

2019-09-17

引力波数据处理

胡一鸣

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

git commitID: 335e4abe8711a732cc92da624a7de7b1e49221c0

编译日期 : Tue Sep 17 09:36:11 2019 +0800

任何建议及错误信息请发送至邮箱

huyiming@sysu.edu.cn



本作品采用知识共享署名 4.0 国际许可协议进行许可。访问<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>查看该许可协议。

本作品 \LaTeX 模板采用^a，遵守知识共享署名-非商业性使用 4.0 国际许可协议进行许可。访问<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>查看该许可协议。

^a<https://github.com/muzimuzhi/Qbook>

序

Joseph Weber 是引力波探测的先驱。他建造了两个相隔上千公里的探测器，这样就可以有效地隔绝环境噪声产生的误警（实际上，LIGO 也是遵从这样的宗旨选址的），这是因为引力波的传播速度是光速，那么两个探测器应该近乎同时探测到信号；同时，噪声的到来对不同的探测器是相互独立的。Weber 记录的数据中，就有几个信号，不同的探测器记录的时间差非常短。1969 年，Weber 在 *Physical Review Letters* 上发表论文“Evidence for discovery of gravitational radiation”，宣称发现了引力波信号。一时间，他名声鹊起，成为了聚光灯前的宠儿，媒体将其捧为继 Einstein 之后最伟大的物理学家。

2017 年，三位物理学家由于引力波发现而获得诺贝尔奖。三个人里，没有 Weber。当然，斯人已去，Weber 在世纪之交的 2000 年 9 月 30 日就已作古。然而，Weber 与诺奖失之交臂，并不是因为他活的不够长——这一点日渐成为获得诺奖的必要非充分条件——而是因为后续的研究无法重复 Weber 的结论。先是理论计算结果与 Weber 宣称的引力波信号强度、频次相差悬殊；接着，其他团队建造的更灵敏的探测器宣布无法探测到引力波事件；最致命的是，Weber 在相隔三个时区的两个信号中寻找同时信号的时候，竟然忘了考虑时差。

Weber 是真诚的，直到他去世时，他依然坚信他成功地探测到了引力波。这里并没有学术不端，有的，只是对数据处理的极度忽视。当然，也许，Weber 数据处理地好一些，就不会引发这么大的轰动，也就不会吸引这么多聪明人投身到引力波探测这个领域，也许 2015 年 9 月 14 日穿越地球而过的那一串小小涟漪，就会如它之前的所有双黑洞并合的信号般，悄悄地来，又悄悄地去，不留下一丝痕迹。

2016 年，引力波探测的大门，已然被叩开，黑洞与中子星疯狂的舞蹈终于觅来了知音。在 2019 年的这个夏天，当我远眺未来，充满的是憧憬和期待，当天琴卫星上天，当宇宙的长波电台被天琴接收到信号时，又会上演什么样的一出好戏呢？科学的魅力往往就在于它的不可捉摸和不可预测。不管是什么样的发现，背后一定会有着有力的数据处理方法作为支撑。还好，卫星上的时钟同步用的是原子钟，应该不至于忘记考虑时差这回事。

历史不容假设，当我们回望过去的时候，我们也许会 Will Weber 铭记为一位勇敢的先驱，一位卓绝的工程师，甚或是一位天才的实验物理学家；但同时，不容否认，他在引力波数据处理这门课上，表现地糟糕透了。我相信，当未来的人们回望这段当前，回顾

中国科学的崛起时，“引力波探测”、“天琴计划”，都会是绕不过去的、在历史的长河中熠熠发光的名词。我们有着国内顶尖的激光团队，国内顶尖的惯性基准团队，国内顶尖的卫星系统团队。我希望，我们也将会有国内顶尖的引力波数据处理团队。我更希望，这本讲义能成为奔向这个远方的起点。

这段历史画卷，现在就将由你谱写。

愿这一本讲义，能成为你的画笔，你的颜料。

目 录

序	i
前 言	ix
第一章 相对论基础	1
1.1 相对性原理 (Principle of relativity)	2
1.1.1 Galilean 相对论	2
1.1.2 Maxwell 方程组	3
1.1.3 狭义相对论	4
1.2 微分几何初步	5
1.2.1 张量 (tensor) 初步	5
1.2.2 等效原理	7
1.2.3 协变导数	8
1.2.4 测地线 (geodesics)	11
1.3 广义相对论 (General Relativity) 初步	12
1.3.1 曲率张量	12
1.3.2 Einstein 场方程	12
第二章 引力波方程	15
2.1 广义相对论的 Newtonian 极限	15
2.1.1 线性化引力 (linearized gravity)	15
2.1.2 Newtonian 极限	17
2.2 引力波	17
2.2.1 引力波的传播	17
2.2.2 横向无迹规范 (transverse-traceless gauge)	18
2.2.3 引力波的效果	19

第三章 引力波源和波形	23
3.1 双黑洞并合	23
3.1.1 双黑洞并合的波形	24
3.1.2 BBH 天文学	29
3.1.3 BBH 与基础物理	30
3.2 中子星双星并合	30
3.2.1 中子星	30
3.2.2 波形	30
3.2.3 中子星双星天文学	31
3.3 EMRI	31
3.4 Continuous Wave	31
3.4.1 变形的中子星	31
3.4.2 双白矮星	31
3.5 Supernova	31
3.6 SGWB	31
3.7 其他波源	31
3.7.1 QNM	31
3.7.2 Cosmic String Susps	31
3.7.3 引力波暴	31
第四章 引力波探测手段	33
4.1 棒状探测器	33
4.1.1 原理	33
4.1.2 噪声	33
4.1.3 灵敏度	33
4.2 地面激光干涉探测器	33
4.2.1 原理	33
4.2.2 波源和噪声	33
4.2.3 灵敏度	33
4.3 空间引力波探测	33
4.3.1 原理	33
4.3.2 波源和噪声	33
4.3.3 现状	33
4.4 脉冲星计时阵	33

4.4.1	原理	34
4.4.2	源、噪声和现状	34
4.5	宇宙微波背景辐射	34
4.5.1	原理	34
4.5.2	源、噪声和现状	34
4.6	其他探测方案	34
第五章 “穷人版”引力波数据处理示例		35
第六章 引力波信号探测		37
6.1	概率初步	37
6.1.1	随机变量	37
6.1.2	频率学派 v.s. Bayesian	37
6.1.3	典型分布	37
6.1.4	随机过程	37
6.2	时序列分析	37
6.2.1	Fourier 变换	37
6.2.2	样本平均和相关函数	37
6.2.3	卷积	37
6.2.4	功率谱密度	38
6.2.5	周期图	38
6.3	信号探测的统计学原理	38
6.3.1	假设检验	38
6.4	连续引力波探测	38
6.4.1	F-统计	38
6.4.2	误警率和探测概率	38
6.4.3	模板数	38
6.4.4	次优滤波	38
6.4.5	F-统计算法	38
6.5	啁啾信号探测	38
6.5.1	最佳探测统计	38
6.5.2	匹配滤波	39
6.5.3	时频分析	39
6.5.4	同时性	39

6.5.5	显著度分析	39
第七章	引力波信号测量	41
7.1	参数估计	41
7.1.1	测量精度	41
7.1.2	参数估计中的系统误差	41
7.1.3	置信区间	41
7.1.4	nuisance 参数	41
7.1.5	Fisher 信息矩阵	41
7.2	Markov 链蒙特卡洛	41
7.2.1	MetropolisHastings 算法	41
7.3	模型选择与 Occam 剃刀	41
7.3.1	模型选择	42
7.3.2	定量的 Occam 剃刀	42
7.3.3	Odds ratio	42
7.4	层级采样	42
7.4.1	问题描述	42
7.4.2	基本算法	42
7.4.3	随机采样	42
7.4.4	后验概率采点	42
7.4.5	模拟淬火	42
第八章	其他方法及复杂情形	43
8.1	随机引力波背景探测	43
8.1.1	单探测器信噪比	43
8.1.2	相关与似然函数	43
8.1.3	多数据情形	43
8.1.4	最大似然探测统计	43
8.1.5	Bayesian 相关分析	43
8.1.6	其他方法	43
8.2	无法建模信号的探测统计量	43
8.2.1	功率超出法	43
8.3	机器学习	43
8.4	非稳态、非 Gauss、非线性噪声下的探测	43

8.5	数据包含间隔的情形	44
8.6	效率提高	44
8.6.1	Reduced-order models	44
8.6.2	Kludge	44
第九章	引力波数据处理实例	45
附录 A	常用物理量	47
参考文献		49

胡一鸣 2019-09-17

前言

这份讲义是我为中山大学物理与天文学院研究生课程“引力波数据处理”课程所准备的。由于本人能力有限，准备时间仓促，一定包含了大量错误，我会力争在收到反馈之后进行更正。感谢谢思远帮忙指出部分错误。讲义的电子版可以在https://github.com/yiminghu-SYSU/GW_DA_notes获得。

这本讲义的写作对象是对引力波数据处理感兴趣的高年级本科生或研究生。本书默认读者已经初步掌握了狭义相对论的基本概念，并有一定概率论基础。在讲义中，我会尽可能追求内容的完整性，以便尚未完成广义相对论等课程学习的同学也可以在脑中构建起足够的物理图景。

但限于篇幅和授课计划，本书肯定无法替代广义相对论等基础课程。因此，文中肯定会在数学逻辑的严谨性和课程主题的完备性之间做出倾向于后者的取舍，也敬请诸位谅解。

胡一鸣

2019年8月14日，于珠海唐家

胡一鸣 2019-09-17

胡一鸣 2019-09-17

1

相对论基础

本讲义的授课主题，是引力波数据处理，共分为两部分，引力波与数据处理。如果脱离了引力波的物理图景，而直接空谈数据处理，未免空中楼阁。而在另一方面，引力波又是 Einstein 广义相对论的直接理论预言，因此，引力波的理论描述，无法跳脱广义相对论的框架。

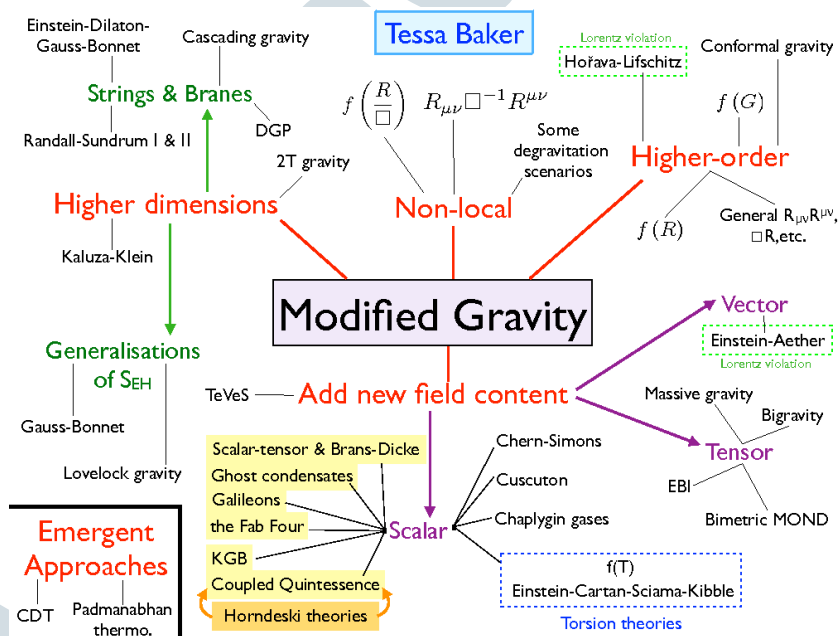


图 1-1 修改引力理论

Figure 1-1 Theories of modified gravity. Credit:

<http://www.cgc-yzu.cn/Upload/research/MG-20240317524.png>

从 Einstein 至今，引力理论已经有了长足的发展，如图 1-1 所示，仅基于广义相对论基础上发展起来的修改引力理论就已不计其数。由于和量子力学原理的深刻矛盾，有理由认为 Einstein 决定论性的广义相对论在某个地方一定背离了引力的物理本质。然而，时至今日，Einstein 昔日基于广义相对论所作出的诸多预言，一一被实验所验证；所有可靠的实验检验下，广义相对论均可以给出解释——而它通常是最简洁的那个理论。因此，即使将来的实验证明了广义相对论与引力的物理本质之间的偏离，对广义相对论的理解依然有着重要的意义。

1.1 相对性原理 (Principle of relativity)

1.1.1 Galilean 相对论

虽然在 20 世纪，相对论一次专指 Einstein 的理论，但是相对性原理 (Principle of relativity) 的思想在 Newtonian 力学中就有体现：两个服从 Newtonian 力学的、相对均匀运动的惯性参考系，无法通过在内部展开的力学实验进行区分。这一思想一般认为是 Galileo 在《关于 Ptolemaic 和 Copernican 两大世界体系的对话》中首先提出的 [9]：

材料 1.1 Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo

把你和一些朋友关在一条大船的甲板下的主舱里，让你们带着几只苍蝇、蝴蝶和其他小飞虫，舱内放一只大碗，其中有几条鱼，然后，挂上一个水瓶，让水一滴一滴地滴到下面的一个宽口罐里。船停着不动时，你留神观察，小虫都以等速向舱内各方向飞行，鱼向各方向随便游动，水滴滴进下面的罐中。你把任何东西扔给你的朋友时，只要距离相等，向这一方向也不比向另一方向更多用力。你的双脚齐跳，无论向哪个方向跳过的距离都相等。当你仔细观察这些事情之后，再使船以任何速度前进，只要运动是均匀的，也不忽左忽右地摆动，你将发现，所有上述现象都没有丝毫变化，你无法从任何一个现象来确定，船是在运动还是在停着不动。即使船运动得相当快，在跳跃时，你也将和以前一样，你跳向船尾也不会比跳向船头更省力。

在 Galilean 相对性原理表明的这个表述中，日常生活中涉及到的物理学性质，在地球坐标系下（船停着不动）和船的坐标系下（船在运动）没有任何区别。

用公式来表述的话，则可以设立两个坐标系，亦即“静止的”地球坐标系 $S(t, x, y, z)$ 和“运动的”船坐标系 $S'(t', x', y', z')$ 。不妨令 $t = t' = 0$ 时，两个坐标系重合，且船以速度 v 沿

x 方向移动, 则有

$$\begin{aligned}t' &= t \\x' &= x - vt \\y' &= y \\z' &= z\end{aligned}\tag{1.1}$$

这种变换通常被称为 Galilean 变换。不难得出, Galilean 变换下的速度转换公式是 $u'_x = u_x - v$

实际上, 这种朴素的相对论性原理是非常直观的, 在《尚书纬·考灵曜 (yào)》中, 就有文字表达了相当类似的想法:

材料 1.2 尚书纬·考灵曜

地恒动不止而人不知, 譬如人在大舟中, 闭牖 (yǒu) 而坐, 舟行而不觉也

1.1.2 Maxwell 方程组

Maxwell 总结了前人归纳的方程组, 得到了

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J}\end{aligned}\tag{1.2}$$

其中 ε_0 为真空电容率, μ_0 为真空磁导率。尤其, 他注意到这组方程与连续性公式 (如下) 冲突

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0\tag{1.3}$$

在放弃实验总结公式和放弃连续性方程之间, Maxwell 作出了伟大的抉择: 他相信连续性方程必须成立。由此, 他总结了著名的 Maxwell 方程, 用以描述电磁场的一般性质。

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)\end{aligned}\tag{1.4}$$

而其中 $\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ 这项被称为位移电流。

Maxwell 注意到, 通过 Maxwell 方程组, 利用真空中 $\rho = 0$, $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ 的可以推导出,

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0\tag{1.5}$$

不难看出，电磁场的变化以波动形式传播，其速度 c 取决于：

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \quad (1.6)$$

从数值上， c 的取值与当时已经从实验上测得的光速极为接近，这使得他大胆假设：光就是一种电磁波。

然而，Maxwell 方程组与 Galilean 变换是不自洽的。考虑在运动的船 S' 上进行电磁学测量，根据 Galilean 变换 1.1，真空中电磁场的传播方程 1.5 变为

$$c^2 \nabla^2 \mathbf{B} = \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)^2 \mathbf{B} - 2\mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \quad (1.7)$$

一个平庸的结论是，通过 Galilean 变换，船上的物理学家将测得光速变为 $c \pm v$ 。然而更深刻的问题是，这一结论意味着，如果 Galilean 相对论是正确的，那么 Maxwell 方程组只能对某个特定惯性参考系成立，而物理学家可以根据电磁场的测量来确定实验室位于“船”上还是相对静止。Newtonian 力学必须借助绝对绝对空间的概念，在坚持 Galilean 相对论的前提下，似乎可以得出，满足 1.5 的参考系就是 Newtonian 力学概念中的绝对空间。

其时，人们认为电磁波传播需要介质，而这种依附于绝对空间而具有独特性质的参考系，具象化为“以太 (aether)”[8]。

1.1.3 狭义相对论

Lorentz 和 Poincaré 第一次意识到，如果 S 坐标系和 S' 坐标系之间的转换关系采用如

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \\ x' &= \gamma (x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{aligned} \quad (1.8)$$

的形式的话，那么 Maxwell 方程组 (公式 1.4) 在所有的惯性系中都能成立。这里的 γ 通常被称为 Lorentz 因子。形如公式 1.8 的变换称为 Lorentz 变换 (Lorentz transformation)，我们可以说，Maxwell 方程组在不同的惯性系中，通过 Lorentz 变换维持了不变性。可以发现，Lorentz 变换下的速度转换公式是

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - vdt)}{\gamma \left(dt - \frac{vdx}{c^2} \right)} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \left(\frac{v}{c^2} \right) \left(\frac{dx}{dt} \right)} = \frac{u_x - v}{1 - u_x v / c^2}. \quad (1.9)$$

在 Maxwell 方程组的有效性和 Galilean 相对论之间，Einstein 作出了伟大的抉择：他相信光速不变必须成立，Lorentz 变换背后对应着深刻的物理原理。

从某种意义上说，Lorentz 变换就是狭义相对论的精髓。但物理学界今天达成共识，认为是 Einstein 而非 Lorentz 或 Poincaré 发明了狭义相对论，这是因为 Einstein 第一次严肃地认为 Lorentz 变换体现了时间与空间的本质，而非简单的数学工具。由此，时间与空间并非完全独立，而是交织在一起，甚至可以互换。要标记一个事件，必须同时标记其在某个惯性系下的空间坐标 (x, y, z) 和时间坐标 t 。对于两个事件，在 S 坐标系下看来可能是同时发生的 ($\Delta t = 0$)，但在 S' 坐标系看来却可能发生于不同时间 ($\Delta t \neq 0$)。在不同的惯性系下，通过 Lorentz 变化，两个不同事件之间，保持不变的，是事件间时间间隔和空间间隔的某种组合，称为时空间隔：

$$\Delta s^2 = -(c\Delta t)^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \quad (1.10)$$

通常其微分形式使用起来更为方便：

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.11)$$

在 Lorentz 变换下， ds^2 保持不变。特别的，我们将符合这种描述的时空称为 Minkowski 时空。

1.2 微分几何初步

1.2.1 张量 (tensor) 初步

在相对论框架下，时间坐标 t 和空间坐标 (x, y, z) 联合起来形成一个统一的时空坐标 $x^\alpha = (t, x, y, z)$ 。如此处的 α 一般出现在坐标上标上的希腊字母，会遍历 $0, 1, 2, 3$ 。 $x^0 = t$ 具有时间量纲，而 $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ 则代表空间坐标。这样，我们可以将公式 1.11 重新表达为

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (1.12)$$

这里， $\eta_{\alpha\beta}$ 是一个对角矩阵，

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

注意到 $\eta_{00} = -c^2$ ，而 $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$ ，并且，根据 **Einstein 求和约定 (Einstein summation convention)**，如公式 1.12 一般，当某个希腊字母同时出现在上下标的时候，则意味着要对该字母求和。

注 1.3. 通常, 约定俗成: 采用希腊字母时, 默认遍历 $\{0,1,2,3\}$; 采用英语字母时, 默认遍历 $\{1,2,3\}$, 即只包含空间项。

材料 1.4 Kronecker delta

有一个特殊的张量, 即所谓 Kronecker delta 张量

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

该张量的表现形式在所有的坐标系中都一致。

在更一般的情形下, 可以写成

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (1.15)$$

我们通常把 $\eta_{\alpha\beta}$ 称为 Minkowski 时空中的度规张量 (metric tensor, 在数学语境中通常翻译为度量张量), 或者简称为 Minkowski 度规。当坐标 x^α 发生变化时, 度规张量相应变化, 使得公式 1.12 维持不变量。也就是说, 通过公式 1.16, 我们可以把随坐标变换而改变的 x^α 转化成不随坐标变换而改变的时空间隔 ds^2 。¹

注 1.5. 注意, 平直时空 (Minkowski 时空) 并不一定意味着 Minkowski 度规。如, 若空间部分采用球坐标系, 则有坐标基底为 $\{t, r, \theta, \phi\}$, 这时时空间隔可以写为

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.16)$$

亦即, 对应的度规为

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

可以定义在坐标系中的矢量 $d\vec{x} = \vec{e}_\alpha dx^\alpha$ 。在坐标系变换过程中, 由于坐标基底 $\vec{e}_\alpha = \partial\vec{x}/\partial x^\alpha$ 改变了, 相应的矢量 $d\vec{x}$ 在坐标基底上的分量 dx^α 也会变化, 但是矢量本身

¹注意, 度规张量是对称的, 也就是 $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ 。

$d\vec{x}$ 是不变的¹ 需要指出的是, 矢量也是一种张量。实际上, 张量也符合上述性质: 当坐标基底改变时, 张量在坐标基底上的分量会发生变化, 但是张量本身是不变的。

度规也自然地定义了坐标系中两个矢量的内积。 $d\vec{x}$ 与自己的内积是时空间隔 ds^2 , 展开得:

$$ds^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = (\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta) dx^\alpha dx^\beta \quad (1.18)$$

通过与公式 1.16 比较, 可以发现 $g_{\alpha\beta} = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta$ 。更一般的, 两个矢量 $\vec{A} = A^\alpha \vec{e}_\alpha$ 和 $\vec{B} = B^\alpha \vec{e}_\alpha$ 的内积可以写成

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A^\alpha B^\beta (\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta) = g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta. \quad (1.19)$$

1.2.2 等效原理

Einstein 的狭义相对论, 虽然可以将 Newtonian 框架下的绝对空间观点移除, 但惯性系仍然在所有的坐标系中占据一个特殊的位置。² 由此探究了十年时间之后, Einstein 最终得到了广义相对论, 并最终将惯性系的特殊性也彻底移除。Einstein 观察到, 在 Newtonian 力学体系中, 质量 m 这个概念出现在两个完全截然不同的地方: Newton's second law of motion 指出, 物体所受的力 $F = ma$, 这里 a 为加速度, 由此可以定义出惯性质量 m_I 。而在万有引力公式中, Newton 又指出, 物体所受的引力与其质量大小成正比, 由此定义了引力质量 m_G 。两者的语境完全不同, 而实验可以证明在实验精度内 $m_I = m_G$ 精确成立。两种质量的严格相等, 通常被称为“弱”等效原理。³

m_I 与 m_G 的相等, 是物理性质的重合还是源于背后物理机理的等价性? 对此, Einstein 又作出了伟大的抉择: 他相信弱等效原理并非巧合, 而引力实际上等效于加速度。拥有相同质量的物体, 可以拥有完全不同的电量, 由此在电场中受到不同的电磁力作用。然而拥有相同惯性质量 m_I 的物体, 一定拥有相同的引力质量 m_G , 这也就暗示了引力作用从本质上和其他相互作用的区别。在狭义相对论的语境中, 物理学家无法通过任何局部开展的实验了解自己所处的船舱是否处于均匀运动状态。而弱等效原理中, 物理学家无法通过实验分辨船舱是在加速 (由 m_I 确定, 服从 Newton's second law of motion) 还是受到了引力作用 (由 m_G 确定, 服从引力作用)。既然加速度和引力等价, 那么处于自由下落状态的实验室, 所开展的所有局域 (local) 实验结果, 都将完全一样, 这一点与实验室的速度、所处的位置都不相关。这一等价性, 被称为“强”等效原理。[7]

¹注意, 在非 Euclidean 几何中, 指标的上下具有特定的含义, 上指标如 x^α 对应于矢量, 而下指标如 \vec{x}_α 对应于所谓 (1-形式) one-form, 有时候也称对偶矢量。感兴趣的读者请自行参阅广义相对论方面的参考资料, 在本书中恕不详细展开。

²扩展阅读: [5] 等著作中关于 Mach's principle 和 Isaac Newton's rotating bucket argument (also known as Newton's bucket) 的讨论。

³需要注意, 弱等效原理的表述方式有很多, 但是几种表述互相之间均等效。

根据强等效原理, 所有在局域展开的物理实验, 只要转换到自由落体状态的参考系下看, 都是一致的。换言之, 可以将自由落体参考系下的结果, 通过合理的坐标变换, 得到有引力时的表达式。最重要的, 就是度规的转换。在自由落体状态时候, 局部 Lorentz 坐标系 ξ^μ 遵从 Minkowski 度规 $\eta_{\mu\nu}$ 。假设一般的坐标系 x^α 与局部 Lorentz 坐标系之间符合转换关系 $\xi^\mu = f^\mu(x^\alpha)$, 则有 $d\xi^\mu = (\partial_\alpha f^\mu) dx^\alpha$ 。可以得到

$$ds^2 = (\eta_{\mu\nu} \partial_\alpha f^\mu \partial_\beta f^\nu) dx^\alpha dx^\beta \quad (1.20)$$

与公式 1.16 比较, 可以得到, $g_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha f^\mu \partial_\beta f^\nu$

材料 1.6 Raising and Lowering of index

指标的上下标具有不同的含义。对于一维的张量而言, 指标在上时是**矢量**, 其坐标转换关系满足逆变 (contravariant); 指标在下时是**对偶矢量** (或 1-形式), 其坐标转换关系满足协变 (covariant)。指标可以通过度规 $g_{\mu\nu}$ 进行升降。首先可以定义逆变张量 $g^{\mu\nu}$

$$g^{\alpha\mu} g_{\mu\beta} = \delta^\alpha_\beta \quad (1.21)$$

其中 δ^α_β 是 Kronecker delta 张量, 数值上与公式 1.14 一致。利用度规, 可以实现指标的升降:

$$A^\alpha = g^{\alpha\beta} A_\beta \quad (1.22)$$

类似地, 有

$$A_\beta = g_{\beta\alpha} A^\alpha. \quad (1.23)$$

1.2.3 协变导数

Minkowski 度规描述的是平直的 Euclidean 几何。在广义相对论的框架下, 要描述动力学, 就需要运用弯曲的时空对应的数学语言, 或者是非 Euclidean 几何 (non-Euclidean geometry)

材料 1.7 Parallel postulate

Euclidean 几何的五大公设中, 第五公设为:

若两条直线都与第三条直线相交, 并且在同一边的内角之和小于两个直角, 则这两条直线在这一边必定相交。。

这一定义相较其他公设更为冗长, 并不是那么显然。晚近的研究表明, 将第五公设去除后, 也可以构成自洽的几何体系, 即所谓非 Euclidean 几何。根据曲率的不

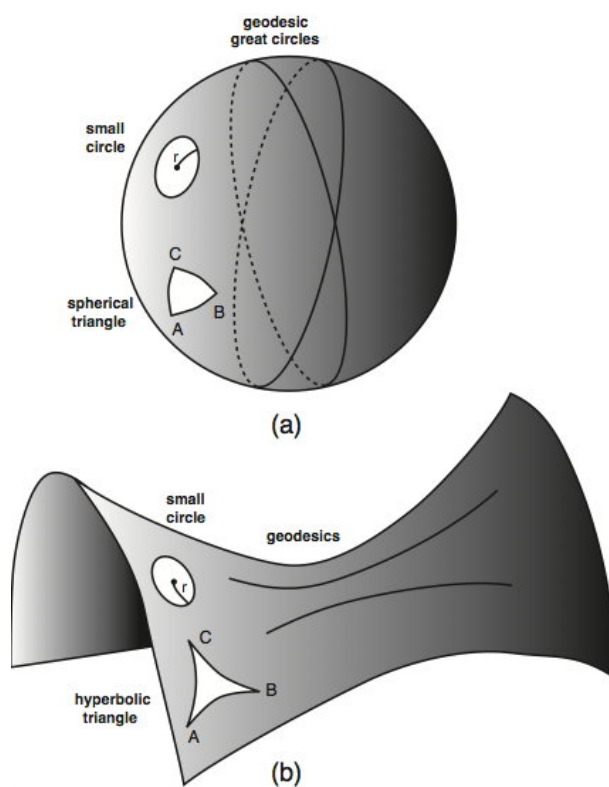


图 1-2 两个非 Euclidean 几何的例子

Figure 1-2 two examples of non-Euclidean geometry. Credit:

<https://blogs.futura-sciences.com/e-luminet/2017/09/22/non-euclidean-geometries/>

同，可以将其分为椭圆几何（又称 Riemannian 几何，任意两条直线一定相交；三角形内角和大于 180° ）和双曲几何（又称 Lobachevskian 几何，至少可以引出两条平行线；三角形内角和小于 180° ）。

对于函数 $\vec{A}(x)$ 的导数，我们通常定义为 $\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\vec{A}(x+dx) - \vec{A}(x)}{dx}$ 。然而在非 Euclidean 几何中，需要重新审视一些在 Euclidean 几何里习以为常的概念：比如，矢量的分量必须依赖局部的坐标系。如此一来， $\vec{A}(x+dx) - \vec{A}(x)$ 的具体取值，就很值得玩味：如何对不在同一个位置处的两个矢量进行比较？

在 Euclidean 几何中这并不是一个问题，因为可以简单的平移矢量 $\vec{A}(x)$ 至 $x+dx$ 处，然后与 $\vec{A}(x+dx)$ 比较。然而，在非 Euclidean 几何中，矢量的平移这个概念也需要被仔细检阅。具体来说，平移后的矢量，不仅取决于矢量的指向，也取决于平移的路径。

例 1.8 让我们想象一个生活在地球仪表面的二维生物（不妨假设这是一个没有厚度的蚂蚁，它只能沿着地球仪表面运动），假设这只蚂蚁从地球仪上的 $(0^\circ, 0^\circ)$ 出发（也就是本初子午线和赤道的交点），决心一路向北。

在任意时刻，它的前进方向都是一个矢量，在起点处，这个方向指向正北。随着它的运动，这个矢量被不断的平移（注意，在这个二维球面空间里，矢量也只能在地球仪表面上定义）。当它到达北极点时，这个平移后的矢量就称为指向东西经 180° 线。在我们的三维世界里去看的话，会发现，两个矢量的方向其实是垂直的（再继续走 $1/4$ 圈的话就变成了指向南极方向，与原方向相反了）。

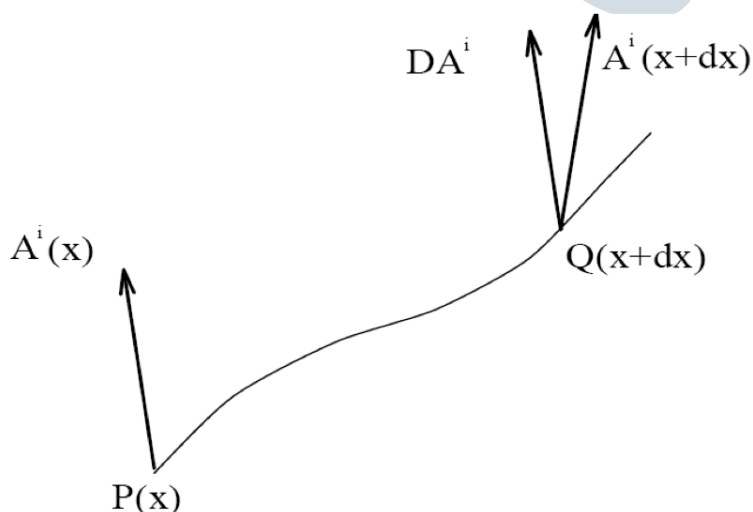


图 1-3 非 Euclidean 几何中矢量协变导数的图示

Figure 1-3 demonstration of covariant derivative of vectors in non-Euclidean geometry. Credit: Martin Hendry

如图1-3所示，在 P 点处（坐标为 x^β ）有一矢量 $\vec{A}(x)$ ，其坐标分量为 A^α ，经过 $P \rightarrow Q$ 的路径到达 Q 点（坐标为 $x^\alpha + dx^\alpha$ ），这时，如果保持原来的坐标分量不变，则分量依然是 A^α 。与 Euclidean 几何不同，由于不同点处坐标基底也发生了改变，因此在 $x + dx$ 处的 A^α 并不一定与 $\vec{A}(x)$ 平行，真正平行的矢量为 $\vec{D}A(x + dx)$ ，其坐标分量为 DA^α

$$DA^\alpha(x + dx) = A^\alpha(x) + \delta A^\alpha(x) \quad (1.24)$$

由坐标基底 \vec{e} 发生变化而引起的 δA^α

$$\delta A^\alpha(x) = -\Gamma_{\mu\beta}^\alpha A^\mu dx^\beta \quad (1.25)$$

其中, $\Gamma_{\mu\beta}^\alpha$ 是 Christoffel 符号, 通过它, 可以得到不同位置处坐标基底之间的转换关系

$$\frac{\partial \vec{e}_\mu}{\partial x^\beta} = \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \vec{e}_\alpha \quad (1.26)$$

再次强调: 我们在1.2.1节中提到过, 在坐标基底发生变化时, 张量的具体分量会变化, 但是张量本身不会变。当我们定义了矢量的平移以后, 我们终于可以合理地定义矢量的 (不随坐标基底变化的) 导数了: 可以在 Q 点 $x + dx$ 处, 将 $\vec{A}(x + dx)$ 与从 P 点平移而来的 $\vec{D}A(x + dx)$ 进行比较。这样定义出来的导数, 我们称之为协变导数 (covariant derivative) $A^\alpha_{;\beta}$ (见图1-3)。

$$A^\alpha_{;\beta} \equiv \lim_{dx^\beta \rightarrow 0} \frac{\vec{A}^\alpha(x^\beta + dx^\beta) - \vec{D}A^\alpha(x^\beta + dx^\beta)}{dx^\beta} = A^\alpha_{,\beta} + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha A^\mu \quad (1.27)$$

其中, $A^\alpha_{,\beta}$ 是普通的偏导 $\partial A^\alpha / \partial x^\beta$ 。

通过度量张量 $g_{\mu\nu}$ 的协变导数为 0, 并通过交换指标、求和, 可以得到

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \right), \quad (1.28)$$

这里可以看出, 不同局部之间的联系, 完全由局部的度规决定。

1.2.4 测地线 (geodesics)

我们关心一个粒子的世界线¹, 每一个原时 (proper time) τ 的取值都可以对应一个坐标点 x^α , 同时有 $d\tau = \sqrt{-ds^2}/c$ 。可以定义, 在 x^α 处, 粒子运动的速度 (切矢) 为

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}, \quad (1.29)$$

不难得到

$$g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = c^2 \quad (1.30)$$

Newtonian 力学描述物体在惯性系中沿直线运动。然而, 在弯曲时空中, 直线的概念消失了; 而和直线概念最为接近的, 就是测地线。我们考虑一条曲线, 它的每一个点上的切矢都与前一个点上的切矢平行, 这样的操作可以唯一定义一条曲线, 这样的曲线叫做测地线。根据定义, 则有

$$u^\alpha u^\beta_{;\alpha} = 0 \quad (1.31)$$

代入速度定义式1.29和协变导数公式1.27, 可以得到

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad (1.32)$$

¹世界线是三位空间中“轨迹”概念的延生和对应。

这样一条测地线描述了在广义相对论框架下，Newton's first law of motion 的对应：不受外力作用的物体，沿测地线运动。需要特别说明的是，在推导过程中，我们默认了类时的测地线，这样，每一个点对应一个原时 τ 。然而，对于类光的测地线（即，测地线上每一点的原时 τ 都相同），将 τ 替换成仿射参量（affine parameter） λ 以后，公式 1.31 依然成立。特别的，这样的测地线称为**零测地线**（null geodesics）。

1.3 广义相对论 (General Relativity) 初步

1.3.1 曲率张量

我们之前说过，在非 Euclidean 几何中，三角形内角和不等于 180° ，但显然三角形需要三个顶点，并不一定能在某个足够小的局域定义。能不能通过对某个点的时空性质观察，局域地确定时空是否弯曲？答案是肯定的，借助的工具就是 Riemann 张量。

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \Gamma^\alpha_{\mu\gamma} \Gamma^\mu_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\mu\delta} \Gamma^\mu_{\beta\gamma} \quad (1.33)$$

各类对称性可以消除独立分量的数目，在四维时空中，Riemann 张量一共有 20 个独立分量。

在 Riemann 张量基础上，还可以定义两个重要的张量：Ricci 张量

$$R_{\alpha\beta} \equiv R^\mu_{\alpha\mu\beta} \quad (1.34)$$

和 Einstein 张量

$$G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R. \quad (1.35)$$

其中 $R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$ 。

1.3.2 Einstein 场方程

可以证明¹,

$$G^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0. \quad (1.36)$$

上述等式有时被称为缩并 Bianchi 恒等式。

在 Newtonian 引力中，

$$\nabla^2 \left(-\frac{Gm}{r} \right) = 4\pi G\rho \quad (1.37)$$

¹可以通过 Bianchi 恒等式证明，具体过程请参阅各参考书。

等式的左边描述引力势 (通常由 Φ 表示), 等式的右边描述的是质量分布。在广义相对论下, 虽然对引力的描述改变了, 但 Newton 对于引力的描述仍然应该近似成立。Einstein 认为引力是时空弯曲的表现, 所以上述等式中的左边可以对应于 $G_{\alpha\beta}$, 而质量分布在相对论中的对应是所谓能量-动量张量 $T_{\alpha\beta}$ ¹。 $T^{\alpha\beta}$ 是 α 方向的动量流穿越等 x^β 线的分量。

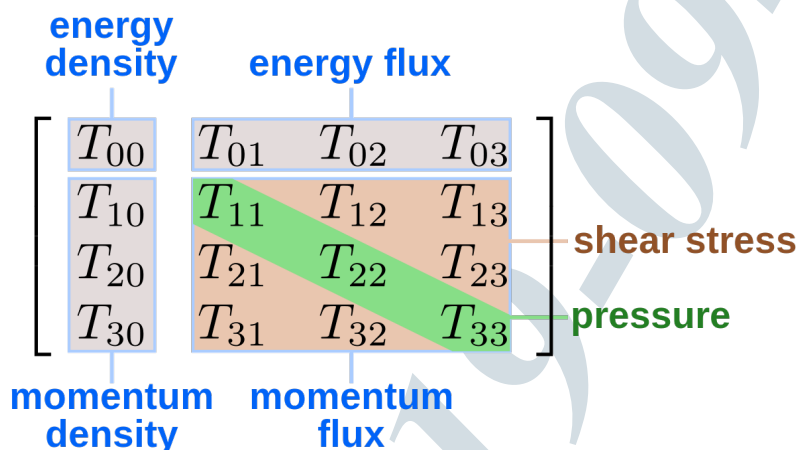


图 1-4 能量-动量张量的协变分量

Figure 1-4 Covariant components of the energy-momentum tensor Credit:

<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:StressEnergyTensor.svg>

对于理想流体而言, T^{00} 是能量密度, T^{ii} 是压强, 其他分量皆为零。由连续性要求可以得到

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0. \quad (1.38)$$

面对公式 1.36 和公式 1.41, Einstein 猜测其解的形式为

$$G^{\alpha\beta} = kT^{\alpha\beta} \quad (1.39)$$

通过在弱场情形下与 Newtonian 引力的比较, 可以确定常数 k 的取值,

$$G^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\alpha\beta} \quad (1.40)$$

这就是广义相对论中描述时空与质量分布关系的公式为 Einstein 场方程。



注 1.9. 注意到, 在广义相对论相关的公式中, 通常会出现常数 G 和 c 及其相应的次数。在一些文献中, 会设定自然单位制, 即将一些常数设置为无量纲数 1。具体到引力研究

¹有时候称为应力-能量张量, 也称应力-能量-动量张量、能量-应力张量

中，常会设置 $c = G = 1$ ，这又被称为几何单位制。在本讲义中，为帮助物理量相应量级与量纲的计算和校验，我们不采用几何单位制。但部分公式推导中几何单位制更为方便，请同学们自行甄别。

Exercise 1.1

试证，空间部分采用球坐标系时，坐标基底采取 $\{t, r, \theta, \phi\}$ ，利用 $g_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha f^\mu \partial_\beta f^\nu$ ，Minkowski 时空的度规可以写成

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

或者等价地， $ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$

2

引力波方程

2.1 广义相对论的 Newtonian 极限

根据 Wheeler 的描述, “the matter tells spacetime how to curve, and the spacetime tells matter how to move”, 可以看到, Einstein 场方程是高度耦合在一起的, 我们说这样的系统是高度非线性的, 因此它的求解是非常困难的一件事情。然而, 我们可以通过在一些特殊情形下对其进行分析, 进而得到一些有意义的结论。一个比较有用的特殊情形, 就是弱场近似 (weak-field approximation), 这样可以将场方程线性化, 因此这也被称为线性化引力近似 (linearized gravity approximation)。如果加上低速限制条件, 我们就可以得到广义相对论的 Newtonian 极限。

2.1.1 线性化引力 (linearized gravity)

让我们考虑如下情形: 在原本平直的时空背景上, 出现了一个小小的扰动, 那么时空度规便偏离了原本的 Minkowski 度规 $\eta_{\alpha\beta}$

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \quad (2.1)$$

当然, 这样的扰动并不大 ($h \ll 1$), 我们可以在指标升降 (见材料 1.6) 时, 近似使用 Minkowski 度规 $\eta_{\alpha\beta}$ 而不是真实的度规 $g_{\alpha\beta}$ 。¹

由此可以计算在弱场近似下的 Riemann 张量

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 h_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha \partial x^\delta} + \frac{\partial^2 h_{\alpha\delta}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} - \frac{\partial^2 h_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta \partial x^\delta} \right) + O(h^2) \quad (2.2)$$

¹注, 计算度规的逆变分量时除外, 见 [1]2.127 式

其中, $h = h_\mu^\mu$ 是 h_μ^ν 的迹 (trace)

由此, 线性化的 Ricci 张量可以写为

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\mu\beta}^\mu = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2 h}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \frac{\partial^2 h_\beta^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 h_\alpha^\mu}{\partial x^\mu \partial x^\beta} - \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 h_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right) + O(h^2) \quad (2.3)$$

通过变量代换, 使用 trace-reversed perturbation $\bar{h}_{\alpha\beta}$

$$\bar{h}_{\alpha\beta} \equiv h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} h \quad (2.4)$$

在线性化近似下, 可以得到形式相对简化的 Einstein 张量

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \bar{h}_\beta^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 \bar{h}_\alpha^\mu}{\partial x^\mu \partial x^\beta} - \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \bar{h}_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \bar{h}^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right) + O(h^2) \quad (2.5)$$

由此, 可以将线性化的 Einstein 场方程化为

$$-\eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \bar{h}_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \bar{h}^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 \bar{h}_\beta^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 \bar{h}_\alpha^\mu}{\partial x^\mu \partial x^\beta} + O(h^2) = \frac{16\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} \quad (2.6)$$

值得注意的是, 等式的第一项可以写为 $-\square \bar{h}_{\alpha\beta}$, 其中 \square 符号为 d'Alembertian 算符, 也就是在平直时空中的波算符。

但是, 这个等式依然过于冗长。但实际上, 广义相对论是包含一定冗余的自由度的, 可以通过选取合理的规范, 使得公式 2.6 更简洁。通常, 可以选取所谓 Lorenz 规范¹, 即

$$\bar{h}^{\mu\nu}_{,\nu} = 0 \quad (2.7)$$

在这样的形式下, 公式 2.6 中, 等式左边的后三项均变为零。我们也就得到了 Lorenz 规范下的 Einstein 场方程

$$-\square \bar{h}_{\alpha\beta} = \frac{16\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} \quad (2.8)$$

材料 2.1 Gauge transformations

考虑基于“矢量” ξ^α 的如下形式的坐标变换:

$$x^{\alpha'} = x^\alpha + \xi^\alpha(x^\beta) \quad (2.9)$$

使得公式 2.1 的条件依然成立。当 $|\xi^\alpha_{,\beta}| \ll 1$ 时, 通过定义 $\xi_\alpha \equiv \eta_{\alpha\beta} \xi^\beta$, 可以得到

$$h_{\alpha\beta} \rightarrow h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} \quad (2.10)$$

¹注意, 很多书本中错误地写作 Lorentz 规范, 其实 Lorenz 和 Lorentz 是 2 位科学家

通过合理选取“矢量” ξ^α ，可以在不改变公式物理本质的前提下，简化数学表达式。这就是所谓的规范变换。

2.1.2 Newtonian 极限

在低速 ($v \ll c$) 情形下, Newtonian 力学可以看做是狭义相对论的极限情形。类似地, 在弱场 ($h \ll 1$)、低速 ($v \ll c$) 条件下, Newtonian 引力也应该可以看做是广义相对论的极限情形。这一节里, 我们将展示这一点。

在 Newtonian 极限下, 我们可以得到如下条件

$$\begin{aligned} T_{00}/c^4 &= \rho & (\text{mass energy density}) \\ |T_{0i}|/c^3 &\approx \rho(v/c) \ll T_{00}/c^4 & (\text{slow motion } v \ll c) \\ |T_{ij}|/c^2 &\approx p/c^2 \ll \rho(v/c)^2 \ll T_{00}/c^4 & (\text{small internal stresses}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

在低速情形下, $\partial/\partial t \approx v\partial/\partial x$ 是小量, 由此 d'Alembertian 算符可以近似为空间 Laplac 算符 $\square \rightarrow \nabla^2$ 。因此, 在 Newtonian 极限下, 场方程退化为

$$\begin{aligned} \nabla^2 \bar{h}_{00} &= -16\pi G\rho \\ \nabla^2 \bar{h}_{0i} &= 0 \\ \nabla^2 \bar{h}_{ij} &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

这个方程组可以得到平凡解 $\bar{h}_{0i} = 0$ 和 $\bar{h}_{ij} = 0$ 。对应公式 1.37, 可以发现非平凡解 $\bar{h}_{00} = 2h_{00} = -4\Phi$ 。

更进一步, 可以得到

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -c^2 - 2\Phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 2\Phi/c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 2\Phi/c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - 2\Phi/c^2 \end{pmatrix} + O(\Phi^2/c^4) \quad (2.13)$$

2.2 引力波

2.2.1 引力波的传播

从公式 2.8 中可以看到, 在 Lorenz 规范下, 由平直时空背景上的线性微扰引起的运动方程是波动方程, 其中能量-动量张量是源项。在真空中, 度规微扰的解就变成了波,

这就是引力波。具体来说，该方程的解具有如下形式：

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta} \exp(ik_\mu x^\mu) \quad (2.14)$$

注意，其中 k_μ 是 1-形式的 (实) 常数分量，而 $A^{\alpha\beta}$ 是某个张量的常数成分。

不难证明， k_α 是一个零 (null) 1-形式，换句话说，矢量 k_μ 是零矢量 (类光的)，它与光子的世界线相切。更进一步的，可以证明引力波的传播速度即光速，传播过程中不包含色散。

不难发现，这个解是平面波，也就是说，在满足

$$k_\mu x^\mu = k_0 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \text{const.} \quad (2.15)$$

的超曲面上， $\bar{h}^{\alpha\beta}$ 是一个常数。这其中， $\mathbf{k} = k^i$ 。方便起见，可以定义 $k^0 = \omega$ ，这样，矢量 \vec{k} 的四维分量可以写成 (ω, \mathbf{k}) 。

材料 2.2 Plane Wave

在物理学领域，经常采用类似 $A^{\alpha\beta} \exp(ik_\mu x^\mu)$ 形式的平面波解，这其中， $A^{\alpha\beta}$ 可以是复的，而我们通常仅选取解的实部。

当然，现实情况中我们感兴趣的波很可能更为复杂，而不是单频的平面波。然而，根据 Fourier 定理，可以证明，任何满足波动方程 (公式 2.8) 和 Lorenz 规范 (公式 2.7) 的解，都可以看作是平面波解的叠加。因此，本章中引力波部分的讨论均基于平面波。

在推导公式 2.8 的过程中，用到了规范条件 $\bar{h}^{\alpha\beta}_{,\beta} = 0$ 。同时注意，通过对波动解公式 2.14 求偏导，有 $\bar{h}^{\alpha\beta}_{,\mu} = ik_\mu \bar{h}^{\alpha\beta}$ 。将上述两者结合，可以发现

$$A^{\alpha\beta} k_\alpha = 0 \quad (2.16)$$

这给了 $A^{\alpha\beta}$ 限制条件，它必须与 \vec{k} 正交。这说明引力波的传播方向与其作用方向垂直，因此，引力波是横波。

2.2.2 横向无迹规范 (transverse-traceless gauge)

可以注意到，Lorenz 规范并不能唯一地选取某个特定的坐标。实际上，通过引入额外的满足 $\square \xi_\alpha = 0$ 条件的 ξ_α ，公式 2.14 将依然成立。我们总可以选取 ξ_α ，使得 $h = h^\mu_\mu = 0$ ，以及 $h_{0i}(x) = 0$ 。对照公式 2.4，可以意识到，迹 $h = 0$ 意味着 $\bar{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}$ 。这样，Lorenz 规范下 $\mu = 0$ 的分量可以写成

$$\partial^0 h_{00} + \partial^i h_{0i} = 0 \quad (2.17)$$

又由于选取了 $h_{0i}(x) = 0$ ，可以得到 $\partial^0 h_{00} = 0$ 。 h_{00} 就变成了不随时间变化的常数项。回顾2.1.2节，我们知道 h_{00} 代表了引力势 Φ ，而静态的引力势具体取值的选取是不重要的，对于依赖时间的引力波而言，我们完全可选取 $h_{00} = 0$ 。

总结起来，我们有如下条件

$$h^{0\mu} = 0, \quad h^i_i = 0, \quad \partial^j h_{ij} = 0 \quad (2.18)$$

这就是在引力波研究中经常采用的横向无迹规范 (transverse-traceless gauge, TT gauge)。注意到，由于 $h_{\mu\nu}$ 对称，整个 4×4 的度规张量一共只有 10 个自由度。在采用 Lorenz 规范后，又消减了 4 个自由度，剩下 6 个自由度。通过选定 $\square \xi_\alpha = 0$ 条件的 ξ_α ，进一步消减，只剩下 2 个自由度。这两个自由度，就对应了引力波的两个极化 (polarisation, 或称偏振)。

从简化表达式的角度考虑，不妨将坐标基矢 e_3 方向选为平面波的波矢 \mathbf{k}_μ 方向。由于引力波是横波 $A^{\alpha\beta} k_\alpha = 0$ ，这样一来，可以得到 $A^{3\beta} = 0$ ，又由于对称性，可以得到 $A^{\beta 3} = 0$ 。这样，引力波振幅张量 $A_{\alpha\beta}$ 中所有非零的量只剩下 A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} ,

由于无迹要求导致了 $A_{11} + A_{22} = 0$ ，又由于对称性要求 $A_{12} = A_{21}$ ，因此通常可以将 TT gauge 下的引力波张量表达为

$$h_{\mu\nu}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{12} & -A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos[\omega(t - z/c)] \quad (2.19)$$

我们这里定义 $h_+ = A_{11} \cos[\omega(t - z/c)]$ ，以及 $h_\times = A_{12} \cos[\omega(t - z/c)]$ ，我们在之后会解释这样命名的原因。这样，可以将引力波张量表示简化为

$$h_{\mu\nu}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

2.2.3 引力波的效果

由于广义相对论说任何局域坐标系在自由落体状态下都可以由 Minkowski 度规描述，因此，作用在一个点上时，引力波的效果无法被探测到。考虑一个检验粒子，遵从测地线方程 (公式1.32)，故此，其加速度为

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = -\Gamma_{00}^\alpha = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} (h_{\beta 0,0} + h_{0\beta,0} - h_{00,\beta}) \quad (2.21)$$

不难发现，粒子的加速度为零，因此，对于单个粒子而言，引力波没有可观测效应。

接下来，我们考虑有两个检验粒子，假设他们在 x^1 方向上间隔 ε ，我们可以看到，引力波会对两个粒子间的距离产生变化。两个粒子之间的固有距离是

$$\begin{aligned}\Delta l &= \int (|ds|^2)^{1/2} = \int (|g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta|)^{1/2} \\ &= \int_0^\varepsilon (|g_{11} dx^1 dx^1|)^{1/2} \\ &\approx \varepsilon |g_{11}(x^1 = 0)|^{1/2} \\ &\approx \varepsilon [1 + \frac{1}{2} h_+(x^1 = 0)]\end{aligned}\quad (2.22)$$

也就是说，引力波会改变两个粒子间的固有距离。

下面我们来看具体的演化。假设两个粒子间以矢量 $\xi = \xi(\sin\theta \cos\phi \mathbf{e}_1 + \sin\theta \sin\phi \mathbf{e}_2 + \cos\theta \mathbf{e}_3)$ 间隔，且以 4-速度 u^α 运动。如果两个粒子的空间间隔远小于引力波的特征波长，就可以得到两个粒子间隔的演化，具体来说由测地线偏离 (geodesic deviation) 公式给出

$$\frac{D^2 \xi^\alpha}{ds^2} = -R^\alpha_{\beta\gamma\delta} u^\beta \xi^\gamma u^\delta \quad (2.23)$$

这其中， D/ds 是沿 u^α 方向的协变微分，而 $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ 是 Riemann 张量。在低速情形下，方程可以简化为：

$$\frac{d^2 \xi^j}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial h_{TT}^{jk}}{\partial t^2} \xi_k \quad (2.24)$$

考虑引力波 h_{TT}^{jk} 很小的前提下，可以直接积分，得到

$$\xi^j = \xi^j(0) + \frac{1}{2} h_{TT}^{jk}(t - R/c) \xi_k(0) \quad (2.25)$$

可以看到，两个粒子间的间距，同时依赖于引力波 h_{TT}^{jk} 和初始间距 $\xi^k(0)$ 。

将粒子间隔 ξ 代入，可以得到：

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x^1}{dt^2} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_+ \xi \sin\theta \cos\phi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_\times \xi \sin\theta \sin\phi \\ \frac{d^2 x^2}{dt^2} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_+ \xi \sin\theta \sin\phi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_\times \xi \sin\theta \cos\phi \\ \frac{d^2 x^3}{dt^2} &= 0\end{aligned}\quad (2.26)$$

注意到，两个粒子的距离在 z 轴上的分量保持不变，这是因为引力波是横波，而我们选用的 TT 规范中，引力波的传播方向为 z 轴方向。因此，在引力波传播方向上 (z 轴)，引力波不会产生作用。

例 2.3 可以通过进一步简化，得出更直观的理解。设两个粒子的连线与引力波波矢垂直，也就是说 $\theta = 0$ ，我们可以简化得到 $\xi = \xi(\cos\phi \mathbf{e}_1 + \sin\phi \mathbf{e}_2 + 0 \mathbf{e}_3)$ 。这种情况下，不妨

考虑两个特例：如果 $\frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{\times} = 0$ 且 $\frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{+} > 0$ ，可以得到

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x^1}{dt^2} &\propto x^1 \\ \frac{d^2 x^2}{dt^2} &\propto -x^2\end{aligned}\quad (2.27)$$

反之，如果 $\frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{+} = 0$ 且 $\frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{\times} > 0$ ，可以得到

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x^1}{dt^2} &\propto x^2 \\ \frac{d^2 x^2}{dt^2} &\propto -x^1\end{aligned}\quad (2.28)$$

对于单位矢量 $\mathbf{e}_{\xi} = \boldsymbol{\xi}/\xi$ 而言，其受到的加速度 a_{ξ} 是

$$\begin{aligned}a_{\xi} &= \mathbf{e}_{\xi}^i \cdot \frac{d^2 x_j}{dt^2} = \frac{1}{\xi} R_{0i0j} \xi^i \xi^j \\ &= \frac{d^2 x_1}{dt^2} \sin \theta \cos \phi + \frac{d^2 x_2}{dt^2} \sin \theta \sin \phi \\ &= \xi \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{+} \sin^2 \theta \cos 2\phi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{\times} \sin^2 \theta \sin 2\phi \right)\end{aligned}\quad (2.29)$$

两重积分后，就可以得到

$$\xi(t) = \xi(0) \left(1 + \frac{1}{2} h_{+} \sin^2 \theta \cos 2\phi + \frac{1}{2} h_{\times} \sin^2 \theta \sin 2\phi \right) \quad (2.30)$$

注 2.4. 注意， h_{+} 和 h_{\times} 之间的旋转关系依赖于两倍的方位角 2ϕ ，所以引力波是四极场。

如图2-1所示，在垂直于引力波传播方向的平面上，一圈自由放置的粒子将会由于引力波影响而变形。当 $h_{+} \neq 0$ 而 $h_{\times} = 0$ 时，这圈粒子的轨迹如同加号 + 般，故称 h_{+} 为“plus mode”(加模)；当 $h_{\times} \neq 0$ 而 $h_{+} = 0$ 时，这圈粒子的轨迹如同乘号 \times ，故称 h_{\times} 为“cross mode”(乘模)。

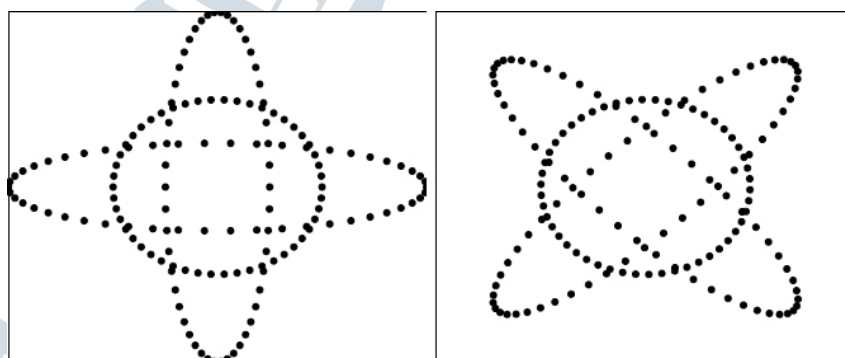


图 2-1 广义相对论下引力波的两偏振

Figure 2-1 Two polarisation modes under general relativity. Credit: [6]

Exercise 2.1

由于 h 与 \bar{h} 互相反迹，因此有 $h_{\alpha\beta} \equiv \bar{h}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\bar{h}$ 。试证明， $\bar{h}_{00} = 2h_{00}$

Exercise 2.2

在真空中，有 $-\square\bar{h}_{\alpha\beta} = 0$ ，考虑平面波解 $\bar{h}_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} \exp(ik_\mu x^\mu)$ 。试证明， k_μ 是一个零矢量 (null vector)，即， $\eta^{\mu\nu}k_\mu k_\nu = k^\mu k_\mu = 0$

Exercise 2.3

一圈粒子围成原型，在垂直于其平面方向上，有引力波作用。假设引力波为正弦函数 $h(t) = h_0 \sin t$ 。采用长波近似，即粒子间距相对于引力波波长可以忽略不计。请编写程序作图，画出：

- ▶ 设 $h_\times = 0$ ，当 $t = \pi/2$ 时，粒子的分布。
- ▶ 设 $h_\times = 0$ ，当 $t = -\pi/2$ 时，粒子的分布。
- ▶ 设 $h_+ = 0$ ，当 $t = \pi/2$ 时，粒子的分布。
- ▶ 设 $h_+ = 0$ ，当 $t = -\pi/2$ 时，粒子的分布。
- ▶ (加分题 1) 作 gif 图，展示出 $h_\times = 0$ 时加模的效应
- ▶ (加分题 2) 作 gif 图，展示出 $h_+ = 0$ 时乘模的效应

(交作业时请附上程序源代码，否则成绩无效。)

3

引力波源和波形

引力波数据处理的目标是更好地理解引力波源的性质，因此，在作引力波数据处理之前，对引力波源及引力理论下预言的引力波波形有足够的了解是十分必要的。在本章中，我们将对主要的引力波源及其对应的波形做介绍。

引力波可以由非轴对称的系统产生，这种系统可以产生随时间变化的质量四极矩。通常而言，双星系统可以产生较强的时变质量四极矩，而在宇宙中，双星系统又是较为容易出现的，因此我们可以看到，双星系统是一类主要的引力波源。如果按照质量大小来区分，可以分成：两个重的天体（大质量双黑洞3.1.2.2）、两个轻的天体（恒星级双黑洞3.1.2.1、中子星双星3.2、双白矮星3.4.2等）、一个重-一个轻的天体（极端质量比旋近3.3）组成的双星。除此以外，单个天体也能产生引力波信号（如变形的中子星3.4.1、超新星爆发3.5）；许多信号的叠加也能产生引力波信号（随机引力波背景3.6）。

3.1 双黑洞并合

通常预期双黑洞的并合过程并不会产生电磁波或高能粒子如中微子等。因此，引力波手段是针对双黑洞并合过程几乎唯一的探测手段。

这种描述双星并合过程的相对论性两体问题非常复杂，在本节中，主要讨论质量比接近1的双星系统。¹更进一步地，物质的存在会引起更进一步的复杂性，因此我们讨论更简化的问题，这种最简化的问题就是双黑洞并合的问题。

¹质量相差悬殊的双星系统的演化和引力波波形尤为复杂，因此将极端质量比旋近（EMRI）单独列出于3.3。

3.1.1 双黑洞并合的波形

双黑洞并合的整个过程可以分为三个阶段：inspiral（旋近），merger（并合）和 ringdown（铃宕），图3-1所示。在旋近阶段，可以对 Einstein 场方程进行 post-Newtonian 近似，得到所谓 post-Newtonian(PN) 波形。在并合阶段，必须利用数值相对论 (numerical relativity) 才能准确计算系统的演化和相应波形。在铃宕阶段，可以利用微扰法去计算 Kerr 黑洞辐射的准正则模 (quasi-normal mode, QNM)。

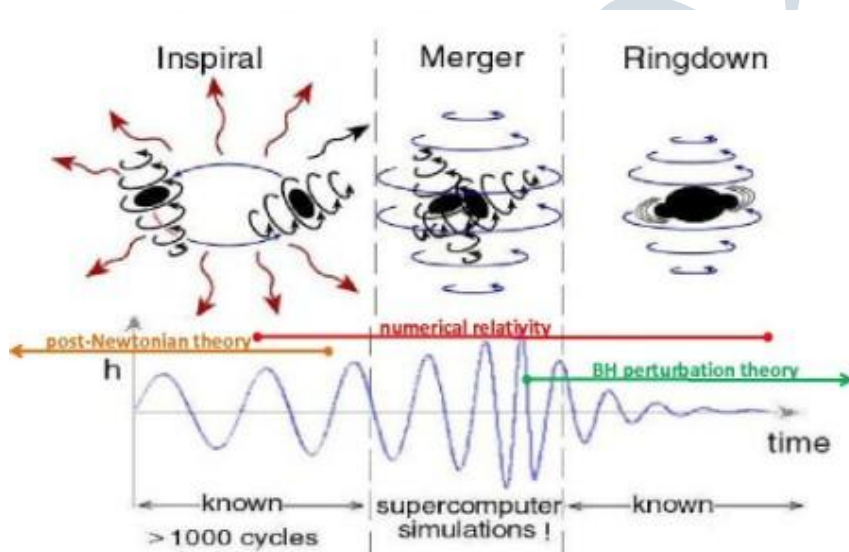


图 3-1 双黑洞并合过程的三个阶段：旋近、并合和铃宕

Figure 3-1 Three stages of binary black hole merger: inspiral, merger and ringdown. Credit: [2]

3.1.1.1 旋近与 Newtonian 近似

我们首先看旋近阶段。根据广义相对论公式，可以得到

$$h^{jk} = \frac{2G}{c^4 D} \frac{d^2}{dt^2} I^{jk} \quad (3.1)$$

其中 D 是双星离观测者的距离，而 I^{jk} 是描述质量分布的质量四极矩 (mass quadrupole moment)

$$\begin{aligned} I^{jk}(\tau) &= \int_M \frac{\tau^{00}(\tau, \mathbf{x}')}{c^2} x'^j x'^k d^3 x' \\ &= \int_M \rho^*(\tau, \mathbf{x}') x'^j x'^k d^3 x' + O(c^{-2}) \end{aligned} \quad (3.2)$$



注 3.1. 注意到其中我们采用 $\rho^* = \sqrt{-g} \rho u^0 / c$ 而非 ρ 。当然在一般情形下我们可以忽略两者的差别。

为严谨起见，我们指 I^{jk} 为四极矩张量，而指 I^{jk} 为 Newtonian 四极矩张量。这样，在最低阶近似下，引力波场可以写成

$$h_{TT}^{jk} = \frac{2G}{c^4 D} \frac{d^2}{d\tau^2} I_{TT}^{jk} \quad (3.3)$$

可以证明，

$$\begin{aligned} h_+ &= -\frac{4G\mu a^2 \Omega^2}{c^4 r} \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \iota) \cos 2\phi \\ h_\times &= -\frac{4G\mu a^2 \Omega^2}{c^4 r} \cos \iota \sin 2\phi \end{aligned} \quad (3.4)$$

其中， Ω 是轨道圆频率， r 是双星间距， $\mu = \frac{M_1 M_2}{M}$ 是约化质量，而 $M = M_1 + M_2$ 是总质量。对于一个引力波探测器，其记录到的引力波信号是两种极化的叠加

$$h(t) = F_+ h_+ + F_\times h_\times. \quad (3.5)$$

探测器具体的响应 $F_{+/\times}$ 表达式及其推导我们留待第4节再展开。不妨计时间域信号为 $h(t) = Q(\text{angles}) \frac{\mu M}{Dr(t)} \exp(i\Phi)$ 其中， $Q(\text{angles})$ 代表了探测器对不同角度、偏振、倾角源的响应强度，这部分我们之后再详细展开。

不妨考虑圆轨道下的双星系统¹ 在 Newtonian 引力下，可以得到

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}} \quad (3.6)$$


而旋近的速率可以由下式表示

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{r}{E} \frac{dE}{dt} = -\frac{64G^3}{5c^5} \frac{\mu M^2}{r^3} \quad (3.7)$$

对3.7式积分，可以得到

$$r = \left(\frac{256G^3}{5c^5} \mu M^2 \right)^{1/4} (t_c - t)^{1/4} \quad (3.8)$$

其中 t_c 是 $r \rightarrow 0$ 时对应的时刻，我们称之为并合时刻。

 **注 3.2.** 从形式上看，旋近阶段的 Newtonian 近似似乎可以描述一直到并合的整个过程，但是当双星系统靠得足够近时，广义相对论效应开始体现，Newtonian 及至 post Newtonian 描述都会失效。一个较为合适的分界线可以选取为最内稳定圆轨道 *innermost circular stable orbit, ISCO*。其对应的引力波频率是 $f_{\text{ISCO}} = \frac{c^3}{6^{3/2}\pi GM}$ 。关于 ISCO 的具体推导，可以参考 [4] 第 5.6 章。

¹ 由于轨道的圆化效应 circularization，在并合时的双星轨道偏心率几乎都为零。

结合式3.6式3.7，可以得到引力波频率的演化

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= \frac{df}{d\Omega} \frac{d\Omega}{dr} \frac{dr}{dt} \\ &= \frac{1}{\pi} \sqrt{GM} \left(-\frac{3}{2}\right) r^{-5/2} \left(-\frac{64G^5}{5c^4}\right) \frac{\mu M^2}{r^3} \\ &= \frac{64}{5} \frac{G^{7/2}}{c^5 \pi} \frac{\mu M^{5/2}}{r^{11/2}}\end{aligned}\quad (3.9)$$

注意，回顾注2.4，引力波频率 f 是双星轨道频率 f_{orb} 的两倍，即，有 $f = 2f_{orb}$ 。

更进一步地，继续将公式3.6代入，可以有，

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= \frac{64}{5} \frac{G^{7/2}}{c^5 \pi} \frac{\mu M^{5/2} \pi^{11/3} f^{11/3}}{G^{11/6} M^{11/6}} \\ &= \frac{96}{5} \frac{G^{5/3}}{c^5} \mu M^{2/3} \pi^{8/3} f^{11/3} \\ &= \frac{96}{5} \left(\frac{GM}{c^3}\right)^{5/3} \pi^{8/3} f^{11/3}\end{aligned}\quad (3.10)$$

在最后一行，我们定义了啁啾质量 **chirp mass** $\mathcal{M} = \mu^{3/5} M^{2/5}$ 。可以发现，随着时间的推移，双星系统将辐射引力波，这部分能量由引力势能提供，轨道缩减，进而双星频率增加。结合公式3.4，不难发现，引力波的振幅随着时间推移而增强。

我们可以定义引力波的相位 $\Phi(t) = \int 2\pi f(t) dt$ ，那么代入公式3.8和3.6后可以得到，

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \int dt 2\pi \frac{\Omega}{\pi} \\ &= \int dt 2\pi \frac{5^{3/8} c^{15/8}}{8\pi G^{5/8} \mu^{3/8} M^{1/4}} (t - t_c)^{-3/8} \\ &= \frac{5^{3/8} c^{15/8}}{4G^{5/8} \mu^{3/8} M^{1/4}} \frac{5}{8} (t - t_c)^{5/8} + \Phi_c \\ &= 2 \frac{c^{15/8}}{5^{5/8} G^{5/8} \mu^{3/8} M^{1/4}} (t - t_c)^{5/8} + \Phi_c \\ &= 2 \left[\frac{c^3}{5GM} (t - t_c) \right]^{5/8} + \Phi_c\end{aligned}\quad (3.11)$$

结合公式3.10与公式3.11，可以得到

$$t(f) = t_c - 5(8\pi f)^{5/6} f^{-7/6} \mathcal{M}^{-5/3}\quad (3.12)$$

及

$$\phi(f) = \phi_c - 2(8\pi \mathcal{M} f)^{-5/3}\quad (3.13)$$

引力波数据处理通常在频率域进行，因此，有必要研究双黑洞旋近过程的 Fourier 变换。我们定义引力波波形的 Fourier 变换为

$$\tilde{h}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp(2\pi i f t) h(t)\quad (3.14)$$

解析地对波形积分是较为困难地，但是，利用稳相近似 **stationary phase approximation** (SPA)，则可以得到近似的频率域波形。对于 $B(t) = A(t) \cos \phi(t)$ ，如果有 $d \ln(A)/dt \ll d\phi(t)/dt$ ，并且 $d^2\phi(t)/dt^2 \ll (d\phi(t)/dt)^2$ ，可以得到

$$\tilde{B}(f) \approx \frac{1}{2} A(t) \left(\frac{df}{dt} \right)^{-1/2} \exp\{i[\pi f t - \phi(f) - \pi/4]\}\quad (3.15)$$

对应到引力波波形中，引力波相位的变化远快于其振幅的变化，稳相近似适用，因此可以得到

$$\tilde{h}(f) = \frac{\sqrt{30\pi}}{24} \frac{Q}{D} \mathcal{M}^{5/6} f^{-7/6} \exp[i\Psi(f)] \quad (3.16)$$

对于正频率部分 $f > 0$ ，相位项 $\Psi(f)$ 为

$$\Psi(f) = 2\pi f t_c - \phi_c - \frac{\pi}{4} + \frac{3}{4} (8\pi \mathcal{M} f)^{-5/3} \quad (3.17)$$

材料 3.3 Stationary Phase Approximation

让我们看一下稳相近似的具体推导过程。将引力波信号分为振幅 A 和相位 Φ 两部分，即， $h(t) = A(t_{\text{ret}}) \cos \Phi(t_{\text{ret}})$ ，其中 $t_{\text{ret}} = t - \frac{r}{c}$ 是推迟时间。

$$\begin{aligned} \tilde{h}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt A(t_{\text{ret}}) \cos \Phi(t_{\text{ret}}) \exp(2\pi i f t) \\ &= \frac{1}{2} \exp(i 2\pi f r/c) \int_{-\infty}^{\infty} dt_{\text{ret}} A(t_{\text{ret}}) \left(\exp[i\Phi(t_{\text{ret}})] + \exp[-i\Phi(t_{\text{ret}})] \right) \exp(2\pi i f t_{\text{ret}}) \\ &\approx \frac{1}{2} \exp(i 2\pi f r/c) \int_{-\infty}^{\infty} dt A(t) \exp[2\pi i f t - \Phi(t)] \end{aligned} \quad (3.18)$$

在第三行，我们略去了快速震荡的小项。

我们假设在 t_s 时刻，有 $\dot{\Phi}(t_s(f)) = 2\pi f$ 成立，那么围绕 $t = t_s$ 对 $2\pi f t - \Phi(t)$ 作 Taylor 展开，就有

$$2\pi f t - \Phi(t) = 2\pi f t_s - \Phi(t_s) - \frac{1}{2} \ddot{\Phi}(t_s) (t - t_s)^2 + O(t - t_s)^3 \quad (3.19)$$

进而有

$$\tilde{h}(f) \approx \frac{1}{2} A(t_s(f)) e^{i 2\pi f r/c} e^{i(2\pi f t_s - \Phi(t_s))} \left(\frac{2}{\ddot{\Phi}(t_s(f))} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ix^2} \quad (3.20)$$

又因为

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ix^2} = \sqrt{\pi} e^{-i\pi/4} \quad (3.21)$$

最后化简为

$$\tilde{h}(f) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} A(t(f)) e^{-i\phi_0} e^{i\Psi(f)} \left(\frac{2}{\ddot{\Phi}(t_s(f))} \right)^{1/2} \quad (3.22)$$

而其中

$$\Psi(f) = 2\pi f t(f) - \Phi(t(f)) - \pi/4 \quad (3.23)$$

更进一步，可以得到 post Newtonian 修正的波形。这是在近场情形下，采取低速近似，在 Newtonian 情形上加以 Einstein 修正得到的结果。低速意味着 $v/c \ll 1$ 自然可以

选择对 v/c 作小量展开。通常, 选择以 $(v/c)^2$ 的阶数作为 post Newtonian 展开的阶数, 故此有 1.5PN, 2.5PN 等。具体的展开方式篇幅较长且与课程关系不紧密, 请有兴趣的同学参阅 [4] 的第 8-11 章。

3.1.1.2 EOB 波形

在 Newtonian 力学中, 双星系统的演化可以通过研究有心力场下约化质量 $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ 而得到, 本质上这是利用了系统的对称性, 消除冗余自由度实现的。在广义相对论下, 类似的对称性依然存在, Damour 和 Buonanno 等人由此发展了一套等效单体 (effective one body, EOB) 体系, 来描述双星系统的引力波波形。

EOB 方法的思路是, 寻找一个单体系统, 使得其 Hamiltonian 与两体系统的一致。自然, 在 Newtonian limit 下, 这一思路是可行的。经过一系列复杂的计算以后, 可以证明在 2PN 下, 双星的演化可以由一个约化质量 μ 在变形的 Schwarzschild 度规¹描述。并且, 可以证明, 这种从双星系统到等效单体问题的映射是严格的, 可以将其拓展到更高阶的 PN 项。

这对于引力波数据处理是十分重要的, 因为 PN 波形只能作为双星系统演化到并合之前的近似, 只能较为有效地近似描述旋近波形。反过来, EOB 方法对于双星系统的描述可以一直贯穿旋近、并合、铃宕的全过程。当然, EOB 方法中等效的 Schwarzschild 度规也同样有视界等概念, 在约化质量接近视界范围时, 描述系统演化的公式发生变化, 但是这种 EOB-双星系统的对应关系依然成立。现在, 通过将并合阶段与数值相对论波形、准正则模波形相比对、校准, 既可由 EOB 方法给出双星并合全过程的引力波波形。这种研究的意义在于, 目前数值相对论的计算极为耗时, 而通过校准后, EOB 方法可以以极快的速度产生相对准确的波形, 这为快速开展引力波数据处理提供了保障。

与 EOB 波形类似的还有 IMR 波形, 也是试图通过拟合方法快速产生旋近、并合、铃宕全过程波形。事实上, IMR 即得名于双星并合的三个阶段。但这一方法并无类似 EOB 这样的物理对应, 这里不作展开。

3.1.1.3 数值相对论波形

对广义相对论的求解, 很多时候没有办法找到解析解。而这时, 理论上来说最可靠的方法就是对场方程进行数值求解。然而, 这种利用数值方法求解广义相对论方程的思路在过去的半个世纪里艰难前行, 在本节中我们简单回顾数值相对论的过往。

我们在第 2.2.2 节中看到, 虽然度规张量 $g_{\mu\nu}$ 有 10 个分量, 但是其中的部分自由度

¹Schwarzschild 度规是球对称黑洞的广义相对论解。

是冗余的。通过寻找合适的坐标系，可以简化问题。较为常用的做法是，首先选取类时坐标 t ，然后确定剩余三个类空的坐标 x^i 。在这类对时空的所谓 $3+1$ 分解中，最常用的有 Arnowitt-Deser-Misner (ADM) 分解。¹

这样，Einstein 的 10 个场方程就可以被拆分成 6 个动力学方程和 4 个针对初始条件的限制方程。由于截断误差的存在，初始条件可能无法精确满足限制方程，而随着动力学系统的演化，这种差异可能被放大。近年来，数值相对论取得突破的一大要素，就是发展了一套新的场方程表达式，使得违背限制方程的项的生长速率得到控制。

对于引力波研究而言，仅仅研究动力学系统在广义相对论方程下的演化是不够的，还需要从系统中提取引力波波形。可以根据 Weyl 张量 $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ，定义出 Weyl 标量 $\Psi_4 = -k^\mu m^{*\nu} k^\rho m^{*\sigma} C_{\mu\nu\rho\sigma}$ 。在远场下， Ψ_4 就包含了引力波波形的完整描述。

3.1.2 BBH 天文学

早在 18 世纪，Laplace 就曾提出过“黑星”的概念，提出当星体引力场极大时，其逃逸速度将超过光速。但是在广义相对论理论下，黑洞的概念更进一步，Einstein 的理论会预言天体最终会塌缩到密度无穷大，体积无穷小的奇点。

恒星究其一生都在通过核聚变产生的辐射压和气体压强抵抗引力作用。在核球区的核燃料燃烧殆尽后，恒星的核聚变反应终将迎来终结，而恒星也不可避免的迎来引力塌缩的命运。根据残余物质质量的不同，恒星塌缩后分别可以形成白矮星、中子星和黑洞。

在 Advanced LIGO (aLIGO) 运作之前，人们对于双黑洞存在的观测证据是相对较弱的，因为黑洞本身难以产生可观测的效应。不过，在由黑洞和恒星形成的双星系统中，黑洞可以通过对伴星的吸积，产生可观测的 X 射线辐射。如天鹅座 X-1(Cygnus X-1) 就是如此被发现，并最终被证实是黑洞的。围绕着这个发现，Stephen Hawking 还曾和 Kip Thorne 打赌并输掉了赌局。(见图3-2)

3.1.2.1 恒星级

3.1.2.2 大质量

3.1.2.3 中等质量

¹感兴趣的读者可以参阅 [1] 的第 4.3.1 节。

Whereas Stephen Hawking has such a large investment in General Relativity and Black Holes and desires an insurance policy, and whereas Kip Thorne likes to live dangerously without an insurance policy,

Therefore be it resolved that Stephen Hawking bets 1 year's subscription to "Penthouse" as against Kip Thorne's wager of a 4-year subscription to "Private Eye", that Cygnus X-1 does not contain a black hole of mass above the Chandrasekhar limit.

Stephen Hawking *Kip S. Thorne*
Witnessed their dispute
day of December 1974.
Hofmann Amatzylens Werner J.

图 3-2 Hawking 与 Thorne 关于 Cyg X-1 的赌约

Figure 3-2 Bet over Cyg X-1 between Stephen Hawking and Kip Thorne. Credit:

<https://www.star.le.ac.uk/sav2/blackholes/xrays.htm>:<https://www.star.le.ac.uk/sav2/blackholes/xrays.html>

3.1.3 BBH 与基础物理

3.1.3.1 超越 GR

3.1.3.2 检验 Kerr 本质

3.1.3.3 与暗物质的联系

3.2 中子星双星并合

3.2.1 中子星

3.2.2 波形

3.2.3 中子星双星天文学

3.2.3.1 BNS

3.2.3.2 NS-BH

3.2.3.3 引力波宇宙学

3.3 EMRI

3.4 Continuous Wave

3.4.1 变形的中子星

3.4.2 双白矮星

3.5 Supernova

3.6 SGWB

3.7 其他波源

3.7.1 QNM

3.7.2 Cosmic String Susps

3.7.3 引力波暴

Exercise 3.1

考虑质量为 $10M_{\odot}$ - $10M_{\odot}$ 的双黑洞系统，请编写程序作图，给出：

- ▶ $t \in [t_c - 1\text{yr}, t_c]$ 时间内频率随时间变化的图。
- ▶ $t \in [t_c - 1\text{s}, t_c]$ 的时间域波形 (假设 $Q(\text{angles}) = 1$)。
- ▶ $t \in [t_c - 1\text{yr}, t_c]$ 的频率演化。
- ▶ $t \in [t_c - 1\text{yr}, t_c]$ 对应的频率域波形 (由于频率域波形为复数，请分别画出振幅与相位)。

胡一鸣 2019-09-17

4

引力波探测手段

4.1 棒状探测器

4.1.1 原理

4.1.2 噪声

4.1.3 灵敏度

4.2 地面激光干涉探测器

4.2.1 原理

4.2.2 波源和噪声

4.2.3 灵敏度

4.3 空间引力波探测

4.3.1 原理

4.3.2 波源和噪声

4.3.3 现状

4.4 脉冲星计时阵

4.4.1 原理

4.4.2 源、噪声和现状

4.5 宇宙微波背景辐射

4.5.1 原理

4.5.2 源、噪声和现状

4.6 其他探测方案

5

“穷人版”引力波数据处理示例

胡一鸣 2019-09-17

6

引力波信号探测

6.1 概率初步

6.1.1 随机变量

6.1.2 频率学派 v.s. Bayesian

6.1.2.1 最大熵原理

6.1.3 典型分布

6.1.3.1 Binomial

6.1.3.2 Poisson

6.1.3.3 Gaussian

6.1.4 随机过程

6.2 时序列分析

6.2.1 Fourier 变换

6.2.2 样本平均和相关函数

6.2.3 卷积

6.2.4 功率谱密度

6.2.5 周期图

6.3 信号探测的统计学原理

6.3.1 假设检验

6.3.1.1 频率学派方法

6.3.1.2 Bayesian 方法

6.3.1.3 Neyman-Pearson 方法

6.3.1.4 似然函数比检验

6.4 连续引力波探测

6.4.1 F-统计

6.4.1.1 振幅调制

6.4.1.2 Doppler 频移和相位调制

6.4.1.3 已知源搜索

6.4.1.4 未知源搜索

6.4.1.5 周期性检验

6.4.1.6 拟合度检验

6.4.2 误警率和探测概率

6.4.3 模板数

6.4.4 次优滤波

6.4.5 F-统计算法

6.5 啁啾信号探测

6.5.1 最佳探测统计

6.5.2 匹配滤波

6.5.2.1 外秉参数的消除

6.5.2.2 未知匹配参数

6.5.2.3 匹配滤波的统计学性质

6.5.2.4 时间未知的匹配滤波

6.5.2.5 匹配滤波模板库

6.5.3 时频分析

6.5.4 同时性

6.5.5 显著度分析

胡一鸣 2019-09-17

7

引力波信号测量

7.1 参数估计

7.1.1 测量精度

7.1.2 参数估计中的系统误差

7.1.3 置信区间

7.1.4 nuisance 参数

7.1.5 Fisher 信息矩阵

7.2 Markov 链蒙特卡洛

7.2.1 MetropolisHastings 算法

7.2.1.1 MH 算法的有效性

7.2.1.2 模拟淬火

7.2.1.3 平行回火

7.2.1.4 EMCEE

7.3 模型选择与 Occam 剃刀

7.3.1 模型选择

7.3.2 定量的 Occam 剃刀

7.3.3 Odds ratio

7.4 层级采样

7.4.1 问题描述

7.4.2 基本算法

7.4.3 随机采样

7.4.4 后验概率采点

7.4.5 模拟淬火

8

其他方法及复杂情形

8.1 随机引力波背景探测

8.1.1 单探测器信噪比

8.1.2 相关与似然函数

8.1.3 多数据情形

8.1.4 最大似然探测统计

8.1.5 Bayesian 相关分析

8.1.5.1 Bayesian 相关分析与频率派互相关方法比较

8.1.6 其他方法

8.2 无法建模信号的探测统计量

8.2.1 功率超出法

8.3 机器学习

8.4 非稳态、非 Gauss、非线性噪声下的探测

8.5 数据包含间隔的情形

8.6 效率提高

8.6.1 Reduced-order models

8.6.2 Kludge

9

引力波数据处理实例

胡一鸣 2019-09-17

A

常用物理量

物理含义	符号	数值	量纲	备注
光速	c	299,792,458	m/s	引力波速度亦为光速 c
引力常数	G	$6.67430(15) \times 10^{-11}$	$\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$	来自 CODATA 数据 ¹
太阳质量	m_{\odot}	1.98847×10^{30}	kg	

¹其中最新、误差最小的测量来自天琴中心主任罗俊院士所带领团队 [3]

胡一鸣 2019-09-17

参考文献

- [1] Jolien D. E. Creighton and Warren G. Anderson. *Gravitational-wave physics and astronomy. An introduction to theory, experiment and data analysis*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2011, pp. xiv + 375. ISBN: 978-3-527-40886-3/hbk.
- [2] Stephen W. Hawking, Werner Israel, and William G. Unruh. “300 Years of Gravitation”. 刊于: *Physics Today* 41.7 (1988), p. 69. ISSN: 00319228. DOI: [10.1063/1.2811500](https://doi.org/10.1063/1.2811500). URL: <http://link.aip.org/link/PHTOAD/v41/i7/p69/s1%5C&Agg=doi>.
- [3] Q. Li et al. “Measurements of the gravitational constant using two independent methods”. 刊于: *Nature* 560 (Aug. 2018), pp. 582–588. DOI: [10.1038/s41586-018-0431-5](https://doi.org/10.1038/s41586-018-0431-5).
- [4] E. Poisson and C.M. Will. *Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic*. Cambridge University Press, 2014. ISBN: 9781107032866. URL: <https://books.google.com.tw/books?id=PZ5cAwAAQBAJ>.
- [5] Wolfgang Rindler. 相对论精义——狭义、广义和宇宙学相对论. Trans. by 方励之 江山. 合肥: 安徽科学技术出版社, 1977.
- [6] B. S. Sathyaprakash and Bernard F. Schutz. “Physics, Astrophysics and Cosmology with Gravitational Waves”. 刊于: *Living Reviews in Relativity* 12.1 (Mar. 4, 2009), p. 2. ISSN: 1433-8351. DOI: [10.12942/lrr-2009-2](https://doi.org/10.12942/lrr-2009-2). URL: <https://doi.org/10.12942/lrr-2009-2>.
- [7] B. Schutz. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 2009. ISBN: 9781139479004.
- [8] 俞允强. 电动力学简明教程. 北京: 北京大学出版社, 1997.
- [9] 方励之. 普适性一例——伽利略相对性原理. 2012. URL: <http://fang-lizhi.hxwk.org/2012/01/02/>.