

## 第八周 高等数学 线性代数

数试 2301 曹方涛

2024.10

### 高等数学

10 月 28 日

阅读下面的定义, 并完成问题:

**定义:** 设  $f(x), g(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的两个函数, 并且  $g(x)$  取值恒为正数, 若存在常数  $C > 0$  和  $M > 0$ , 使得:

$$|f(x)| \leq Cg(x) \quad \forall x \in [M, +\infty),$$

则我们记:

$$f(x) = O(g(x)) \quad x \rightarrow +\infty.$$

如果

$$f(x) - h(x) = O(g(x)) \quad x \rightarrow +\infty$$

则我们可以记:

$$f(x) = h(x) + O(g(x)) \quad x \rightarrow +\infty.$$

大  $O$  符号的应用十分广泛, 类似可以对其它函数极限过程和数列极限做以上的定义, 请各位同学自行写出相应定义.

**问题:** 证明: 当  $n \rightarrow +\infty$  时, 有:

$$(1 + \frac{1}{n})^n = e(1 - \frac{1}{2n} + \frac{11}{24n^2}) + O(\frac{1}{n^3}).$$

10 月 30 日

计算极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sin \frac{1}{n^2} + \sin \frac{3}{n^2} + \cdots + \sin \frac{2n-1}{n^2}).$$

**11 月 1 日**

设  $f(x)$  在开区间  $I$  上二阶可导,  $[a, b] \subseteq I$ , 且  $f'(a) = f'(b) = 0$ , 证明存在  $\xi \in [a, b]$  使得:

$$f''(\xi) \geq \frac{4}{(a-b)^2} |f(b) - f(a)|.$$

## 线性代数

**10 月 29 日**

设  $n$  阶矩阵  $\mathbf{A}$  满足:  $\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} - 3\mathbf{I}_n = \mathbf{O}$ . 请至少用两种方法证明  $\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_n$  可逆.

**10 月 31 日**

设  $\mathbf{A}; \mathbf{B}$  是  $n$  阶方阵, 满足  $\mathbf{A}^{2024} = \mathbf{O}, \mathbf{AB} + \mathbf{BA} = \mathbf{B}$ . 证明: (1)  $\mathbf{I}_n - \mathbf{A}$  可逆;  
(2)  $\mathbf{B} = \mathbf{O}$ .