程序设计与算法(二)

郭 炜

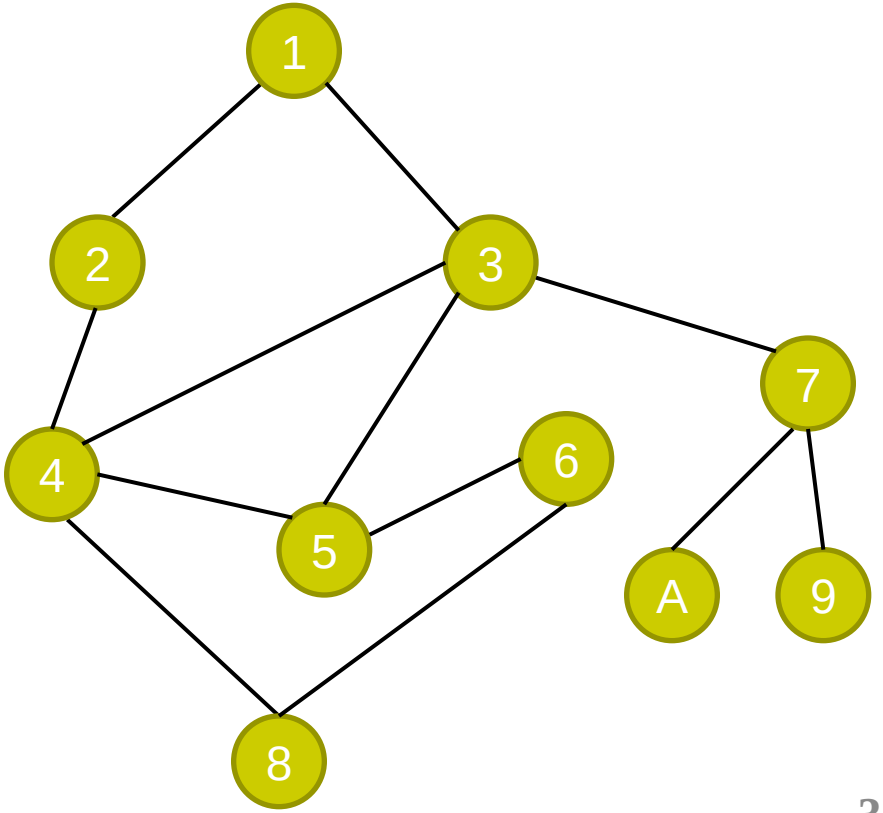
深度优先搜索

入门：城堡问题

在图上寻找路径

在图上如何寻找从1到8的路径?

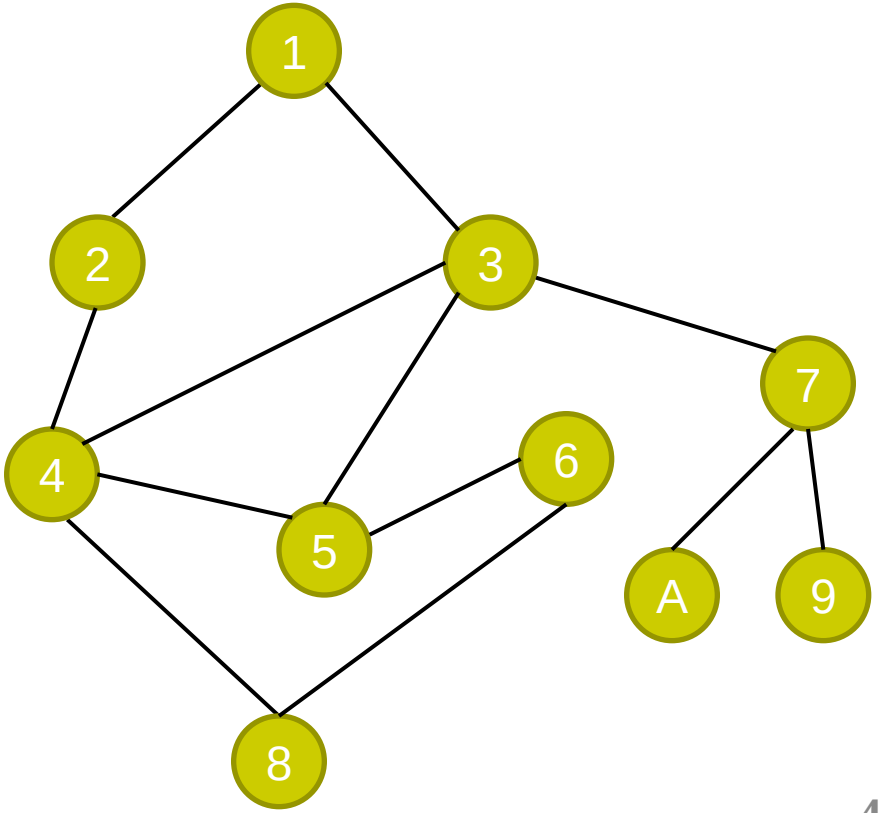
一种策略：只要能发现没走过的点，就走到它。有多个点可走就随便挑一个，如果无路可走就回退，再看有没有没走过的点可走



在图上寻找路径

在图上如何寻找从1到8的路径?

运气最好： 1->2->4->8

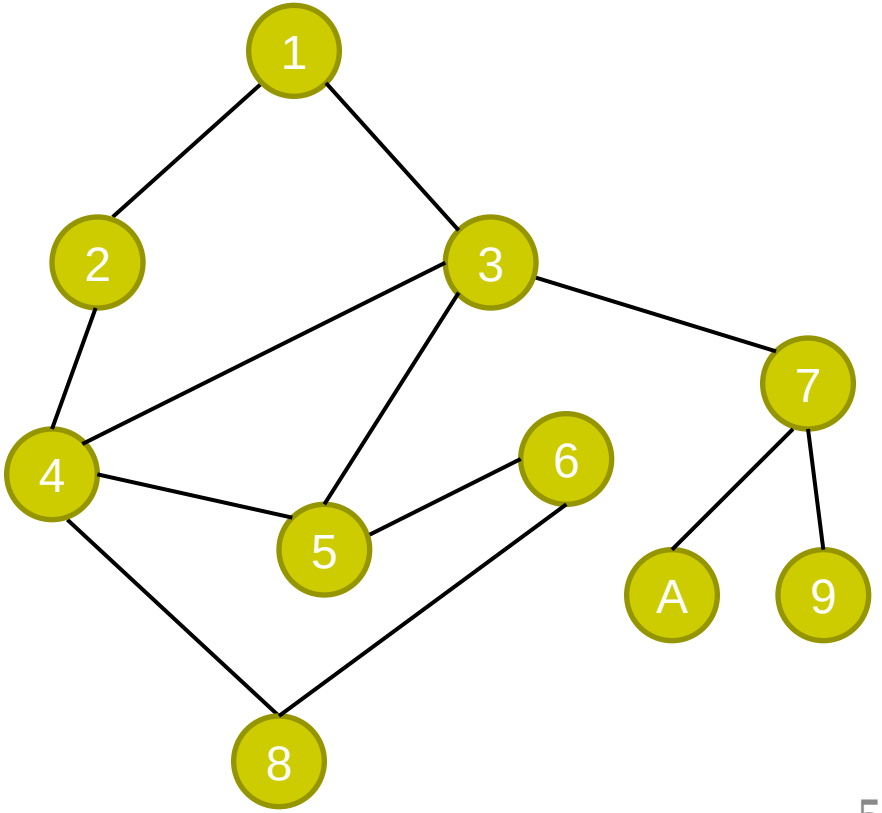


在图上寻找路径

在图上如何寻找从1到8的路径?

运气最好： 1->2->4->8

运气稍差： 1->2->4->5->6->8



在图上寻找路径

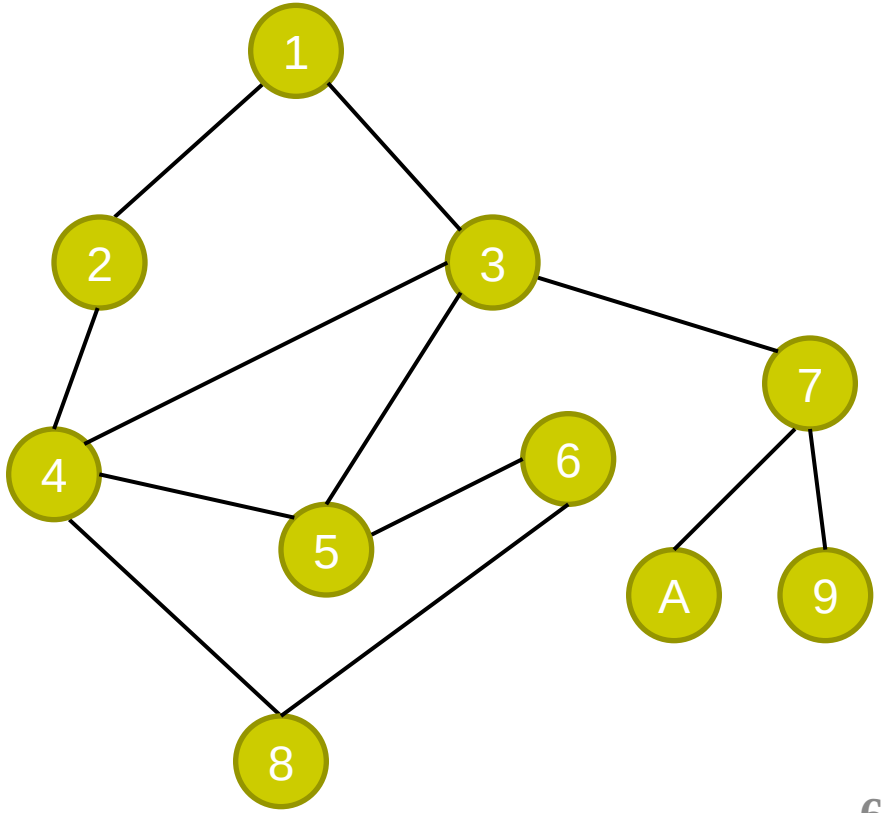
在图上如何寻找从1到8的路径?

运气最好： 1->2->4->8

运气稍差： 1->2->4->5->6->8

运气坏：

1->3->7->9=>7->A=>7=>3->5->6->8
（双线箭头表示回退）



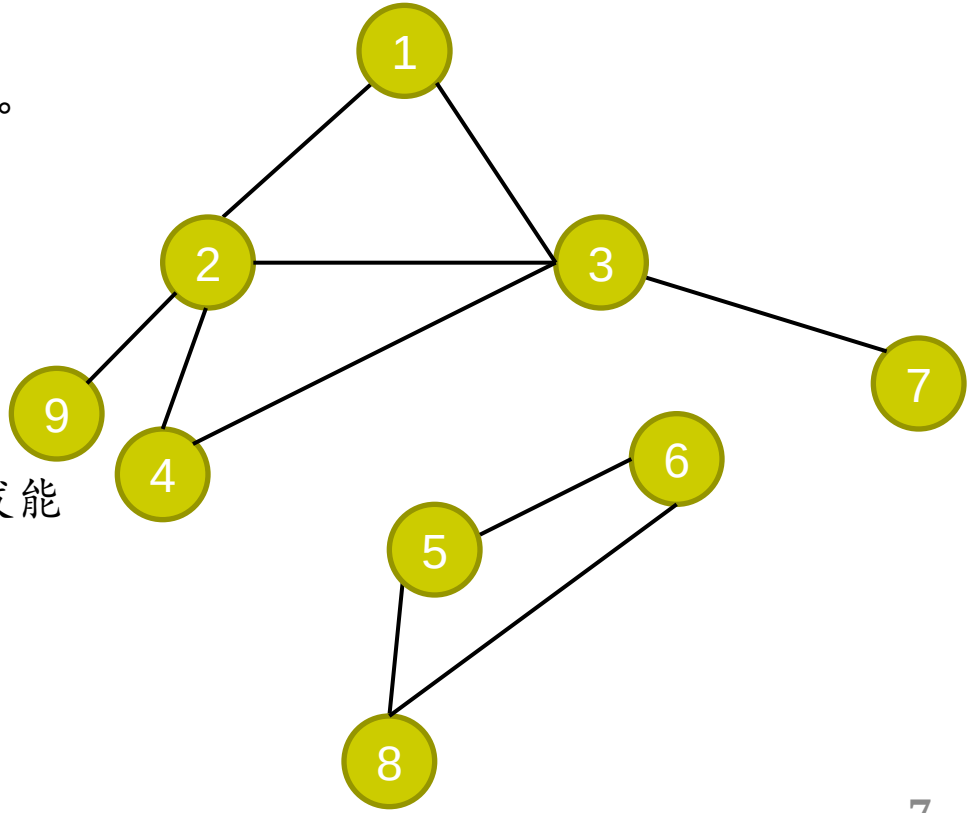
在图上寻找路径

不连通的图，无法从节点1走到节点8。

完整的尝试过程可能如下：
1->2->4->3->7=>3=>4=>2->9=>2=>1

结论：不存在从1到8的路径

得出这个结论之前，一定会把从1出发能走到的点全部都走过。



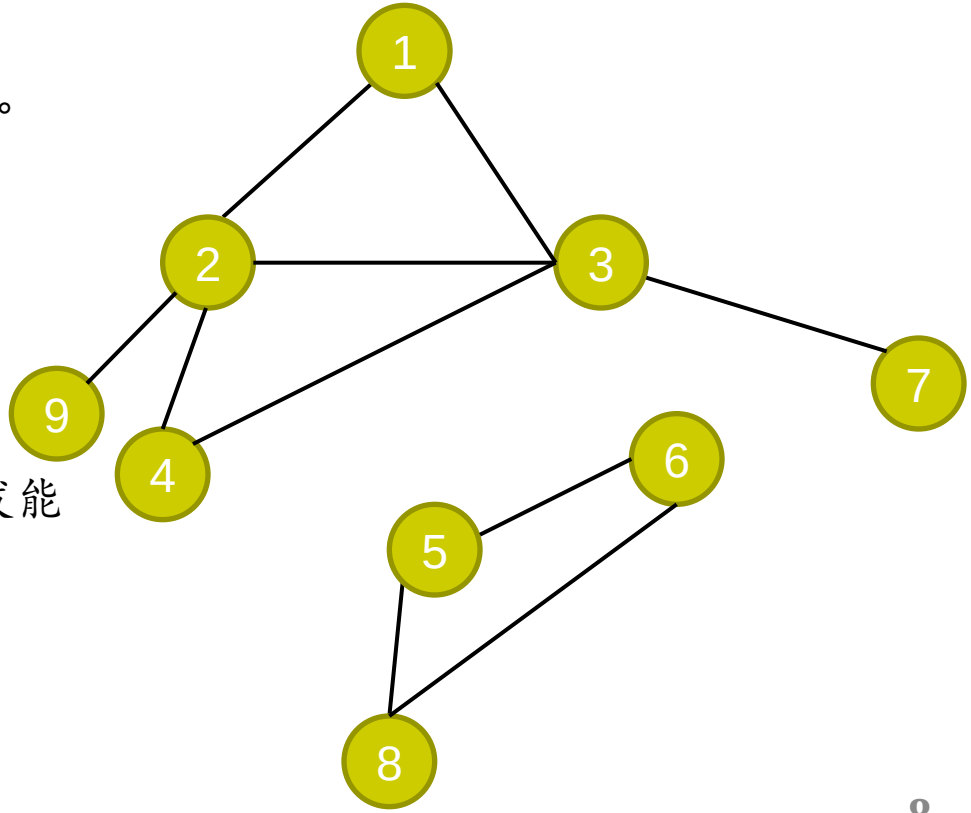
在图上寻找路径

不连通的图，无法从节点1走到节点8。

完整的尝试过程可能如下：
1->2->4->3->7=>3=>4=>2->9=>2=>1

结论：不存在从1到8的路径

得出这个结论之前，一定会把从1出发能走到的点全部都走过。



深度优先搜索(Depth-First-Search)

从起点出发，走过的点要做标记，发现有没走过的点，就随意挑一个往前走，走不了就回退，此种路径搜索策略就称为“深度优先搜索”，简称“深搜”。

其实称为“远度优先搜索”更容易理解些。因为这种策略能往前走一步就往前走一步，总是试图走得更远。所谓远近(或深度)，就是以距离起点的步数来衡量的。

在图上寻找路径

➢判断从V出发是否能走到终点：

```
bool Dfs(V) {
        if( V 为终点）
                return true;
        if( V 为旧点)
                return false;
        将v标记为旧点；
        对和v相邻的每个节点U {
                if( Dfs(U) == true)
                        return true;
        }
        return false;
}
```

在图上寻找路径

```
int main()
{
        将所有点都标记为新点;
        起点 = 1
        终点 = 8
        cout << Dfs(起点）;
}
```

在图上寻找路径

➢判断从V出发是否能走到终点,如果能，要记录路径：

```
Node path[MAX_LEN];   //MAX_LEN取节点总数即可
int depth;
bool Dfs(V) {
        if( V为终点）{
                path[depth] = V;
                return true;
        }
        if( V 为旧点)
                return false;
        将V标记为旧点；
        path[depth]=V;
        ++depth;
```

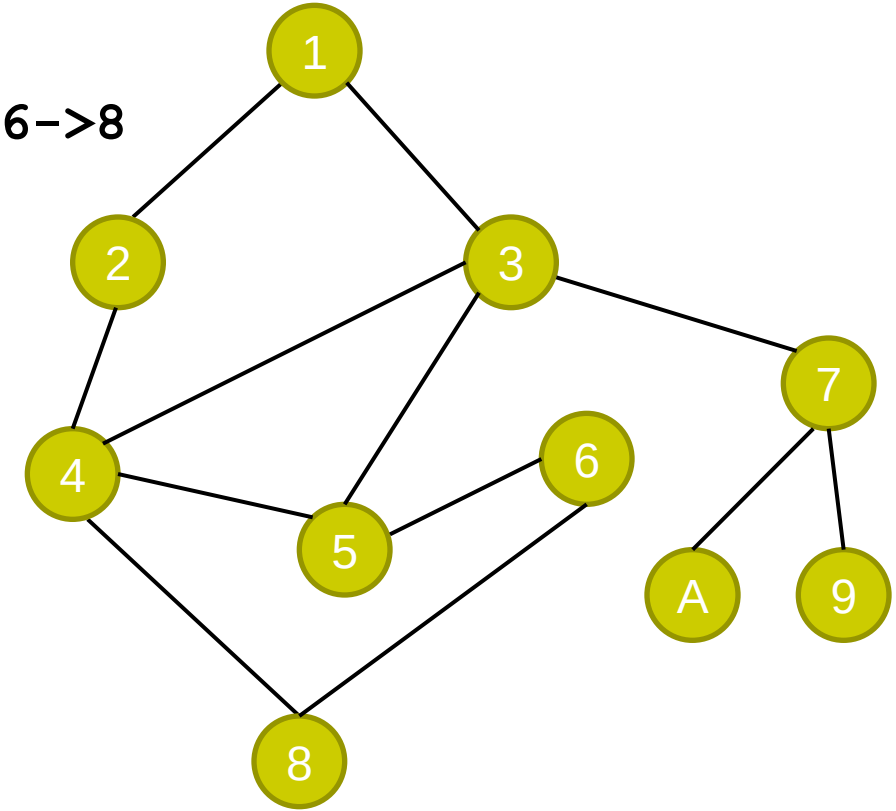
在图上寻找路径

```
        对和v相邻的每个节点U    {
                if( Dfs(U) == true)
                        return true;
        }
        --depth;
        return false;
}
int main()
{
        将所有点都标记为新点；
        depth = 0;
        if( Dfs(起点）)  {
                for(int i = 0;i <= depth; ++ i)
                        cout << path[i] << endl;
        }
}
```

在图上寻找路径

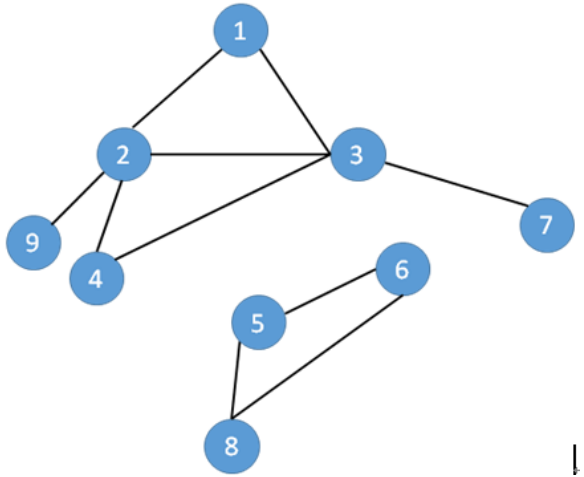
1->3->7->9=>7->A=>7=>3->5->6->8

path: 1,3,5,6,8



遍历图上所有节点

```
Dfs(V) {
        if( V是旧点)
                return;
        将V标记为旧点;
        对和V相邻的每个点 U {
                Dfs(U);
        }
}
int main() {
        将所有点都标记为新点;
        while(在图中能找到新点k)
                Dfs(k);
}
```



图的表示方法 -- 邻接表

用一个二维数组G存放图，G[i][j]表示节点i和节点j之间边的情况(如有无边，边方向，权值大小等）。

遍历复杂度：$O(n^2)$　　n为节点数目

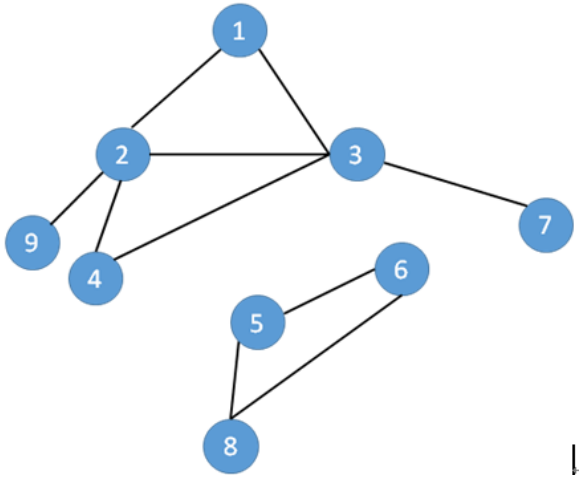
图的表示方法 -- 邻接表

每个节点V对应一个一维数组(vector)，里面存放从V连出去的边，边的信息包括另一顶点，还可能包含边权值等。

1	2	3		
2	1	4	9	3
3	1	4	7	2
4	2	3		
5	6	8		
6	5	8		
7	3			
8	5	6		
9	2			

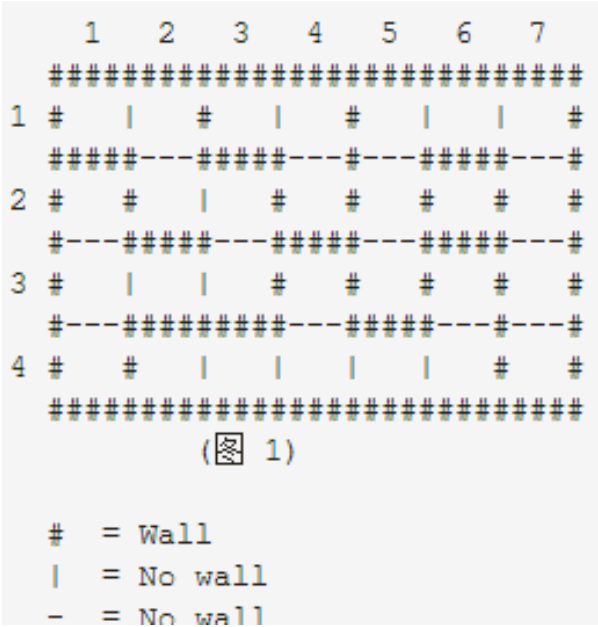
遍历复杂度：O(n+e)

n为节点数目，e为边数目



例题：百练2815 城堡问题

- 右图是一个城堡的地形图。请你编写一个程序，计算城堡一共有多少房间，最大的房间有多大。城堡被分割成m×n(m≤50, n≤50)个方块，每个方块可以有0~4面墙。



输入输出

- 输入
  - 程序从标准输入设备读入数据。
  - 第一行是两个整数，分别是南北向、东西向的方块数。
  - 在接下来的输入行里，每个方块用一个数字(0≤p≤50)描述。用一个数字表示方块周围的墙，1表示西墙，2表示北墙，4表示东墙，8表示南墙。每个方块用代表其周围墙的数字之和表示。城堡的内墙被计算两次，方块(1,1)的南墙同时也是方块(2,1)的北墙。
  - 输入的数据保证城堡至少有两个房间。
- 输出
  - 城堡的房间数、城堡中最大房间所包括的方块数。
  - 结果显示在标准输出设备上。

- 样例输入

4

7

11 6 11 6 3 10 6

7 9 6 13 5 15 5

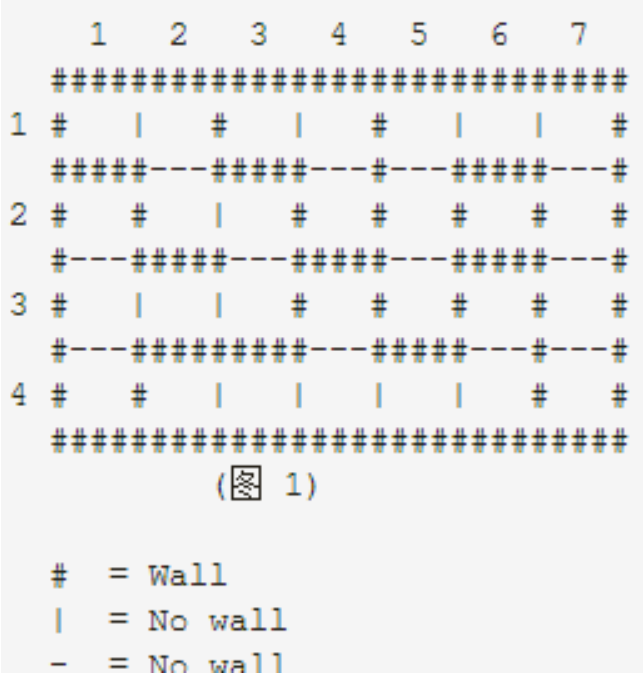
1 10 12 7 13 7 5

13 11 10 8 10 12 13

- 样例输出

5

9

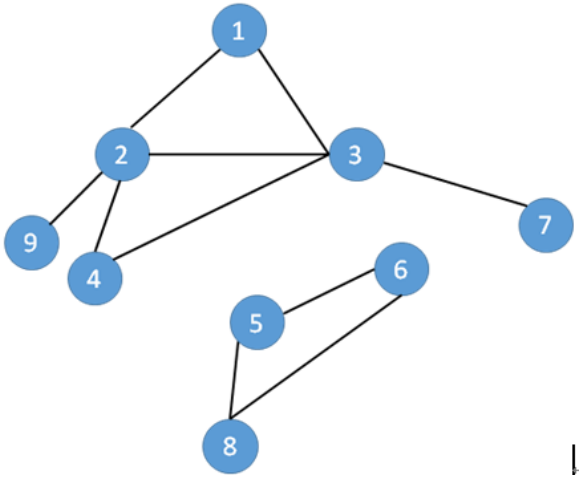


解题思路

- 把方块看作是节点，相邻两个方块之间如果没有墙，则在方块之间连一条边，这样城堡就能转换成一个图。

- 求房间个数，实际上就是在求图中有多少个极大连通子图。

- 一个连通子图，往里头加任何一个图里的其他点，就会变得不连通，那么这个连通子图就是极大连通子图。（如：(8, 5, 6)）



解题思路

- 对每一个房间，深度优先搜索，从而给这个房间能够到达的所有位置染色。最后统计一共用了几种颜色，以及每种颜色的数量。
- 比如

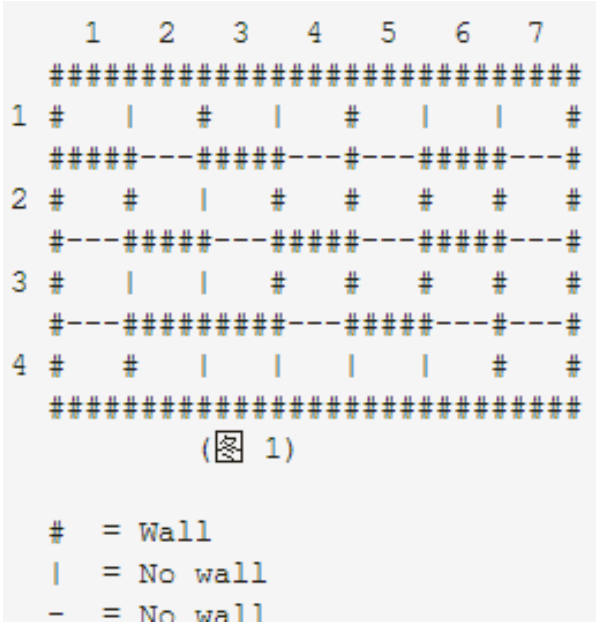
1 1 2 2 3 3 3

1 1 1 2 3 4 3

1 1 1 5 3 5 3

1 5 5 5 5 5 3

- 从而一共有5个房间，最大的房间（1）占据9个格子



```
#include <iostream>
#include <stack>
#include <cstring>
using namespace std;
int R,C;  //行列数
int rooms[60][60];
int color[60][60]; //方块是否染色过的标记
int maxRoomArea = 0, roomNum = 0;
int roomArea;
void Dfs(int i,int k) {
        if( color[i][k] )
                return;
        ++ roomArea;
        color [i][k] = roomNum;
        if( (rooms[i][k] & 1) == 0 ) Dfs(i,k-1);    //向西走
        if( (rooms[i][k] & 2) == 0 ) Dfs(i-1,k);    //向北
        if( (rooms[i][k] & 4) == 0 ) Dfs(i,k+1);   //向东
        if( (rooms[i][k] & 8) == 0 ) Dfs(i+1,k);   //向南
}
```

```
int main()  {
        cin >> R >> C;
        for( int i = 1;i <= R;++i)
                for ( int k = 1;k <= C; ++k)
                        cin >> rooms[i][k];
        memset(color,0,sizeof(color));
        for( int i = 1;i <= R; ++i)
                for( int k = 1; k <= C; ++ k) {
                        if( !color[i][k] ) {
                                ++ roomNum ;    roomArea = 0;
                                Dfs(i,k);
                                maxRoomArea =
                                        max(roomArea,maxRoomArea);
                        }
                }
        cout << roomNum << endl;
        cout << maxRoomArea << endl;
}
```

复杂度：O(R*C)

例题：百练4982 踩方格

有一个方格矩阵，矩阵边界在无穷远处。我们做如下假设：

a. 每走一步时，只能从当前方格移动一格，走到某个相邻的方格上；
b. 走过的格子立即塌陷无法再走第二次；
c. 只能向北、东、西三个方向走；

请问：如果允许在方格矩阵上走n步(n<=20)，共有多少种不同的方案。2种走法只要有一步不一样，即被认为是不同的方案。

例题：百练4982 踩方格

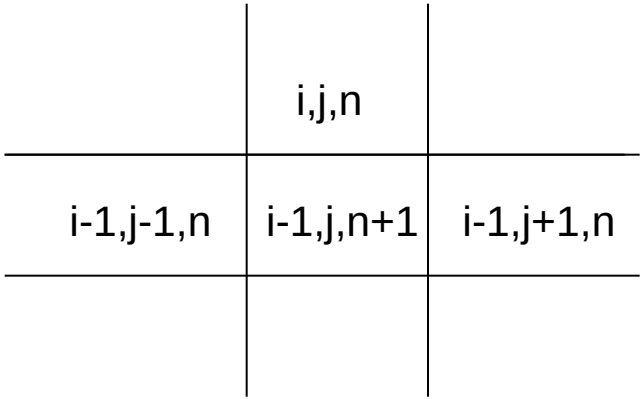
思路：

递归
从（i, j）出发，走n步的方案数，等于以下三项之和：

从(i+1, j)出发，走n-1步的方案数。前提：(i+1, j)还没走过
从(i, j+1)出发，走n-1步的方案数。前提：(i, j+1)还没走过
从(i, j-1)出发，走n-1步的方案数。前提：(i, j-1)还没走过

```
#include <iostream>
#include <cstring>
using namespace std;
int visited[30][50];
int ways ( int i,int j,int n)
{
        if( n == 0)
                return 1;
        visited[i][j] = 1;
        int num = 0;
        if( ! visited[i][j-1] )
                num+= ways(i,j-1,n-1);
        if( ! visited[i][j+1] )
                num+= ways(i,j+1,n-1);
        if( ! visited[i+1][j] )
                num+= ways(i+1,j,n-1);
        visited[i][j] = 0;
        return num;
}
```

```
#include <iostream>
#include <cstring>
using namespace std;
int visited[30][50];
int ways ( int i,int j,int n)
{
        if( n == 0)
                return 1;
        visited[i][j] = 1;
        int num = 0;
        if( ! visited[i][j-1] )
                num+= ways(i,j-1,n-1);
        if( ! visited[i][j+1] )
                num+= ways(i,j+1,n-1);
        if( ! visited[i+1][j] )
                num+= ways(i+1,j,n-1);
        visited[i][j] = 0;
        return num;
}
```



```
int main()
{
        int n;
        cin >> n;
        memset(visited,0,sizeof(visited));

        cout << ways(0,25,n) << endl;
        return 0;
}
```