

《算法设计与分析》2018 期末考试真题

尹达恒

2020/12/21

东南大学考试卷 (A 卷)

课程名称 算法设计与分析 考试学期 2018-2019-2 得分
 适用专业 计算机 考试形式 开卷 考试时间长度 150 分钟
 (可 携 带 纸 质 教 材 、 课 件 、 讲 义 、 笔 记)

- 判断题 (共 10 分, 每小题 2 分)
 - 贪心算法是最优求解算法.....()
 - KMP 算法为长度为 m 的串计算 next 数组的复杂度为 $O(\log m)$()
 - 已知一个 NP 完全问题 A 和一个 NP 问题 B, 若 A 可多项式时间规约到 B 问题的一个实例, 则 B 也可多项式时间规约到 A 的一个实例.....()
 - 算法 A 的时间复杂度为 $T_A = O(n \log n)$, 则 $T_A = O(n^2)$ 也正确.....()
 - 动态规划算法可以多项式时间求解.....()
- 给定两个字符串 $A[1,2, \dots, m]$ 和 $B[1,2, \dots, n]$, 请设计方法求这两个字符串的最长公共子串。(共 10 分)
- 给定平面上 n 个坐标点 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, 请完成以下方法构建凸包。(共 10 分)
 - 如何将这 n 个点均分成两部分, 使得两部分坐标点数相差最多为 1 个? (4 分)
 - 如何合并两部分结果得到最终结果? (4 分)
 - 算法的时间代价主要包含哪些部分? 时间复杂度为多少? (2 分)
- 有 n 个小朋友, 每个小朋友手里拿着一张数字牌, 第 i 个小朋友的数字牌为 p_i , 每张牌 $p_i \leq B$ 。小朋友 i 和小朋友 j 能匹配当且仅当 $p_i + p_j \leq B$ 。请设计贪心策略匹配最多对小朋友, 分析是否可得最优解。(共 10 分)
- 给定 n 个整数 $a = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 以及一个整数 B 。要求在 n 个整数中找一子集, 使得这些子集中整数和刚好等于 B 。请设计动态规划算法求解该问题。(共 10 分)
 - 请写出伪多项式时间复杂度的动态规划迭代公式。(6 分)
 - 请特别讨论初始化条件。(4 分)
- 给定一无向图 $G = (V, E)$, 每条边 $e \in E$ 有一非负权值 $\omega(e)$, 每个顶点 $v \in V$ 有一非负权值 $\omega(v)$, 一条顶点 s 到顶点 t 的路径上所有顶点和边的权值和是这条路径的长度。请设计方法求顶点 s 到顶点 t 的最短路径长度。(共 10 分)
- 给定一个数组 $T[1,2, \dots, n]$, 存储了第 1 天到第 n 天的平均气温。假设气温变化没有规律。现要求为每一天 i 计算一个 $Warmer[i]$, 记录后续气温中第一个更高气温的日期。 $Warmer[i] = \min\{k | i \leq k \leq n, T[k] > T[i]\}$ 。如果不存在, 则设置 $Warmer[i] = n + 1$ 。例如下面是一个共 7 天的例子。(共 10 分)

$i =$	1	2	3	4	5	6	7
$T[i] =$	33	24	24	32	35	29	36
$Warmer[i] =$	5	4	4	5	7	7	8

请完成下面 a 或 b 小题。

- a) 请设计一算法计算数组 *Warmer* $[1, 2, \dots, n]$ 。(6 分)
 b) 请设计一时间复杂度为 $O(n)$ 的算法求解该问题。(10 分)

8. 若数组中某一元素出现次数超过一半，则称该元素为 **majority** 元素。给定一个整型数组 $a[1, 2, \dots, n]$ ，请按要求设计方法寻找 **majority** 元素。请完成 a 或 b 小题。(共 10 分)
 a) 请设计一时间复杂度为 $O(n \log n)$ 的方法寻找 **majority** 元素。(6 分)
 b) 请设计一时间复杂度为 $O(n)$ 的方法寻找 **majority** 元素。(10 分)

9. 骨牌是一种游戏用具（如下所示），请解决骨牌排放搜索问题。(共 10 分)



一副骨牌共 28 张，由以下点数组组合构成：

骨牌号	点数	骨牌号	点数	骨牌号	点数	骨牌号	点数
1	0 0	8	1 1	15	2 3	22	3 6
2	0 1	9	1 2	16	2 4	23	4 4
3	0 2	10	1 3	17	2 5	24	4 5
4	0 3	11	1 4	18	2 6	25	4 6
5	0 4	12	1 5	19	3 3	26	5 5
6	0 5	13	1 6	20	3 4	27	5 6
7	0 6	14	2 2	21	3 5	28	6 6

这 28 张牌可以摆成 7×8 的点数网格，其对应的骨牌号如下所示：

点数网格

骨牌号图

6	6	2	6	5	2	4	1	28	28	14	7	17	17	11	11
1	3	2	0	1	0	3	4	10	10	14	7	2	2	21	23
1	3	2	4	6	6	5	4	8	4	16	25	25	13	21	23
1	0	4	3	2	1	1	2	8	4	16	15	15	13	9	9
5	1	3	6	0	4	5	5	12	12	22	22	5	5	26	26
5	5	4	0	2	6	0	3	27	24	24	3	3	18	1	19
6	0	5	3	4	2	0	3	27	6	6	20	20	18	1	19

使用搜索算法从点数网格求对应的骨牌号图，描述状态空间的组织，有可能的话，给出相关剪枝策略。

10. 一家专卖店连续 N 天营业，只经营一种商品，第 i 天可以最多进货 a_i 台，进货单价 p_i ，可以最多将 b_i 台存放在仓库，单位存放费用为 ω_i ，必须为已签合同的客户供货 c_i 台，单价为 s_i ，以该价格该天能卖到断货。请构建一个费用网络流模型，计算利润最大的营销方案。(共 10 分)

1 题解 2

1.1 问题分析

最长公共子串问题是一个典型的动态规划问题，最长公共子序列在删去最后一个公共字符后，仍然是剩下字符串的最长公共子序列，因此可得如下递推公式：

$$C[i, j] = \begin{cases} \max\{C[i-1, j], C[i, j-1]\} & (A[i] = B[j]) \\ C[i-1, j-1] + 1 & (A[i] \neq B[j]) \end{cases}$$

1.2 算法伪代码

见算法 1。

Algorithm 1: 题解 2 算法伪代码

```

1 Function  $F(S)$  begin
    Input: 字符串  $A, B$ 
    Output: 最长公共子串长度  $C$ 
2   if  $A[1] = B[1]$  then  $C[1, 1] = 1$  else  $C[1, 1] = 0$ ;
3   for  $i \in [2, m]$  do
4       for  $j \in [2, n]$  do
5            $C[i, j] = \begin{cases} \max\{C[i-1, j], C[i, j-1]\} & (A[i] = B[j]) \\ C[i-1, j-1] + 1 & (A[i] \neq B[j]) \end{cases}$ 
6       end
7   end
8   return  $C[m, n]$ ;
9 end

```

2 题解 3

2.1 问题 a

将坐标点按横坐标排序，选出左边的 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 个点为一部分，剩下的为第二部分。

2.2 问题 b

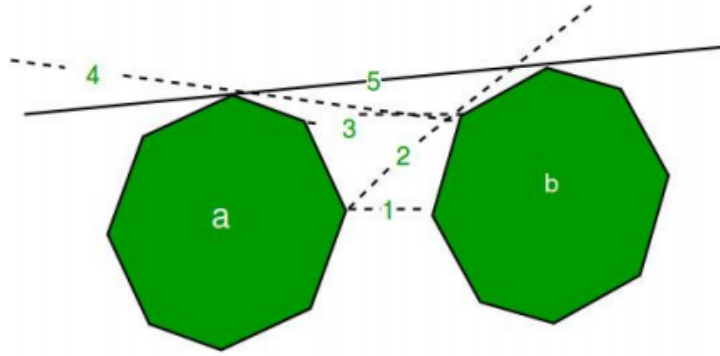


图 1: 示意图

查找合并凸包的上方连线时，从左边部分的最右点和右边部分的最左点连线开始查找：

1. 固定右边的点，遍历左凸包上在连线上方的点
2. 找到与原连线夹角最大的新连线
3. 固定左边的点，遍历右凸包上在连线上方的点
4. 找到与原连线夹角最大的新连线
5. 重复直到找不到新连线

查找合并凸包的下方连线时，从左边部分的最右点和右边部分的最左点连线开始查找：

1. 固定右边的点，遍历左凸包上在连线下方的点
2. 找到与原连线夹角最大的新连线
3. 固定左边的点，遍历右凸包上在连线下方的点
4. 找到与原连线夹角最大的新连线
5. 重复直到找不到新连线

2.3 问题 c

算法的主要时间都花在将小凸包合并为大凸包的过程上。

3 题解 4

3.1 问题分析

显然，本题的贪心选择性是：每个小朋友 p_i 都只要选择能与自己匹配的最大的 p_j 即可。

可以通过反证法证明此方法最优：如果对于某个配对 p_i, p_j ，存在一个 $p_k < p_j$ ，使 p_i 不与 p_j 配对而与 p_k 配对时，能增加一个配对 p_j, p_l ，如果要这种情况成立，那么必然有：

$$\begin{cases} p_i + p_j \leq B \\ p_k < p_j \\ p_i + p_k \leq B \\ p_k + p_l > B \\ p_j + p_l \leq B \end{cases}$$

但显然， $p_j + p_l > p_k + p_l > B$ ，不可能有 $p_j + p_l \leq B$ ，因此此方法不是最优的情况不存在。

3.2 算法伪代码

见算法 2。

4 题解 5

4.1 问题分析

此问题是典型的动态规划问题：如果存在一个子集 $b \subseteq a$ ， $\sum_{i \in b} i = B$ ，那么必有 $\sum_{i \in b, i \neq j} i = B - j$ 。因此有递推公式：

$$b = F(n, B) = \begin{cases} F(n-1, B-a_n) \cup \{a_n\} & F(n-1, B-a_n) \neq \varnothing \\ F(n-1, B) & F(n-1, B) \neq \varnothing \\ \varnothing & otherwise \end{cases}$$

Algorithm 2: 题解 4 算法伪代码

```

1 Function  $F(p_i)$  begin
    Input: 小朋友的数字牌  $\{p_i\}$ 、匹配和限制  $B$ 
    Output: 能匹配的最多对小朋友  $C$ 
2 对  $\{p_i\}$  进行排序;
3 repeat
4     选出  $\{p_i\}$  中最大的元素  $p$ ;
5     从  $\{p_i\}$  中删去  $p$ ;
6     if  $p \geq B$  then continue;
7     选出  $\{p_i\}$  中  $\leq B - p$  最大的元素  $p'$ ;
8     从  $\{p_i\}$  中删去  $p'$ ;
9      $C = C + 1$ ;
10 until  $\{p_i\}$  中只剩 1 个或 0 个元素;
11 return  $C$ 
12 end
  
```

4.2 初始化条件

显然, $F(i, b)$ 在前 i 个数之和都小于 b 的情况下是必然不存在的, 因此有初始化条件:

$$(\forall i \in [1, n], b \in [0, b], \sum_{i=1}^n a_i < b) F(i, b) = \varnothing$$

和

$$F(0, b) = \emptyset$$

5 题解 6**5.1 问题分析**

显然, 这个问题只不过是最短路径问题的一个变型, 在计算路径长度时加上点产生的代价即可。

5.2 算法伪代码

见算法 3。

Algorithm 3: 题解 6 算法伪代码

```

1 Function  $F(E, V)$  begin
    Input: 邻接矩阵  $E$ , 顶点权值  $V$ , 起点  $i$ , 终点  $j$ 
    Output: 起点到终点的最短距离  $s$ 
2   记录起点  $i$  到每个顶点距离  $S$ ,  $S[k] = E[i, k], k \in [1, n]$ ;
3   记录未找到最短路径的点集合  $E' = E$ , 将点  $i$  从  $E'$  中去除;
4   初始化一个队列  $Q$ ;
5   repeat
6       找到  $E'$  中  $S[k]$  最小的点  $k$ ;
7       将点  $k$  从  $E'$  中去除;
8       for  $l \in E'$  do
9           if  $S[k] + E[k, l] < S[l]$  then
10               $S[l] = S[k] + E[k, l]$ ;
11           end
12       end
13   until  $E' = \emptyset$ ;
14   return  $S[j]$ 
15 end

```

6 题解 7

6.1 问题分析

对于某一天的气温 $T[i]$ 后的气温要么比它高，要么比他低。

- 如过 $T[i]$ 后的某天比它低：需要继续向前查找
- 如过 $T[i]$ 后的某天比它高： $T[i]$ 到该天之间的全部 *Warmer* 值都等于该天温度

6.2 算法伪代码

见算法 4。

Algorithm 4: 题解 7 算法伪代码

```

1 Function  $T$  begin
    Input: 温度列表  $T$ 
    Output: 后续气温中第一个比  $T[i]$  高的温度  $Warmer[i]$ 
2   初始化一个栈  $S$ ,  $T[1]$  入栈;
3    $k = 1$ ;
4   for  $i \in [2, n]$  do
5       if  $T[i] > T[S_{top}]$  then
6           repeat
7                $Warmer[S_{top}] = T[i]$ ;
8                $S$  出栈;
9           until  $T[i] \leq T[S_{top}]$  或栈  $S$  为空;
10      end
11       $i$  入栈  $S$ ;
12  end
13  repeat
14       $Warmer[S_{top}] = n + 1$ ;
15       $S$  出栈;
16  until 栈  $S$  为空;
17  return  $Warmer$ 
18 end

```

7 题解 9

7.1 问题分析

显然，问题的解空间是，每一张骨牌可以放的位置都只有有限的几个，因此，解空间 $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{28})$ 就是每个骨牌摆放的位置，搜索树的每一层节点表示一个骨牌的可选摆放位置，搜索树以根节点为第 0 层，第 i 层的分支就是选择第 $i + 1$ 号骨牌的位置。

7.2 剪枝策略

- 选择分支时，如果要放的位置已被其他骨牌占据，显然可以剪掉
- 选择分支时，如果放置后周围的格子中有孤立的格子，显然可以剪掉

8 题解 10

8.1 问题分析

- 首先要明确流网络的源点和汇点。题中所给的流网络描述了从进货到销售的过程，货源就是源点，售出到顾客就是汇点；
- 其次要明确点的含义。题中所给的流网络描述了货物每天的流转过程，即是售出还是留到下一天，因此，流网络中的点就是天数；
- 最后明确边权值。
 - 从源点出发的边即是进货，容量为 a_i ，费用为 p_i ；
 - 从某一天到下一天的边表示货物留到了下一天，容量为 b_i 、费用为 w_i ；
 - 到汇点的边表示售出，容量为 c_i ，费用为 $-s_i$ 。

8.2 建模

在此图上求最大流即可：

