程序设计与算法(二)

郭 炜

广度优先搜索

入门：抓住那头牛

抓住那头牛(POJ3278)

农夫知道一头牛的位置，想要抓住它。农夫和牛都位于数轴上，农夫起始位于点N(0<=N<=100000)，牛位于点K(0<=K<=100000)。农夫有两种移动方式：

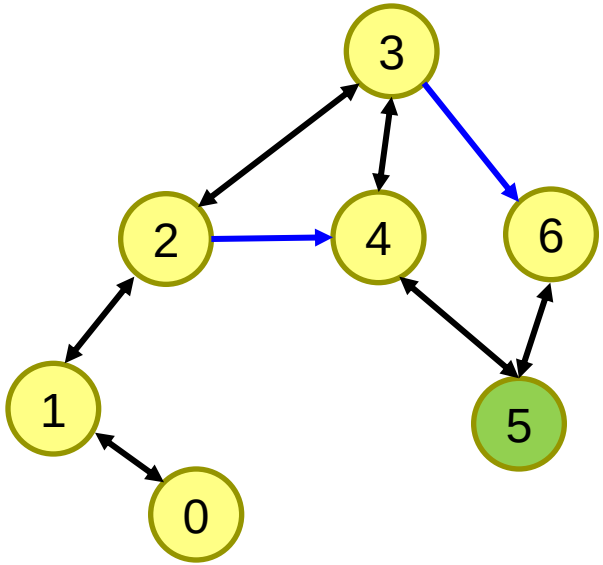
1、从X移动到X-1或X+1，每次移动花费一分钟
2、从X移动到2*X，每次移动花费一分钟

假设牛没有意识到农夫的行动，站在原地不动。农夫最少要花多少时间才能抓住牛？

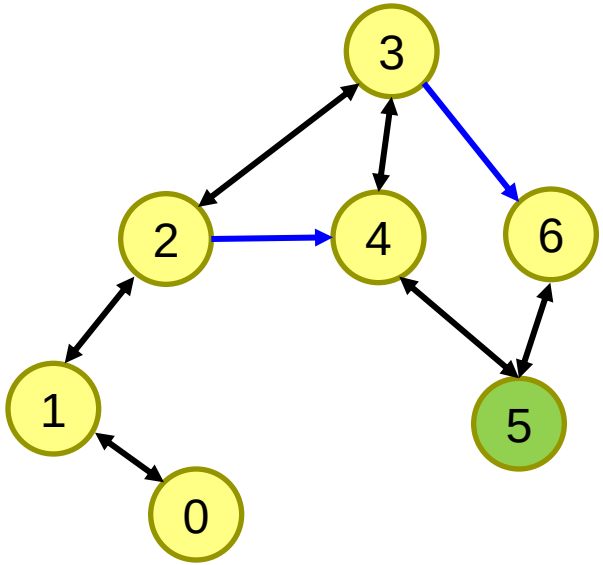
假设农夫起始位于点3，牛位于5

N=3, K=5，最右边是6。

如何搜索到一条走到5的路径？

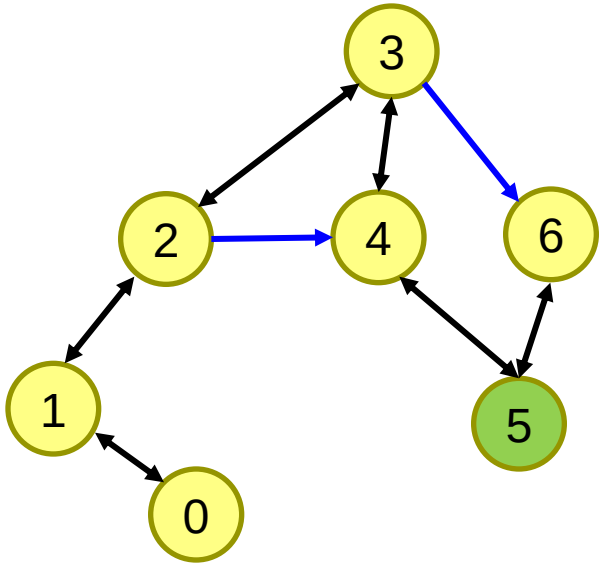


假设农夫起始位于点3，牛位于5
N=3, K=5，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径？



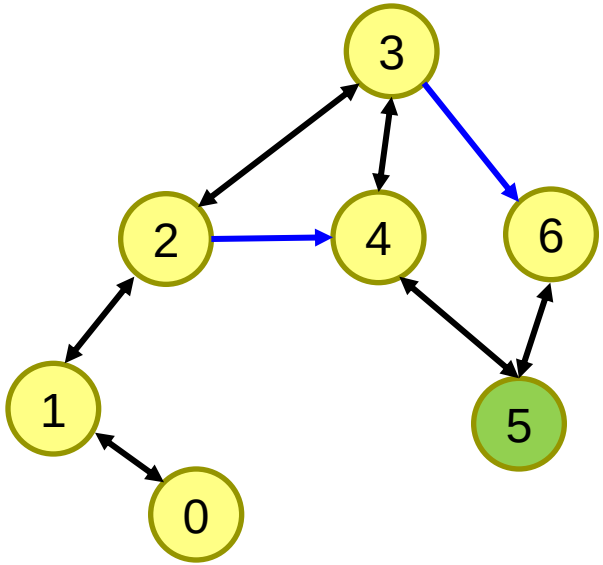
策略1）深度优先搜索：从起点出发，随机挑一个方向，能往前走就往前走(扩展)，走不动了则回溯。不能走已经走过的点(要判重)。

假设农夫起始位于点3，牛位于5
N=3, K=5，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径？



运气好的话：
3->4->5
或
3->6->5
问题解决！

# 假设农夫起始位于点3，牛位于5
N=3, K=5，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径？

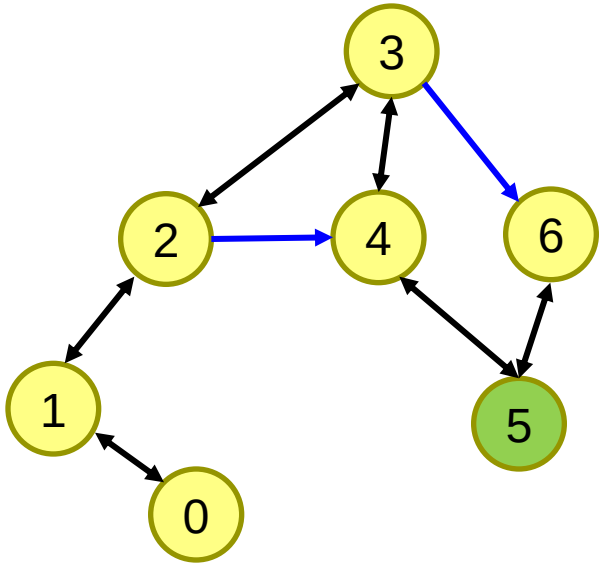


运气不太好的话：
3->2->4->5
运气最坏的话：
3->2->1->0->4->5

要想求最优(短）解，则要遍历所有走法。可以用各种手段优化，比如，若已经找到路径长度为n的解，则所有长度大于n的走法就不必尝试。

运算过程中需要存储路径上的节点，数量较少。用栈存节点。

假设农夫起始位于点3，牛位于5
N=3, K=5，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径？

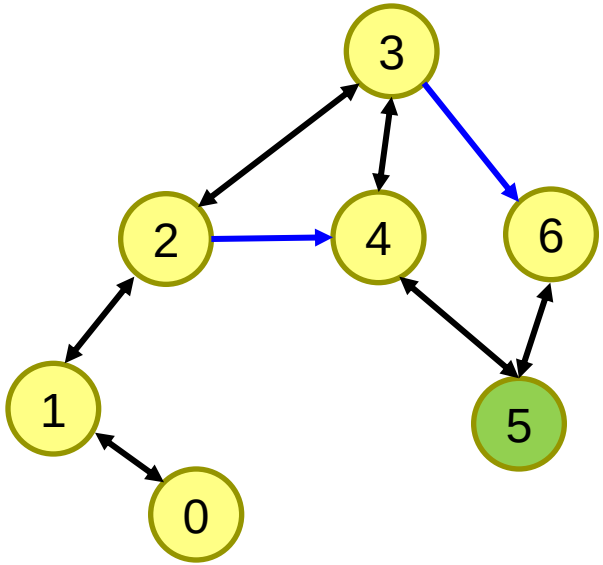


策略2）广度优先搜索：

给节点分层。起点是第0层。从起点最少需n步就能到达的点属于第n层。

第1层：2, 4, 6
第2层：1, 5
第3层：0

假设农夫起始位于点3，牛位于5
N=3, K=5，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径？

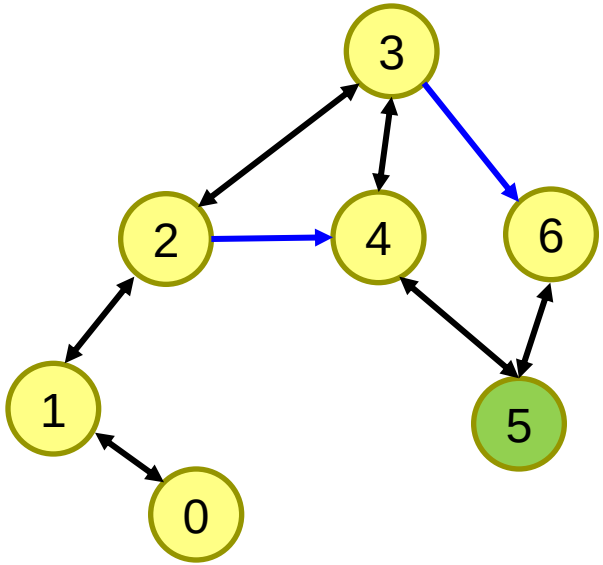


策略2）广度优先搜索：

给节点分层。起点是第0层。从起点最少需n步就能到达的点属于第n层。

依层次顺序，从小到大扩展节点。把层次低的点全部扩展出来后，才会扩展层次高的点。

假设农夫起始位于点3，牛位于5
N=3, K=5，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径？



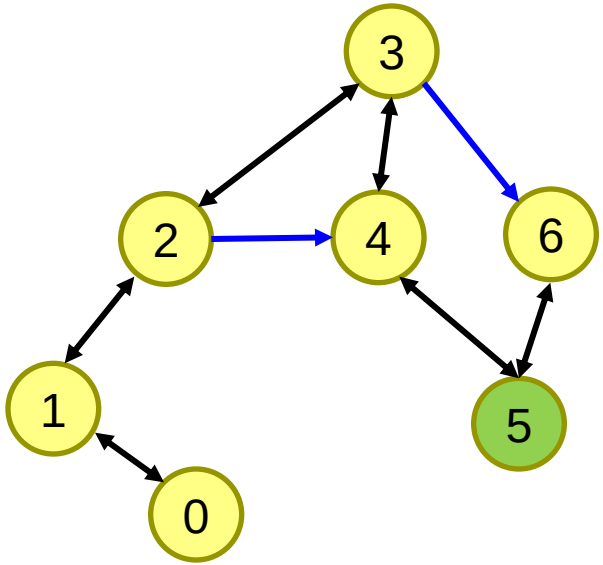
策略2）广度优先搜索：

搜索过程（节点扩展过程）：

3
2 4 6
1 5

问题解决。
扩展时，不能扩展出已经走过的节点(要判重) 。

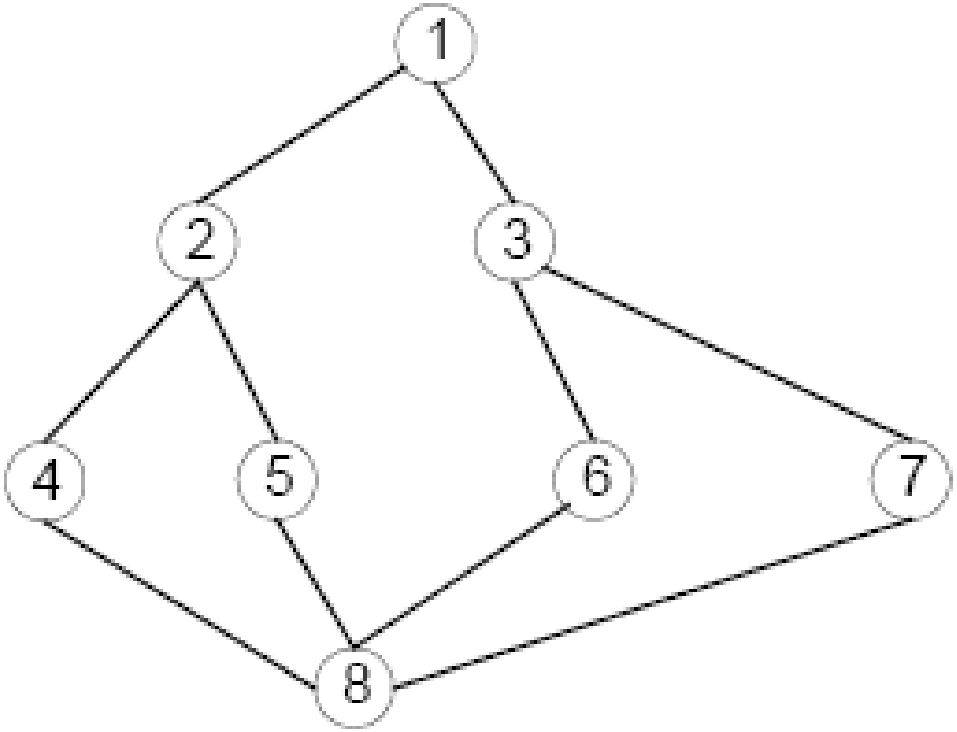
假设农夫起始位于点3，牛位于5
N=3, K=5，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径？



策略2）广度优先搜索：

可确保找到最优解，但是因扩展出来的节点较多，且多数节点都需要保存，因此需要的存储空间较大。
用队列存节点。

深搜 vs. 广搜



若要遍历所有节点：

- 深搜

1-2-4-8-5-6-3-7

- 广搜

1-2-3-4-5-6-7-8

广搜算法

□广度优先搜索算法如下：（用QUEUE）

(1) 把初始节点S0放入Open表中；

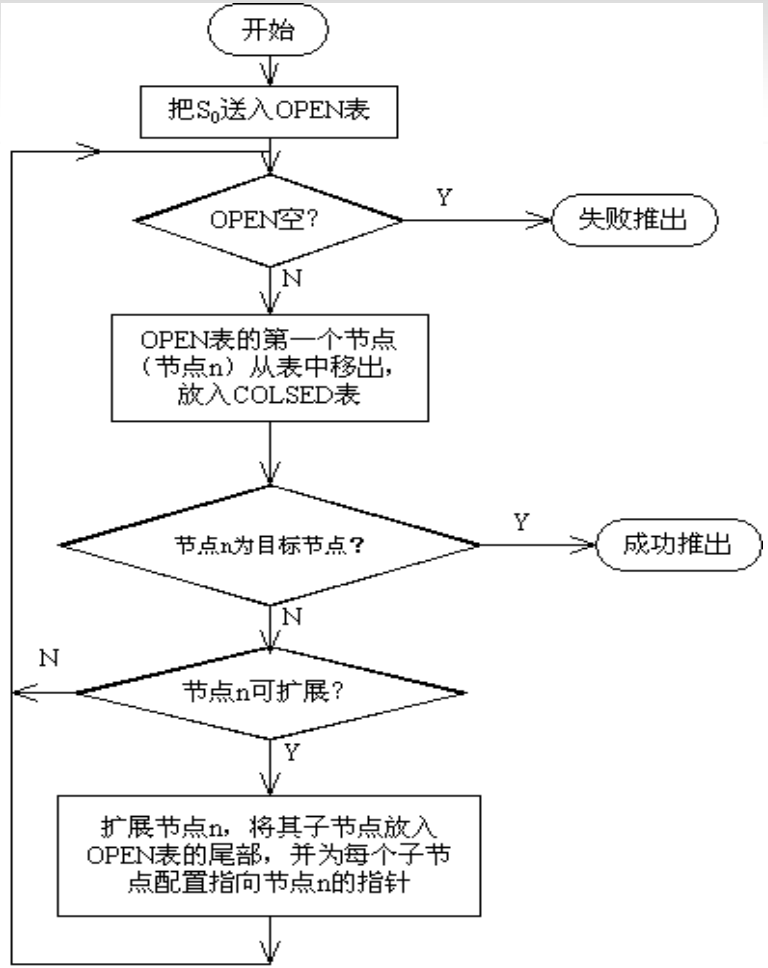
(2) 如果Open表为空，则问题无解，失败退出；

(3) 把Open表的第一个节点取出放入Closed表，并记该节点为n；

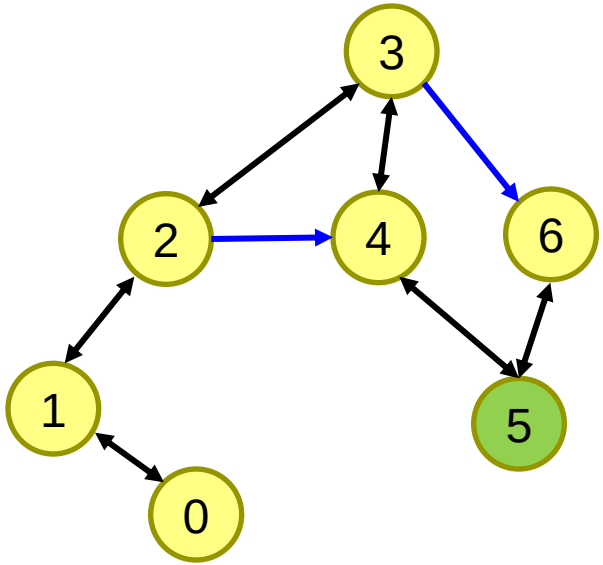
(4) 考察节点n是否为目标节点。若是，则得到问题的解，成功退出；

(5) 若节点n不可扩展，则转第(2)步；

(6) 扩展节点n，将其不在Closed表和Open表中的子节点(判重）放入Open表的尾部，并为每一个子节点设置指向父节点的指针(或记录节点的层次），然后转第(2)步。



假设农夫起始位于点3，牛位于5
N=3, K=5，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径？



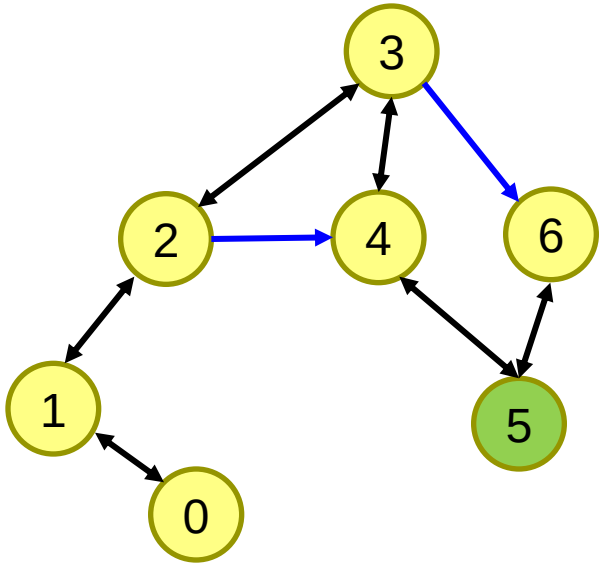
广度优先搜索队列变化过程：

Closed

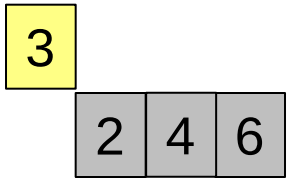
3

Open

假设农夫起始位于点3，牛位于5
N=3, K=5，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径？



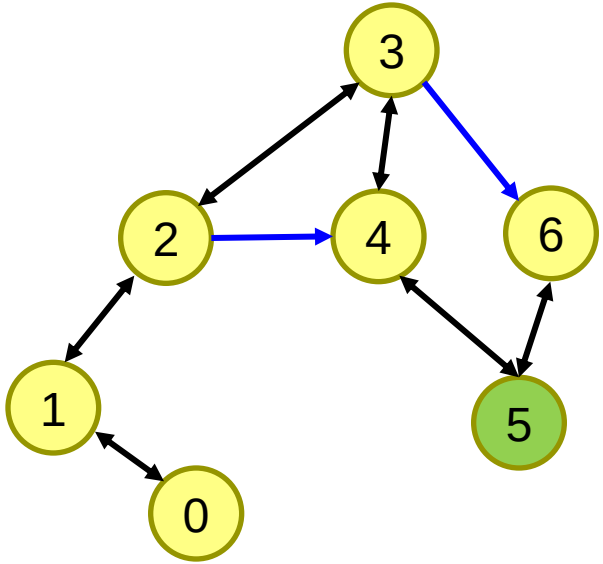
广度优先搜索队列变化过程：



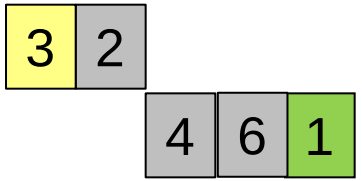
Closed

Open

假设农夫起始位于点3，牛位于5
N=3, K=5，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径？



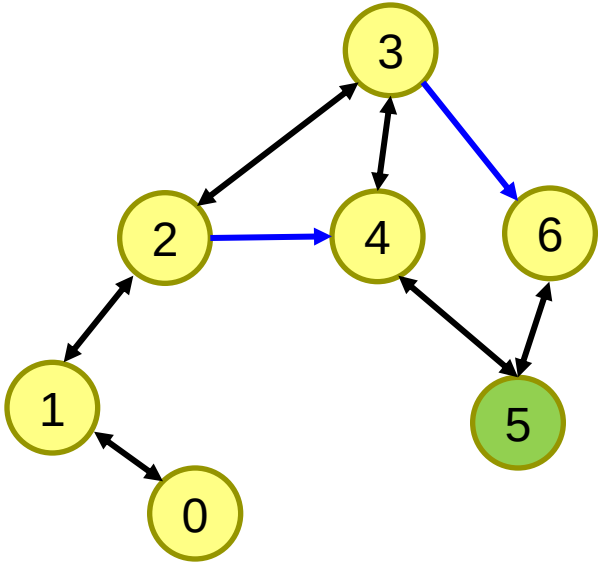
广度优先搜索队列变化过程：



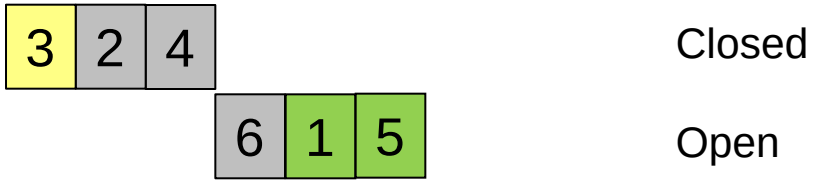
Closed

Open

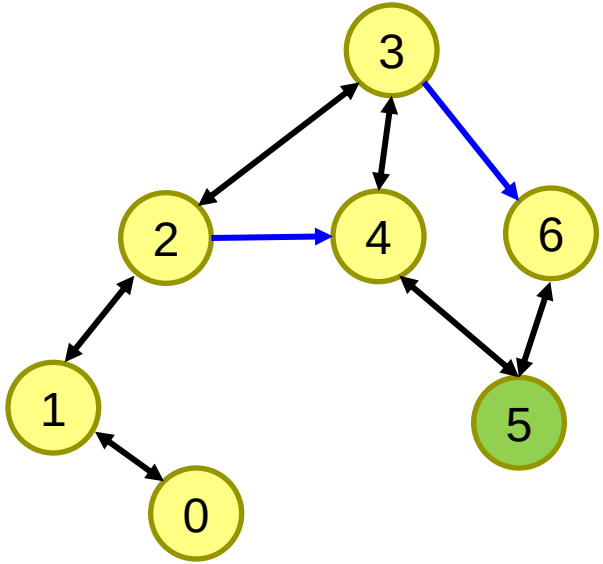
假设农夫起始位于点3，牛位于5
N=3, K=5，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径？



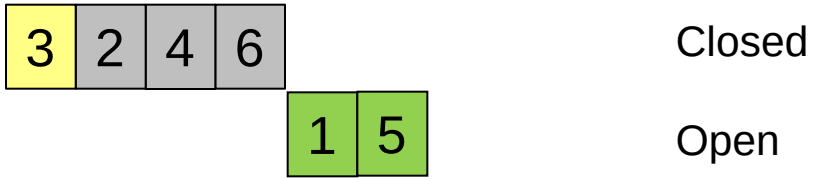
广度优先搜索队列变化过程：



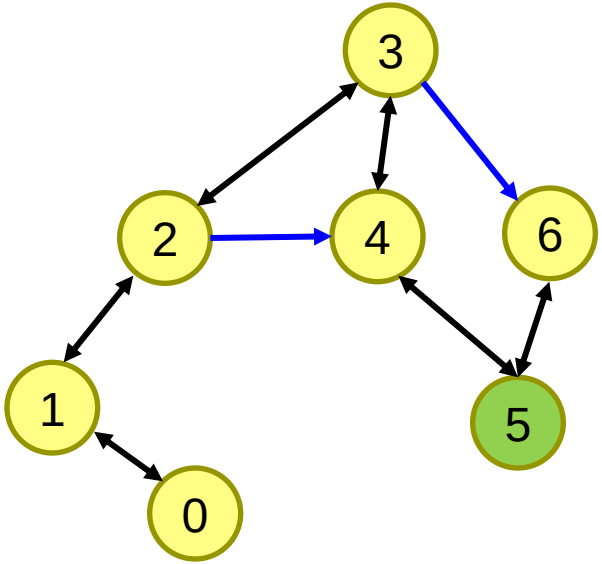
假设农夫起始位于点3，牛位于5
N=3, K=5，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径？



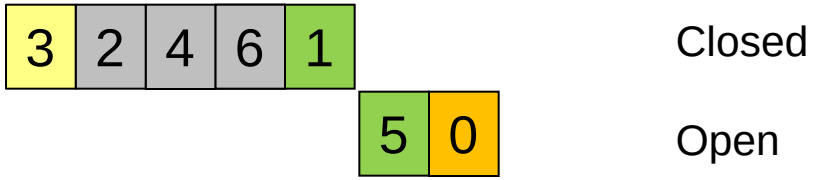
广度优先搜索队列变化过程：



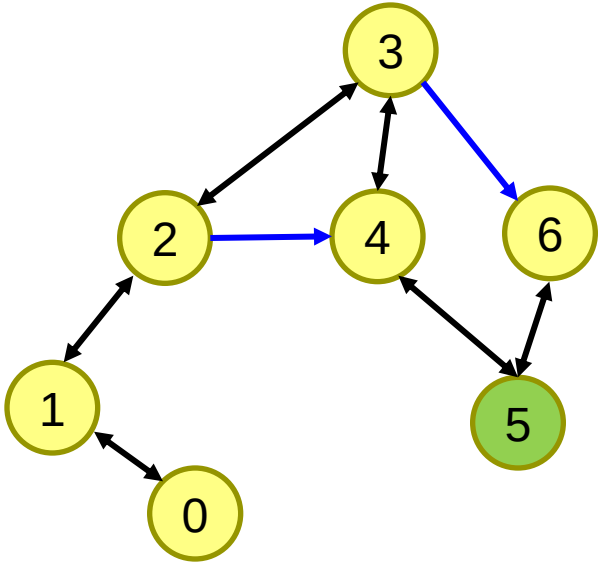
假设农夫起始位于点3，牛位于5
N=3, K=5，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径？



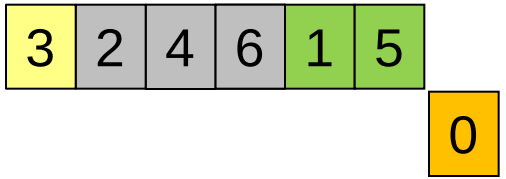
广度优先搜索队列变化过程：



假设农夫起始位于点3，牛位于5
N=3, K=5，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径？



广度优先搜索队列变化过程：



目标节点5出队列，问题解决！

//poj3278 Catch That Cow

```
#include <iostream>
#include <cstring>
#include <queue>
using namespace std;
int N,K;
const int MAXN = 100000;
int visited[MAXN+10];  //判重标记,visited[i] = true表示i已经扩展过
struct Step{
        int x;  //位置
        int steps;  //到达x所需的步数
        Step(int xx,int s):x(xx),steps(s) { }
};
queue<Step> q;  //队列,即Open表
int main()   {
        cin >> N >> K;
        memset(visited,0,sizeof(visited));
        q.push(Step(N,0));
        visited[N] = 1;
```

```
while(!q.empty()) {
        Step s = q.front();
        if( s.x == K ) { //找到目标
                cout << s.steps <<endl;
                return 0;
        }
        else {
                if( s.x - 1 >= 0 && !visited[s.x-1] ) {
                        q.push(Step(s.x-1,s.steps+1));
                        visited[s.x-1] = 1;
                }
                if( s.x + 1 <= MAXN && !visited[s.x+1] ) {
                        q.push(Step(s.x+1,s.steps+1));
                        visited[s.x+1] = 1;
                }
```

```
                    if( s.x * 2 <= MAXN &&!visited[s.x*2]  ) {
                            q.push(Step(s.x*2,s.steps+1));
                            visited[s.x*2]  = 1;
                    }
                    q.pop();
            }
        }
        return 0;
}
```

迷宫问题（POJ3984）

定义一个矩阵：

0 1 0 0 0
0 1 0 1 0
0 0 0 0 0
0 1 1 1 0
0 0 0 1 0

它表示一个迷宫，其中的1表示墙壁，0表示可以走的路，只能横着走或竖着走，不能斜着走，要求编程序找出从左上角到右下角的最短路线。

迷宫问题（POJ3984）

基础广搜。先将起始位置入队列

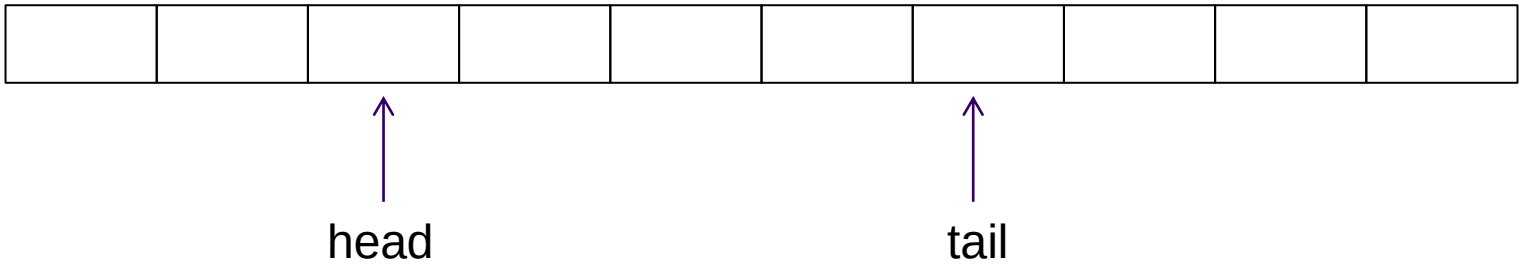
每次从队列拿出一个元素，扩展其相邻的4个元素入队列(要判重），
直到队头元素为终点为止。队列里的元素记录了指向父节点（上一步）的指针

队列元素：

```
struct {
        int r,c;
        int f; //父节点在队列中的下标
};
```

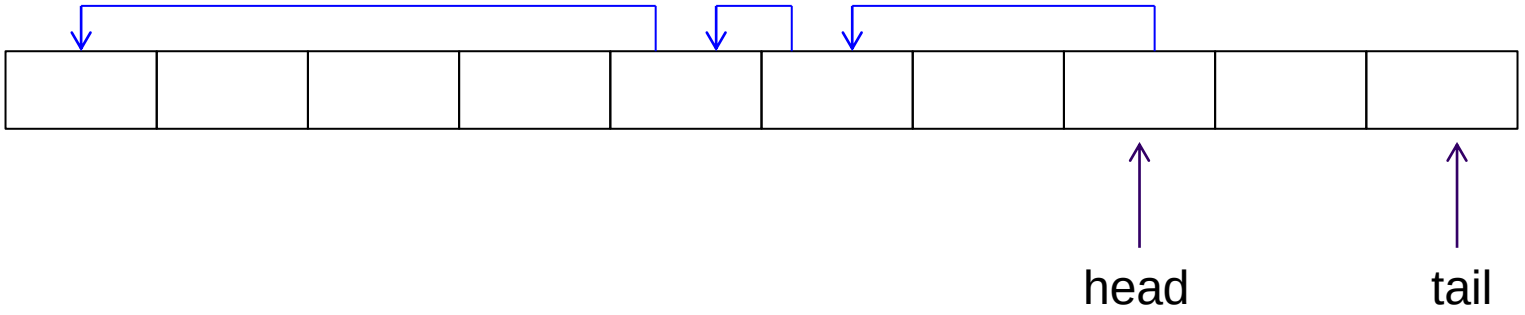
迷宫问题（POJ3984）

队列不能用STL的queue或deque，要自己写。用一维数组实现，维护一个队头指针和队尾指针



迷宫问题（POJ3984）

队列不能用STL的queue或deque，要自己写。用一维数组实现，维护一个队头指针和队尾指针



百练6044 鸣人和佐助

已知一张地图（以二维矩阵的形式表示）以及佐助和鸣人的位置。地图上的每个位置都可以走到，只不过有些位置上有大蛇丸的手下(#)，需要先打败大蛇丸的手下才能到这些位置。

鸣人有一定数量的查克拉，每一个单位的查克拉可以打败一个大蛇丸的手下。假设鸣人可以往上下左右四个方向移动，每移动一个距离需要花费1个单位时间，打败大蛇丸的手下不需要时间。如果鸣人查克拉消耗完了，则只可以走到没有大蛇丸手下的位置，不可以再移动到有大蛇丸手下的位置。

佐助在此期间不移动，大蛇丸的手下也不移动。请问，鸣人要追上佐助最少需要花费多少时间？

```
4 4 1
#@##
**##
###+
****
```

百练6044 鸣人和佐助

状态定义为：

（r, c, k），鸣人所在的行，列和查克拉数量

如果队头节点扩展出来的节点是有大蛇手下的节点，则其 k 值比队头的k要减掉 1。如果队头节点的查克拉数量为0, 则不能扩展出有大蛇手下的节点。

```
4 4 1
#@##
**##
###+
****
```

求钥匙的鸣人

不再有大蛇丸的手下。

但是佐助被关在一个格子里，需要集齐k种钥匙才能打开格子里的门门救出他。

K种钥匙散落在迷宫里。有的格子里放有一把钥匙。一个格子最多放一把钥匙。走到放钥匙的格子，即得到钥匙。

鸣人最少要走多少步才能救出佐助。

求钥匙的鸣人

状态：

（r, c, keys） ： 鸣人的行，列，已经拥有的钥匙种数

目标状态 （x, y, K） （x, y）是佐助呆的地方

如果队头节点扩展出来的节点上面有不曾拥有的某种钥匙，则该节点的 keys比队头节点的 keys要加1

广度优先搜索

八数码问题

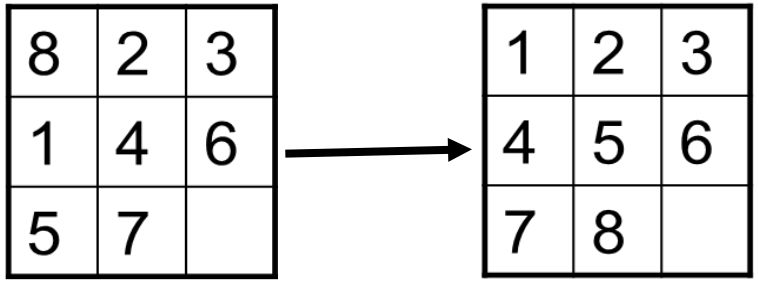
八数码（POJ1077）

- 八数码问题是人工智能中的经典问题

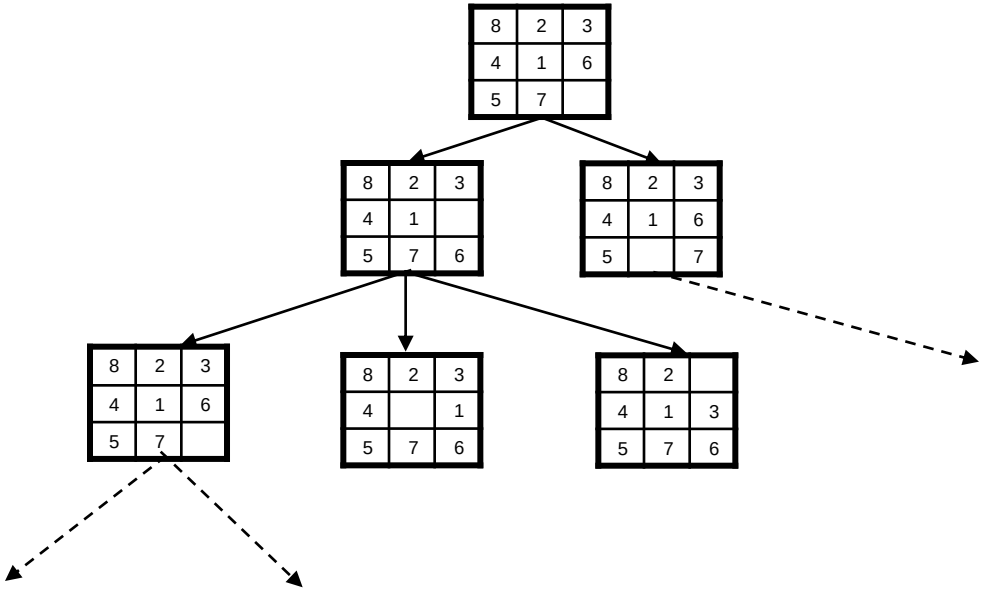
有一个3*3的棋盘，其中有0-8共9个数字，0表示空格，其他的数字可以和0交换位置。求由初始状态到达目标状态

1 2 3
4 5 6
7 8 0

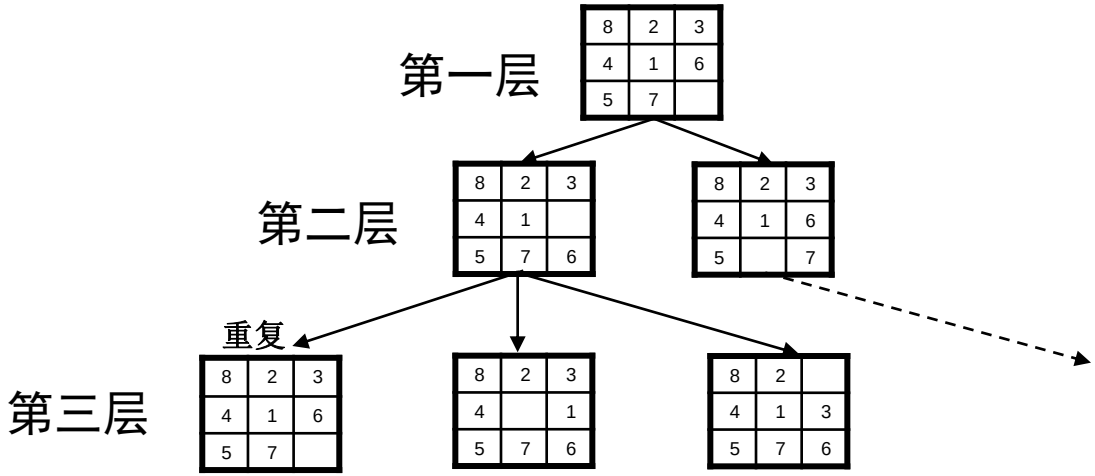
的步数最少的解。



- 状态空间

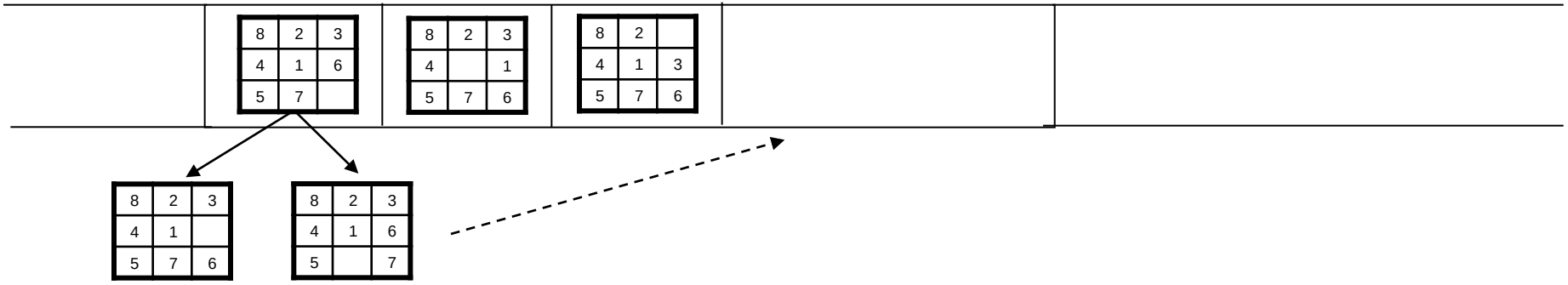


- 广度优先搜索（bfs）
  - 优先扩展浅层节点(状态)，逐渐深入



广度优先搜索

- 用队列保存待扩展的节点
- 从队首队取出节点，扩展出的新节点放入队尾，直到队首出现目标节点（问题的解）

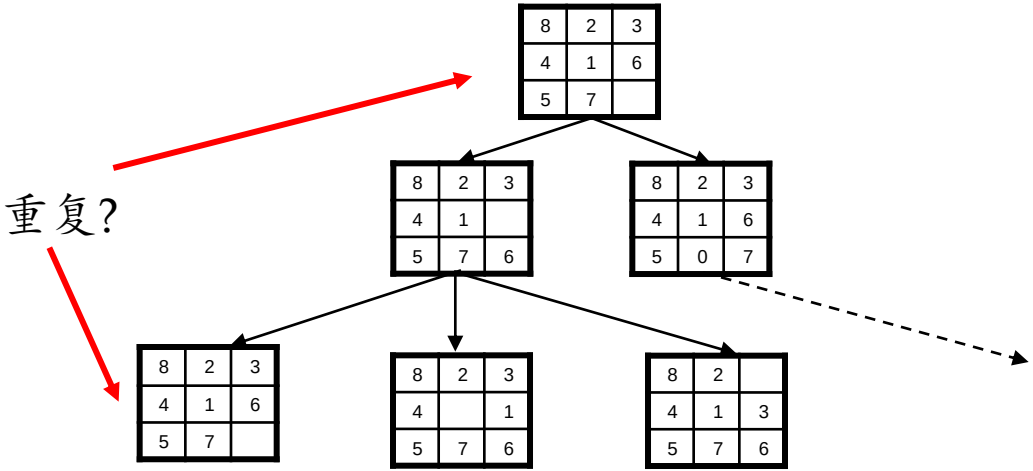


- 广度优先搜索的代码框架

```
BFS()
{
        初始化队列
        while(队列不为空且未找到目标节点)
        {
          取队首节点扩展，并将扩展出的非重复节点放入队尾；
                必要时要记住每个节点的父节点；
        }
}
```

关键问题：判重

- 新扩展出的节点如果和以前扩展出的节点相同，则则个新节点就不必再考虑
- 如何判重？



关键问题：判重

- 状态(节点）数目巨大，如何存储？
- 怎样才能较快判断一个状态是否重复？

用合理的编码表示“状态”，减小存储代价

- 方案一：

8	2	3
4	1	6
5	7	

每个状态用一个字符串存储，

要9个字节，太浪费了！！！

用合理的编码表示“状态”，减小存储代价

- 方案二：

8	2	3
4	1	6
5	7	

- 每个状态对应于一个9位数，则该9位数最大为876,543,210，小于2^{31}，则int 就能表示一个状态。
- 判重需要一个标志位序列，每个状态对应于标志位序列中的1位，标志位为0表示该状态尚未扩展，为1则说明已经扩展过了
- 标志位序列可以用字符数组a存放。a的每个元素存放8个状态的标志位。最多需要876,543,210位，因此a数组需要876,543,210 /8 + 1个元素，即 109,567,902 字节
- 如果某个状态对应于数x ,则其标志位就是a[x/8]的第x%8位
- 空间要求还是太大!!!!

用合理的编码表示“状态”，减小存储代价

- 方案三：

8	2	3
4	1	6
5	7	

- 将每个状态的字符串形式看作一个9位九进制数，则该9位数最大为$876543210_{(9)}$, 即 $381367044_{(10)}$ 需要的标志位数目也降为$381367044_{(10)}$ 比特,即47,670,881字节。
- 如果某个状态对应于数x ,则其标志位就是a[x/8]的第x%8位
- 空间要求还是有点大！！！！

用合理的编码表示“状态”，减小存储代价

- 方案三：

8	2	3
4	1	6
5	7	

- 状态数目一共只有9! 个，即$362880_{(10)}$个，怎么会需要 $876543210_{(9)}$ 即 $381367044_{(10)}$ 个标志位呢？

用合理的编码表示“状态”，减小存储代价

- 方案三：

8	2	3
4	1	6
5	7	

- 状态数目一共只有9! 个，即$362880_{(10)}$个，怎么会需要 $876543210_{(9)}$ 即 $381367044_{(10)}$ 个标志位呢？
- 如果某个状态对应于数x ,则其标志位就是a[x/8]的第x%8位
- 因为有浪费！例如，$666666666_{(9)}$ 根本不对应于任何状态，也为其准备了标志位！

用合理的编码表示“状态”，减小存储代价

- 方案四：

8	2	3
4	1	6
5	7	

- 把每个状态都看做’0’-’8’的一个排列，以此排列在全部排列中的位置作为其序号。状态用其排列序号来表示
- 012345678是第0个排列，876543210是第9!-1个
- 状态总数即排列总数：9!=362880
- 判重用的标志数组a只需要362,880比特即可。
- 如果某个状态的序号是x ,则其标志位就是a[x/8]的第x%8位

用合理的编码表示“状态”，减小存储代价

- 方案四：

8	2	3
4	1	6
5	7	

- 在进行状态间转移，即一个状态通过某个移动变化到另一个状态时，需要先把int形式的状态（排列序号），转变成字符串形式的状态，然后在字符串形式的状态上进行移动，得到字符串形式的新状态，再把新状态转换成int形式（排列序号）。

用合理的编码表示“状态”，减小存储代价

- 方案四：

8	2	3
4	1	6
5	7	

- 需要编写给定排列（字符串形式）求序号的函数
- 需要编写给定序号，求该序号的排列（字符串形式）的函数

用合理的编码表示“状态”，减小存储代价

- 方案五：

8	2	3
4	1	6
5	7	

- 还是把一个状态看作一个数的10进制表示形式
- 用set<int>进行判重。每入队一个状态，就将其加到set里面，判重时，查找该set，看能否找到状态

八数码问题有解性的判定

- 八数码问题的一个状态实际上是0~8的一个排列，对于任意给定的初始状态和目标，不一定有解，即从初始状态不一定能到达目标状态。
  - 因为排列有奇排列和偶排列两类，从奇排列不能转化成偶排列或相反。
- 如果一个数字0~8的随机排列，用F(X) (X!=0)表示数字X前面比它小的数(不包括'0')的个数，全部数字的F(X)之和为Y=∑(F(X))，如果Y为奇数则称该排列是奇排列，如果Y为偶数则称该排列是偶排列。
  - 871526340排列的 Y=0+0+0+1+1+3+2+3=10，，所以是偶排列。
  - 871625340排列的Y=0+0+0+1+1+2+2+3=9，所以是奇排列。
  - 因此，可以在运行程序前检查初始状态和目标状态的奇偶性是否相同，相同则问题可解，应当能搜索到路径。否则无解。

八数码问题有解性的判定

证明：移动0的位置，不改变排列的奇偶性

a1 a2 a3 a4 0 a5 a6 a7 a8 a9

0向上移动：

a1 0 a3 a4 a2 a5 a6 a7 a8 a9

八数码问题 ， 单向广搜，用set判重，

```
#include <iostream>
#include <bitset>
#include <cstring>
#include <cstdio>
#include <cstdlib>
#include <set>
using namespace std;
int goalStatus = 123456780; //目标状态
const int MAXS = 400000;
char result[MAXS];    //要输出的移动方案
struct Node {
        int status; //状态
        int father; //父节点指针，即myQueue的下标
        char move;    //父节点到本节点的移动方式 u/d/r/l
        Node(int s,int f,char m):status(s), father(f),move(m) { }
        Node() { }
};
Node myQueue[MAXS];   //状态队列，状态总数362880
int qHead = 0;         //队头指针
int qTail = 1;   //队尾指针
char moves[] = "udrl"; //四种移动
```

```
int NewStatus( int status, char move) {
//求从status经过 move 移动后得到的新状态。若移动不可行则返回-1
        char tmp[20];
        int zeroPos; //字符'0'的位置
        sprintf(tmp,"%09d",status); //需要保留前导0
        for( int i = 0;i < 9; ++ i )
                if( tmp[i] == '0' ) {
                        zeroPos = i;
                        break;
                } //返回空格的位置
        switch( move) {
                case 'u':
                        if( zeroPos - 3 < 0 )
                                return -1; //空格在第一行
                        else {
                                tmp[zeroPos] = tmp[zeroPos - 3];
                                tmp[zeroPos - 3] = '0';
                        }
                        break;
```

```
case 'd':
        if( zeroPos + 3 > 8 )
                return -1; //空格在第三行
        else {
                tmp[zeroPos] = tmp[zeroPos + 3];
                tmp[zeroPos + 3] = '0';
        }
        break;
case 'l':
        if( zeroPos % 3 == 0)
                return -1; //空格在第一列
        else {
                tmp[zeroPos] = tmp[zeroPos -1];
                tmp[zeroPos -1 ] = '0';
        }
        break;
```

```
            case 'r':
                    if( zeroPos % 3 == 2)
                            return -1; //空格在第三列
                    else {
                            tmp[zeroPos] = tmp[zeroPos + 1];
                            tmp[zeroPos + 1 ] = '0';
                    }
                    break;
        }
        return atoi(tmp);
}
```

```
bool Bfs(int status) {
//寻找从初始状态status到目标的路径，找不到则返回false
        int newStatus;
        set<int> expanded;
        myQueue[qHead] = Node(status,-1,0);
        expanded.insert(status);
        while ( qHead != qTail) { //队列不为空
                status = myQueue[qHead].status;
                if( status == goalStatus ) //找到目标状态
                        return true;
                for( int i = 0;i < 4;i ++ ) { //尝试4种移动
                        newStatus = NewStatus(status,moves[i]);
                        if( newStatus == -1 )
                                continue; //不可移，试下一种
                        if(expanded.find(newStatus)!=expanded.end())
                                continue; //已扩展过，试下一种
                        expanded.insert(newStatus);
```

```
                    myQueue[qTail++] =
                            Node(newStatus,qHead,moves[i]);
                            //新节点入队列
                }
                qHead ++;
        }
        return false;
}
```

```
int main(){
        char line1[50];  char line2[20];
        while( cin.getline(line1,48)) {
                int i,j;
                //将输入的原始字符串变为数字字符串
                for( i = 0, j = 0; line1[i]; i ++ ) {
                        if( line1[i] != ' ' ) {
                                if( line1[i] == 'x' )
                                        line2[j++] = '0';
                                else
                                        line2[j++] = line1[i];
                        }
                }
                line2[j] = 0; //字符串形式的初始状态
```

```
            if( Bfs(atoi(line2))) {
                    int moves = 0;
                    int pos = qHead;
                    do {  //通过father找到成功的状态序列，输出相应步骤
                            result[moves++] = myQueue[pos].move;
                            pos = myQueue[pos].father;
                    } while( pos); //pos = 0 说明已经回退到初始状态了
                    for( int i = moves -1; i >= 0; i -- )
                            cout << result[i];
            }
            else
                    cout << "unsolvable" << endl;
    }
}
```

广搜与深搜的比较

- 广搜一般用于状态表示比较简单、求最优策略的问题
  - 优点：是一种完备策略，即只要问题有解，它就一定可以找到解。并且，广度优先搜索找到的解，还一定是路径最短的解。
  - 缺点：盲目性较大，尤其是当目标节点距初始节点较远时，将产生许多无用的节点，因此其搜索效率较低。需要保存所有扩展出的状态，占用的空间大
- 深搜几乎可以用于任何问题
  - 只需要保存从起始状态到当前状态路径上的节点
- 根据题目要求凭借自己的经验和对两个搜索的熟练程度做出选择

59

八数码问题 ： 如何加快速度

POJ 1077为单组数据

HDU 1043 为多组数据

裸的广搜在POJ 能过，在HDU会超时