程序设计与算法(二)

郭 炜

贪心算法

圣诞老人的礼物-Santa Clau’s Gifts(百练4110)

圣诞节来临了，圣诞老人准备分发糖果，现在有多箱不同的糖果，每箱糖果有自己的价值和重量，每箱糖果都可以拆分成任意散装组合带走。圣诞老人的驯鹿雪橇最多只能装下重量W的糖果，请问圣诞老人最多能带走多大价值的糖果。

输入

第一行由两个部分组成，分别为糖果箱数正整数n(1 <= n <= 100)，驯鹿能承受的最大重量正整数w（0 < w < 10000），两个数用空格隔开。其余n行每行对应一箱糖果，由两部分组成，分别为一箱糖果的价值正整数v和重量正整数w，中间用空格隔开。

输出

输出圣诞老人能带走的糖果的最大总价值，保留1位小数。输出为一行，以换行符结束。

样例输入

4 15

100 4

412 8

266 7

591 2

样例输出

1193.0

圣诞老人的礼物-Santa Clau’s Gifts(百练4110)

解法：

按礼物的价值/重量比从大到小依次选取礼物，对选取的礼物尽可能多地装，直到达到总重量w

复杂度： O(nlogn)

圣诞老人的礼物-Santa Clau’s Gifts(百练4110)

```
const double eps = 1e-6;
struct Candy {
        int v;  int w;
        bool operator < (const Candy & c)
        { return  double(v)/w - double(c.v)/c.w > eps; }
} candies[110];
int main()   {
        int n,w;
        scanf("%d%d",&n,&w);
        for(int i = 0;i < n; ++i)
                scanf("%d%d", &candies[i].v , &candies[i].w);
        sort(candies,candies+n);
        int totalW = 0;
        double totalV = 0;
```

圣诞老人的礼物-Santa Clau’s Gifts(百练4110)

```
for(int i = 0;i < n; ++i) {
        if( totalW + candies[i].w <= w) {
                totalW += candies[i].w;
                totalV += candies[i].v;
        }
        else {
                totalV += candies[i].v *
                        double(w-totalW)/candies[i].w;
                break;
        }
}
printf("%.1f",totalV);
return 0;
```

圣诞老人的礼物-Santa Clau’s Gifts(百练4110)

证明：

替换法。对于用非此法选取的最大价值糖果箱序列，可以将其按价值/重量比从大到小排序后得到：

序列1：a_1, a_2 ....

用序列1和按上述解法选取的序列2依次进行比较：

序列2：b_1, b_2 ....

价值/重量比相同的若干箱糖果，可以合并成一箱，所以两个序列中元素都不重复

对于发现的第一个 $a_i \neq b_i$,则必有：$a_i < b_i$

则在序列1中，用 b_i 这种糖果,替代若干重量的 a_i 这种糖果，则会使得序列1的总价值增加，这和序列1是价值最大的取法矛盾

所以：序列1 = 序列2 （序列2不可能是序列1的一个前缀且比序列1短）

贪心算法

每一步行动总是按某种指标选取最优的操作来进行，该指标只看眼前，并不考虑以后可能造成的影响。

贪心算法需要证明其正确性。

“圣诞老人礼物”题，若糖果只能整箱拿，则贪心法错误。

贪心算法

每一步行动总是按某种指标选取最优的操作来进行，该指标只看眼前，并不考虑以后可能造成的影响。

贪心算法需要证明其正确性。

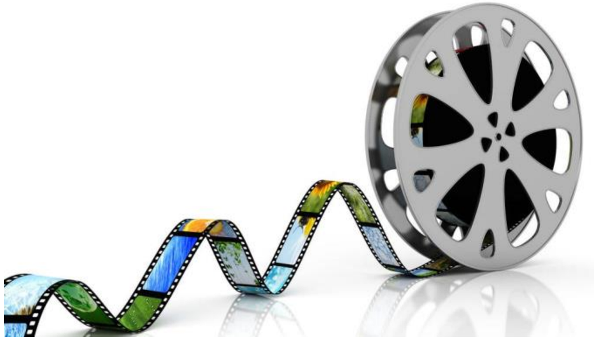
“圣诞老人礼物”题，若糖果只能整箱拿，则贪心法错误。

考虑下面例子:

3个箱子(8,6) (5,5) (5,5)，雪橇总容量10

例题：电影节 (百练4151)

大学生电影节在北大举办! 这天，在北大各地放了多部电影，给定每部电影的放映时间区间，区间重叠的电影不可能同时看（端点可以重合），问李雷最多可以看多少部电影。



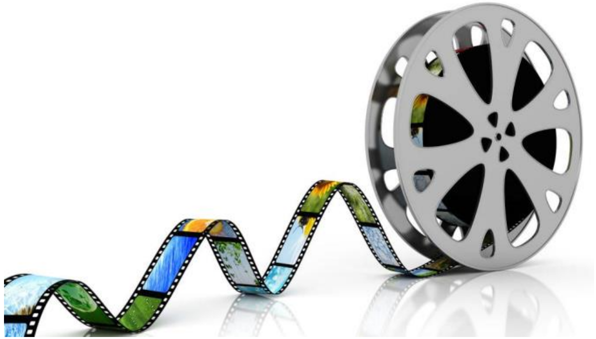
例题：电影节(百练4151)

输入

多组数据。每组数据开头是n(n<=100)，表示共n场电影。
接下来n行，每行两个整数(均小于1000），表示一场电影的放映区间
n=0则数据结束

输出

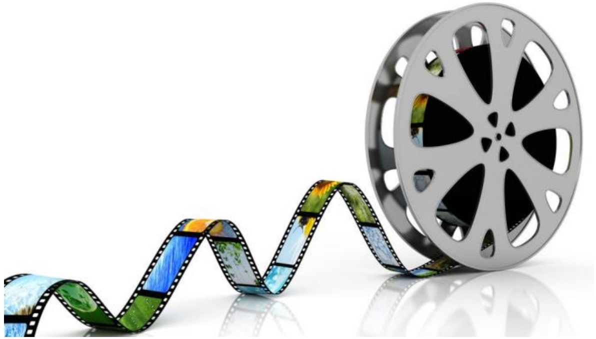
对每组数据输出最多能看几部电影



例题：电影节(百练4151)

Sample Input

12
1 3
3 4
0 7
3 8
15 19
15 20
10 15
8 18
6 12
5 10
4 14
2 9
0



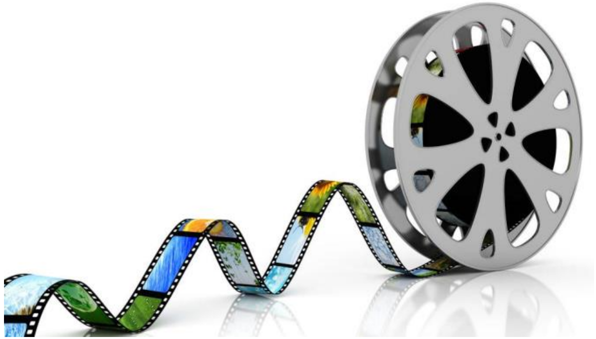
Sample Output

5

例题：电影节(百练4151)

贪心解法

将所有电影按结束时间从小到大排序，第一步选结束时间最早的那部电影。 然后，每步都选和上一部选中的电影不冲突且结束时间最早的电影。



复杂度： O(nlogn)

例题：电影节(百练4151)

证明：

替换法。假设用贪心法挑选的电影序列为:

$a_1,a_2....$

不用此法挑选的最长的电影序列为：

$b_1,b_2...$

现可证明，对任意i, b_i均可以替换成a_i

例题：电影节(百练4151)

用S(x)表示x开始时间，E(x)表示x结束时间，则:

1) b_1可以替换成a_1，因为$E(a_1)<=E(b_1)$
2) 若可以找到a_i,满足$E(a_i)<= E(b_i)$且a_i可以替换b_i，则存在$E(a_{i+1})<=E(b_{i+1})$且a_{i+1}可以替换b_{i+1}

证：
因为 $E(a_i)<= E(b_i)$ 且$E(b_i) <= S(b_{i+1})$
则：$E(a_i) <= S(b_{i+1})$
a_{i+1}是所有$S(x)>=E(a_i)$的x中，E(x)最小的
$S(b_{i+1})>=E(b_i)>=E(a_i)$，所以$E(b_{i+1})>= E(a_{i+1})$

因此用a_{i+1}替换b_{i+1}不会对后续造成影响，替换可行

例题： Stall Reservations(POJ 3190)

有 n头牛（1<=n<=50,000)要挤奶。给定每头牛挤奶的时间区间[A,B] (1<=A<=B<=1,000,000，A,B为整数)。

牛需要呆畜栏里才能挤奶。一个畜栏同一时间只能容纳一头牛。问至少需要多少个畜栏，才能完成全部挤奶工作，以及每头牛都放哪个畜栏里（Special judged)

去同一个畜栏的两头牛，它们挤奶时间区间哪怕只在端点重合也是不可以的。

例题： Stall Reservations(POJ 3190)

贪心解法：

所有奶牛都必须挤奶。到了一个奶牛的挤奶开始时间，就必须为这个奶牛找畜栏。因此按照奶牛的开始时间逐个处理它们，是必然的。

S(x)表示奶牛x的开始时间。E(x)表示x的结束时间。对E(x), x可以是奶牛，也可以是畜栏。畜栏的结束时间，就是正在其里面挤奶的奶牛的结束时间。同一个畜栏的结束时间是不断在变的。

例题： Stall Reservations(POJ 3190)

1) 把所有奶牛按开始时间从小到大排序。
2) 为第一头奶牛分配一个畜栏。
3) 依次处理后面每头奶牛i。处理 i 时，考虑已分配畜栏中，结束时间最早的畜栏x。

若 E(x) < S(i), 则不用分配新畜栏，i可进入x,并修改E(x)为E(i)
若 E(x) >= S(i)，则分配新畜栏y,记 E(y) = E(i)

直到所有奶牛处理结束

需要用优先队列存放已经分配的畜栏，并使得结束时间最早的畜栏始终位于队列头部。

例题： Stall Reservations(POJ 3190)

证明：

由于按开始时间的顺序处理奶牛是必然，且按该算法，为奶牛i分配新畜栏时，确实是不得不分配的，所以算法正确。

复杂度： O(nlogn)

例题： Stall Reservations(POJ 3190)

```
#include <iostream>
#include <algorithm>
#include <queue>
#include <vector>
using namespace std;
struct Cow {
        int a,b; //挤奶区间起终点
        int No; //编号
        bool operator<(const Cow & c) const {
                return a < c.a;
        }
} cows[50100];
int pos[50100]; //pos[i]表示编号为i的奶牛去的畜栏编号
```

```
struct Stall  {
        int end;   //结束时间
        int No;    //编号
        bool operator<(const Stall & s) const     {
                return end > s.end;
        }
        Stall(int e,int n):end(e),No(n) { }
};
int main()
{
        int n;
        scanf("%d",&n);
        for(int i = 0;i <n; ++i) {
                scanf("%d%d",&cows[i].a,&cows[i].b);
                cows[i].No = i;
        }
        sort(cows,cows+n);
```

```
int total = 0;
priority_queue<Stall> pq;
for(int i = 0;i < n; ++i) {
        if(pq.empty() ) {
                ++total;
                pq.push(Stall(cows[i].b,total));
                pos[cows[i].No] = total;
        }
        else {
                Stall st = pq.top();
                if( st.end < cows[i].a ) { //端点也不能重合
                        pq.pop();
                        pos[cows[i].No] = st.No;
                        pq.push(Stall(cows[i].b,st.No));

                }
```

```
                    else { //对应 if( st.end < cows[i].a )
                        ++total;
                        pq.push(Stall{cows[i].b,total});
                        pos[cows[i].No] = total;

                    }
                }
        }
        printf("%d\n",total);
        for(int i = 0;i < n;++i)
                printf("%d\n",pos[i]);

        return 0;
}
```

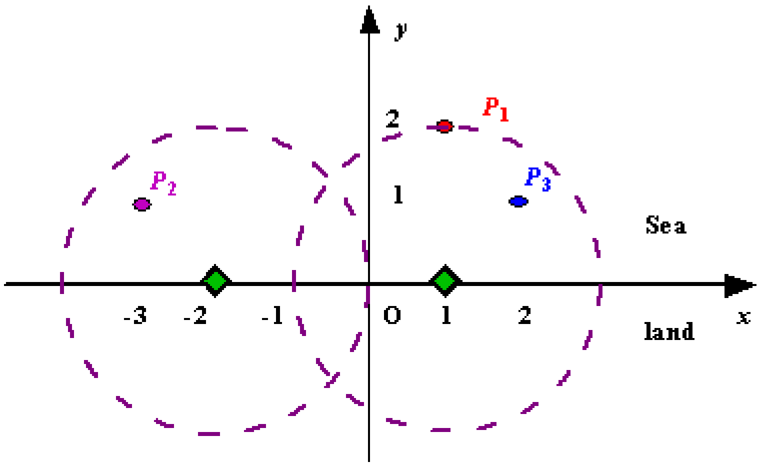
例题： Radar Installation(百练1328)

x轴是海岸线，x轴上方是海洋。海洋中有n（1<=n<=1000）个岛屿，可以看作点。

给定每个岛屿的坐标（x，y），x，y 都是整数。

当一个雷达（可以看作点）到岛屿的距离不超过d（整数），则认为该雷达覆盖了该岛屿。

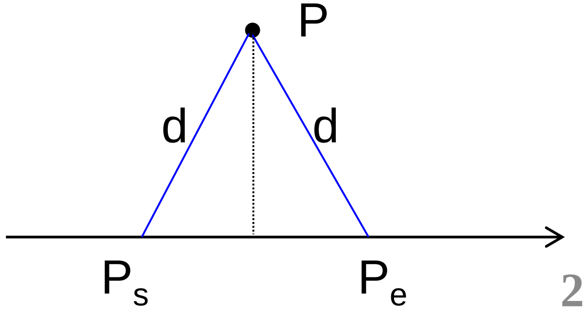
雷达只能放在x轴上。问至少需要多少个雷达才可以覆盖全部岛屿。



例题： Radar Installation(百练1328)

对每个岛屿P,可以算出，覆盖它的雷达，必须位于x轴上的区间[P_s,P_e]。

如果有雷达位于某个x轴区间 [a,b]，称该雷达覆盖此区间。问题转换为，至少要在x轴上放几个雷达（点），才能覆盖全部区间[$P1_s$,$P1_e$],[$P2_s$,$P2_e$]....[Pn_s,Pn_e]



例题： Radar Installation(百练1328)

重要结论：

如果可以找到一个雷达同时覆盖多个区间，那么把这多个区间按起点坐标从小到大排序 ，则最后一个区间(起点最靠右的) **k**的起点，就能覆盖所有区间

证明：如果它不能覆盖某个区间**x**,那么它必然位于 1） **x**起点的左边，或者2）**x**终点的右边。
情况1） 和 **k** 的起点是最靠右的矛盾
情况2） 如果发生，则不可能找到一个点同时覆盖**x**和**k**，也和前提矛盾

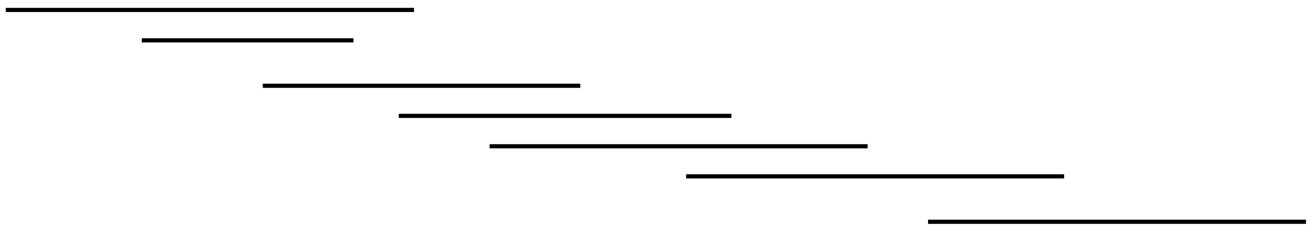
有了这个结论，就可以只挑区间的起点来放置雷达了。

例题： Radar Installation(百练1328)

贪心算法：

1）将所有区间按照起点从小到大排序，并编号0 - (n-1)

2）依次考察每个区间的起点，看要不要在那里放雷达。开始，所有区间都没被覆盖，所以目前编号最小的未被覆盖的区间的编号 firstNoConverd = 0



例题： Radar Installation(百练1328)

3）考察一个区间 i 的起点 x_i的时候，要看从 firstNoCovered 到区间i-1 中是否存在某个区间 c ,没有被 x_i 覆盖。如果没有，则先不急于在x_i放雷达，接着往下看。如果有，那么 c 的终点肯定在x_i的左边，因此不可能用同一个雷达覆盖 c 和i。即能覆盖c的点，已经不可能覆盖i和i后面的区间了。此时，为了覆盖c，必须放一个雷达了，放在区间 i-1 的起点即可覆盖所有从firstNoCovered到 i-1的区间。因为当初考察 i-1的起点 z 时候，并没有发现 z 漏覆盖了从 firstNoCovered 到 i-2 之间的任何一个区间

4) 放完雷达后，将 firstNoCovered改为i，再做下去。

例题： Radar Installation(百练1328)

3）考察一个区间 i 的起点 x_i的时候，要看从 firstNoCovered 到区间i-1 中是否存在某个区间 c ,没有被 x_i 覆盖。如果没有，则先不急于在x_i放雷达，接着往下看。如果有，那么 c 的终点肯定在x_i的左边，因此不可能用同一个雷达覆盖 c 和i。即能覆盖c的点，已经不可能覆盖i和i后面的区间了。此时，为了覆盖c，必须放一个雷达了，放在区间 i-1 的起点即可覆盖所有从firstNoCovered到 i-1的区间。因为当初考察 i-1的起点 z 时候，并没有发现 z 漏覆盖了从 firstNoCovered 到 i-2 之间的任何一个区间

4) 放完雷达后，将 firstNoCovered改为i，再做下去。

复杂度：$O(n^2)$

例题： Radar Installation(百练1328)

证明：

替换法。考虑不用贪心法获得的最佳雷达摆放放案。将其所有雷达按坐标从小到大排序得到 x_1,x_2.... 用贪心法得到的雷达坐标从小到大排序则为 y_1,y_2....

可证明每个x_i都可以被y_i替换，且y序列不会比x序列长

先证明x_1可以用y_1替换

用S(x)表示贪心法中区间x的起点，假设y_1 = S(i)

a) 若$x_1 < y_1$，则用y_1替换x_1没问题，因y_1覆盖了区间0到i, x_1覆盖的区间更少

b) 若$x_1 > y_1$，则分两种情况讨论：

1) $x_1 < S(i+1)$： 因x_1不能覆盖 i+1及以后区间，且i及以前的区间已经都被y_1覆盖，所以将x_1用 y_1替换，不会有损失。

2) $x_1 >= S(i+1)$

贪心法中，在区间i起点放雷达，是因为如果不放而在S(i+1)放雷达，则该雷达不能覆盖i及其前面的某个区间C。

若x_1>=S(i+1),则x_1也不能覆盖C。x_i(i>1)更加不能。因此 $x_1 >= S(i+1)$是不可能的。

类似地证明，假设x_i可以被y_i替换，则 x_{i+1}也可以被y_{i+1}替换。

例题：Gone Fishing(百练1042)

有n(2<=n<=25)个湖从左到右一字排开。从第i个湖走到第i+1个湖要耗时t[i]个时间片（每个时间片5分钟）。

John有h(1<=h<=16)个小时可以用在这些湖钓鱼（包括湖间行走时间）。在每个湖待的时间必须是整数个时间片或0。就算钓不着鱼了，也可以在湖边呆着。

对于湖i，John在那里的第一个时间片可以钓到鱼f[i]条，且后续的每个时间片，能钓到的鱼数量都比上一个时间片少d[i]。

注意John只能从第一个湖出发，从左往右走，不能回头。最后John要停在哪里都可以。问John最多能钓多少条鱼。还要输出钓鱼方案，即在每个湖各呆多长时间。如果有多种方案，则优先选择在第一个湖呆时间最长的。如果还有多种，则优先选择在第二个湖呆的时间最长的.....

例题： Gone Fishing(百练1042)

难点：

走路时间可多可少，不知道到底该花多长时间纯钓鱼才最好
(可能有好湖在很右边）。

例题： Gone Fishing(百练1042)

难点：

走路时间可多可少，不知道到底该花多长时间纯钓鱼才最好(可能有好湖在很右边）。

解决：

枚举最终停下来的湖，将方案分成n类。每类方案的走路时间就是确定的。在每类方案里找最优解，然后再优中选优。

例题： Gone Fishing(百练1042)

贪心：

在确定停下来的湖是 x 的情况下，假定纯钓鱼时间是k个时间片。

用三元组(F,i,j) (1<=i<=x, 1 <= j <= k) 表示湖i的第j个时间片能够钓的鱼的数目是F

将所有的(F,i,j)(共x*k个）按F值从大到小排序，选前k个，就构成了最佳钓鱼方案

例题： Gone Fishing(百练1042)

x= 3 , k = 4

1	2	3
18	17	27
15	16	7
12	15	0
9	14	0