第八周

高数：

1. 阅读下面的定义，并完成问题：

   定义：设$f(x)$，$g(x)$是定义在$\mathbb{R}$上的两个函数，并且$g(x)$取值恒为正数，若存在常数$C>0$和$M>0$，使得

   $$|f(x)|\leqslant Cg(x)\quad \forall x\in[M,+\infty)$$

   则我们记

   $$f(x)=O(g(x))\quad x\to+\infty$$

   如果

   $$f(x)-h(x)=O(g(x))\quad x\to+\infty$$

   则我们可以记

   $$f(x)=h(x)+O(g(x))\quad x\to+\infty$$

   大O符号的应用十分广泛，类似可以对其他函数极限过程和数列极限做以上的定义，请各位同学自行写出相应定义。

   问题：证明：当$n\to+\infty$时，有：

   $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{11}{24n^2}\right)+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

2. 计算极限：$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{3}{n^2}+\cdots+\sin\frac{2n-1}{n^2}\right)$

3. 设$f(x)$在开区间I上二阶可导，$[a,b]\subseteq I$，且$f'(a)=f'(b)=0$。证明存在$\xi\subseteq[a,b]$使得$f''(\xi)\geqslant\frac{4}{(a-b)^2}|f(b)-f(a)|$。

线代：

1. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{O}$，请至少用两种方法证明 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}_n$ 可逆。

2. 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，满足 $\boldsymbol{A}^{2024}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$。证明：

（1）$\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}$ 可逆；（2）$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$