert $f_n^{(k)}$ kompakt gegen $f^{(k)}$.*

Beweis. Als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen ist f stetig auf kompakten Teilmengen von G und damit auf G. Für ein abgeschlossenes Dreieck Δ gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz für Dreiecke

$$\int_{\partial\Delta} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{\partial\Delta} \lim_{n\to\infty} f_n(\zeta)\,d\zeta = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Delta} f_n(\zeta)\,d\zeta = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Die Vertauschbarkeit von Integration mit dem Grenzwert ist wegen der gleichmäßigen Konvergenz offensichtlich. Aus dem Satz von Morera folgt damit, dass f holomorph ist.

Für eine kompakte Teilmenge $\tilde{K}$ von G ist $d(\tilde{K}, G^{\complement})$ positv und es gibt $\rho > 0$ mit $\overline{K_{z,\rho}} \subseteq G$ für alle $z \in \tilde{K}$. Dann ist die Menge $\tilde{K} + \partial K_{0,\rho}$ als stetiges Bild der kompakten Mengen $\tilde{K} \times \partial K_{0,\rho}$ kompakt und $\frac{f_n(z+\zeta)}{\zeta}$ konvergiert gleichmäßig für $z \in \tilde{K}$ und $\zeta \in K_{0,\rho}$ gegen $\frac{f(z+\zeta)}{\zeta}$. Es folgt

$$\frac{2\pi i}{k!} f^{(k)}(z) = \int_{\partial K_{0,\rho}} \frac{f(z+\zeta)}{\zeta^{k+1}}\,d\zeta = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial K_{0,\rho}} \frac{f_n(z+\zeta)}{\zeta^{k+1}}\,d\zeta = \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi i}{k!} f_n^{(k)}(z)$$

gleichmäßig für $z \in \tilde{K}$. □

5.2 Sätze von Hurwitz und Montel

Satz 64 (Hurwitz)**.** *$(f_n)_n$ sei eine in dem Gebiet G kompakt gegen f konvergente Folge holomorpher Funktionen. Für jedes n sei die Zahl der a-Stellen durch m beschränkt. Dann nimmt entweder auch f höchstens m-mal den Wert a an oder f ist konstant gleich a.*

Beweis. Es genügt die Behauptung für $a = 0$ und $f \not\equiv 0$ zu zeigen. Seien $z_1, \ldots, z_k$ Nullstellen von f und K_{z_i,r_i} disjunkte Kreise auf deren Rand f nicht verschwindet.

Nach dem Satz vom logarithmischen Residuum 56 ist die Zahl der Nullstellen von f in K_{r_i,z_i} gleich $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_{z_i,r_i}} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta$. Nach Satz 63 konvergiert auch f_n' gleichmäßig auf $\partial K_{z_i,r_i}$ gegen f' und da f keine Nullstelle auf $\partial K_{z_i,r_i}$ hat konvergiert $\frac{f_n'(\zeta)}{f_n(\zeta)}$ gleichmäßig auf $\partial K_{z_i,r_i}$ gegen $\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}$. Damit konvergiert die Zahl der Nullstellen von f_n in K_{z_i,r_i} für $n \to \infty$ gegen die Zahl der Nullstellen von f in K_{z_i,r_i} und f kann nicht mehr Nullstellen in G haben als f_n für hinreichend großes n. $\square$

Eine Familie $\mathcal{F}$ von Funktionen auf einem Gebiet G heißt *lokal beschränkt*, wenn es für jedes $z \in G$ eine Umgebung U von z und eine Konstante M gibt, sodass $|f(y)| < M$ für $f \in \mathcal{F}$ und $x \in U$ gilt. Dies ist offenbar äquivalent zu der Bedingung, dass es für jede kompakte Umgebung U von z eine Konstante m mit $|f(y)| < M$ für $f \in \mathcal{F}$ und $x \in U$ gibt.

Lemma 65. *Eine lokalbeschränkte Familie $\mathcal{F}$ analytischer Funktionen in einem Gebiet G ist gleichgradig stetig.*

Beweis. Für $z \in G$ wollen wir zeigen, dass es für $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für $|w-z| < \delta$ und alle $f \in \mathcal{F}$ $|f(w) - f(z)| < \varepsilon$ folgt.

Für $|z-\zeta| = r$ folgt mit der Cauchyschen Integralformel 20 für $\overline{K_{z,r}} \subset G$:

$$\begin{aligned} f(w) - f(z) =& \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_{z,r}} f(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta - w} - \frac{1}{\zeta - z}\right) d\zeta \\ =& \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_{z,r}} f(\zeta)\frac{w-z}{(\zeta-z)(\zeta-w)}\,d\zeta. \end{aligned}$$

Da $\mathcal{F}$ lokalbeschränkt ist, gibt es eine Schranke M mit $|f(y)| < M$ für $y \in K_{z,r}$. Es folgt für $|w-z| < r/2$

$$|f(w) - f(z)| < \frac{1}{2\pi}2\pi r\frac{M}{r\cdot r/2}|w-z| = \frac{2Mr/2}{r\cdot r/2}|w-z| < \frac{2M}{r}\frac{r}{2} = M$$

und damit die gleichgradige Stetigkeit in z. $\square$

Lemma 66. *Für ein Gebiet G gibt es eine Folge kompakter Teilmengen $(K_l)_l$ von G mit $K_1 \subset K_2 \subset \cdots$ und $G = \cup_l K_l$.*

Beweis. Die Mengen $A_\lambda := \{z \in G : d(z, G^\complement) \geq \lambda\}$ sind, da $z \mapsto d(z, G^\complement)$ wegen der Dreiecksungleichung stetig ist, abgeschlossen. Dann sind die Mengen $K_l := A_{1/l} \cap \overline{K_{0,l}}$ kompakt und erfüllen die Forderungen. $\square$

Eine Famile in einem Gebiet G holomorpher Fnktionen $\mathcal{F}$ heißt *normal* in G, wenn jede Folge $(f_l)_{l\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{F}$ eine in G kompakt konvergente Teilfolge enthält.

Satz 67 (Montel)**.** *Ist eine Familie $\mathcal{F}$ holomorpher Funktionen in einem Gebiet G lokal beschränkt, so ist sie normal.*

Beweis. Sei $(K_l)_l$ eine Folge kompakter Teilmengen von G wie in Lemma 66. Nach Lemma 65 ist für $l \in \mathbb{N}$ $\{f_j : j \in \mathbb{N}\}$ eine Menge gleichgradig stetiger Funktionen auf K_l. Sie ist nach Voraussetzung auf K_l beschränkt. Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli gibt es eine gegen eine auf K_1 stetige Funktion F_1 konvergente Teilfolge $(f_l)_{l \in S_1}$. Induktiv wählen wir nach dem Satz von Arzelà-Ascoli eine Teilfolge $(f_l)_{l \in S_{l+1}}$ für eine Teilmenge S_{l+1} von $S_l \subset \mathbb{N}$ für die $(f_l)_{l \in S_{l+1}}$ auf K_{l+1} gegen eine stetige Funktion F_{l+1} konvergiert. Wählen wir $a_1 \in S_1$, $a_1 < a_2 \in S_2$, $a_2 < a_3 \in S_3$ und fahren induktiv so fort, so konvergiert die Folge $(f_{a_j})_j$, die für $j > l$ eine Teilfolge von $(f_l)_{l \in S_1}$ ist, auf K_l gleichmäßig gegen F_l. Wegen $\cup_l K_l = G$ konvergiert $(f_{a_l})_l$ kompakt und $\mathcal{F}$ ist normal.. □

6 Lemma von Schwarz und Abbildungssatz

6.1 Lemma von Schwarz und Schwarz-Pick

Satz 68 (Lemma von Schwarz)**.** *Für eine holomorphe Abbildung f vom offenen Einheitskreis $\mathbb{D}$ in sich mit $f(0) = 0$ gilt $|f'(0)| \leq 1$ und $|f(z)| \leq |z|$ für $z \in \mathbb{D}$. Nur für die Abbildung $f(z) = az$ und $|a| = 1$ kann Gleichheit in der ersten Ungleichung oder für ein $z \neq 0$ in der zweiten Ungleichung gelten.*

Beweis. Wegen $f(0) = 0$ und Korollar 23 gibt es eine in $\mathbb{D}$ holomorphe Funktion g mit $f(z) = zg(z)$ in $\mathbb{D}$. Würde $|g(z_0)| > 1$ für ein $z_0 \in \mathbb{D}$ gelten, so müsste es nach dem Maximumsprinzip für alle $1 > r \geq |z_0|$ ein $z_1 \in \mathbb{D}$ mit $|g(z_1)| \geq |g(z_0)|$ und $|z_1| = r$. Für $r > 1/|g(z_0)|$ folgt dann $|f(z_1)| = |z_1||g(z_1)| = r|g(z_1)| > 1$ im Widerspruch zu $f(z_1) \in \mathbb{D}$.

Wegen $g(0) = f'(0)$ folgt $|f'(0)| \leq 1$ und wegen $f(z) = zg(z)$ und $|g(z)| \leq 1$ folgt $|f(z)| \leq |z|$.

Aus $|f(z)| = |z|$ für ein $z \neq 0$ folgt $|g(z)| = 1$ und wegen $|g(w)| \leq 1$ nimmt g sein betragsmäßiges Maximum 1 im Inneren an, womit aus dem Maximumsprinzip $g(z) = a$ für alle $z \in \mathbb{D}$ mit $|a| = 1$ folgt. □

Für den Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes 72 benötigen wir noch

Satz 69. *Sei das Gebiet $G \subseteq \mathbb{D}$ einfach zusammenhängend, $z_0 \in G$ und $f : G \to \mathbb{D}$ holomorph und injektiv mit $f(z_0) = 0$. Ist f nicht surjektiv, so gibt es $F : G \to \mathbb{D}$ ebenfalls holomorph und injektiv mit $F(z_0) = 0$ und $|F'(z_0)| > |f'(z_0)|$. Insbesondere ist eine injektive holomorphe Abbildung $f : G \to \mathbb{D}$, für die $|f'(z_0)|$ maximal in der Klasse der holomorphen injektiven Abbildungen von G nach $\mathbb{D}$ mit $f(z_0) = 0$ ist, notwendigerweise surjektiv.*

Beweis. Die Aussage folgt aus der Kettenregel, wenn wir f als Zusammensetzung $f = \psi \circ F$ mit einer holomorphen injektiven Funktion $F : G \to \mathbb{D}$ mit $F(z_0) = 0$, und einer holomorphen Funktion ψ, die $|\psi'(F(z_0))| = |\psi'(0)| < 1$ erfüllt darstellen können.

Im Wesentlichen werden wir $F = r \circ f$ durch eine Wurzelfunktion r auf $f(G)$, d.h. einer Funktion r, die $r^2(z) = z$ auf $f(G)$ erfüllt, darstellen und $F = s \circ f$ für s die Quadratfunktion $z \mapsto z^2$ wählen. Wenn $f(z_0) = F(z_0) = 0$ gilt und ψ keine Drehung ist, folgt dann aus dem Lemma von Schwarz 68 $|\psi'(0)| < 1$ und damit die Behauptung des Satzes.

Ist f injektiv und stetig auf G mit stetiger Inverser auf $f(G)$, so sind G und $f(G)$ homöomorph. Da einfach zusammenhängend eine topologische Invariante ist, ist G genau dann einfach zusammenhängend, wenn $f(G)$ einfach zusammenhängend ist. Als holomorphe injektive Funktion hat f eine holomorphe Inverse auf $f(G)$ und es folgt aus dem Monodromiesatz die Existenz einer Wurzelfunktion auf $f(G)$ falls $0 \notin f(G)$. Um eine Wurzelfunktion r definieren zu können wenden wir einen Automorphismus φ_a von $\mathbb{D}$ auf sich an (vgl. Lemma 13), mit einem $a \in \mathbb{D} \setminus f(G)$.

Da f nicht surjektiv ist, ist die Existenz eines solchen $a \in \mathbb{D}$ sichergestellt. Um F $F(z_0) = 0$ zu erreichen, setzen wir $F := \varphi_b \circ r \circ \varphi_a \circ f$ und wählen $b = r(-a)$. Dann gilt nach Lemma 13

$$F(z_0) = \varphi_b \circ r \circ \varphi_a(0) = \varphi_b \circ r(-a) = 0.$$

Mit der Quadratfunktion $s: \ s(z) = z^2$ erhalten wir mit $\psi := \varphi_{-a} \circ s \circ \varphi_{-b}$

$$f = \psi \circ F.$$

ψ ist auf ganz $\mathbb{D}$ definiert und bildet $\mathbb{D}$ auf sich mit $\psi(0) = 0$ ab. ψ ist keine Möbiustransformation, sonst wäre auch s eine solche und aus dem Lemma von Schwarz 68 erhalten wir wegen $f'(z_0) = \psi'(0)F'(z_0)$: $|F'(z_0)| > |f'(z_0)|$. □

Satz 70 (Lemma v. Schwarz-Pick)**.** *Für eine holomorphe Abbildung $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ gilt*

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2} \tag{32}$$

für alle $z \in \mathbb{D}$.

Gilt in (32) Gleichheit für ein $z \in \mathbb{D}$, so ist f eine Möbiustransformation von $\mathbb{D}$ auf sich.

Beweis. Die Möbiustransformation $\varphi_z(\zeta) = \frac{\zeta - z}{1 - \bar{z}\zeta}$ bildet $\mathbb{D}$ auf sich und z nach 0 ab vgl. (13). Dann ist $F := \varphi_{f(z)} \circ f \circ \varphi_z^{-1} = \varphi_{f(z)} \circ f \circ \varphi_{-z}$ eine Funktion $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$, die 0 auf 0 abbildet. Wegen $\varphi_a'(\zeta) = \frac{1 - \bar{a}a}{(1 - \bar{a}\zeta)^2}$ folgt

$$\begin{aligned} F'(0) =& \varphi'_{f(z)}(f(z)) \cdot f'(z) \cdot (\varphi_{-z})'(0) = f'(z) \frac{(1 - \bar{z}z)(1 - \overline{f(z)}f(z))}{(1 - \overline{f(z)}f(z))^2} \\ =& f'(z) \frac{1 - |z|^2}{1 - |f(z)|^2} \end{aligned}$$

und mit dem Lemma von Schwarz folgt (32).

Gilt für ein $z \in \mathbb{D}$ Gleichheit in (32), so folgt $|F'(0)| = 1$ und mit dem Lemma von Schwarz $F(\zeta) = a\zeta$. Damit ist $f = \varphi_{-f(z)} \circ F \circ \varphi_z$ als Zusammensetzung von Möbiustransformationen eine Möbiustransformation. □

Korollar 71. *Möbiustransformationen die $\mathbb{D}$ auf sich abbilden sind die einzigen holomorphen Bijektionen von $\mathbb{D}$ auf sich.*

Beweis. Anwendung des Lemma von Schwarz-Pick auf f^{-1} an der Stelle $f(z)$ gibt

$$|f'(z)|(1 - |z|^2) \geq 1 - |f(z)|^2.$$

Also gilt Gleichheit in (32) und f ist damit nach dem Lemma von Schwarz-Pick eine Möbiustransformation. □

6.2 Riemannscher Abbildungssatz

Korollar 71 erlaubt uns für Gebiete G die konform äquivalent zur offenen Kreisscheibe $\mathbb{D}$ sind sämtliche biholomorphen Abbildungen zwischen diesen Gebieten vermöge einer solchen darzustellen: Sind ϕ_1 und ϕ_2 holomorphe Bijektionen von G auf $\mathbb{D}$, so ist $\phi_1^{-1} \circ \phi_2$ eine holomorphe Bijektion von $\mathbb{D}$ auf sich und damit eine Möbiustransformation θ wie in (13), d.h. $\phi_2 = \phi_1 \circ \theta$.

Zur vollständigen Charakterisierung aller biholomorphen Abbildungen eines Gebietes G auf $\mathbb{D}$ genügt es also zu untersuchen, wann es eine solche Abbildung gibt. Es stellt sich heraus, dass ein einfach zusammenhängendes nichtleeres Gebiet genau dann konform äquivalent zu $\mathbb{D}$ ist, wenn $G \neq \mathbb{C}$ gilt:

Satz 72 (Riemannscher Abbildungssatz)**.** *Für ein einfach zusammenhängendes Gebiet $G \neq \mathbb{C}$ und $a \in G$ gibt es genau eine holomorphe Bijektion $f: G \to \mathbb{D}$ mit $f(a) = 0$ und $f'(a) > 0$.*

Beweis. Die Eindeutigkeit der Abbildung folgt aus Korollar 71, da die Identität die einzige Möbiustransformation ist, die $\mathbb{D}$ auf sich abbildet, a als Fixpunkt und in a positive Ableitung hat.

Wir dürfen – gegebenenfalls nach einer Translation – annehmen, dass $0 \notin G$ gilt. Für $b \in G$ gibt es auf einer Umgebung von b eine lokale Wurzelfunktion, die wir längs jeden Weges in G analytisch fortsetzen können. Da G einfach zusammenhängend ist folgt aus dem Monodromiesatz 41, dass wir so auf G eine holomorphe Wurzelfunktion r erhalten, d.h. eine Bijektion $r: G \to f(G)$, die $(r(z))^2 = z$ auf G erfüllt. Damit ist $-w \notin r(G)$ für $w \in r(G)$. Ist also $K_{w,\rho} \subset r(G)$ eine Umgebung von z, so ist $K_{-w,\rho}$ disjunkt zu $r(G)$ und die Inversion $z \mapsto \frac{1}{z+w}$ bildet $r(G)$ nach $K(-w, 1/\rho)$ ab. Wir dürfen also o.B.d.A. annehmen, dass $r(G)$ beschränkt ist bzw. gegebenenfalls nach einer Translation und Streckung, dass auch $0 \in G \subset \mathbb{D}$ gilt.

Es bezeichne $\mathcal{F} := \{f : G \to \mathbb{D},\ f \text{ injektiv und holomorph mit } f(0) = 0\}$. Wegen $\mathrm{Id} \in \mathcal{F}$ folgt $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Aus der Cauchyschen Integralformel 22 folgt, wenn wir ρ so klein wählen, dass $\overline{K_{0,\rho}} \subseteq G$ gilt, was wegen $f(0) = 0$ möglich ist, für $f \in \mathcal{F}$:

$$|f'(0)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\partial K_{0,\rho}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta\right| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\rho^2}2\pi\rho = \frac{1}{\rho} < \infty.$$

Sei $(f_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{F}$ mit $|f_n'(0)| \to_{n\to\infty} \sup\{|f'(0)| : f \in \mathcal{F}\}$. Da die Funktionen f_n nach $\mathbb{D}$ abbilden, sind sie in G durch 1 beschränkt. Nach dem Satz von Montel 67 können wir zu einer Teilfolge übergehen für die $(f_{n_j})_j$ kompakt gegen eine Funktion f_M konvergiert. Nach Satz 63 ist f holomorph und $(f_{n_j}')_j$ konvergiert kompakt gegen f_M'. Damit gilt $f_M'(0) = \sup\{|\tilde{f}'(0)| : \tilde{f} \in \mathcal{F}\}$. Die Funktionen $\tilde{f}$ sind injektiv, haben also keine oder eine a-Stelle. Nach dem Satz von Hurwitz 64 nimmt dann auch f den Wert $a \in \mathbb{D}$ höchstens einmal an, sofern f nicht konstant ist. Wegen $f_M'(0) \geq 1$ ist f_M nicht konstant und mit Satz 69 folgt, dass f_M surjektiv ist. f_M ist also die gesuchte biholomorphe Abbildung von G auf $\mathbb{D}$. □

7 Reihen und Produktdarstellungen

7.1 Sätze von Weierstraß u. Mittag-Leffler

Satz 73 (Mittag-Leffler). *Es sei $(a_j)_j$ eine endliche oder unendliche Folge ohne Häufungspunkt in $\mathbb{C}$ und $(P_j)_j$ eine Folge von Polynomen. Dann gibt es eine meromorphe Funktion in $\mathbb{C}$ deren Pole genau in den Punkten a_j liegen und deren Hauptteile dort $P_j(\frac{1}{z-a_j})$ sind.*

Beweis. Ist die Folge $(a_j)_j$ endlich, so ist $\sum_j P_j(\frac{1}{z-a_j})$ die gesuchte meromorphe Funktion. Für unendlich viele Pole ist aber die Konvergenz dieser Reihe nicht sichergestellt. Wir erzwingen kompakte Konvergenz durch Hinzufügen geeigneter Polynome zu diesen Summanden.

Wir dürfen o.B.d.A. annehmen, dass $|a_j| \leq |a_{j+1}|$ gilt. Da $(a_j)_j$ nach Voraussetzung keine Häufungspunkte hat folgt, dass $a_j \to \infty$ gilt. Weiters dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass $a_0 = 0$ gilt, wenn wir für P_0 gegebenenfalls das Nullpolynom wählen.

Es sei $h_0 = 0$ und h_j für $j \geq 1$ ein Taylorpolynom um 0 der Funktion $P_j(\frac{1}{z-a_j})$, derart dass $|P_j(\frac{1}{z-a_j}) - h_j(z)| < 2^{-j}$ für $z \in K_{0,|a_j|/2}$ gilt.

Wir behaupten, dass die Reihe $\sum_j P_j(\frac{1}{z-a_j}) - h_j(z)$ kompakt in $G^* := \mathbb{C} \setminus \cup_j \{a_j\}$ konvergiert. Dafür haben wir zu zeigen, dass diese Reihe in kompakten Teilmengen K von G^* gleichmäßig konvergiert. Wegen $a_j \to \infty$ gibt es ein j_0 mit $|z| < |a_j|/2$ für $z \in K$ und $j \geq j_0$. Dann folgt für $z \in K, l > j_0$ wegen $\sum_{j>l} |P_j(\frac{1}{z-a_j}) - h_j(z)| < \sum_{j>l} 2^{-j} = 2^{-l}$ die in K gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\sum_{j \in \mathbb{N}_0} P_j(\frac{1}{z-a_j}) - h_j(z)$. □

In sehr ähnlicher Weise kann die Frage beantwortet werden, ob es zu einer gegebenen Nullstellenverteilung eine ganze Funktion gibt, die genau diese Nullstellen hat.

Wir rufen in Erinnerung dass ein unendliches Produkt $\prod_j z_j$ konvergent heißt, wenn der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^n z_j$ existiert. Das Produkt konvergiert kompakt in einer offenen Menge G, wenn dieses Produkt gleichmäßig auf kompakten Teilmengen konvergiert. Wir fordern hier nicht dass dieser Grenzwert ungleich 0 ist.

Lemma 74. *Konvergiert eine Funktionenreihe $\sum_k 1 - f_k$ mit f_k ohne Nullstellen absolut kompakt, so konvergiert das Produkt $\prod_k f_k$ kompakt gegen eine Funktion ohne Nullstellen.*

Beweis. Aus der gleichmäßigen kompakten Konvergenz von $\sum_k |1 - f_k(z)|$ folgt, dass es für kompaktes $K \subset G$ ein k_0 mit $|1 - f_k(z)| < 1/2$ für $z \in K$, $k \geq k_0$ gibt. Für $|w| < 1/2$ gilt

$$|\log(1-w)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} w^k\right| \leq |w| \sum_{k=0}^{\infty} |w|^k = \frac{|w|}{1-|w|} \leq 2|w|,$$

womit die in K gleichmäßige absolute Konvergenz der Reihe $\sum_k \log(f_k(z))$ folgt. Aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt die gleichmäßige Stetigkeit auf kompakten Mengen und damit die absolute Konvergenz von

$$\lim_{N\to\infty} \exp\left(\sum_{k=k_0}^{N} \log(f_k(z)\right) = \lim_{N\to\infty} \prod_{k=k_0}^{N} f_k(z) \neq 0.$$

Da f_k keine Nullstellen hat, folgt die Konvergenz des Produktes $\prod_{k=1}^{\infty}(1-f_k(z))$. $\square$

Satz 75 (Weierstraß)**.** *Für eine Folge $(a_j)_j$ in $\mathbb{C}$ die keine Häufungspunkte hat gibt es eine ganze Funktion, die genau in den Punkten $a_j, j \in \mathbb{N}$ Nullstellen hat, deren Ordnung gleich der Vielfachheit des Elementes a_j in dieser Folge ist.*

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass $0 \neq a_j$ für $j \in \mathbb{N}$ gilt, anderenfalls konstruieren wir eine Funktion die die vorgegebenen Nullstellen in $a_j \neq 0$ und multipizieren diese dann mit z^{n_0}.

Wegen $a_j \to_{j\to\infty} \infty$ gibt es für kompakte Teilmengen K von $\mathbb{C}$ ein $m_K \in \mathbb{N}$ mit $|z| < /|a_j|/2$ für $z \in K$ und $j > m_K$.

Die Taylorreihe $-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(z/a_j)^k$ konvergiert für $|z| < |a_j|/2$ gleichmäßig gegen die Funktion $\log(1-z/a_j)$.

Also konvergiert für $j > m_K$ die Folge $\left(1-\frac{z}{a_j}\right)\left(\exp\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_j}\right)^k\right)\right)_N$ für $|z| < \frac{a_j}{2}$ gleichmäßig gegen 1 und es gibt ein $k_j \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|1-\left(1-\frac{z}{a_j}\right)\exp\left(\sum_{k=1}^{k_j} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_j}\right)^k\right)\right| < 2^{-j}$$

für $|z| < |a_j|/2$. Es folgt mit Lemma 74 die Konvergenz des Produktes

$$\prod_{j>m_K} \left(1-\frac{z}{a_j}\right)\exp\left(\sum_{k=1}^{k_j} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_j}\right)^k\right)$$

gegen eine Funktion ohne Nullstellen in K, womit das Produkt

$$\prod_{j>1} \left(1-\frac{z}{a_j}\right)\exp\left(\sum_{k=1}^{k_j} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_j}\right)^k\right)$$

gleichmäßig gegen eine Funktion konvergiert, die in K genau die Nullstellen von

$$\prod_{j>1}^{m_K} \left(1-\frac{z}{a_j}\right)\exp\left(\sum_{k=1}^{k_j} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_j}\right)^k\right),$$

also a_j als Nullstellen hat, deren Ordnung gleich der Vielfachheit von a_j in der gegebenen Folge ist. $\square$

7.2 Darstellungen von $\sin$ und $\cot$

Man könnte eine Reihendarstellung des Cotangens herleiten, indem man dem Beweis des Satzes von Weierstraß 75 folgend Polynome berechnet, die das Produkt konvergent machen. Wir versuchen Polynome möglichst niedriger Ordnung zu verwenden, sodass die Produktdarstellung die 1-Periodizität wiederspiegelt und eine möglichst einfache Gestalt annimmt und die π-Periodizität des Cotangens wiederspigelt:

Satz 76 (Partialbruchzerlegung des Cotangens)**.** *Es gilt für* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z}{z^2 - n^2}.$$

Beweis. Der Cotangens hat genau bei den Nullstellen des Sinus Pole erster Ordnung, damit hat $z \mapsto \pi \cot(\pi z)$ in $\mathbb{Z}$ Pole erster Ordnung. Wegen $\pi \cot(\pi z) = \frac{(\sin(\pi z))'}{\sin(\pi z)}$ folgt mit Lemma 54 $\operatorname{Res}(\pi \cot(\pi z), n) = 1$ für $n \in \mathbb{Z}$.

Weiters gilt

$$\lim_{y \to \pm\infty} \pi \cot(\mathrm{i}\pi y) = \pm \mathrm{i}\pi \lim_{y \to \infty} \frac{\mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{y}}{\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{y}} = \pm \mathrm{i}\pi \lim_{y \to \infty} \frac{\mathrm{e}^{-2y} + 1}{\mathrm{e}^{-2y} - 1} = \mp \mathrm{i}\pi. \tag{33}$$

Die Reihe $\sum_n \frac{1}{z-n}$ konvergiert nicht unbedingt. Es konvergiert aber wegen $\left|\frac{1}{z^2-n^2}\right| < \frac{4}{3n^2}$ für $n > 2|z|$ die Reihe

$$\begin{aligned} f(z) := \frac{1}{z} + \frac{2}{z} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{1 - \left(\frac{n}{z}\right)^2} &= \frac{1}{z} + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z}{z^2 - n^2} \\ = \frac{1}{z} + \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} &= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{z-n} \end{aligned} \tag{34}$$

gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. f ist damit nach Satz 63 eine auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ holomorphe Funktion, die offensichtlich in $\mathbb{Z}$ Pole erster Ordnung mit $\operatorname{Res}(f, n) = 1$ hat.

Man sieht die 1-Periodizität von f wegen

$$\begin{aligned} f(z+1) - f(z) &= \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{z+1-n} - \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{z-n} \right) \\ &= \lim_{N \to \infty} \left(\frac{1}{z+1+N} - \frac{1}{z-N} \right) = 0. \end{aligned}$$

Für $z = \mathrm{i}y$ erhalten wir, wenn wir die Summen in (34) als Riemannsummen auffassen

$$\lim_{y \to \pm\infty} f(\mathrm{i}y) = \mp \lim_{y \to \infty} \frac{2\mathrm{i}}{y} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{1 + \left(\frac{n}{y}\right)^2} = \mp 2\mathrm{i} \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\, dt = \mp \mathrm{i}\pi. \tag{35}$$

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $\Re(z) \in [-1/2, 1/2]$, $\Im(z) > \sqrt{3}/2$ folgt $\operatorname{Arg}(z) \in [\pi/3, 2\pi/3]$, also

$$\operatorname{Arg}(z^2) \in (2\pi/3, 4\pi/3) \text{ und } \Re(z^2) \leq |z^2|\cos(2\pi/3) = -|z^2|/2.$$

Damit gilt $\Re(1-(n/z)^2) \geq 1 + n^2/(2|z|^2)$ und wenn man die folgende Reihe als Riemannsche Untersumme auffasst

$$|f(z)| \leq 1 + \frac{2}{z}\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{1-\left(\frac{n}{z}\right)^2} \leq 1 + 2\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2/2}\,dt = 1 + \sqrt{2}\pi \tag{36}$$

für $\{z \in \mathbb{C} : |\Re(z)| \leq 1/2, \Im(z) \geq 1\}$. Analog folgt 36 für $\{z \in \mathbb{C} : |\Re(z)| \leq 1/2, \Im(z) \leq 1\}$. Wegen $\operatorname{Res}(f,n) = \operatorname{Res}(\pi\cot(\pi z), n) = 1$ ist $\Theta(z) := f(z) - \pi\cot(\pi z)$ eine in $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ holomorphe Funktion mit hebbaren Singularitäten in $\mathbb{Z}$ und kann so als ganze Funktion aufgefasst werden. Als solche ist Θ stetig und damit auf $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) \in [-1/2, 1/2],\ |\Im(z)| \leq 1\}$ beschränkt. Da sowohl f als auch $\pi\cot(\pi\cdot)$ 1-periodisch sind, ist es Θ ebenso. Um zu sehen, dass Θ beschränkt ist, genügt es also zu zeigen, dass sowohl f als auch $\pi\cot(\pi\cdot)$ auf $\{z \in \mathbb{C} : |\Re(z)| \leq 1/2,\ |\Im(z)| \geq 1\}$ beschränkt sind. Für f ist das die Abschätzung (36), für den Cotangens gilt

$$|\cot z| = \left|\frac{1+e^{-2iz}}{1-e^{-2iz}}\right| \leq \frac{1+e^{-2}}{1-e^{-2}} < \frac{1+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{5}{3}.$$

Damit ist Θ eine ganze Funktion, die beschränkt und damit nach Liouville konstant ist. Wegen (33) und (35) folgt $\Theta = 0$, also $\pi\cot(\pi\cdot) = f$. $\square$

Aus dieser Partialbruchzerlegung des Cotangens können wir eine Partialbruchzerlegung von $\frac{\pi^2}{\sin(\pi z)}$ und eine Produktdarstellung des Sinus gewinnen:

Satz 77 (Partialbruchzerlegung und Produktdarstellung des Sinus)**.** *Es gilt für $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$*

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} \tag{37}$$

und für $z \in \mathbb{C}$

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right). \tag{38}$$

Beweis. Aus Satz 76 und 63 folgt (37) wegen

$$(\pi\cot(\pi z))' = -\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = -\frac{1}{z^2} - \sum_{n\neq 0}\frac{1}{(z-n)^2} = -\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z-n)^2}.$$

Da $\sin(\pi z)$ genau auf $\mathbb{Z}$ Nullstellen hat können wir nach dem Monodromiesatz in einem einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subset \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ eine Logarithmusfunktion log definieren. Dort gilt dann

$$\pi\cot(\pi z) = (\log\sin(\pi z))' = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{2z}{z^2-n^2} = (\log z)' + \sum_{n\in\mathbb{N}}(\log(z^2-n^2))'$$

und für jede Wahl von Integrationskonstanten c_n für welche die Reihe

$$\log z + \sum_{n\in\mathbb{N}} \log(c_n(z^2-n^2))$$

in G kompakt konvergiert, definiert diese Funktion in G nach Satz 63 eine Stammfunktion von $\pi\cot(\pi z)$. Für $c_n := \frac{-1}{n^2}$ konvergiert diese Reihe nach Lemma 74 kompakt in G und wir erhalten mit einer Integrationskonstanten C:

$$\log\sin(\pi z) = C + \log z + \sum_{n\in\mathbb{N}} \log\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right).$$

Es folgt durch exponenzieren

$$\sin(\pi z) = \mathrm{e}^C z \prod_{n\in\mathbb{N}} \left(1-\frac{z^2}{n^2}\right).$$

Um die Integrationskonstante e^C zu bestimmen werten wir $\sin(\pi z)/z$ und dieses Produkt bei 0 aus: $\sin(\pi z)/z$ hat bei 0 eine hebbare Singularität mit analytischer Fortsetzung π in 0. Für die rechte Seite erhalten wir bei 0 genau e^C, womit wir e^C als π bestimmt haben. Wir erhalten so (38) in jedem einfach zusammenhängenden Gebiet in $\mathbb{C}\setminus\mathbb{N}$. Damit gilt (38) in ganz $\mathbb{C}\setminus\mathbb{N}$. Sowohl der Sinus als auch dieses Produkt sind ganze Funktionen, damit stimmen diese Funktionen in $\mathbb{C}$ überein. □

7.3 Gammafunktion

Wir versuchen eine Funktion F zu finden, die Nullstellen erster Ordnung genau in den negativen ganzen Zahlen hat. Mit dieser werden wir dann $\sin z$ als $F(z)F(1-z)$ darstellen.

Das Produkt $\prod_{k\in\mathbb{N}}\left(1+\frac{z}{k}\right)$ ist nicht konvergent. Dem Beweis von Satz 75 folgend gibt es Polynome für die

$$\prod_{k\in\mathbb{N}} \left(1+\frac{z}{k}\right) \exp\left(-\sum_{j=1}^{m_k} \frac{1}{j}\left(\frac{z}{k}\right)^j\right)$$

kompakt in $\mathbb{C}$ konvergiert. Bereits für $m_k = 1$ erhalten wir mit

$$\begin{aligned} H(z) :=& z\prod_{k\in\mathbb{N}} \left(1+\frac{z}{k}\right)\exp\left(-\left(\frac{z}{k}\right)\right) \\ =& \lim_{n\to\infty} \frac{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}{n!} \exp\left(-z\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) \end{aligned} \tag{39}$$

wegen

$$\begin{aligned} \left|1-(1+x)\mathrm{e}^{-x}\right| \leq& x^2(1-1/2!) + x^3(1/2!-1/3!) + \cdots \\ \leq& x^2 + x^3 + \ldots = x^2/(1-x) \leq 2x^2 \end{aligned}$$

für $|x| < 1/2$ ist (39) nach Lemma 74 ein konvergentes Produkt. Die Partialsummen $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ gehen logarithmisch gegen unendlich. Fasst man $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ als eine Riemannsche Obersumme der Funktion $t \mapsto \frac{1}{t}$ im Intervall $[1, n+1]$ auf, so folgt

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n+1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_{1}^{n+1} \frac{1}{t}\, dt \geq 0.$$

Die Folge $(s_n)_n$ ist also nach unten beschränkt und wegen

$$s_{n+1} - s_n = \frac{1}{n+1} - \log(n+1) + \log(n) = \frac{1}{n+1} - \int_{n}^{n+1} \frac{1}{t}\, dt \leq 0$$

monoton fallend, womit die Folge $(s_n)_n$ konvergiert. Ihr Grenzwert $\lim_{n\to\infty} s_n$ ist die *Euler-Mascheronische Konstante* $\gamma = 0,57721\ldots$. Mit ihr können wir (39) als

$$\begin{aligned} H(z) &= \lim_{n\to\infty} \frac{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}{n!} \exp\left(-z\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}{n!n^z} \exp\left(z\left(\log(n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}{n!n^z} \exp(-z\gamma) \end{aligned}$$

darstellen. Es folgt

$$H(z+1) = H(z) \lim_{n\to\infty} \frac{z+n+1}{nz} \mathrm{e}^{-\gamma} = \frac{\mathrm{e}^{-\gamma}}{z} H(z). \tag{40}$$

Wir definieren die *Gammafunktion* Γ als

$$\Gamma(z) := \frac{1}{\mathrm{e}^{\gamma z} H(z)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}. \tag{41}$$

(*Gaußsche Produktdarstellung der Gammafunktion*).

Satz 78. *Es gilt für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$:*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{42}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\Gamma(n+1) = n!$ und $\Gamma(1) = 1$.

Beweis. Aus (40) und (41) erhalten wir

$$\Gamma(z+1) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\gamma(z+1)} H(z+1)} = \frac{z\mathrm{e}^{\gamma}}{\mathrm{e}^{\gamma(z+1)} H(z)} = \frac{z}{\mathrm{e}^{\gamma z} H(z)} = z\Gamma(z).$$

Aus (41) folgt

$$\Gamma(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot (n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Damit folgt für $n \in \mathbb{N}$ durch n-maliges Anwenden von (42) $\Gamma(n+1) = n!$. $\square$

Die Gammafunktion hat Pole erster Ordnung in $0,-1,-2,\ldots$. Damit hat $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$ wie $\sin^{-1}(\pi z)$ Pole erster Ordnung in $\mathbb{Z}$. Tatsächlich gilt:

Satz 79 (Eulersche Reflexionsformel 1771)**.** *Auf* $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ *gilt*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Beweis. Mit Satz 78 und 77 folgt

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(1-z)=&\Gamma(z)(-z)\Gamma(-z)\\ =&-z\lim_{n\to\infty}\frac{n!n!n^z n^{-z}}{z(-z)(1+z)(1-z)(2+z)(2-z)\ldots(n+z)(n-z)}\\ =&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{z(1+z)(1-z)(1+\frac{z}{2})(1-\frac{z}{2})\ldots(1+\frac{z}{n})(1-\frac{z}{n})}=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}.\square\end{aligned}$$

Satz 80. *Für* $\Re(z)>0$ *gilt*

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt.$$

Beweis. Obiges Integral existiert für $\Re(z)>0$ als uneigentiches Riemannintegral. Es gilt wegen $(1-\frac{t}{n})^n<\mathrm{e}$:

$$\left|\int_0^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt-\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\,dt\right|=\left|\int_0^\infty t^{z-1}\left(\mathrm{e}^{-t}-\mathbb{1}_{[0,n]}(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)dt\right| \tag{43}$$

$$\leq\int_0^\infty t^{\Re(z)-1}\left(\mathrm{e}^{-t}-\mathbb{1}_{[0,n]}(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)dt\leq\int_0^\infty 2\mathrm{e}^{-t}t^{\Re(z)-1}\,dt,$$

wobei letzteres Integral für $\Re(z)>0$ existiert. Wegen $\lim_{n\to\infty}(1-t/n)^n=\mathrm{e}^{-t}$ konvergiert der Integrand in (43) für $n\to\infty$ punktweise gegen 0 und aus dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt mit $u=t/n$ und n-maliger partieller Integration und (41)

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt&=\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\,dt=\lim_{n\to\infty}n\int_0^1(1-u)^n n^{z-1}u^{z-1}\,du\\ &=n^z(1-u)^n\frac{u^z}{z}\Big|_0^1+n^z n\int_0^1(1-u)^{n-1}\frac{u^z}{z}\,du=\frac{n^z n}{z}\int_0^1(1-u)^{n-1}u^z\,du\\ &=\frac{n^z n(n-1)}{z(z+1)}\int_0^1(1-u)^{n-2}u^{z+1}\,du\\ &=\cdots=\frac{n^z n(n-1)\ldots 1}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}\int_0^1(1-u)^0u^{z+n-1}\,du\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{n^z n!}{z(z+1)\ldots(z+n)}=\Gamma(z).\end{aligned}$$

$\square$

8 Anwendungen in der Approximationstheorie

8.1 Satz von Münz-Sasz

Der Approximationssatz von Weierstraß sagt, dass der Raum der Polynome dicht in $C[0,1]$ ist. Die folgende Verallgemeinerung charakterisiert jene Mengen von Exponenten, die in diesem Satz statt $\mathbb{N}$ gewählt werden können.

Satz 81 (Münz-Sasz)**.** *Für eine Folge $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$ ist die lineare Hülle der Funktionen* $\mathrm{Span}(t^{\lambda_i},\ i \in \mathbb{N}_0)$ *genau dann dicht in $C[0,1]$, wenn $\sum_{i\in\mathbb{N}} 1/\lambda_i = \infty$ gilt.*

Beweis. Angenommen $\mathrm{Span}(t^{\lambda_i},\ i \in \mathbb{N}_0)$ ist nicht dicht in $C(I)$, $I = [0,1]$. Dann gibt es nach dem Satz von Hahn-Banach ein Borelmaß $\mu \neq 0$ auf I mit

$$\int_I t^{\lambda_i}\, d\mu(t) = 0\ \forall \lambda \in \Lambda_0 := \{\lambda_0, \lambda_1, \ldots\}. \tag{44}$$

Wir definieren

$$f(z) := \int_I t^z\, d\mu(t) \tag{45}$$

und zeigen, dass falls f Nullstellen in Λ_0 hat f identisch 0 sein muss. Das heißt es gilt insbesondere $\int_I t^n\, dt = 0$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Nach dem Satz von Stone-Weierstraß gilt dann aber $\int_I g(t)\, d\mu(t) = 0$ für alle $g \in C(I)$ und μ ist das Nullmaß, bzw. $\mathrm{Span}(t^{\lambda_i},\ i \in \mathbb{N}_0) = C(I)$.

Wegen $t^{\lambda_i} = 0$ für $t = 0$ und $i > 0$ gilt $\int_I t^{\lambda_i}\, d\mu(t) = \int_I t^{\lambda_i}\, d\tilde{\mu}(t)$ für $\mu - \tilde{\mu} = a\delta_0$ und die Existenz eines Maßes auf $(0,1]$ das (44) für $\lambda_i \in \Lambda := \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ erfüllt ist äquivalent zur Existenz eines Maßes auf $[0,1]$, das (44) für $\lambda_i \in \Lambda_0$ erfüllt. Wir zeigen also, dass das einzige Maß μ auf $(0,1]$ das (44) für $\lambda_i \in \Lambda$ erfüllt das Nullmaß ist.

Zunächst ist $|e^{z\log t}|$ wegen $t^z = e^{z\log t}$ für alle z mit $\Re z > 0$ durch 1 beschränkt womit das Integral (45) existiert und f in der rechten Halbebene definiert ist. $e^{z\log t}$ ist in der rechten Halbebene für alle t betragsmäßig durch 1 beschränkt, damit konvergiert $f(z)$ für $\Re z_0 > 0$ nach dem Satz von der dominierten Konvergenz gegen $f(z_0)$. f ist also in der rechten Halbebene stetig. Für ein Dreieck Δ in der rechten Halbebene ist $e^{z\log t}$ auf $\Delta \times (0,1]$ ebenfalls beschränkt, womit die Integrationsreihenfolge vertauscht werden darf und nach dem Satz von Morera folgt, dass f holomorph in der rechten Halbebene ist. Nach Voraussetzung hat f Nullstellen in $\{\lambda_i :\ i \in \mathbb{N}_0\}$.

Durch $\Theta(z) = \frac{z+1}{-z+1}$ wird eine Möbiustransformation die den Einheitskreis auf die rechte Halbebene abbildet definiert. Die Funktion $g(z) := f \circ \Theta(z)$ ist dann holomorph und beschränkt in $\mathbb{D}$ mit Nullstellen in $\frac{\lambda_n+1}{-\lambda_n+1}$. Nach Satz 62 muss dann

$$\sum_n 1 - \left|\frac{\lambda_n + 1}{-\lambda_n + 1}\right| = \sum_n \frac{-2\lambda_n}{1 - \lambda_n}$$

divergieren, was genau dann der Fall ist, wenn $\sum_n \lambda_n^{-1}$ divergiert.

Um umgekehrt zu sehen, dass falls $\sum_n \lambda_n^{-1}$ konvergiert, für $\lambda \notin \{\lambda_0, \lambda_1, \ldots\}$, die Funktion $t \mapsto t^\lambda$ nicht in $\mathrm{Span}(t^{\lambda_i}, i \in \mathbb{N}_0)$ liegt, suchen wir eine Dichtefunktion $\rho(t)$ auf $[0,1]$ für die $f(z) := \int_I t^z \rho(t)\, dt$ genau für $z \in \{\lambda_i : i \in \mathbb{N}_0\}$ Nullstellen in der rechten Halbebene hat. Wegen

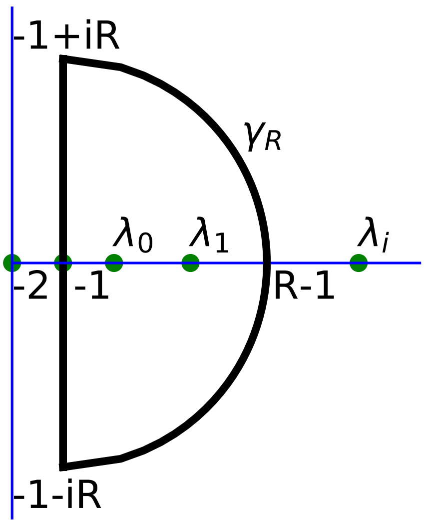
$$\int_I t^w\, dt = \frac{1}{1+w}$$

erhalten wir für eine Funktion f, die im Inneren einer Kurve γ holomorph ist folgende Formulierung der Cauchyschen Integralformel

$$f(z) = \frac{-1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{z-\zeta}\, d\zeta = \frac{-1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta) \int_I t^{z-\zeta-1}\, dt\, d\zeta = \frac{-1}{2\pi i} \int_I t^z \int_\gamma f(\zeta) t^{-\zeta-1}\, d\zeta\, dt \tag{46}$$

und $\rho(t) := \frac{-1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta) t^{-\zeta-1}\, d\zeta$ ist die gesuchte Dichtefunktion, wenn die Integrale existieren, die Vertauschung der Integrationsreihenfolge gerechtfertigt ist und f holomorph im Inneren von γ ist.

Wir werden für γ_R den Rand von Halbkreisen mit Mittelpunkten in -1 und Radien R in der Halbebene $\{z : \Re z \geq -1\}$ wählen. Dann ist $\prod_{\lambda_n < R} (\lambda_n - z)$ eine Funktion die im Inneren von γ_R genau die vorgegebenen Nullstellen hat. Die Funktionen $z \mapsto 2 + \lambda_n + z$ sind in der Halbebene $\mathbb{H}_{-2} := \{z : \Re(z) > -2\}$ holomorph und ohne Nullstelle.



Das Produkt $\prod_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{\lambda_n - z}{2+\lambda_n+z}$ konvergiert wegen

$$\left| 1 - \frac{\lambda_n - z}{2 + \lambda_n + z} \right| = \left| \frac{2z+2}{2+\lambda_n+z} \right| \leq \left| \frac{2z+2}{\lambda_n} \right|$$

sowie der Konvergenz von $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^{-1}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{H}_{-2}$ nach Lemma 74 kompakt in $\mathbb{H}_{-2}$ und $p(z) := \prod_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{\lambda_n - z}{2+\lambda_n+z}$ ist eine in $\mathbb{H}_{-2}$ holomorphe Funktion mit Nullstellen genau in $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}_0\}$. Wegen $|\lambda_n - z| < |\lambda_n + z + 2|$ für $\Re z > -1$ folgt $|p(z)| \leq |z|$ in $\{z : \Re z > -1\}$. Wir multiplizieren p mit einer in $\mathbb{H}_{-2}$ holomorphen Funktion σ ohne Nullstellen in $\mathbb{H}_{-2}$, die gewährleistet, dass $\sigma(z)p(z)$ auf dem Halbkreis $\gamma_{R,+}(\varphi) = -1 + R e^{i\varphi}$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$ von höherer Ordnung als $1/R$ gegen 0 konvergiert. Die einfachste Wahl ist $\sigma(z) := (2+z)^{-2}$.

$$f(z) := \frac{1}{(z+2)^2} \prod_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{\lambda_n - z}{2 + \lambda_n + z}$$

ist also in $\mathbb{H}_{-2}$ holomorph mit Nullstellen in Λ_0 sowie

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_{R,+}}\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}\,d\zeta=0$$

für $\gamma_{R,+}(\varphi)=-1+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $\varphi\in[-\pi,\pi]$. Es folgt für $R\notin\Lambda_0$ mit (46) für $|z+1|<R, \Re z>-1$

$$\frac{1}{(z+2)^2}\prod_{\lambda_n<R}\frac{\lambda_n-z}{2+\lambda_n+z}=\frac{-1}{2\pi\mathrm{i}}\int_I t^z\int_{\gamma_{R,+}}\frac{1}{(\zeta+2)^2}\prod_{\lambda_n<R}\frac{\lambda_n-\zeta}{2+\lambda_n+\zeta}t^{-\zeta-1}\,d\zeta\,dt$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_I t^z\int_{-R}^{R}\frac{1}{(\mathrm{i}y+1)^2}\prod_{\lambda_n<R}\frac{\lambda_n-\mathrm{i}y+1}{2+\lambda_n+\mathrm{i}y-1}t^{-\mathrm{i}y+1-1}\,dy\,dt.$$

Für $R\to\infty$ folgt

$$f(z)=\frac{1}{(z+2)^2}\prod_{n\mathbb{N}_0}\frac{\lambda_n-z}{2+\lambda_n+z}=\frac{1}{2\pi}\int_I t^z\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{(\mathrm{i}y+1)^2}\prod_{n\in\mathbb{N}_0}\frac{\lambda_n-\mathrm{i}y+1}{\lambda_n+\mathrm{i}y+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\log t}\,dy\,dt$$
$$=\int_I t^z\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}f(\mathrm{i}y-1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\log t}\,dy\,dt$$

Die Funktion $g(y):=f(\mathrm{i}y-1)=\frac{1}{(\mathrm{i}y+1)^2}\prod_{n\in\mathbb{N}_0}\frac{\lambda_n-\mathrm{i}y+1}{\lambda_n+\mathrm{i}y+1}$ ist integrierbar. Wir können also

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}f(\mathrm{i}y-1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\log t}\,dy$$

als die Fouriertransformierte $\hat{g}$ von g ausgewertet bei $\log t$ auffassen. Als Fouriertransformierte einer L^1-Funktion ist $\hat{g}$ nach dem Riemann-Lebesgue-Lemma beschränkt und stetig, womit die Funktion $\rho(t)=\frac{1}{2\pi}\hat{g}(\log t)$ beschränkt und stetig in I ist und als die gesuchte Dichtefunktion aufgefasst werden kann.

Damit ist das Funktional $h\mapsto\int_I h(t)\rho(t)\,dt$ angewandt auf die Funktion $t\mapsto t^\lambda$ genau für $\lambda\in\Lambda_0$ gleich 0 und alle Funktionen $t\mapsto t^\lambda$ sind für $\lambda\notin\Lambda_0$ nicht in $\mathrm{Span}(t^{\lambda_n},n\in\mathbb{N}_0)$. Insbesondere gilt dann $\mathrm{Span}(t^{\lambda_n},n\in\mathbb{N}_0)\neq C(I)$. □

8.2 Satz von Runge

Zum Beweis des Satzes von Runge brauchen wir die folgende Formulierung des Cauchyschen Integralsatzes, den man aufgrund von Satz 48 auch wie folgt formulieren könnte: Für eine kompakte Teilmenge K eines Gebietes G gibt es einen in G nullhomologen 1-Zyklus c für den $\mathrm{Ind}(c,z)=1$ für alle $z\in K$ gilt, d.h. im Gegensatz zu Satz 48 ist die Aussage hier, dass es 1-Zyklen gibt für die die Integralformel von Satz 48 mit $\mathrm{Ind}(c,z)=1$ für alle $z\in K$ gilt.

Satz 82. *Sei K eine kompakte Teilmenge eines Gebietes G. Dann gibt es einen 1-Zyklus c für den für alle in G holomorphen Funktion f und $z\in K$*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_c\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

gilt.

Beweis. Da K kompakt ist gilt $d(K, G^{\complement}) = 3\rho > 0$.

C sei die Menge aller 1-Zyklen $c_{k,l}$, die die Menge $Q_{k,l} := \{z \in \mathbb{C} : k\rho \leq \Re z \leq (k+1)\rho, l\rho \leq \Im z \leq (l+1)\rho\}$ beranden, also

$$\begin{aligned} c_{k,l} =& [k\rho + \mathrm{i}l\rho, (k+1)\rho + \mathrm{i}l\rho] \oplus [(k+1)\rho + \mathrm{i}l\rho, (k+1)\rho + \mathrm{i}(l+1)\rho] \\ &\ominus [k\rho + \mathrm{i}(l+1)\rho, (k+1)\rho + \mathrm{i}(l+1)\rho] \ominus [k\rho + \mathrm{i}l\rho, k\rho + \mathrm{i}(l+1)\rho]. \end{aligned}$$

C_K sei die Menge alle 1-Zyklen $c_{k,l}$ aus C für die $Q_{k,l} \cap K \neq \emptyset$ gilt und c der 1-Zyklus $\oplus c_{k,l}$ mit $c_{k,l} \in C_K$. Gilt $\mathrm{Tr}([k\rho + \mathrm{i}l\rho, (k+1)\rho + \mathrm{i}l\rho]) \cap K \neq \emptyset$, so folgt, dass $-[k\rho + \mathrm{i}l\rho, (k+1)\rho + \mathrm{i}l\rho]$ ein Summand von $c_{k,l-1}$ ist. Diese Summanden heben sich also auf. Analog sieht man, dass sich alle anderen Summanden in c, für die der Träger nichtleeren Schnitt mit K hat wegfallen, d.h. der Koeffizient dieses Summanden in c ist 0 und es folgt $\mathrm{Tr}(c) \cap K = \emptyset$.

Für alle $Q_{k,l}$ mit $Q_{k,l} \cap K \neq \emptyset$, $z \in \mathbb{C} \setminus G$ gilt $d(z, Q_{k,l}) \geq d(z, K) - \sqrt{2}\rho > \rho$ und damit ist $c_{k,l}$ in G nullhomolog und wegen $c = \oplus_{C_K} c_{k,l}$ auch c nullhomolog in G. Für $z \in K \cap Q^{\circ}_{k,l}$ gilt $z \notin Q_{m,n}$ für $(m,n) \neq (k,l)$ und mit Satz 20 und 43 für $z \notin \cup_{C_K} \mathrm{Tr}(c_{k,l})$

$$\mathrm{Ind}(c_{m,n}, z) = \begin{cases} 1 & (m,n) = (k,l) \\ 0 & (m,n) \neq (k,l). \end{cases}$$

Nach Korollar 46 ist die Umlaufzahl $\mathrm{Ind}(c,z)$ in jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Tr}(c)$ konstant. Für $z \in K$ liegt wegen $K \cap \mathrm{Tr}(c) = \emptyset$ die Kugel $K_{z,\varkappa}$ für $\varkappa := d(K, \mathrm{Tr}(c)) > 0$ in $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Tr}(c)$ und damit in einer der Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Tr}(c)$. Für $z \in K$ gibt es $\tilde{z}$ mit $d(z, \tilde{z}) < \varkappa$ und $\tilde{z} \in Q^{\circ}_{k,l}$, womit $1 = \mathrm{Ind}(c, \tilde{z}) = \mathrm{Ind}(c, z)$ folgt. □

Lemma 83. *Sei K kompakt in $\mathbb{C}$ und c ein rektifizierbarer 1-Zyklus für den $\mathrm{Tr}(c) \cap K = \emptyset$ gilt. Dann gibt es für eine auf $\mathrm{Tr}(c)$ stetige Funktion f und $\varepsilon > 0$ eine gebrochen rationale Funktion R mit*

$$\left| \int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - R(z) \right| < \varepsilon \quad \forall z \in K.$$

Beweis. Auf der kompakten Menge $\mathrm{Tr}(c) \times K$ ist die Funktion $(\zeta, z) \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ wegen $\mathrm{Tr}(c) \cap K = \emptyset$ stetig und damit als stetige Funktion auf einer kompakten Menge gleichmäßig stetig. Es folgt, dass es für $t \in [0,1]$ und $z \in K$ offene Umgebungen $U_{z,t}$ von z und $U_{t,z}$ von t gibt, sodass für $z' \in U_{z,t},\ t' \in U_{t,z}$ $\left| \frac{f(\gamma(t'))}{\gamma(t') - z'} - \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} \right| < \varepsilon / L(c)$, wenn $L(c)$ die Weglänge von c bezeichnet, gilt. Für $t \in [0,1]$ sind die Mengen $U_{z,t},\ z \in K$ eine Überdeckung von K mit einer endlichen Teilüberdeckung $U_{z_j,t},\ j = 1, \ldots, N_t$ von K. Sei $U_t := \cap_{i \leq N_t} U_{t,z_i}$. Die Mengen $U_{t_1}, \ldots, U_{t_N}$ seien eine Überdeckung von $[0,1]$. Es folgt, dass es für alle $t \in [0,1]$ ein $j \leq N$ gibt mit

$\left|\frac{f(\gamma(t_j))}{\gamma(t_j)-z} - \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z}\right| < \varepsilon/L(c)$ für alle $z \in K$. Für $\tilde{U}_j := U_j \setminus \cup_{k<j} U_k$ ist dann $\tilde{U}_1, \ldots, \tilde{U}_N$ eine disjunkte Überdeckung für die folgt

$$\left|\int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \sum_{j \leq N} \lambda(\tilde{U}_j) \frac{f(\gamma(t_j))}{\gamma(t_j) - z}\right| \leq L(c)\varepsilon/L(c) = \varepsilon. \qquad \square$$

Lemma 84. *Sei K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$ und a, b zwei Elemente einer Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus K$. Dann kann die Funktion $\frac{1}{z-b}$ gleichmäßig auf K durch ein Polynom in $\frac{1}{z-a}$ approximiert werden.*

Beweis. Wegen

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{z-a+a-b} = \frac{1}{z-a} \frac{1}{1+\frac{a-b}{z-a}} = \frac{1}{z-a} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{a-b}{z-a}\right)^n$$

für $|a-b| < d(a,K)$ kann $\frac{1}{z-b}$ gleichmäßig für $z \in K$ durch ein Polynom in $\frac{1}{z-a}$ beliebig genau approximiert werden:

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \left(\frac{a-b}{z-a}\right)^n\right| = \left|\frac{1}{z-a} \sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{a-b}{z-a}\right)^n\right| \\ =& \frac{|a-b|^{N+1}}{|z-a|^{N+2}} \frac{1}{\left|1+\frac{a-b}{z-a}\right|} = \frac{|a-b|^{N+1}}{|z-a|^{N+1}} \frac{1}{|z-b|} \leq \left(\frac{|a-b|}{d(a,K)}\right)^{N+1} \frac{1}{d(b,K)} \to_{N\to\infty} 0. \end{aligned} \tag{47}$$

Bezeichne $\mathcal{A}_a$ für $a \in \mathbb{C} \setminus K$ den linearen Raum aller auf K holomorphen Funktionen, die im Abschluss bezügl. der Supremumsnorm auf K der Polynome in $1/(z-a)$ liegen. $\mathcal{A}_a$ ist also der Abschluss der Einschränkung der Funktion $z \mapsto 1/(z-a)$ auf K erzeugten Algebra. Wir haben zu zeigen, dass für a, b aus derselben Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus K$ $\mathcal{A}_a = \mathcal{A}_b$ gilt. Nach (47) gilt für $|a-b| < d(a,K)$: $\mathcal{A}_b \subseteq \mathcal{A}_a$. Für einen Weg γ in einer Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus K$ gilt $d(\gamma([0,1]),K) =: d > 0$. Damit folgt $\mathcal{A}_{\gamma(t)} = \mathcal{A}_{\gamma(s)}$ für $d(\gamma(t),\gamma(s)) < d$ und damit $\mathcal{A}_{\gamma(t)} = \mathcal{A}_{\gamma(s)}$ für alle $s,t \in [0,1]$. Für $a \in \mathbb{C} \setminus K$ enthält die Menge aller b in der Zusammenhangskomponente von a für die $\mathcal{A}_a = \mathcal{A}_b$ gilt also die Wegzusammenhanskomponente von a. Im $\mathbb{R}^n$ sind aber offene zusammenhängende Mengen wegzusammenhängend, womit folgt, dass $\mathcal{A}_a = \mathcal{A}_b$ für alle a, b in der gleichen Zusammenhangskomponent gilt. $\square$

Satz 85 (Runge)**.** *Sei K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$ und E eine Teilmenge von $\mathbb{C} \setminus K$ die nichtleeren Schnitt mit jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus K$ hat. Dann kann jede auf K holomorphe Funktion auf K gleichmäßig durch gebrochen rationale Funktionen mit Polen in E approximiert werden.*

Beweis. Aus Satz 82 folgt, dass eine auf K holomorphe Funktion f mit einem geeigneten 1-Zyklus c mit $\mathrm{Tr}(c) \subset G \setminus K$ durch

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

dargestellt werden kann. Nach Lemma 83 kann für $\varepsilon > 0$ dieses Integral durch eine gebrochen rationale Funktione R_1, deren Pole auf $\mathrm{Tr}(c)$ liegen, gleichmäßig auf K mit Fehler kleiner ε approximiert werden. Es bleibt also zu zeigen, dass R_1 gleichmäßig auf K durch eine gebrochen rationale Funktione R, deren Pole in E liegen, approximiert werden kann. Das ist aber aufgrund von Lemma 84 gewährleistet. □

Bemerkung 86. *Statt eines Elementes in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente kann im Satz von Runge das "Element ∞" gewählt werden: D.h. für $|a| > \sup\{|z| : z \in K\}$ erzeugt die Algebra der Polynome in z die Algebra $\mathcal{A}_a$, womit folgt, dass anstelle von $\mathcal{A}_a$ mit a aus der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus K$ auch der Raum der Polynome in z genommen werden kann. Dass die Algebra der Polynome in z die Algebra $\mathcal{A}_a$ erzeugt, sieht man unmittelbar aus*

$$\frac{1}{z-a} = \frac{-1}{a} \frac{1}{1 - \frac{z}{a}} = \frac{-1}{a} \sum_n \left(\frac{z}{a}\right)^n$$

wegen der gleichmäßigen Konvergenz dieser Reihe für $|a| > \sup\{|z| : z \in K\}$.

Die Algebra der Polynome als $\mathcal{A}_\infty$ aufzufassen ist der Tatsache geschuldet, dass Polynome als gebrochen rationale Funktionen mit Pol in ∞ aufgefasst werden können, wenn man Funktionen auf der Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{C}^*$ betrachtet.

9 Elliptische Funktionen

9.1 Periodengruppe und doppeltperiodische Funktionen

Eine Funktion $f:\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ hat Periode $w \in \mathbb{C}$, wenn $f(z) = f(z+w)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Es folgt unmittelbar, dass mit w für $n \in \mathbb{Z}$ auch nw eine Periode ist bzw. dass für zwei Perioden w_1, w_2 auch $n_1 w_1 + n_2 w_2$ für $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ periodisch sind. Die Teilmenge von $\mathbb{C}$ aller Perioden von f bildet also eine Untergruppe der abelschen Gruppe $(\mathbb{C}.+)$, die ein $\mathbb{Z}$-Modul ist. Im Folgenden werden wir meromorphe periodische Funktionen betrachten. Hätte die Menge der Perioden einen Häufungspunkt so muss f nach dem Eindeutigkeitssatz für Potenzreihen konstant sein. Schließen wir diesen trivialen Fall aus, so ist die Menge der Perioden eine diskrete Untergruppe von $(\mathbb{C}, +)$.

Satz 87. *Eine diskrete Untergruppe $\mathcal{U}$ von $\mathbb{C}$ ist entweder*

i) trivial: $\mathcal{U} = \{0\}$

ii) von einem Element $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ erzeugt: $\mathcal{U} = \{nw : n \in \mathbb{Z}\}$

iii) von zwei $\mathbb{R}$-linear unabhängigen Elementen w_1, w_2 erzeugt: $\mathcal{U} = \{n_1 w_1 + n_2 w_2 : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$.

Beweis. Schließen wir den Trivialfall aus, so gibt es ein $0 \neq w_1 \in \mathcal{U}$ mit minimalem Betrag und $\mathbb{Z}w_1$ ist eine diskrete Untergruppe vom Typ *ii)*.

Hat $\mathcal{U}$ außer $\mathbb{Z}w_1$ weitere Elemente, so wählen wir unter diesen ein Element w_2 mit minimalem Betrag w_2. Ist w_2 ein reelles Vielfaches von w_1, also $|w_1| < |w_2| = |\lambda w_1|$ mit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, so gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $n < \lambda < n+1$ und $w_2 - nw_1 = (\lambda - n)w_1$ wäre ein Element von $\mathcal{U} \setminus \{0\}$ das betragsmäßig wegen $0 < \lambda - n < 1$ kleiner als w_1 ist, im Widerspruch zu unserer Wahl von w_1 als betragsmäßig kleinstmöglich. w_1 und w_2 sind also $\mathbb{R}$-linear unabhängig. Damit kann jedes Element w von $\mathbb{C}$ und damit insbesondere alle Elemente der Untergruppe $\mathcal{U}$ als $w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ dargestellt werden. Es gibt $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ mit $|\lambda_i - n_i| \leq 1/2,\ i = 1, 2$. Dann ist auch $\tilde{w} = w - n_1 w_1 - n_2 w_2 \in \mathcal{U}$ mit $|\tilde{w}| = |(\lambda_1 - n_1)w_1 + (\lambda_2 - n_2)w_2|$. Da w_1 und w_2 $\mathbb{R}$-linear unabhängig sind, ist die Dreiecksungleichung strikt und gibt $|(\lambda_1 - n_1)w_1 + (\lambda_2 - n_2)w_2| < |\lambda_1 - n_1||w_1| + |\lambda_2 - n_2||w_2| < |w_2|$ im Widerspruch zu unserer Wahl von w_2 als betragsmäßig kleinstmöglich in $\mathcal{U} \setminus \mathbb{Z}w_1$. Also müsste $\tilde{w}$ ein Vielfaches von w_1 sein, was nur für $\tilde{w} = nw_1$ möglich ist. □

Eine *elliptische* oder *doppeltperiodische Funktion* ist eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$, die zwei $\mathbb{R}$-linear unabhängige Perioden hat.

Für eine elliptische Funktion mit *Periodengruppe* $\mathcal{P} = \{n_1 w_1 + n_2 w_2 : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$ wählen wir $a \in \mathbb{C}$ so, dass kein Pol am Rand des von den Punkten $a, a+w_1, a+w_2, a+w_1+w_2$ aufgespannten Parallelogramms liegt. Dieses Parallelogramm nennen wir die *Grundmasche* $\mathcal{G}$. Wegen der Periodizität ist f durch die Werte auf $\mathcal{G}$ vollständig bestimmt.

Satz 88 (Liouvillesche Sätze)**.** *(1. Liouvillescher Satz) Eine holomorphe elliptische Funktion ist konstant.*

(2. Liouvillescher Satz) Eine elliptische Funktion hat nur endlich viele Pole modulo L und die Summe der Residuen in einer Grundmasche ist 0.

(3. Liouvillescher Satz) Für eine elliptische Funktion ist in einer Grundmasche die Summe der a-Stellen gleich der Summe der Pole (a-Stellen und Polstellen jeweils mit Ordnung gezählt).

(4. Liouvillescher Satz) Für a-Stellen $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ *mit Viefachheiten* $p_1 \dots, p_m$ *und Polstellen* $\beta_1, \dots, \beta_n$ *mit Ordnungen* $q_1, \dots, q_n$ *in einer Grundmasche gilt*

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_i q_i \in \mathcal{P}$$

Beweis. 1) Ist eine elliptische Funktion holomorph, so ist sie stetig und damit auf der kompakten Grundmasche beschränkt. Wegen der Doppelperiodizität ist f dann aber auf $\mathbb{C}$ beschränkt und als beschränkte ganze Funktion nach dem Satz von Liouville konstant.

2) Hätte eine elliptische Funktion unendlich viele Pole in einer Grundmasche $\mathcal{G}$, so müssten diese einen Häufungspunkt in $\mathcal{G}$ haben. Der wäre dann aber keine isolierte Singularität und f wäre nicht elliptisch.

Integriert man f über den Rand von $\mathcal{G}$, so heben sich die Beiträge über gegenüberliegende Wege wegen der Periodizität und der entgegengesetzten Orientierung auf und es folgt

$$\int_{\partial \mathcal{G}} f(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Nach dem Residuensatz 50 ist dieses Integral aber gleich $\sum_{z \in \Sigma} \operatorname{Ind}(c,z) \operatorname{Res}(f,z)$. Die Umlaufzahl $\operatorname{Ind}(\partial\mathcal{G}, z)$ für $z \in \mathcal{G}^\circ$ ist aber nach Satz 20 gleich 1.

3) Wendet man den Satz vom logarithmischen Residuum 56 auf $\partial\mathcal{G}$ an, so erhalten wir, da sich die Integrationsbeiträge wegen der Periodizität aufheben Zahl d. a-Stellen-Zahl der Pole (jew. mit Vielfachheit bzw. Ordnung gerechnet) ist gleich $\int_{\partial\mathcal{G}} f'(\zeta)/(f(\zeta)-a)\, d\zeta = 0$.

4) Die Funktion $g(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)-a} = \frac{(z-\alpha_i)f'(z)}{f(z)-a} + \alpha_i \frac{f'(z)}{f(z)-a}$ hat, wenn f in α_i eine a-Stellen der Ordnung p_i nach Lemma 54 in α_i einen Pol erster Ordnung mit Residuum $\alpha_i p_i$. Wenn f in β_j eine Polstelle der Ordnung q_i hat in β_i, so hat $z \mapsto (z-\beta_j)\frac{f'(z)}{f(z)-a}$ eine hebbare Singularität in β_j und $\beta_j \frac{f'(z)}{f(z)-a}$ hat in β_j einen Pol erster Ordnung mit Residuum $-\beta_j p_j$. g ist nicht doppeltperiodisch aber die Funktionswerte von g unterscheiden sich an zwei gegenüberliegenden Punkten von $\partial\mathcal{G}$ genau um w_1 bzw. w_2. Wir erhalten mit dem Satz vom logarithmischen Residuum 56 und Lemma 54 wenn $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ die Randstücke von $\partial\mathcal{G}$ sind

$$\sum_i \alpha_i p_i - \sum_j \beta_j q_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{G}} g(\zeta)\, d\zeta = -\frac{w_2}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)-a} d\zeta - \frac{w_1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)-a} d\zeta \tag{48}$$

$\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)-a}$ ist doppeltperisodisch und die Ableitung von $\log(f-a)$. $\int_{\gamma_1} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)-a} d\zeta$ ist also die Differenz der analytische Fortsetzung von $\log(f-a)$ längs des Weges γ_1 und dem Anfangswert dieser Funktion. In beiden Punkten stimmen $(f-a)$ wegen der w_1-Periodizität überein, weshalb sich diese beiden Werte nur um ein Vielfaches von $2\pi i$ unterscheiden können. Es folgt aus (48) dass $\sum_i \alpha_i p_i - \sum_j \beta_j q_j$ von der Form $n_1 w_1 + n_2 w_2$ mit ganzzahligen Koeffizienten n_1, n_2 ist, also dass $\sum_i \alpha_i p_i - \sum_j \beta_j q_j \in \mathcal{P}$ gilt. □

9.2 Weierstraßsche $\wp$-Funktion

Die einfachsten elliptischen Funktionen haben nach Satz 88 2) entweder einen Pol 2. Ordnung mit Residuum 0 oder zwei Pole 1. Ordnung mit entgegengesetzten Residuen. Eine Funktion ersterer Art ist die Weierstraßsche $\wp$-Funktion:

Ist eine Funktion f elliptisch, so auch cf und jede Translation von f. Wir dürfen also o.B.d.A. annehmen, dass der Pol 2. Ordnung in 0 liegt. Mit $\wp$ ist auch die Funktion $z \mapsto \wp(-z)$ elliptisch, so wie die Funktion $z \mapsto \wp(z) - \wp(-z)$. Bei dieser heben sich die Pole in 0 wegen $\operatorname{Res}(\wp, 0) = 0$ auf und sie muss damit konstant gleich 0 sein. $\wp$ ist demnach eine gerade Funktion mit Laurentreihenentwicklung (wenn wir $a_2 = 1$ und $a_0 = 0$ wählen)

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots. \tag{49}$$

Es bleibt zu zeigen, dass es tatsächlich eine solche Funktion gibt, die elliptsich ist. Wegen der Doppelperiodizität hat $\wp$ Pole mit Hauptteil $\frac{1}{(z-w)^2}$ für w aus dem Periodengitter $\mathcal{P} = \{n_1 w_1 + n_2 w_2 : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$. Die Existenz einer meromophen Funktion mit Polen $\frac{1}{(z-w)^2}$ in einem Periodengitter $\mathcal{P}$ ist durch den Satz von Mittag-Leffler 73 sichergestellt. Wir versuchen ähnlich der Partialbruchzerlegung des Cotangens Satz 76 eine einfache Darstellung zu finden, bei der die einzelnen Summanden dieser Reihenentwicklung die Doppelperiodizität wiederspiegeln. Die Reihe $\sum_{w \in \mathcal{P}} 1/(z-w)^2$ ist nicht konvergent, wir behaupten aber, dass Konvergenz für

$$\frac{1}{w^2} + \sum_{w \in \mathcal{P}\setminus\{0\}} \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \tag{50}$$

gegeben ist. Es gilt für $|w| \geq 2|z| : |w||2w-z| \leq \frac{5}{2}|w^2| \leq 10|w-z|^2$ und damit

$$\left|\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right| = \frac{|z(2w-z)|}{|w^2(z-w)^2|}| \leq \frac{10|z|}{|w|^3}.$$

Die Konvergenz von (50) folgt jetzt mit

Lemma 89. *Für w_1, w_2 linear unabhängig über $\mathbb{R}$ konvergiert für das von w_1, w_2 erzeugte Periodengitter $\mathcal{P}$ die Reihe*

$$\sum_{0 \neq w \in \mathcal{P}} |w|^{-3}. \tag{51}$$

Beweis. (w_1,w_2) kann durch eine $\mathbb{R}$-lineare Transformation A auf $(1,\mathrm{i})$ abgebildet werden. Dann ist wegen $\|A\|_2|w| \geq |Aw| \geq \|A^{-1}\|_2^{-1}|w|$ die Konvergenz von $\sum_{w\in\mathcal{P}\setminus\{0\}}|w|^{-3}$ äquivalent zu der von $\sum\frac{1}{(k^2+l^2)^{3/2}}$, wobei die Summation über $(k,l)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus(0,0)$ erfolgt.

Um die Konvergenz von $\sum\frac{1}{(k^2+l^2)^{3/2}}$ zu sehen, betrachten wir die Mengen $A_n := \{(k,l)\in\mathbb{Z}^2 : |k|<2^n, |l|\leq 2^n\}$ für $n\in\mathbb{N}$ und setzen $B_n := A_n\setminus A_{n-1}$. Dann ist $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ die disjunkte Vereinigung der Mengen B_n, $n\in\mathbb{N}$. Es gibt $(2\cdot 2^n-1)^2 < 4\cdot 2^{2n}$ Elemente in A_n und damit weniger als 2^{2n+2} in B_n. Die Elemente in B_n haben mindestens eine Koordinate l mit $|j|\geq 2^{n-1}$ und es folgt $|w|>2^{n-1}$ und wegen

$$\sum_{w\in B_n}|w|^{-3}\leq 2^{n+2}2^{-3n+3}=2^{-2n+5},$$

sowie

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{w\in B_n}|w|^{-3}\leq\sum_{n\in\mathbb{N}}2^{-2n+5}\leq\sum_{n\in\mathbb{N}}2^5 2^{-2n}=2^5/3$$

die Konvergenz von (51). □

Damit ist $\wp$ als eine meromorphe Funktion mit Polen in $\mathcal{P}$ definiert. Die Ableitung von $\wp$ können wir nach Satz 63 durch gliedweises Differenzieren gewinnen und erhalten so

$$\wp'(z) = -2\sum_{w\in\mathcal{P}}\frac{1}{(w-z)^3}.$$

$\wp'$ ist offensichtlich doppeltperiodisch mit Periodengruppe $\mathcal{P}$. Hiermit folgt, dass $\wp(w_1+z)-\wp(z)=\int_{[z,z+w_1]}\wp'(\zeta)\,d\zeta$ konstant sein muss. Durch Wahl von $z=w_1/2$ bestimmen wir diese Konstante als 0. $\wp$ ist also periodisch mit Periode w_1. Analog erhalten wir die w_2-Periodizität.

Wir haben also gezeigt, dass $\wp$ gerade und doppeltperiodisch mit Periodengruppe $\mathcal{P}$ ist mit Polen 2. Ordnung im Periodengitter. Diese Funktion wird *Weierstraßsche $\wp$-Funktion* genannt.

Aus (49) kann eine Differentialgleichung hergeleitet werden, der $\wp$ genügt:

Zunächst folgt

$$\wp'(z)=\frac{-2}{z^3}+2a_2z+z^3h_1(z),\qquad \wp'^2(z)=\frac{4}{z^6}-\frac{8a_2}{z^2}+h_2(z)$$

und

$$\wp^3(z)(z)=(z^{-2}+a_2z^2+z^4h_3(z))^3=\frac{1}{z^6}+\frac{3a_2}{z^2}+h_4(z)$$

woraus wir die Beziehung

$$\wp'^2(z)-4\wp^3(z)+20a_2z^{-2}+h_5(z)=\wp'^2(z)-4\wp^3(z)+20a_2\wp(z)+h_6(z)=0$$

mit Funktionen $h_1,\dots,h_6$ die in einer Umgebung von 0 holomorph sind, erhalten. Da wir die Koeffizienten so bestimmt haben, dass sich die Singularitäten aufheben hat diese Funkton eine hebbare Singularität in 0. F erbt aber die Doppeltperiodizität von $\wp$ bzw. $\wp'$ und muss nach dem 1. Liouvilleschen Satz konstant sein. Die holomorphe Fortsetzung von $\wp'^2(z) - 4\wp^3(z) + 20a_2\wp(z)$ in 0 ist aber 0 und erbt die Doppelperiodizität von $\wp$. Mit dem 1. Liouvilleschen Satz folgt, dass diese Funktion 0 ist. Wir haben also gezeigt:

Satz 90. *Die Weierstraßsche $\wp$-Funktion erfüllt die Differentialgleichung*

$$\wp'^2(z) - 4\wp^3(z) + 20a_2\wp(z) = 0.$$

10 Harmonische Funktionen

10.1 Harmonsche und holomorphe Funktionen

Für eine offene Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt die Funktion $u : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to \mathbb{R}$ *harmonisch*, wenn sie

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$$

in Ω erfüllt. Wir betrachten hier harmonische Funktionen auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, die einen engen Zusammenhang mit holomorphen Funktionen haben und fassen u als Funktion auf $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ auf.

Satz 91. *Für eine in $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, holomorphe Funktion f sind $\Re f$ und $\Im f$ harmonische Funktionen auf Ω.*

Ist u in einem einfach zusammenhängenden Gebiet Ω harmonisch, so ist u der Realteil einer in Ω holomorphen Funktion.

Beweis. Aufgrund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gilt für $f = u + \mathrm{i}v$ und $z = x + \mathrm{i}y$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Ist u harmonisch so erfüllt

$$h(z) = h(x + \mathrm{i}y) := \frac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{52}$$

die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und ist damit holomorph. h besitzt lokal eine Stammfunktion, die längs jedes Weges in Ω analytisch fortgesetzt werden kann. Nach dem Monodromiesatz hat h damit eine Stammfunktion in Ω. □

Korollar 92. *Eine harmonische Funktion ist unendlich oft differenzierbar.*

Beweis. Ist z_0 aus dem Definitionsbereich der harmonischen Funktion u, so ist u für geeignetes $r > 0$ in dem einfach zusammenhängenden Gebiet $K_{z_0,r}$ der Realteil einer holomorphen Funktion f. Dieser ist in $C^\infty(K_{z_0,r})$. □

Als Folgerung erhalten wir ein Analogon des Cauchyschen Integralsatzes:

Satz 93 (Mittelwertsatz für harmonische Funktionen)**.** *Ist u in einem Gebiet $G \supset \overline{K_{a,r}}$ harmonisch, so gilt*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(a + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right) d\varphi. \quad \textit{(Mittelwerteigenschaft)}$$

Beweis. Nach Satz 91 gibt es eine in $\overline{K_{a,r}}$ holomorphe Funktion f mit $u = \Re f$ in einer offenen Obermenge von $\overline{K_{a,r}}$. Nach der Cauchyschen Integralformel gilt

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_{a,r}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{i\varphi})}{re^{i\varphi}} ire^{i\varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\varphi}) d\varphi$$

und damit für $u = \Re f$ die Mittelwerteigenschaft. □

Satz 94 (Maximumsprinzip). *Gilt für eine in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ reellwertige stetige Funktion u mit der Mittelwerteigenschaft und ein $a \in G$: $u(a) \geq u(z)$ für alle $z \in G$, so ist u konstant.*

Ist u in einem Gebiet G harmonisch und auf dem kompakten Abschluss $\bar{G}$ von G stetig, so nimmt u sein Maximum und sein Minimum auf dem Rand von G an.

Beweis. Ist u nicht konstant, so ist die abgeschlossene Menge $M := \{z \in G : u(z) = u(a)\}$ eine echte Teilmenge von G und es gibt $w \in \partial M$. In jeder Umgebung von w liegen dann Elemente von $M^{\complement}$. Sei $0 < r < d(w, \partial G)$ so, dass es in $\partial K_{w,r}$ Elemente v mit $u(v) < u(a) = u(w)$ gibt. Dann gilt $v(re^{i\varphi}) < u(w)$ für $\varphi \in (\alpha, \beta)$ und $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(w + re^{i\varphi}) d\varphi < u(w)$, im Widerspruch zur Mittelwerteigenschaft in w.

Jede auf einer kompakten Telmenge von $\mathbb{C}$ stetige Funktion u nimmt dort ihr Maximum und ihr Minimum an. Ein Maximum kann nur im Inneren liegen wenn u konstant ist, womit das Maximum auch auf dem Rand liegt. Da das Minimum von u das Maximum von $-u$ ist folgt die Behauptung für das Minimum. □

Satz 95. *Ist u in einem Kreising $R := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : r_1^2 < x^2 + y^2 < r_2^2\}$ harmonisch, so gibt es eine holomorphe Funktion f und eine reelle Konstante c mit*

$$u(x,y) = \Re h(x + iy) + c \operatorname{Log} |x + iy|.$$

Beweis. Mit h wie in (52) ist $h(z) - \frac{c}{z}$ eine in R holomorphe Funktion. Für $c := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_{0,r}} h(z) dz$ folgt für $r_1 < r < r_2$: $\int_{\partial K_{0,r}} h(z) - c \operatorname{Log} |x + iy| dz = 0$ und $\int_\gamma h(z) - c \operatorname{Log} |x + iy| dz$ ist eine Stammfunktion von $h(z) - \frac{c}{z}$.

Wegen

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_{0,r}} h(z) dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h\left(e^{i\varphi}\right) e^{i\varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}\right) e^{i\varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial x} \cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin\varphi + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} \sin\varphi - \frac{\partial u}{\partial x} \cos\varphi\right) d\varphi \end{aligned}$$

folgt

$$\Im c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial y} \sin\varphi - \frac{\partial u}{\partial x} \cos\varphi d\varphi = -\frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \frac{du(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{d\varphi} d\varphi = 0$$

und c ist reell. □

10.2 Poissonkern

Für $0 < r < 1$ definieren wir den *Poissonkern*

$$P_r(\theta) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}. \tag{53}$$

Für $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ erhalten wir

$$\frac{1+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = (1+z)(1+z+z^2+\ldots) = 1+2\sum_{n=1}^{\infty} z^n = 1+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$$

und

$$P_r(\theta) = \Re\left(\frac{1+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}. \tag{54}$$

Für den Poissonkern gelten Eigenschaften ähnlich denen eines Mollifiers:

Proposition 96. *Für den Poissonkern gilt:*

i) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta)\, d\theta = 1$;

ii) P_r *ist positiv* 2π*-periodisch und gerade;*

iii) $P_r(\theta_1) < P_r(\theta_2)$ *für* $|\theta_2| < |\theta_1| \leq \pi$;

iv) Für $\delta > 0$ *gilt* $P_r(\theta) \to 0$ *für* $r \nearrow 1$ *gleichmäßig in* $[-\pi,\pi] \setminus (-\delta,\delta)$.

Beweis. i) folgt wegen $\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\, d\theta = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 2\pi & n = 0 \end{cases}$ und der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe in (53) für $r < 1$.

Aus (54) folgt $P_r(\theta) > 0$ und iii), die anderen Eigenschaften von ii) aus der Reihendarstellung.

Es gilt $P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{(1-r)^2+2r(1-\cos\theta)} \leq \frac{1-r^2}{2r(1-\cos\theta)} \leq \frac{1-r^2}{2r(1-\cos\delta)}$, womit iv) folgt. □

Satz 97. *Für* $u \in C(\partial\mathbb{D})$ *wird durch*

$$u(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\, dt \tag{55}$$

die eindeutige in $\mathbb{D}$ *harmonische Funktion* u *definiert für die* $\lim_{r\nearrow 1} u(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$ *gleichmäßig in* t *gilt.*

Beweis. Ist f holomorph in $\mathbb{D}$ und stetig auf $\bar{\mathbb{D}}$, so ist für $w \in \mathbb{D}$ die Funktion $z \mapsto \frac{f(z)}{1-\bar{w}z}$ holomorph in $\mathbb{D}$ und nach der Cauchyschen Integralformel 17 gilt:

$$\frac{f(z)}{1-\bar{w}z} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{1-\bar{w}\zeta}\frac{1}{\zeta-z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}-\bar{w}}\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z}\, d\varphi$$

Für $w = z$ folgt $\frac{f(z)}{1-\bar{z}z} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})}{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z|^2}\,d\varphi$ und mit (54) und $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ und

$$\frac{1-|z|^2}{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z|^2} = \frac{1-r^2}{|1-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\varphi)}|^2} = P_r(\theta-\varphi).$$

folgt $f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})P_r(\theta-\varphi)\,d\varphi$ und $u(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \Re f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})P_r(\theta-\varphi)\,d\varphi$.

Wir haben also zu zeigen, dass die so definierte Funktion u tatsächlich harmonisch in $\mathbb{D}$ ist und $\lim_{r\nearrow 1} u(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$ erfüllt.

Die Funktion $z \mapsto \frac{1-|z|^2}{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z|^2}$ ist in $C^2(\mathbb{D})$. Schreiben wir dieses Integral vermöge (54) um, so kann in dem Parameterintegral

$$u(z) := \int_{-\pi}^{\pi} u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})P_r(\theta-\varphi)\,d\varphi = \Re\int_{-\pi}^{\pi} u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}+z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z}\,d\varphi$$

Differentiation mit Integration vertauscht werden und es folgt, dass f in $\mathbb{D}$ holomorph ist. Damit ist $u = \Re f$ in $\mathbb{D}$ harmonisch.

Aus Proposition 96 und der gleichmäßigen Stetigkeit von u auf $\partial\mathbb{D}$ folgt (ganz analog wie man die Konvergenz von Faltungen stetiger Funktionen mit Mollifiern gegen die Funktion oder die Konvergenz von Cesàromitteln von Fourierreihen stetiger Funktionen gegen diese Funktion zeigt), dass $u(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ für $r \nearrow 1$ gleichmäßig gegen $u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ konvergiert.

Die Eindeutigkeit dieser Funktion u folgt, da wenn u_1, u_2 harmonische Funktionen sind, die die Randbedingung erfüllen $u_1 - u_2$ eine harmonische Funktion ist, die auf $\partial\mathbb{D}$ verschwindet und nach Satz 93 die Mittelwerteigenshaft hat und damit nach 94 dem Maximumsprinzip genügt. D.h. $u_1 - u_2$ ist konstant in $\mathbb{D}$ oder negativ in $\mathbb{D}$. Analog ist $u_2 - u_1$ konstant in $\mathbb{D}$ oder negativ in $\mathbb{D}$. Es folgt $u_1 - u_2$ ist konstant und wegen $u_1(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) - u_2(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) \to 0$ für $r \nearrow 1$ konstant gleich 0. □

Satz 97 ist die Lösung des Dirichletproblems, also die Lösbarkeit der Wellengleichung $u_{xx} + u_{yy} = 0$ bei vorgegebener Randbedingung $u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})$ in $\partial\mathbb{D}$.

Korollar 98. *Ist $\overline{K_{a,\rho}} \subset G$ und u eine auf $\partial K_{a,\rho}$ stetige Funktion, so gibt es eine in $K_{a,\rho}$ harmonische Funktion, die durch u stetig auf $\overline{K_{0,r}}$ fortgesetzt werden kann.*

Beweis. Die Funktion $\tilde{u}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) := u(a+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})$ ist eine auf $\partial\mathbb{D}$ stetige Funktion zu der es nach Satz 97 eine auf $\mathbb{D}$ harmonische Funktion gibt, deren Randwerte durch $\tilde{u}$ sind. Dann ist die durch $u(a+r\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) := \tilde{u}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})$ auf $K_{a,\rho}$ definierte Funktion harmonisch und hat eine stetige Fortsetzung auf $\overline{K_{a,\rho}}$ mit Randwerten u. □

Als Folgerung erhalten wir die Umkehrung von Satz 93:

Satz 99. *Hat eine stetige reellwertige Funktion in einem Gebiet G die Mittelwerteigenschaft, so ist sie harmonisch.*

Beweis. Harmonisch ist eine lokale Eigenschaft, d.h. wir müssen nur zeigen, dass es für eine stetige Funktion ψ mit der Mittelwerteigenschaft und $a \in G$ eine auf $K_{a,\rho}$ harmonische Funktion gibt, die mit ψ übereinstimmt. Nach Satz 97 gibt es eine in $\overline{K_{a,\rho}}$ harmonische Funktion, die dann nach Satz 93 die Mittelwerteigenschaft hat und auf $\partial K_{a,\rho}$ mit ψ übereinstimmt. $u - \psi$ ist dann eine Funktion mit der Mittelwerteigenschaft, die auf $\partial K_{a,\rho}$ verschwindet. Nach Satz 94 ist dann $u - \psi$ entweder identisch 0 oder negativ in $K_{a,\rho}$. Genauso ist $\psi - u$ eine Funktion, die sofern sie nicht konstant ist kein Maximum hat. Damit muss $\psi - u$ identisch 0 sein, also ist ψ in $K_{a,\rho}$ harmonisch. $\square$

In Satz 39 haben wir für das Schwarz'sche Spiegeungsprinzip vorausgesetzt, dass eine analytische Funktion stetig von $G \subseteq \mathbb{H}$ auf $\bar{G} \cap \mathbb{R}$ mit verschwindendem Imaginärteil fortgesetzt werden kann. Im folgenden Satz wird gezeigt, dass es genügt zu fordern, dass nur der Imaginärteil mit 0 eine stetige Fortsetzung auf $\bar{G} \cap \mathbb{R}$ hat, was wir im Beweis des kleinen Satzes von Picard benötigen.

Satz 100 (Schwarz'sches Spiegelungprinzip)**.** *Ist eine Funktion f in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{H}$ in der oberen Halbebene holomorph, und konvergiert $f(z)$ für $\Im(z) \to 0$ gegen 0, so ist die durch $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ auf $\bar{G}$ definierte Funktion eine holomorphe Fortsetzung F von f von G auf $G \cup \bar{G}$.*

Beweis. Ist $G \cup \bar{G}$ leer, so ist nichts zu zeigen. Anderenfalls ist $G \cup \bar{G} \cap \mathbb{R}$ offen in $\mathbb{R}$ und F ist in $G \cup \bar{G} \setminus \mathbb{R}$ holomorph.

Wir zeigen zuerst dass $\Im(f)$ in $G \cup \bar{G}$ harmonisch ist. Dies ist nur für $x \in G \cap \mathbb{R}$ zu zeigen. Da G offen ist gibt es ein $\rho > 0$ mit $K_{x,\rho} \subseteq G$. Sei h die durch (55) nach Satz 97 vermöge der Funktion F definierte harmonische Funktion. Wegen $\Im(F(x + \rho e^{it})) = -\Im(F(x + \rho e^{-it}))$ und $P_{|s-x|}(-t) = P_{|s-x|}(t)$ gilt für $s \in (x - \rho, x + \rho)$

$$h(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{|s-x|}(-t) \Im(F(x + \rho e^{it}))\, dt = 0.$$

Auf $\mathbb{R}$ verschwindet aber auch $\Im(F)$ nach Voraussetzung. $\Im(F)$ und h sind also in $K_{x,r} \cap \mathbb{H}$ harmonische Funktionen, die auf $\partial(K_{x,r} \cap \mathbb{H})$ übereinstimmen. Damit ist $h - \Im(F)$ in $K_{x,r} \cap \mathbb{H}$ harmonisch mit Randwerten 0. Mit dem Maximumsprinzip Satz 94 folgt $h = \Im(F)$ in $K_{x,r} \cap \mathbb{H}$ und analog in $K_{x,r} \cap -\mathbb{H}$. F stimmt also in $K_{x,r}$ mit der harmonischen Funktion h überein und ist insbesondere in x harmonisch.

F ist nach Satz 91 der Imaginärteil einer holomorphen Funktion, die so gewählt werden kann, dass sie auf $G \cap \mathbb{H}$ mit f übereinstimmt, womit sie die gesuchte holomorphe Fortsetzung ist. $\square$

11 Sätze von Picard

11.1 Großer Satz von Picard

Lemma 101. *Sei G ein Gebiet, das den Kreis $K_{z_0,R}$ enthält und f eine in G holomorphe Funktion mit $|f(z)| < M \forall z \in G$. Dann enthält $f(K_{z_0,R})$ den Kreis $K_{f(z_0),|f'(z_0)|R/4(M+1)}$.*

Beweis. Durch Übergang zu der Funktion $g(z) = f((z+z_0)/R)/f'(z_0)$ genügt es die Behauptung für $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ und $R = 1$, also den Einheitskreis $\mathbb{D}$ zu zeigen.

Wir nehmen zunächst an, dass f im abgeschlossenen Einheitskreis holomorph ist. Dann folgt $|f(z)-z| \leq |f(z)|+1 \leq M+1$.

Die Taylorentwicklung von f gibt $f(z) = z+z^2h(z)$ für $|z| < 1$ mit h holomorph in $\bar{\mathbb{D}}$. Es folgt $|z^2h(z)| \leq |f(z)|+|z| \leq M+1$ in $\mathbb{D}$.

Wegen dem Maximumsprinzip gilt $|h(z)| \leq M+1$ in $\bar{\mathbb{D}}$. Für $|z| = 1/2(M+1)$ und $|a| < |z|/2$ folgt $|z-a-(f(z)-a)| = |z-f(z)| = |z^2h(z)| \leq |z^2(M+1)| \leq |z|/2 < |z-a|$. Nach dem Satz von Rougé haben $z-a$ und $f(z)-a$ gleichviele Nullstellen in $K_{0,1/2(M+1)}$ also haben z und f gleichviele a-Stellen in $K_{0,1/2(M+1)}$ nämlich eine für $|a| < 1/4(M+1)$. Es folgt $K_{0,1/4(M+1)} \subset f(K_{0,1})$.

Wegen f holomorph in $\overline{K_{z_0,\tilde{R}}}$ für $\tilde{R} < R$ und f holomorph in $K_{z_0,R}$ folgt $K_{f(z_0),|f'(z_0)|\tilde{R}/4(M+1)} \subseteq f(K_{z_0,R})$ für $\tilde{R} < R$. Wegen $K_{f(z_0),|f'(z_0)|R/4(M+1)} = \cup_{\tilde{R}<R} K_{f(z_0),|f'(z_0)|\tilde{R}/4(M+1)}$ folgt die Behauptung für f holomorph in $K(z_0,R)$. □

Lemma 102. *Nimmt die in dem einfach zusammenhängenden Gebiet G holomorphe Funktion f die Werte 0 und 1 nicht an, so gibt es eine in G holomorphe Funktion g mit*

$$f(z) = -\exp(\mathrm{i}\pi\cosh(2g(z))) \quad z \in G. \tag{56}$$

Die Menge $g(G)$ enthält keine Kreisscheibe mit Radius 1.

Beweis. Wegen $f(z) \neq 0$ besitzt $-f$ eine lokale Logarithmusfunktion (d.h. eine lokale Umkehrfunktion der Exponentialfunktion). Diese kann längs jedem Weg in G holomorph fortgesetzt werden und definiert nach dem Monodromiesatz eine Funktion $\log(-f(z))$ die

$$\log(-f(z)) = \mathrm{i}\pi\cosh(2g(z)) = \mathrm{i}\pi\frac{\mathrm{e}^{2g(z)}+e^{-2g(z)}}{2}$$

auf G erfüllt und führt zu der quadratischen Gleichung

$$\mathrm{e}^{4g(z)} - \frac{2}{\mathrm{i}\pi}\log(-f(z))\mathrm{e}^{2g(z)}+1 = 0$$

mit Lösung

$$\mathrm{e}^{2g(z)} = \frac{1}{\mathrm{i}\pi}\log(-f(z)) \pm \sqrt{\frac{-1}{\pi^2}\log^2(-f(z))-1}.$$

Wegen $\frac{-1}{\pi^2}\log^2(-f(z))-1=0 \Leftrightarrow \log^2(-f(z))=-\pi^2 \Leftrightarrow f(z)=1$ ist die Wurzelfunktion in G holomorph und $u\pm\sqrt{u^2-1}\neq 0 \quad \forall u\in\mathbb{C}$ kann die für die rechte Seite definierte lokale Logarithmusfunktion nach dem Monodromiesatz auf G fortgesetzt werden und wir erhalten eine Funktion g:

$$g(z)=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{\mathrm{i}\pi}\log(-f(z))+\sqrt{\frac{-1}{\pi^2}\log^2(-f(z))-1}\right), \tag{57}$$

die (56) erfüllt.

Für $\cosh(2g(z))=2k+1$ folgt aus (56) $f(z)=1$ was nach Voraussetzung ausgeschlossen ist. Wegen $\cosh(z+\pi\mathrm{i})=-\cosh(z)$ darf $2g$ keinen der Werte $\pm\operatorname{arcosh}(2k+1)+\pi\mathrm{i}l$, $k\in\mathbb{N}_0$, $l\in\mathbb{Z}$ annehmen.

arcosh' ist auf $[1,\infty)$ monoton fallend womit $0<\operatorname{arcosh}(2k+1)-\operatorname{arcosh}(2k-1)<\operatorname{arcosh}3-\operatorname{arcosh}1=\operatorname{arcosh}3<2$ gilt [1] . Die Menge $\{\pm\frac{1}{2}\operatorname{arcosh}(2k+1)+\frac{\mathrm{i}\pi l}{2}: k\in\mathbb{N}_0, l\in\mathbb{Z}\}$ zerlegt $\mathbb{C}$ in Rechtecke mit Diagonalen kleiner 2 [2]. Damit wird für jedes $z\in\mathbb{C}$ mindestens ein Wert in $K_{z,1}$ von g nicht angenommen und es folgt $K_{z,1}\not\subseteq g(G)$ für alle $z\in\mathbb{C}$. $\square$

Im Allgemeinen kann für eine holomorphe Funktion die $|f(0)|\leq\alpha$ erfüllt keine Abschätzung für $|f(z)|$ für $|z|<\beta$ gegeben werden. Wenn f aber die Werte 0 und 1 nicht annimmt gilt:

Satz 103 (Schottky)**.** *Für $0<\alpha<\infty$, $0\leq\beta<1$ gibt es eine Konstante $C(\alpha,\beta)$ für die gilt: Für jede in einem Gebiet $G\supseteq K_{0,1}$ holomorphe Funktion f, die die Werte 0 und 1 nicht annimmt und $|f(0)|\leq\alpha$ erfüllt gilt $|f(z)|\leq C(\alpha,\beta)$ für $|z|\leq\beta$.*

Beweis. Jede Konstante $C(\alpha,\beta)$ kann für $\tilde{\alpha}<\alpha$ als $C(\tilde{\alpha},\beta)$ gewählt werden. Wir dürfen also $2\leq\alpha<\infty$ voraussetzen.

Fall 1: Es gelte $1/2\leq|f(0)|\leq\alpha$: Dann ist die mit $\Im(\log(f(0)))\in(-\pi,\pi]$ definierte Funktion

$$\theta(w)=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{\mathrm{i}\pi}\log(-w)+\sqrt{\frac{-1}{\pi^2}\log^2(-w)-1}\right)$$

in dem kompakten Kreisring $1/2\leq|w|\leq\alpha$ wohldefiniert und besitzt ein betragsmäßiges Maximum $C_1(\alpha)$. Es folgt für die durch (57) definierte Funktion g: $|g(0)|\leq C_1(\alpha)$.

Nach Lemma 101 enthält $g(K_{a,1-|a|})$ einen Kreis mit Radius $|g'(a)|(1-|a|)/4(C_1(\alpha)+1)$. Dieser Radius muss nach Lemma 102 kleiner als 1 sein, womit folgt

$$|g'(a)|<\frac{4(C_1(\alpha)+1)}{1-|a|} \quad \text{für } |a|<1.$$

---

[1] $6<(1+\frac{1}{5})^{10}<\mathrm{e}^2\Rightarrow 3<\cosh 2=\frac{\mathrm{e}^2+\mathrm{e}^{-2}}{2}$

[2] $\frac{\pi}{2}<\sqrt{3}$ wegen $\frac{\pi^2}{4}<3\Leftrightarrow\frac{\pi^2}{6}<2\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<2\Leftrightarrow\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}<1$. Diese Ungleichung folgt indem man $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}<1$ als Riemannsche Untersumme von $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ auffasst.

Es folgt für $|a| \leq \beta$:

$$\begin{aligned}|g(a)| &\leq |g(0)| + |g(a) - g(0)| \leq C_1(\alpha) + \int_{[0,a]} |g'(\zeta)|\, d\zeta \\ &\leq C_1(\alpha) + \frac{|a|}{1-|a|}(4(C_1(\alpha)+1)) \leq C_1(\alpha) + \frac{\beta}{1-\beta}(4(C_1(\alpha)+1)) \\ &=: C_2(\alpha, \beta)\end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}|f(z)| &= |\exp(\pi i \cosh(2g(z)))| \leq \exp(\pi |\cosh(2g(z))|) \leq \exp(2\pi \exp|2g(z)|) \\ &= \exp(2\pi \exp|2C_2(\alpha,\beta)|) =: C_3(\alpha,\beta).\end{aligned}$$

Fall 2: Für $0 < |f(0)| < \frac{1}{2}$ erfüllt $1 - f$ die Voraussetzung von Fall 1, womit $|1 - f(z)| \leq C_3(2,\beta)$ für $|z| < \beta$ und $|f(z)| \leq 1 + C_3(2,\beta)$.

Damit gilt die Behauptung für $C(\alpha,\beta) := \max\{C_3(\alpha,\beta), 1 + C_3(2,\beta)\}$. □

Satz 104 (Montel-Carathéodory)**.** *Eine Familie $\mathcal{F}$ in einem Gebiet G holomorpher Funktionen die die Werte 0 und 1 nicht annehmen ist normal in $C(G, \mathbb{C}_\infty)$.*

Beweis. Für ein $z_0 \in G$ und die Zerlegung $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ mit

$$\mathcal{F}_1 := \{f \in \mathcal{F} : |f(z_0)| \leq 1\}, \quad \mathcal{F}_2 := \{f \in \mathcal{F} : |f(z_0)| \geq 1\}$$

zeigen wir, dass $\mathcal{F}_1$ normal und $\mathcal{F}_2$ *-normal ist.

Für $w_0 \in G$ sei γ ein rektifizierbarer Weg in G mit Anfangspunkt z_0 und Endpunkt w_0. Es sei $2\rho < \min\{d(\gamma([0,1]), G^{\complement}), \{1\}) > 0$ und $K_{\gamma(t_i),\rho}$ mit $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$ sei eine Überdeckung von $\gamma([0,1])$ mit $K_{\gamma(t_i),\rho} \cap K_{\gamma(t_{i+1}),\rho} \neq \emptyset$. Dann ist $(K_{\gamma(t_i),2\rho})_i$ ebenfalls eine Überdeckung von $\gamma([0,1])$ mit der zusätzlichen Eigenschaft $\gamma(t_i) \in K_{\gamma(t_{i-1}),2\rho}$. Aus dem Satz von Schottky folgt $|f(\gamma(t_i))| \leq C(|f(\gamma(t_{i-1})|, 2\rho)$ für $w \in K_{w_0,2\rho}$ folgt $|f(w)| \leq \tilde{C}(\rho, N, |f(z_0)|)$.

Jede kompakte Teilmenge K von G kann durch endlich viele Kugeln $K_{w_i,2\rho_i}$ überdeckt werden, wobei $w_i \in K$ gilt und w_i mit z_0 durch einen Weg γ_i mit $d(\gamma_i([0,1]), G^{\complement}) > \rho_i$ so verbunden ist, dass er von N_i Kugeln $K_{\gamma_i(t_{j-1}),\rho_i} \ni t_i$ überdeckt wird.

Damit ist $\mathcal{F}_1$ lokal beschränkt und nach dem Satz von Montel normal.

Für $\mathcal{F}_2$ gilt $\{1/f : f \in \mathcal{F}_2\} = \mathcal{F}_1$ und ist damit normal. Für jede kompakt konvergente Folge $(f_n)_n$ in $\mathcal{F}_2$ hat $1/f_n$ keine Nullstellen und nach dem Satz von Hurwitz 64 entweder auch die Grenzfunktion ϕ keine oder ϕ ist identisch 0. Im ersten Fall konvergiert $(f_n)_n$ gegen $1/\phi$. Im zweiten konvergiert $(|f_n|)_n$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen gegen ∞. □

Satz 105 (Großer Satz von Picard)**.** *Hat eine in einem Gebiet G holomorphe Funktion f eine wesentliche Singularität in a, so nimmt f jeden Wert aus $\mathbb{C}$ mit einer möglichen Ausnahme in jeder Umgebung von a unendlich oft an.*

Beweis. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $a = 0, G = K_{0,1}$ gilt und die Werte 0 und 1 von f in $K_{0,r} \setminus \{0\}$ nicht angenommen werden.

Nach dem Satz von Montel-Carathéodory 104 ist die Familie von Funktionen $\tilde{f}_n : z \mapsto f(z/n)$ normal in $C^*(K(0,1)$ und wir finden eine gegen eine in $K(0,1) \setminus \{0\}$ holomorphe Funktion F kompakt konvergente Teilfolge $f_k = f_{n_k}$ oder eine Teilfolge die bestimmt gegen ∞ konvergiert. Damit ist f_{n_k} für $k \geq k_0$ auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1/2\}$ durch $\sup\{|F(z)| : |z| = 1/2\} + 1 =: M$ beschränkt und $|f(z)|$ ist für $|z| = 1/4n_k$ durch M beschränkt. Nach dem Maximumsprinzip ist damit f in $K(0,1) \setminus \{0\}$ beschränkt und f hat in 0 eine hebbare Singularität. $\square$

Index

Literatur

[AH] Ahlfors, Lars V *Complex Analysis* McGraw-Hill, 1979

[CO] Conway, John B *Functions of one complex variable* 2^{nd} ed. Springer Graduate texts in mathematics 11, 1978

[LA] Lang, Serge *Complex Analysis* 4^{ed} ed. Springer Graduate texts in mathematics 103, 1999

[RU] Rudin, Walter *Real and complex analysis* 3^{rd} ed. McGraw-Hill, 1987