参考书籍：[1]《线性系统理论数学基础》、[2]《最优估计理论》

待手写推理公式，将结果记录在专用的笔记本上，先用再推

* KF、EKF
* 粒子滤波
* 时域和频域之间的联系
* 姿态表示方法转换
* 熵的底数为什么是2

待解决问题：

1. n阶距
2. 为什么H正定，这个点是极小值点
3. 多项式模型也称为线性回归？因为系数是一次？
4. SVD应用总结
5. 自相关矩阵正定的证明，噪声、状态变量的协方差矩阵属于自相关矩阵。协方差矩阵包括自相关矩阵
6. 符号（方差等一般用E来表示，对于概率相等的事件可直接除n，相当于每个事件的概率为1/n）

* -偏差，真实值和估计值的差，数学上A与B的差只能是A-B
* D（X）、-随机变量X的方差，随机变量的二阶中心矩。
* 估计误差-真实值与估计值的差
* 估计误差的数学期望为0时表示为无偏估计。
* 均方误差-表示的是估计误差的方差，值越小，估计值在真实值附近越密集，即估计值越接近方差
* -标准差或均方（偏）差（RMS） ，方差开根号，观察更直观，如表示分数时
* cov（X，Y）-X、Y随机变量的协方差，X和Y的1+1=2阶混合中心距
* 协方差矩阵-两个随机向量X、Y之间的协方差矩阵，因cov（X，Y）= cov（Y,X）所以协方差矩阵对称。X=Y时为自相关矩阵，算法中常用的是自相关矩阵。
* -相关系数，cov（X，Y）/，其绝对值<=1，为0表示不相关，及相互独立，绝对值越大关系越大。不相关可展开为X-E（X）每一项成E（Y）-E（Y）。不相关时，X发生了，Y发生的概率会更大或更小，这就打破了平衡。相关系数是随机变量间线性关系强弱的一个度量，相关系数绝对值为1，Y，X呈线性关系，Y=aX+b，即知道X后Y也确定的了，当X=1时，Y=a+b。相互独立，一定不相关（），不相关不一定相互独立。
* -求期望，看见E就要想到把概率省略了，用积分展开乘概率即可。一阶原点矩。注意下标较常用，表示按X的概率密度分布求X的期望，其他下标类似。
* -；表示把前后两个符号隔开，如N（x；），x为随机变量，后面为均值和方差，即参数
* inf是函数取下限，argmin是变量取下限
* K-增益矩阵，常在递推公式或KF中，将其作为测量残差的增益
* 贝叶斯公式：,集和条件概率和全概率公式。其中z为观测量，x为待估量。为后验概率，为似然，为先验

1. 向量表示：（0,0,0）指向（a,b,c）或ai+bj+ck，后者可用向量加法得出

某点在坐标系的位置表示为（a，b，c）

1. 刚体运动：如小车一样的硬物体的运动。运动过程中车体大小、形状不变，即假设用笔车体上画出的向量的大小和相对夹角永远不变
2. 常见坐标表示都表示c坐标系到w坐标系的变换，即c原点在w坐标系下的方向和位置，如：
3. 数学技巧及基本概念

* 无法通过整体直接"统计"获得你想要的"量"时，你只能通过"部分样本"来做"整体样本""量"的估计时，谈估计方法的"有偏"还是"无偏"才是有意义的。注意统计和估计的区别，统计是全部，估计是部分估计全部。

<https://blog.csdn.net/qq_16587307/article/details/81328773>

* 均值、方差、矩和功率谱密度称为数字特征
* 测量总是存在噪声引起的方差（covariance），还有本身结构引起的偏差（bias），如imu的偏置。
* 注意参数估计和状态估计的区别，参数估计是已知状态和输出，估计参数，如高斯的均值和方差。状态估计是已知参数估计状态x。
* 卷积公式：。《概率机器人》P347有高斯分布的卷积形式
* 后验：在给定条件下想知道的结果的概率，如P（x|z），x为待估计的状态变量，z为观测值。贝叶斯分母与后验结果无关，故可以用归一化常数表示，即各分子项除以分子项之和。见《概率机器人》P340注释。贝叶斯公式能够将条件与结果位置互换。只改变其中两个元素就好
* 多维用2维写出来看看，一些公式写出具体式子展开计算，如向量和矩阵展开后比较好看出来
* [2]76页最下方有自己的理解，可以把下次观测看成多次观测相乘的形式（类似极大似然），z为观测值，x为待估计参数，使下式最大即对数次数最小，可用梯度下降来求，也可以使关于x的导数为0。对于高维高斯分布，如,其中Qt为正定（自相关矩阵）对称矩阵，当噪声为0时，即Qt对角为0，估计值zt’等于zt，在相互独立的假设下，求最大似然，即使所有和最小。Qt为对角阵时，二维沿xy轴的截面都是高斯分布，可以用二维将对数指数项展开看看。确定一维后，非对角的另一维概率还和第一维有关
* 设协方差为Qt=E（ztztT），非对角表示不同维度相互影响
* xTAx为一个数，可像类似于求偏导。矩阵和向量求导公式《线性系统理论数学基础》P44
* 可相似对角化矩阵p-1Ap=特征值对角阵，p为特征向量，可以通过微调特征值，改变A，特征值越小的对A影响越小
* 末尾加1，由三维变四维
* 旋转轴上向量在旋转后不发生改变
* 中t较小时,可通过泰勒公式近似为I+At
* 在离散域累加时，先考虑连续域求积分
* 两边大于0可以两边同时取对数指数等单调函数
* 凸优化在全局二阶导不变号的时候才能找到全局最优解，否则可能到局部最优
* 对于有n个自由解的线性齐次方程，可以先令其中n个解为常熟，一般取1
* 优化技巧，优化什么参数就对什么求导，偏导为0，表示无关
* 两事件相关矩阵不是对角矩阵，无关则为对角矩阵
* 对方差的理解，数据间的差异，将数据等比例放大，会使方差变大
* 线性方程的方差为凸优化问题，一般为一元二次函数，可举例子看一下
* 二次范数是平方不受正负影响，但简单差值受正负影响
* 归一化，
* 离散傅里叶对偶数尺寸的阵列执行较快
* 最大化0-1的数，可转化为最小化-log
* 期望通常和概率有关，如数学期望，方差等
* 点积可以反应两个向量的相似度
* CNN中卷积的意义：大于t之后权重值为，小于0时，x值为0。
* 链式求导、概率模型和除数为0都会引发不好得后果，经常需要平滑
* 可以叉乘某个向量，使某一边为0
* Ap=lamdap，那么特征值接近0的将其改为0对结果影响也不大，说明特征值大的比较重要，可以借助PCA来理解
* 高斯牛顿法是二次收敛，在接近最小值时比较好，一阶梯度下降是最速下降，在离最小值较远时比较好
* 坐标转换齐次矩阵T的逆矩阵为RT –RTt
* 若x=m1/n1=m2/n2=m3/n3,则x=（m1+m2+m3）/(n1+n2+n3)
* qtRq’=trace(Rqq’t)
* trace(BAAt)=trace(AtBA)，xtx=trace（xxt）。x一般指列向量
* 协方差是衡量偏离均值的二次期望值，注意与方差的区别
* 高斯随机变量的任何线性变换都将导致另一个高斯随机变量
* 求逆复杂度O()，2叉树结构计算复杂度O（logN）
* Ef[g(x)]=,其中f（x）为概率密度函数
* 指示函数I，条件为真时为1，条件为假时为0
* 《最优估计理论》P17：k阶原点（可认为是减0）矩：。k阶中心点（减期望，期望可以认为是中心，矩认为是与中心的距离）矩：。k+l阶混合（原点）矩：。k+l阶混合中心矩：。数学期望是一阶原点矩，方差是二阶中心矩。协方差P16是二阶（1+1）混合中心矩。
* 注意区分变量和常量，如《概率机器人》P349
* 一个概率分布p的熵，《概率机器人》P14，Hp（x）=E[-log2p(x)]。若p为均匀分布，熵取得最大值。熵用在机器人的信息收集时，用以表达机器人在执行具体行动时可能接收到的信息。P447可以更好理解，其为二值的。不确定性越大（均匀分布不确定性大），熵越大。探索和移动的目标是使不确定性变小。
* 偏导是必要条件，还需验证一下
* p(xy)和f（x，y）都是且的意思

1. 迭代方法总结
2. 姿态表示方法转换1
3. 注意区连续情况下概率和概率密度：概率是某范围对应概率密度函数的面积，总面积为1
4. 在矩阵中，若数值为0的元素数目远远多于非0元素的数目，并且非0元素分布没有规律时，则称该矩阵为**稀疏矩阵**；与之相反，若非0元素数目占大多数时，则称该矩阵为**稠密矩阵**。定义非零元素的总数比上矩阵所有元素的总数为矩阵的稠密度。
5. 联系线性方程组，齐次坐标其对应线性方程右边为0，在位姿变换中表示为（x,y,z,1），非齐次坐标其对应线性方程右边不为0，在位姿变换中表示为（x,y,z）
6. 链式求导：
7. SVD:<https://www.cnblogs.com/pinard/p/6251584.html>

*A*=*U*Σ*VT*

　　其中U是一个m×m的矩阵，Σ是一个m×n的矩阵，除了主对角线上的元素以外全为0，主对角线上的每个元素都称为奇异值，V是一个n×n的矩阵。U（ATA分解得）和V(AAT分解得)都是酉矩阵，即满足*UTU*=*I*,*VTV*=*I*UTU=I,VTV=I。

1. 求解线性方程方法

* 可以想办法使它成为超定方程，使用SVD解超定方程，m>n，取奇异值最小特征值对应的特征向量作为解，利用U、V都是正交矩阵
* 可以使用矩阵三角化来求解满秩线性方程的解
* QR分解，一般用于解满秩的情况。将系数矩阵A分解为Q单位正交阵和R上三角矩阵，方便求齐次或非齐次方程的解

1. 零空间：零空间也称为核，A的零空间为使Ax=0的x向量

https://baike.baidu.com/item/零空间/9249832?fr=aladdin

1. 一阶和二阶梯度法、高斯-牛顿、列文伯格-马夸尔特方法求x的增量，视觉slam十四讲P110
2. ransac方法求解带有噪声的数据
3. 向量矩阵导数公式
4. a 是向量 θ 的标量函数，则定义
5. β、 θ 分别是 m ×1和 n ×1向量，则定义
6. a 是标量函数， M 是 m n × 矩阵，则定义
7. M 是 m n × 矩阵， a 是标量函数，则定义
8. 常见xTRx对x求导的导数为R，KF中求导如下：



1. 爬山算法（从临近空间找最优解，像爬山一样）和模拟退火（如梯度下降时接受更差的结果，防止进入局部最优）

<https://blog.csdn.net/zhouzi2018/article/details/82118673>

1. [2]p3最优估计问题是估计无法直接观测的随机变量x（状态变量），需要通过与x统计相关的随机变量z（观测量）来对x进行估计。已知关于系统运动学或动力学（运动模型）和量测方程（观测模型）的知识，利用系统过程噪声（运动噪声）、量测噪声（测量噪声）的统计特性和初始条件信息，依据某种最优准则（KF、EKF、PF、MAP、非线性优化）对量测值z进行处理，确定系统当前时刻状态x的问题，称为最优估计问题。
2. 滤波有频域上的滤波和概率方法（最优估计），还有一阶滤波（超声波使用的滤波方法，可以减小更新速度）、均值滤波、窗口滤波等，最优估计一般是通过观测值z估计状态变量x，而其他主要用于传感器等直接测量值的滤波
3. [2]p4状态估计时间t1与最后测量时间t，t1>t为预测，t1=t为滤波，t1<t

为平滑。结合P130笔记理解

1. [2]P6基本事件构成样本空间，基本事件称为样本，x的值就是一个基本事件，现实生活的事件往往是离散的，而数学上的问题经常是连续的
2. [2]p6互斥-A、B不同时发生；对立-AB不同时发生且构成一个样本空间，概率和为1；完备-所有事件至少有一件发生，不一定互斥。独立-可理解为几个不同事件空间的事件。
3. [2]p9条件概率、全概率公式和贝叶斯公式的相互推导。机器学习的前提是已经具有大量的带标记数据的数据集，那么相当于有n次测量了，可以用于估算
4. [2]p11注意概率分布与概率密度函数的关系-概率分布的导数为概率密度函数，概率分布为F(X)=P（X<=x）,概率密度函数为p（x），注意大小写，那么F(X)在x处求导即增量x的概率和/增量x，这里增量x足够小。若增量x较大时可以看成是直方图方法。
5. 误差和残差的区别：误差是测量值和真实值的差，残差是测量值和预测值的差。<https://zhidao.baidu.com/question/1695447537976680788.html>
6. [2]p64最优估计的常见准则，前4种方法一般目的是都是估计状态变量x这种随机变量，使其更接近真值，估计误差越小越好，估计误差的数学期望为0，估计误差的方差也越小越好，最好为0。

后2种用于估计确定的值或参数，是参数估计的问题，不需要知道值或参数的统计特征（概率密度函数、一阶矩和二阶矩等）。

* 无偏估计：参考p66例题便于理解，无偏即估计误差的数学期望为0。状态的估计值和真实值具有相同的均值。往往与其他估计准则结合使用，如无偏最小方差估计和无偏线性最小方差估计
* 最小二乘估计：将测量残差的平方和最小作为最优估计准则的估计方法。如果不知道x和z的一阶矩（数学期望）和二阶矩（方差、协方差）及它们的概率密度，这时可以采用最小二乘法得到最优估计。不能保证估计误差的方差最小。
* 古典最小二乘法：无需知道统计特征，是无偏估计
* 加权最小二乘法：当W=R-1时，是缺少初值条件下的线性无偏最小方差估计，又称马尔可夫估计。优于古典最小二乘估计，需要测量误差矩阵（方差矩阵）的信息。R的逆说明测量误差方差越大，W值越小
* 递推最小二乘估计：证明待看
* 梯度下降方法：擅长解非线性问题
* 最小方差估计：在一切可能的估计中，将估计误差方阵P（x）最小的估计量作为最优估计。需要知道被估值x和测量值z的条件概率密度p（x|z）或p（z），以及它们的联合概率密度p（x，z）
* 线性最小方差估计：如果只知道x和z 的一阶矩和二阶矩，这种情况下，为了得到最优估计结果，必须对估计量的形式加以限制。假定估计值是观测值的线性函数，以估计误差阵（估计误差方差阵）达到最小作为最优估计的准则。估计误差与z不相关，也就是测量不会影响估计误差。
* 极大似然估计：使条件概率密度p（z|x）（称为似然，likehood）达到极大，显然需要知道条件概率密度。一般假设观测之间相互独立，那么最大似然就是将各似然相乘形式，因为概率肯定为正，然后可以转化成对数形式，将相乘转化成相加的形式。在缺乏先验概率p（x）的情况下，极大似然估计和极大后验估计是等同的。相对后验估计，简单、应用更广泛。
* 极大后验估计：使后验概率密度p（x|z）（后验，posterior）达到极大。可利用贝叶斯公式。在没有先验概率时候，可假定x在很大范围内变化，可看成方差矩阵区域无穷大的高斯分布。

1. 1