

# 考虑空气阻力下的 自行车挡泥板覆盖范围计算

作者：尹达恒

所属院系：物联网工程学院物联网工程系

学号：1030616134

## 内容摘要

自行车前后挡泥板在自行车上起到阻挡车轮飞溅泥水打湿骑车人的作用。挡泥板的设计制造是自行车设计制造的重要一环。本文在考虑空气阻力的条件下,对不同车速以及飞溅水滴直径时自行车挡泥板最小覆盖范围进行了研究,主要内容如下:

- (1) 使用常微分方程组建立了空气相对地面静止(无风),车轮相对地面不打滑滚动时的车轮-水滴飞溅模型。
- (2) 利用上述模型计算出了在相同的水滴直径下两种不同种类自行车在正常车速情况下挡泥板的覆盖范围。
- (3) 利用上述模型进一步讨论了相同的水滴直径下一般两种不同种类自行车挡泥板覆盖范围与车速之间的关系。

### 关键词

自行车挡泥板 数学模型 常微分方程组 最小值

# 目录

内容摘要 .....	II
目录 .....	III
一、绪论 .....	1
二、建模 .....	2
(一) 基本假设 .....	2
(二) 模型分析 .....	2
1、水滴受力分析 .....	2
2、水滴初始状态分析 .....	3
(三) 建模 .....	3
1、水滴运动方程 .....	3
2、水滴初始状态方程 .....	3
(四) 模型验证 .....	4
三、编写计算函数 .....	5
四、计算 .....	6
(一) 竞速型山地自行车挡泥板位置计算(以 GIANT® ATX850-M 型为例) .....	6
1、数据估计 .....	6
2、前轮计算 .....	6
3、后轮计算 .....	7
(二) 竞速型山地自行车挡泥板位置与车速关系计算(以 GIANT® ATX850-M 型为例) .....	7
1、前轮 .....	7
2、后轮 .....	8
(三) 竞速型山地自行车挡泥板位置计算(以 GIANT® ATX850-M 型为例) .....	9
1、数据估计 .....	9
2、前轮计算 .....	9
3、后轮计算 .....	10
(四) 竞速型山地自行车挡泥板位置与车速关系计算(以 GIANT® ATX850-M 型为例) .....	10
1、前轮 .....	10
2、后轮 .....	11
五、结论 .....	12
六、参考文献 .....	13

## 一、 绪论

自行车在我们的日常生活中起着举足轻重的作用，尤其在大学校园，自行车可谓是师生出行的首选交通工具。但是由于骑车时自行车车轮与骑车人在同一平面上，所以在下雨天，车轮转动带起的泥水很容易飞溅到骑车人身上。为此人们为自行车设计了一许多不同形状不同大小的挡泥板，安装于前后车轮上方，起到阻挡泥水的作用。这就带来一个问题：一般情况下自行车挡泥板至少需要覆盖车轮多大的范围，才能正好挡住可能飞溅到骑车人身上的泥水？文献[1]使用 maple 大致计算了不考虑空气阻力的情况下自行车挡泥板的覆盖范围，但计算出的前轮挡泥板形状与现实生活中的前轮挡泥板有很大出入。

对于空中飞行的细小水滴而言，空气阻力会对水滴的飞行轨迹产生较大影响，忽略空气阻力的近似计算会使计算结果产生较大误差。针对这个问题，本文建立了考虑空气阻力的车轮-水滴飞溅模型并使用 matlab 计算了考虑空气阻力的情况下不同自行车挡泥板的覆盖范围，获得了与实际情况比较接近的结果。

## 二、 建模

### (一) 基本假设

为了讨论简单起见，现做如下假设：

- 1、假定自行车匀速直线运动。
- 2、假定人骑车时身体与自行车在同一平面内。
- 3、水滴脱离车轮时与车轮有相同的线速度。
- 4、空中飞行的水滴视为球体，直径 3mm
- 5、地面水平。
- 6、空气相对地面静止（无风）。
- 7、车轮不打滑，车轮相对空气的平动速度等于其转速。
- 8、骑车人等效为一个矩形区域，落入此区域内的雨滴皆视为溅到骑车人。
- 9、覆盖范围以车轮挡泥板在车轮上方的覆盖角度 $\theta_{min}$ 和 $\theta_{max}$ 表示，以车轮圆心为极点，水平向右为极轴，精度0.001rad，范围 $-\pi \sim \pi$ 。

### (二) 模型分析

#### 1、水滴受力分析

以在空中飞行的水滴为原点，水平面为 x 轴，铅直线向上为 y 轴建立平面直角坐标系，如右图所示，对水滴进行受力分析

按照文献[2]给出的有空气阻力的情况下抛体的运动方程，可进一步得到有风时水滴在空中运动的微分方程组：

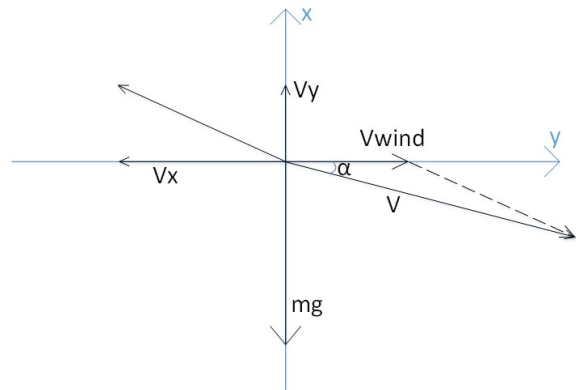
$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y$$

$$v = \sqrt{(v_x - v_{wind})^2 + v_y^2}$$

$$m \frac{dv_x}{dt} = -kv^2 \cos \alpha = -kv(v_x - v_{wind})$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -kv^2 \sin \alpha - mg = -kvv_y - mg$$

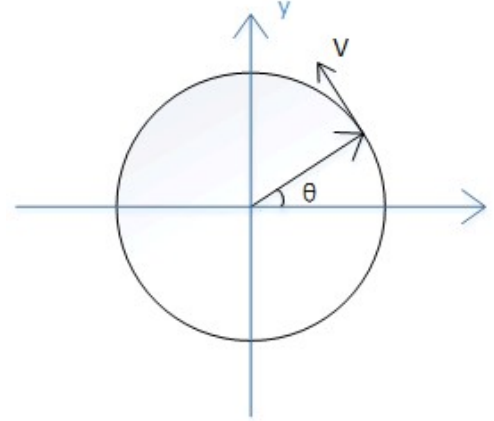


$$k = \frac{1}{2} C \rho S$$

(其中 $k$ 为阻力系数,  $v$ 表示水滴相对空气运动的速度,  $v_{wind}$ 表示风速,  $v_x$ 和 $v_y$ 分别表示水滴相对自行车的运动速度在水平和竖直方向上的分量)

## 2、水滴飞行初始状态分析

以车轮圆心为原点, 平面为  $x$  轴, 铅直线向上为  $y$  轴建立平面直角坐标系, 如右图所示:



可知水滴飞行初始状态为

$$x_0 = R \cos \theta$$

$$y_0 = R \sin \theta$$

$$v_{x_0} = v \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -v \sin \theta$$

$$v_{y_0} = v \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = v \cos \theta$$

## (三) 建模

### 1、水滴运动方程

(二)-1 中给出的常微分方程组在 matlab 中可以转化为以下函数:

```
function dot=drdt(~,r)
m=(pi*r(6)^3)/6000000;
%m=10^3*(4/3*pi*(d/2*10^-3)^3);
k=(1293*pi*r(6)^2)/16000000000;
%k=1/2*0.5*1.293*pi*(d/2*10^-3)^2;
g=9.8;
v=sqrt((r(3)-r(5))^2+r(4)^2);
dot=[r(3);r(4);-k*v*(r(3)-r(5))/m;-k*v*r(4)/m-g;0;0];
%r1=x r2=y r3=vx r4=vy r5=风速(m/s) r6=雨滴直径(mm)
end
```

### 2、水滴初始状态方程

结合(二)-2 中给出的初始条件, 使用 matlab 中的 ode 算法解出常微分方程, 可以得到一个输入一个包含车速、水滴直径、车轮半径的向量和起飞位置对应 $\theta$ 、飞行时间, 输出轨迹 $[x, y]$ 的函数:

```
function [x,y]=xy(env,theta,t)
x0=env(3)*cos(theta);
y0=env(3)*sin(theta);
v0=env(1);
```

```

rho=pi/2+theta;
vx0=v0*cos(rho);
vy0=v0*sin(rho);
[~,r]=ode45('drdt',[0,t],[x0;y0;vx0;vy0;env(1);env(2);
]);
x=r(:,1);y=r(:,2);
end
%环境变量
env=[vbike,dwater,R]

```

#### (四) 模型验证

在matlab中输入以下语句:

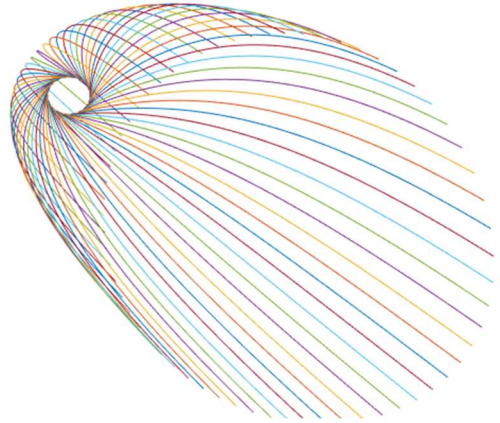
```

for theta=0:0.1:2*pi
[x,y]=xy([9,3,0.45],theta,1);
hold on,plot(x,y);
end

```

所得图形如右图所示:

基本符合运动情况下车轮飞溅水滴的飞行轨迹。



### 三、 编写计算函数

- (一) 编写函数判断ode45算法所得解矩阵是否在range所表示区域所包含的范围内  
其中range为一矩阵，表示等效后的骑车人身体的覆盖范围

```
function j=judge(xyarry,range)
%范围range=[xmin,xmax; ymin,ymax;]
j=0;
f=xyarry(:,1)>=range(1)&xyarry(:,1)<=range(2);
if any(f) %如果有x在xmin和xmax之间
    f=xyarry(f,2);
    f=f>=range(3)&f<=range(4);
    if any(f) %如果在xmin和xmax之间对应y在ymin和ymax之间
        j=1; %返回1
    end
end %否则返回0
end
```

- (二) 编写函数计算轨迹能穿过range区域的初始位置对应 $\theta$ 的最大和最小值

```
function [thetamin,thetamax]=rough(env,range)
thetamin=-pi;thetamax=-pi;
for theta=-pi:0.001:pi
    [x,y]=xy(env,theta,2);
    if judge([x,y],range)
        thetamin=theta;
        break;
    end
end
for theta=pi:-0.001:-pi
    [x,y]=xy(env,theta,2);
    if judge([x,y],range)
        thetamax=theta;
        break;
    end
end
end
```

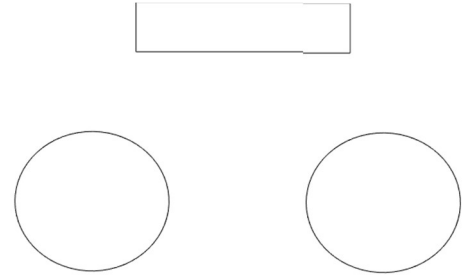


## 四、 计算

### (一) 竞速型山地自行车挡泥板位置计算(以GIANT® ATX850-M型为例)

#### 1、数据估计

- (1) 根据GIANT官方公布的数据[3], GIANT ATX850-M型使用18" 车架与标准27.5寸车轮, 适合身高176cm-190cm的人, 考虑到竞速型自行车骑行时一般为匍匐姿势, 可以粗略估计骑车人上半身范围在两车轮中心轴线上方水平高度0.75m到1m范围内, 竖直宽度约0.9m, 与前轮圆心竖直距离0.2m, 与后轮圆心竖直距离0.15m。相对位置如右图(左边为前轮)
- (2) 27.5寸车轮对应车轮直径约为70cm
- (3) 一般情况下, 竞速型山地自行车车速可达9m/s。



#### 2、前轮计算

通过计算可知

前轮对应的range矩阵值应为:

$$\text{range} = \begin{bmatrix} 0.2 & 1.1 \\ 0.75 & 1 \end{bmatrix}$$

前轮对应的env向量值应为:

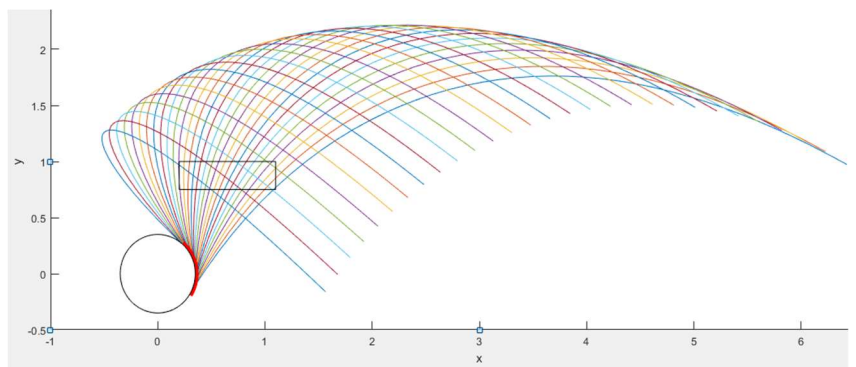
$$\text{env} = [9 \quad 3 \quad 0.35]$$

在matlab输入下列语句:

```
env=[9,3,0.35];
range=[0.2,1.1;0.75,1];
[thetamin,thetamax]=rough(env,range)
```

计算结果:

```
thetamin =
-0.5666
thetamax =
0.8686
```



计算结果转换为度数即挡泥板在前轮上应覆盖 $-32^\circ$  到 $50^\circ$  的区域。

将计算所得能溅到人身上的水滴轨迹图像和骑车人等效范围一并绘出, 如上图所示。

### 3、后轮计算

通过计算可知

前轮对应的range矩阵值应为:

$$\text{range} = \begin{bmatrix} -1.05 & -0.15 \\ 0.75 & 1 \end{bmatrix}$$

前轮对应的env向量值与前轮相同。

在matlab输入下列语句:

```
env=[9,3,0.35];
range=[-1.05,-0.15;0.75,1];
[thetamin,thetamax]=rough(env,range)
```

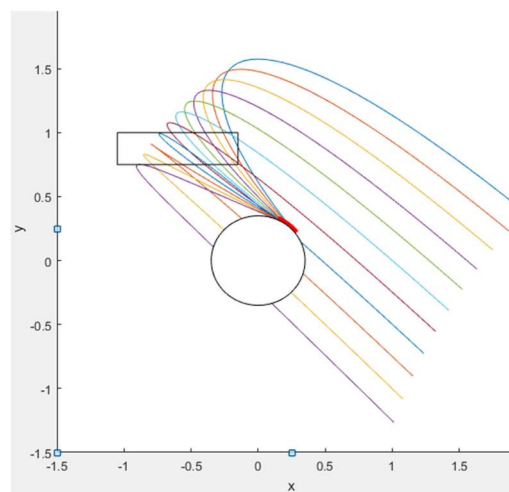
计算结果:

```
thetamin =
```

```
0.6534
```

```
thetamax =
```

```
1.1546
```



计算结果转换为度数即挡泥板在后轮上应覆盖 $37^\circ$  到 $66^\circ$  的区域。

将计算所得能溅到人身上的水滴轨迹图像和骑车人等效范围一并绘出，如右图所示。

## (二) 竞速型山地自行车挡泥板位置与车速关系计算(以GIANT® ATX850-M型为例)

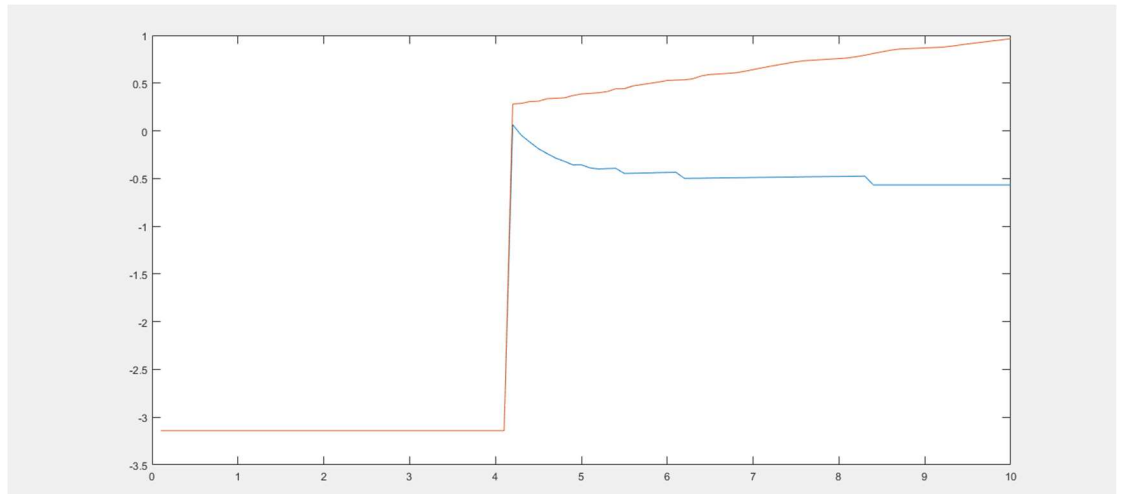
### 1、前轮

按前述数据计算车速从0m/s增加到10m/s时前轮挡泥板覆盖范围的变化情况。

在matlab中输入:

```
range=[0.2,1.1;0.75,1]
for i=1:100
    v(i)=i/10;
    [thetamin(i),thetamax(i)]=rough([i/10,3,0.35],range);
end
plot(v,thetamin);
hold on,plot(v,thetamax);
```

得到挡泥板覆盖角度随车速变化的图像



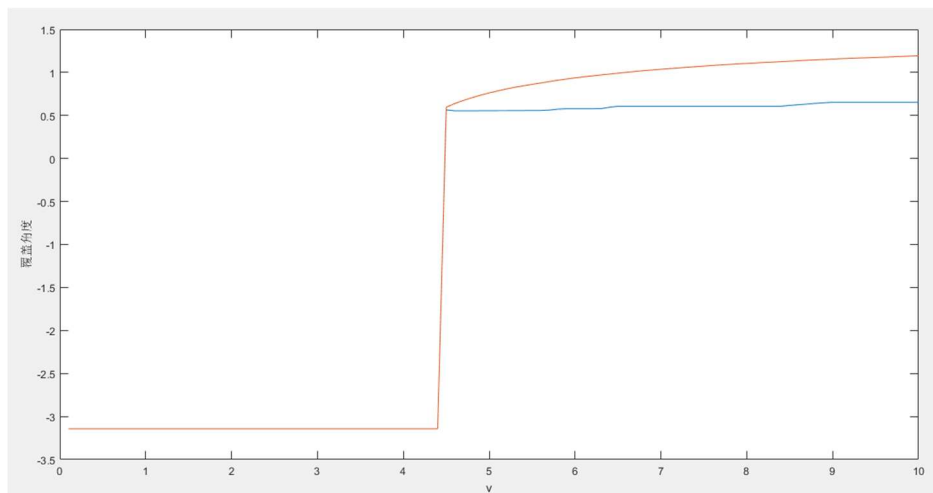
## 2、后轮

按前述数据计算车速从0m/s增加到10m/s时后轮挡泥板覆盖范围的变化情况。

在matlab中输入：

```
range=[-1.05,-0.15;0.75,1]
for i=1:100
    v(i)=i/10;
    [thetamin(i),thetamax(i)]=rough([i/10,3,0.35],range);
end
plot(v,thetamin);
hold on,plot(v,thetamax);
xlabel('v');
ylabel('覆盖角度');
```

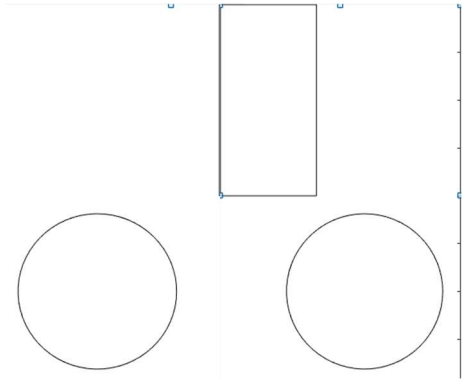
得到挡泥板覆盖角度随车速变化的图像



### (三) 休闲型家用自行车挡泥板位置计算(以上海永久® QJ411G-JL型为例)

#### 1、数据估计

- (1) 根据上海永久官方公布的数据[4], 上海永久 QJ411G-JL型使用16" 车架与标准26寸车轮。普通自行车骑行时人上半身接近直立, 可以粗略估计骑车人上半身范围在两车轮中心轴线上方水平位高度0.4m到1.2m范围内, 竖直宽度约0.4m, 与前轮圆心竖直距离0.5m, 与后轮圆心竖直距离0.2m。相对位置如右图(左边为前轮)
- (2) 26寸车轮对应车轮直径约为65cm
- (3) 平时骑车车速一般不超过6m/s左右。



#### 2、前轮计算

通过计算可知

前轮对应的range矩阵值应为:

$$\text{range} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.7 \\ 0.4 & 1.2 \end{bmatrix}$$

前轮对应的env向量值应为:

$$\text{env} = [6 \quad 3 \quad 0.325]$$

在matlab输入下列语句:

```
env=[6,3,0.325];
range=[0.5,0.9;0.4,1.2];
[thetamin,thetamax]=rough(env,range)
```

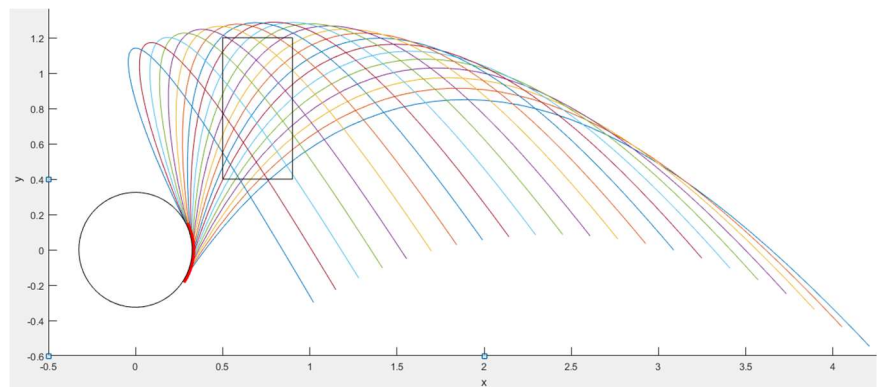
计算结果:

thetamin =

-0.5876

thetamax =

0.4776



计算结果转换为度数即挡泥板在前轮上应覆盖 $-34^\circ$  到 $27^\circ$  的区域。

将计算所得能溅到人身上的水滴轨迹图像和骑车人等效范围一并绘出, 如上图所示。

### 3、后轮计算

通过计算可知

前轮对应的range矩阵值应为:

$$\text{range} = \begin{bmatrix} -0.6 & -0.2 \\ 0.4 & 1.2 \end{bmatrix}$$

前轮对应的env向量值与前轮相同。

在matlab输入下列语句:

```
env=[6,3,0.325];
```

```
range=[-0.6,-0.2;0.4,1.2];
```

```
[thetamin,thetamax]=rough(env,range)
```

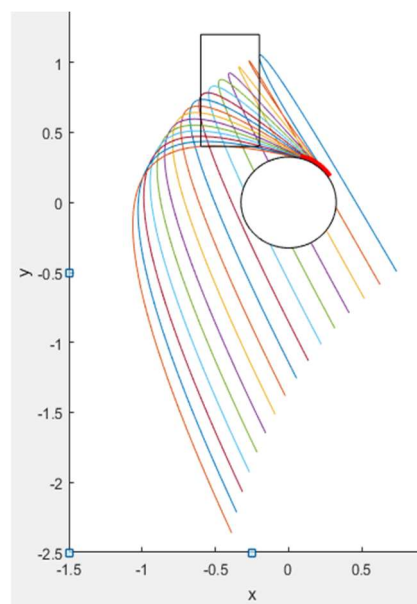
计算结果:

```
thetamin =
```

```
0.5804
```

```
thetamax =
```

```
1.3366
```



计算结果转换为度数即挡泥板在后轮上应覆盖33° 到76° 的区域。

将计算所得能溅到人身上的水滴轨迹图像和骑车人等效范围一并绘出，如上图所示。

#### (四) 休闲型家用自行车挡泥板位置与车速关系计算(以上海永久® QJ411G-JL型为例)

##### 1、前轮

按前述数据计算车速从0m/s增加到10m/s时前轮挡泥板覆盖范围的变化情况。

在matlab中输入:

```
range=[0.2,1.1;0.4,1.2]
```

```
for i=1:100
```

```
    v(i)=i/10;
```

```
    [thetamin(i),thetamax(i)]=rough([i/10,3,0.325],range);
```

```
end
```

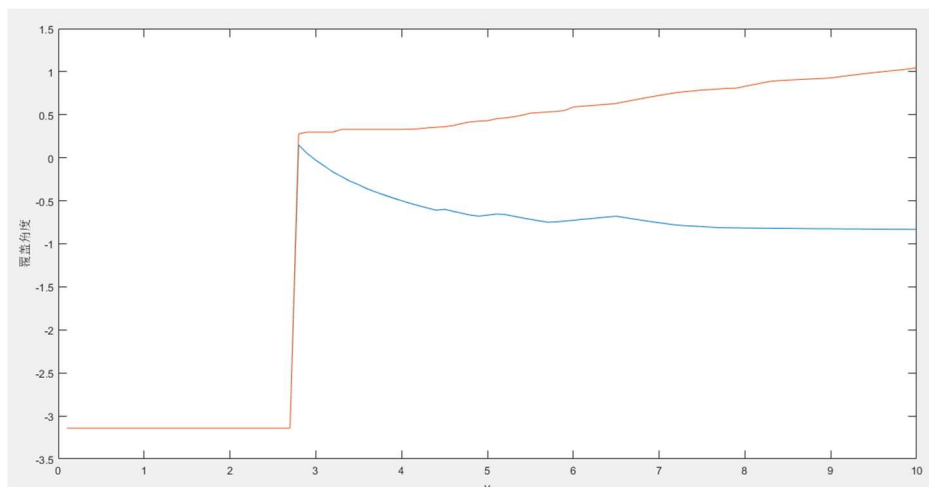
```
plot(v,thetamin);
```

```
hold on,plot(v,thetamax);
```

```
xlabel('v');
```

```
ylabel('覆盖角度');
```

得到挡泥板覆盖角度随车速变化的图像



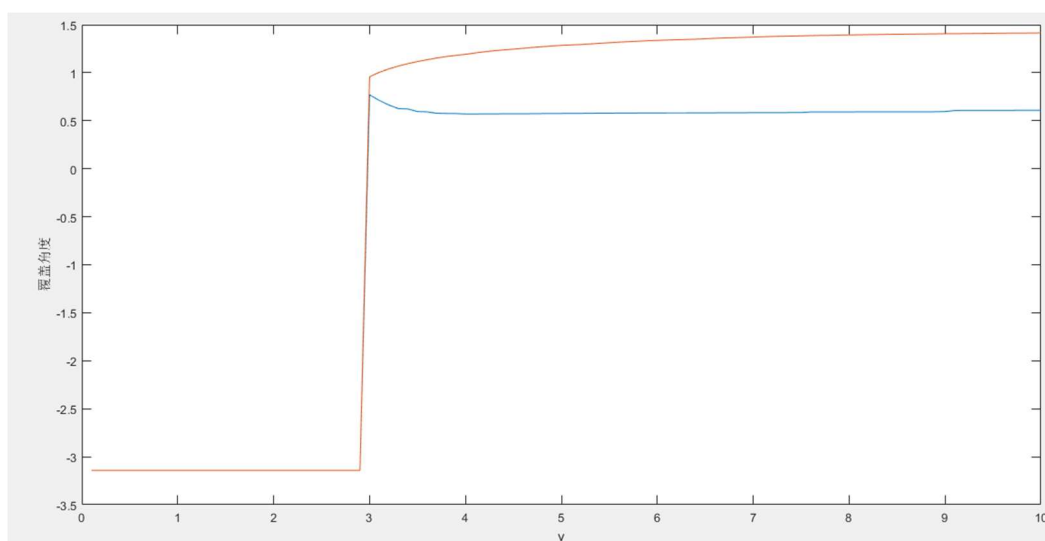
## 2、后轮

按前述数据计算车速从0m/s增加到10m/s时后轮挡泥板覆盖范围的变化情况。

在matlab中输入：

```
range=[-0.6,-0.2;0.4,1.2]
for i=1:100
    v(i)=i/10;
    [thetamin(i),thetamax(i)]=rough([i/10,3,0.325],range);
end
plot(v,thetamin);
hold on,plot(v,thetamax);
xlabel('v');
ylabel('覆盖角度');
```

得到挡泥板覆盖角度随车速变化的图像



## 五、 结论

(一) 从对两种车型在通常情况下挡泥板的计算结果可以得到:

- 1、 竞速型山地自行车的前轮挡泥板通常情况下应覆盖在车轮上 $-32^{\circ}$ 到 $50^{\circ}$ 之间;后轮挡泥板通常情况下应覆盖在车轮 $37^{\circ}$ 到 $66^{\circ}$ 之间。
- 2、 休闲型家用自行车的前轮挡泥板通常情况下应至少覆盖车轮上 $-34^{\circ}$ 到 $27^{\circ}$ 之间的区域;后轮挡泥板通常情况下应至少覆盖车轮 $33^{\circ}$ 到 $76^{\circ}$ 之间的区域。

(二) 从两种车型前轮的车速-挡泥板覆盖范围图像上可以看出:

- 1、 车速对两种自行车前轮挡泥板覆盖范围的影响相近。
- 2、 家用自行车需要加装挡泥板的最小行驶速度山地自行车要小,说明雨天骑家用自行车更容易溅湿骑车人。
- 3、 在需要加装挡泥板的速度范围内,两种自行车车速与前轮挡泥板的 $\theta_{max}$ 都成一次函数。
- 4、 在需要加装挡泥板的速度范围内,速度增大时,两种自行车的前轮 $\theta_{min}$ 值都先变小后趋于一稳定值。
- 5、 在需要加装挡泥板的速度范围内,车速对自行车后轮挡泥板覆盖范围影响不大。

## 六、 参考文献

- [1] 庞硕. 自行车挡泥板长度的计算[OL]. <http://www.docin.com/p-172629750.html>
- [2] 陈小波, 李强. 关于抛体运动的分析[J]. 四川文理学院学报(自然科学), 2009 (5)
- [3] GIANT®ATX850 产品规格[OL].  
<http://www.giant.com.cn/front/getbikemodel?productId=115>