(1)

假設有四個原始點和對應的目標點，我們要找出透視變換矩陣。四個點為 {(2, 3), (5, 7), (8, 2), (4, 5)}，目標四邊形的四個點為 {(1,1), (5, 1), (5, 5), (1, 5)}。我們將使用這兩組點來計算透視變換矩陣。

$A = (2,3)$　　$A' = (1,1)$

$B = (5,7)$　　$B' = (5,1)$

$C = (8,2)$　　$C' = (5,5)$

$D = (4,5)$　　$D' = (1,5)$　　將x與y座標同除z，將z縮至1，把3維變2維

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

$$x' = \frac{x}{z} = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}} \qquad z' = \frac{z}{z} = 1$$

$$y' = \frac{y}{z} = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}$$

令 $a_{33} = 1$

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} - a_{31}xx' - a_{32}yx' = x' \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} - a_{31}xy' - a_{32}yy' = y' \end{cases}$$

$$Ax = b \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 5 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & -25 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 7 & 1 & -5 & -7 \\ 8 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -40 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 2 & 1 & -40 & -10 \\ 4 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 1 & -20 & -25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{31} \\ a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A' \\ y_A' \\ x_B' \\ y_B' \\ x_C' \\ y_C' \\ x_D' \\ y_D' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \\ 5 \\ 5 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

經計算得 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 & -1.6 & 2.3 \\ 1.6 & -1.3 & 1.3 \\ 0.2 & -0.4 & 1 \end{bmatrix}$

解方程組使用的工具：

https://tool.puckwang.com/tools/linearEquationsSystem/

計算結果：

$x_0 = 1.5037194473963849$

$x_1 = -1.622741764080764$

$x_2 = 2.2624867162592968$

$x_3 = 1.5504782146652498$

$x_4 = -1.3421891604675875$

$x_5 = 1.3273113708820405$

$x_6 = 0.24123273113708796$

$x_7 = -0.3602550478214664$

(2)

wx：表示水平方向上的齊次坐標。

wy：表示垂直方向上的齊次坐標。

在這種表示法中，一個2D點的坐標可以表示為(x, y, w)，其中x和y是點在平面上的坐標，而w是一個額外的齊次坐標。透視變換矩陣作用於Homogeneous Coordinates，並將點映射到新的位置。當最後一列的[wx wy 1]中的w不為1時，可以通過將齊次坐標除以w，得到正常的2D坐標。所以如果一個點的齊次坐標為(x, y, w)，則實際的2D坐標為(x/w, y/w)。

(3)

因為仿射變換是線性變換，所以變換後兩條平行線會保持平行。

透視變換不是線性變換，變換後兩條平行線不一定會平行。

(4)

在一般情況下不一定可逆。如果四個點共線或是在同一條直線上，那透視變換矩陣就不可逆。但在這個作業中沒有四點共線的情況，所以都是可逆的。當透視變換矩陣是可逆的，代表每一個輸入點都有唯一的對應點，所以不會出現多組解或是無解的情況。