# Validation de $p_k$ sur un cercle

Yilin YE

01 juin 2023

On considère $p_k$ sur un cercle avec son rayon égal 1. On sait la densité de la mesure harmonique comme:

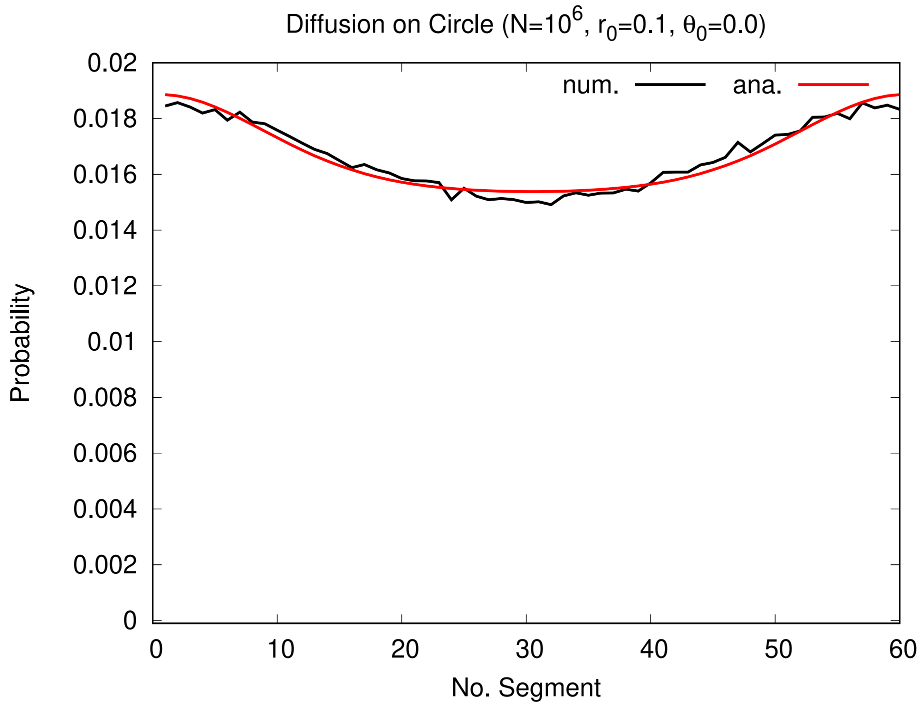
$$\omega_q(\theta|r_0,\theta_0) = \frac{1}{2\pi R} \times \left\{ 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{R}\right)^n \frac{\cos\left[n(\theta-\theta_0)\right]}{1+\frac{n}{qR}} \right\}$$

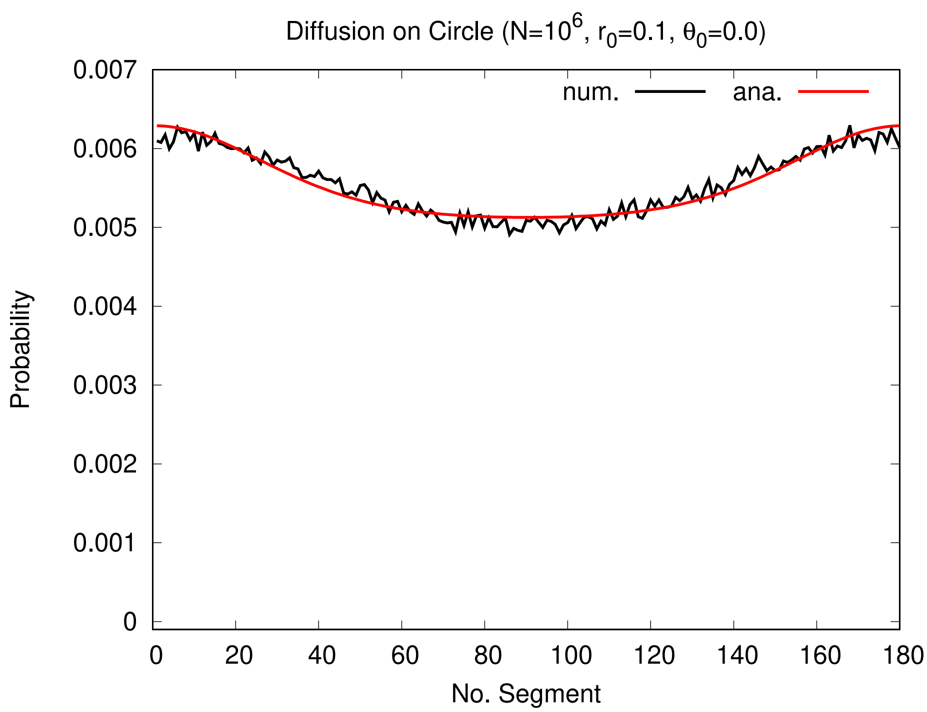
En pratique, on prend les positions initiales $(x_0, y_0) = (0.1, 0.0)$, et donc $(r_0, \theta_0) = (0.1, 0.0)$.

Comme ici il n'y a pas de segments, on peut tout simplement diviser le cercle en $N$ arcs identiques caractérisés par l'angle $\frac{2\pi}{N}(k-1) \le \theta < \frac{2\pi}{N}k$, avec $k = 1, 2, 3, ..., N$, et définir

$$\begin{aligned} p_k &= \int_{\frac{2\pi k}{N}}^{\frac{2\pi(k+1)}{N}} \omega_q(\theta|r_0,\theta_0) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi R} \left\{ \frac{\pi}{N} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{R}\right)^j \frac{\sin\left[j\left(\frac{2\pi}{N}\cdot k - \theta_0\right)\right] - \sin\left[j\left(\frac{2\pi}{N}\cdot(k-1) - \theta_0\right)\right]}{\frac{1}{j} + \frac{1}{qR}} \right\} \end{aligned}$$

Numériquement, on prend $10^6$ particules, $j_{\max} = 10$, et $N = 60$ ou 180. Voici les résultats analytiques (en rouge) et ceux numériques (en noire). Alors, on vérifie bien ces deux courbes.


Diffusion on Circle (N=$10^6$, $r_0$=0.1, $\theta_0$=0.0)
num.
ana.
Probability
No. Segment
0
0.002
0.004
0.006
0.008
0.01
0.012
0.014
0.016
0.018
0.02
10
20
30
40
50
60


Diffusion on Circle (N=$10^6$, $r_0$=0.1, $\theta_0$=0.0)
num.
ana.
Probability
No. Segment
0
0.001
0.002
0.003
0.004
0.005
0.006
0.007
20
40
60
80
100
120
140
160
180