Validation de p_k sur un cercle

Yilin YE

02 juin 2023

1 Près de centre, $r_0 = 0.1$

On considère p_k sur un cercle avec son rayon égal 1. On sait la densité de la mesure harmonique comme:

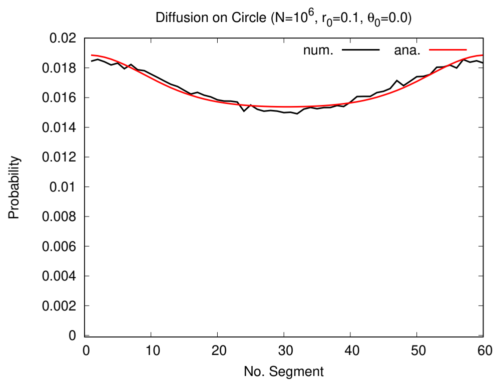
$$\omega_q(\theta|r_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi R} \times \left\{ 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{R}\right)^j \frac{\cos\left[j(\theta - \theta_0)\right]}{1 + \frac{j}{qR}} \right\} \tag{1}$$

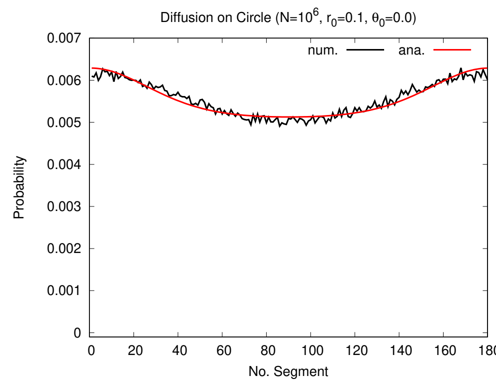
En pratique, on prend les positions initiales $(x_0, y_0) = (0.1, 0.0)$, et donc $(r_0, \theta_0) = (0.1, 0.0)$.

Comme ici il n'y a pas de segments, on peut tout simplement diviser le cercle en N arcs identiques caractérisés par l'angle $\frac{2\pi}{N}(k-1) \leq \theta < \frac{2\pi}{N}k$, avec $k = 1, 2, 3, ..., N$, et définir

$$\begin{aligned} p_k &= \int_{\frac{2\pi}{N}(k-1)}^{\frac{2\pi}{N}k} \omega_q(\theta|r_0, \theta_0) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi R} \left\{ \frac{\pi}{N} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{R}\right)^j \frac{\sin\left[j\left(\frac{2\pi}{N} \cdot k - \theta_0\right)\right] - \sin\left[j\left(\frac{2\pi}{N} \cdot (k-1) - \theta_0\right)\right]}{\frac{1}{j} + \frac{1}{qR}} \right\} \end{aligned} \tag{2}$$

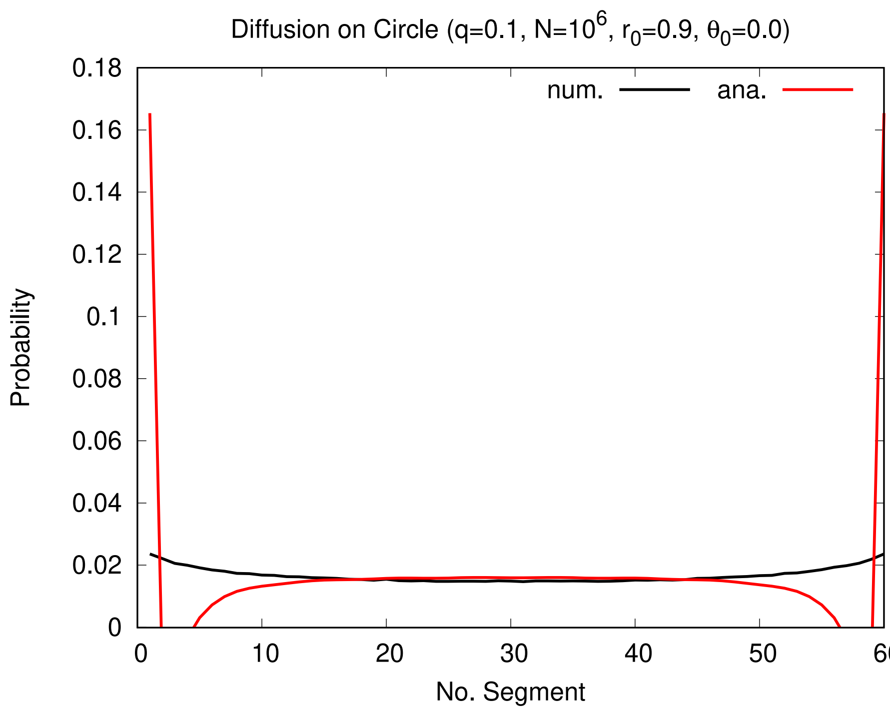
Numériquement, on prend 10^6 particules, $j_{\max} = 10$, et $N = 60$ ou 180. Voici les résultats analytiques (en rouge) et ceux numériques (en noire). Alors, on vérifie bien ces deux courbes.





2 Près de frontière, $r_0 = 0.9$

Malheureusement, quand on fait la simulation près de frontière, i.e. $r_0 = 0.9$, on voit un résultat bizarre.



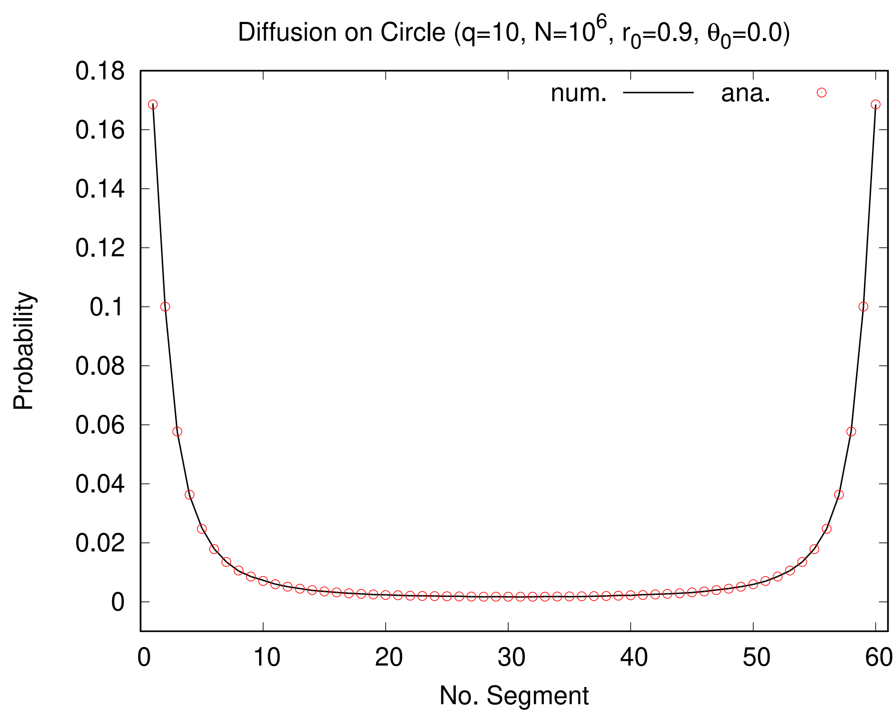
En effet, c'est pas possible d'obtenir la probabilité negative. Ainsi, on retourne l'équation 1 et re-fait l'intégration

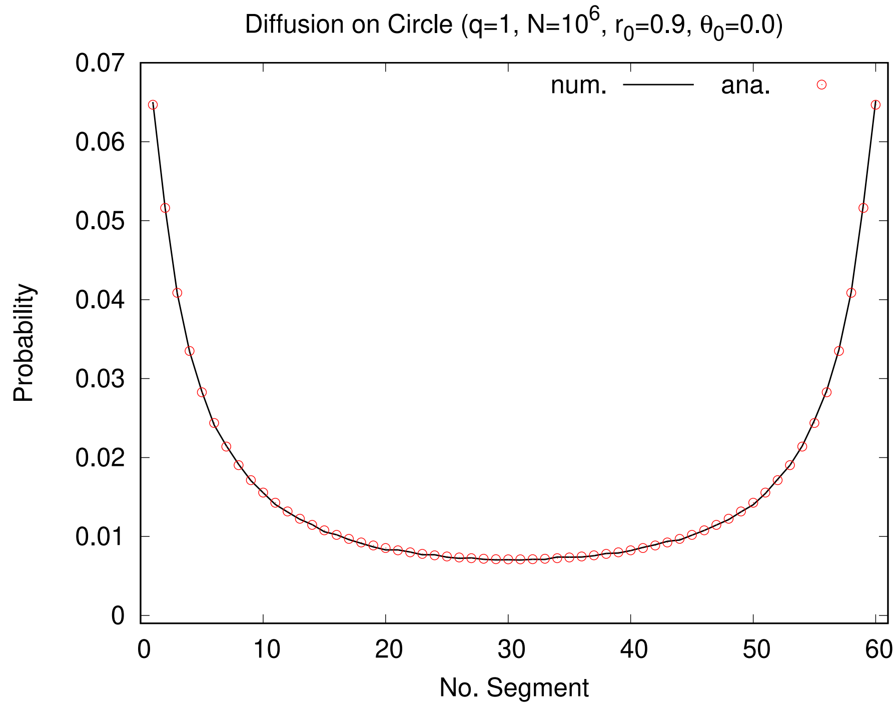
$$\int_{\frac{2\pi}{N}(k-1)}^{\frac{2\pi}{N}k} \frac{2\left(\frac{r_0}{R}\right)^j \cos(j(\theta-\theta_0))}{(2\pi R)\left(\frac{j}{qR}+1\right)} \mathrm{d}\theta = \frac{2q}{\pi j(j+qR)} \left(\frac{r_0}{R}\right)^j \sin\left(\frac{\pi j}{N}\right) \cos\left(\frac{j(-2\pi k + N\theta_0 + \pi)}{N}\right)$$

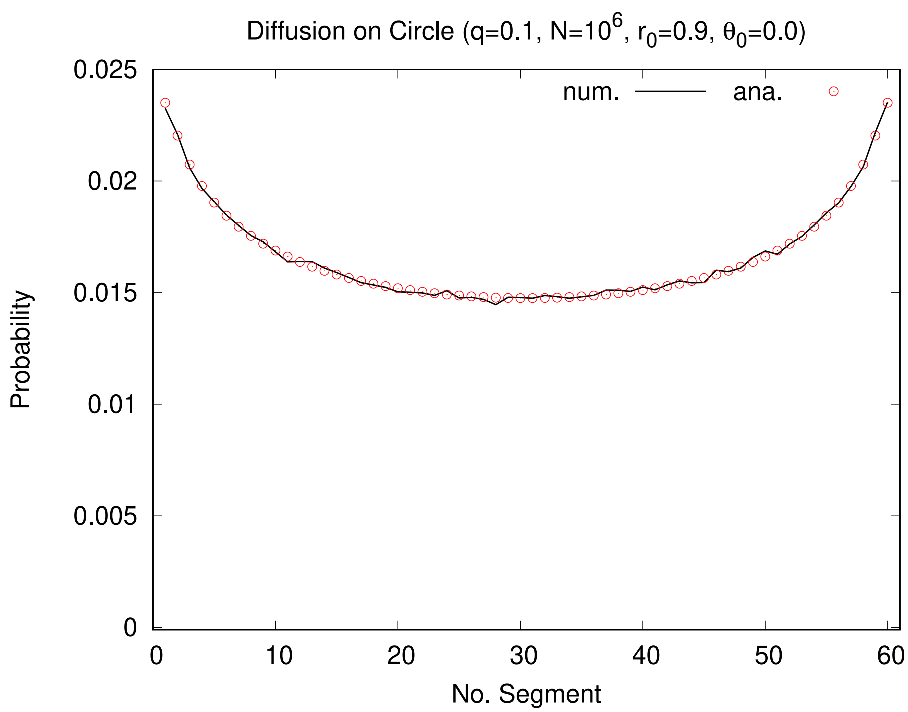
Et donc on récrit l'équation 2 comme

$$\begin{aligned} p_k &= \int_{\frac{2\pi}{N}(k-1)}^{\frac{2\pi}{N}k} \omega_q(\theta|r_0,\theta_0) d\theta \\ &= \frac{1}{NR} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2q}{\pi j(j+qR)} \left(\frac{r_0}{R}\right)^j \sin\left(\frac{\pi j}{N}\right) \cos\left(\frac{j(-2\pi k + N\theta_0 + \pi)}{N}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

Ensuite, on refait les simulations avec des résultats analytiques par l'équation 3. Ici, les positions initiales sont près de frontière, i.e. $r_0 = 0.9$, et on prend la réactivité comme $q = 10, 1, 0.1$. Comme vu, on vérifie bien ces résultats.




Diffusion on Circle (q=1, N=10^6, r_0=0.9, θ_0=0.0)
num.
ana.
Probability
No. Segment
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
0
10
20
30
40
50
60


Diffusion on Circle (q=0.1, N=10^6, r_0=0.9, θ_0=0.0)
num.
ana.
Probability
No. Segment
0.025
0.02
0.015
0.01
0.005
0
0
10
20
30
40
50
60