2.1 합성합수의 미분

연쇄법칙(chain rule)

$y = (x+2)^2$ 을 미분하여라.

$y = x^2 + 4x + 4$ 로 전개 해서 각 항마다 미분한다. $y' = 2x + 4$ 이다.

g 가 x 에서 미분가능하고 f 는 $g(x)$ 에서 미분가능하면

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

(예제) (1) $y = (x+2)^2$

$step\ 1$: $x+2$ 를 x 로 보고 기본형 $(x^n)' = x^{n-1}$ 대로 미분 한다. $y' = 2(x+2)$

$step\ 2$: $x+2$ 를 미분해서 곱한다. $y' = 2(x+2) * 1 = 2x+4$

(2) $\sqrt{x^2+3x} \xrightarrow[\frac{1}{2\sqrt{x}}]{} \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+3x}} \longrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+3x}} * (2x+3)$

$\sqrt{\sin x} \longrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{\sin x}} \longrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{\sin x}} * \cos x$

$\sqrt{e^x} \longrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{e^x}} \longrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{e^x}} * e^x$

$$(\sin x)' = \quad \cos x$$

(3) $(\sin(x^2 + 3x))'$ $\Longrightarrow$ $= \cos(x^2 + 3x)$ $\Longrightarrow$ $= (2\mathrm{x} + 3)\cos(x^2 + 3x)$

$(\sin(\cos x))'$ $\qquad = \cos(\cos x)$ $\qquad = (-\sin \mathrm{x})\cos(\cos x)$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$(\sin^2 x)'$ $\Longrightarrow$ $= 2\sin x$ $\Longrightarrow$ $= 2\sin x \cos x$

$(\sin^2(5x + 3))'$ $\qquad = 2\sin(5x + 3)$ $\qquad = 5 * 2\sin(5x + 3)\cos(5x + 3\ )$

(4) $y = e^{3x}$ $\quad$ $y' = e^{3x}$ $\quad$ $y' = 3e^{3x}$

$y = e^{\sin x}$ $\quad$ $y' = e^{\sin x}$ $\quad$ $y' = \cos x \, e^{\sin x}$

$y = e^{x^2}$ $\quad$ $y' = e^{x^2}$ $\quad$ $y' = 2x \, e^{x^2}$

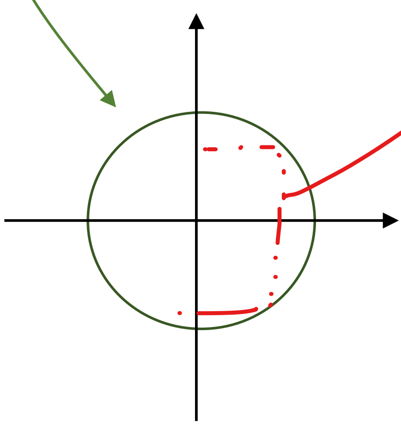
$y = e^{\sqrt{x^2+x}}$ $\quad$ $y' = e^{\sqrt{x^2+x}}$ $\quad$ $y' = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} e^{\sqrt{x^2+x}}$

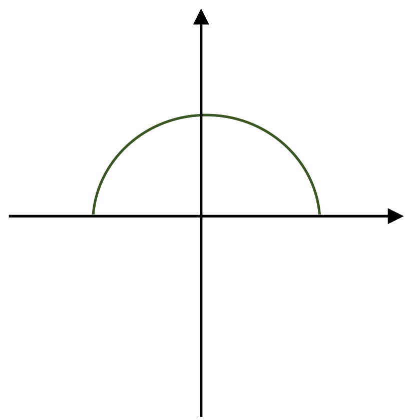
2.2 음함수의 미분법

함수 : 독립변수 x 에 대한 함숫값은 하나만 존재해야한다.

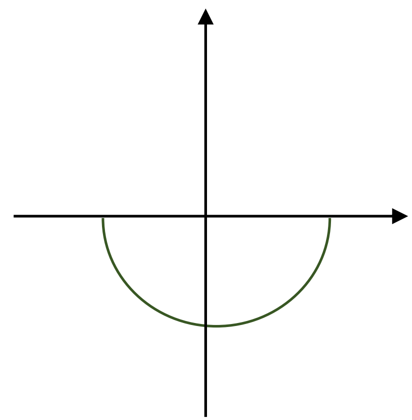
$x \longmapsto f(x)$

$x^2 + y^2 = 25$, $x^3 + y^3 = 6xy$: 음함수 (implicit function) 리고 한다.





$f(x) = \sqrt{25 - x^2}$



$g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$

음함수의 경우 도함수 y' 을 구하기 위해서는 y 를 x에 관한 함수라고 생각하고 연쇄법칙을 이용하여 해결한다.

(예제 2.12) 반지름이 2인 원 위의 점 $(1, \sqrt{3})$에서 접선의 방정식을 구하라.

$x^2 + y^2 = 4$ 에서 각 항을 x로 미분하면

$$((3x+1)^2)' = 2(3x+1)(3x+1)'$$

2x + (   ) =0

y^2 을 미분하면 $2y \cdot y'$ 이다.

$2x + 2y\,y' = 0$ 이 되어, $y' = -\frac{x}{y}$ 이다.

$x = 1, y = \sqrt{3}$ 일 때 도함수 값은 $y' = -\frac{1}{\sqrt{3}}$가 되어 구하는 접선의 방정식은

$$y - \sqrt{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1) \text{ 이다.}$$

도함수를 구하자.

(1) $2x + y^2 = xy \longrightarrow 2 + 2y\,y' = y + xy' \longrightarrow (2y - x)y' = y - 2 \longrightarrow y' = \dfrac{y-2}{2y-x}$

(2) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \longrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\,y' = 0 \longrightarrow y' = -\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

예제 2.13

$$\sin y - xy^2 + \cos x = 2y$$

$\cos y\,y'$

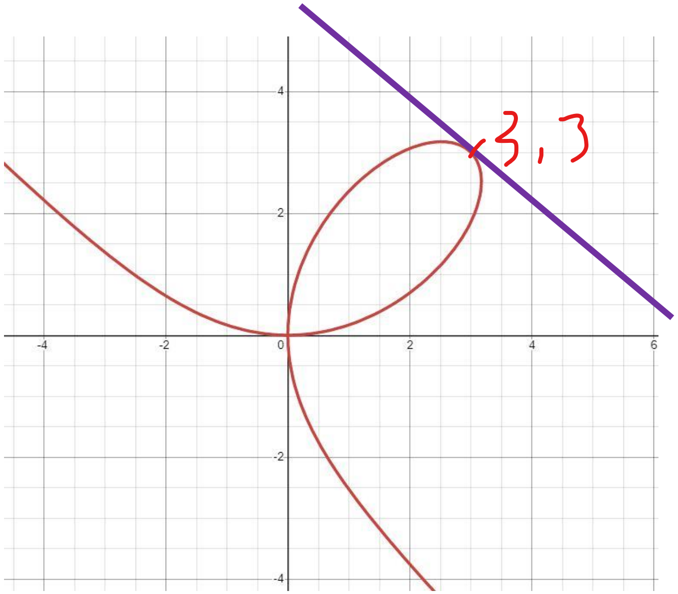
$y^2 + 2xy\,y'$

$-\sin x$

$2y'$

$$y' = \frac{y^2 + \sin x}{\cos y - 2xy - 2}$$

Descartes 엽선 $x^3 + y^3 = 6xy$



(a) (3, 3) 에서 접선의 방정식을 구하라.

$$y - 3 = ?\,(x - 3)$$

각 항별로 미분하면 $3x^2 + 3y^2y' = 6xy' + 6y$ 이다.

$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$ 이므로 (3,3) 에서 $y' = -1$ 이다.

$x^3 + y^3 = 3axy$: 데카르트 엽선

$a > 0$

$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad y' = -\frac{x}{y}$$

$$x^3 + y^3 = a^3 \qquad y' = -\frac{x^2}{y^2}$$

$$3x^2 + 3y^2 y' = 0$$

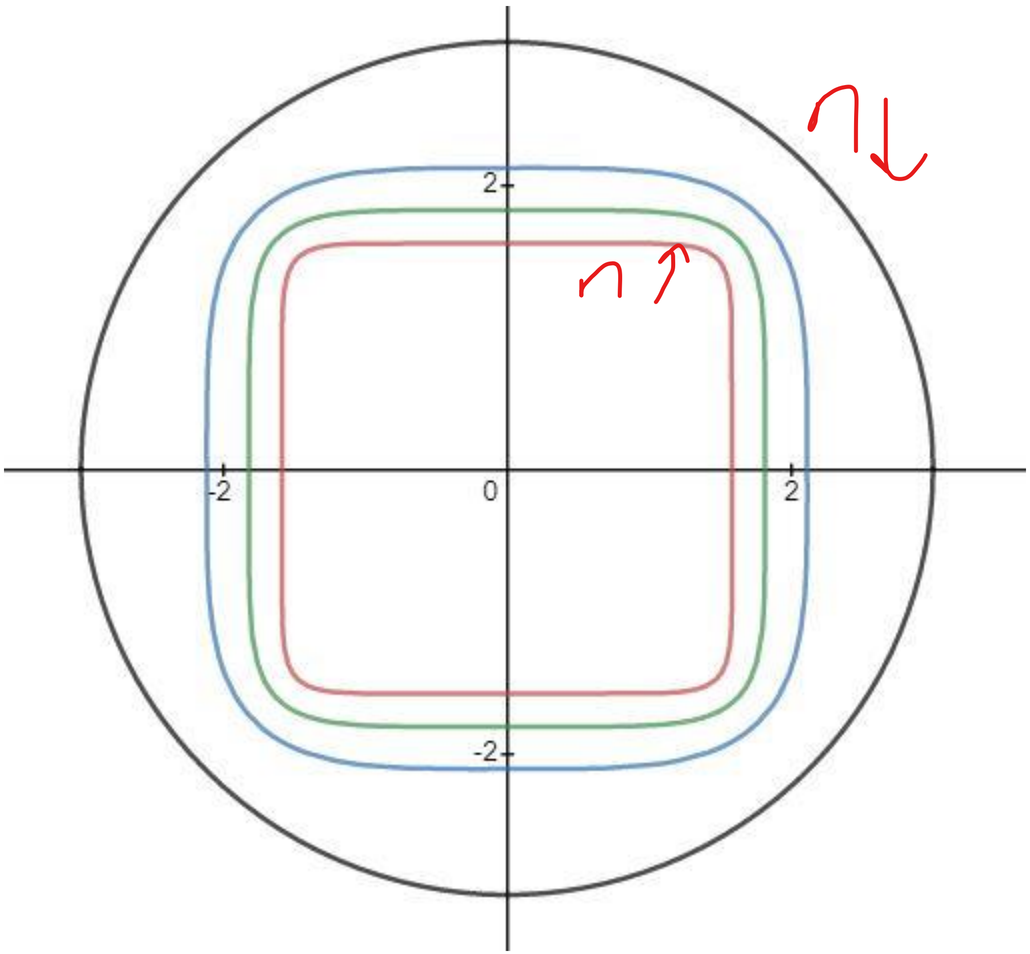
$$x^4 + y^4 = a^4 \qquad y' = -\frac{x^3}{y^3}$$

$$4x^3 + 4y^3 y' = 0$$

$$x^n + y^n = a^n \longrightarrow y' = -\frac{x^{n-1}}{y^{n-1}}$$

페르마의 정리

$x^n + y^n = a^n$



$x^2 + y^2 = a^2$ 일 때 y'' 을 구하자. $\boxed{y' = -\frac{x}{y}}$ 임을 알고 있다. 이것을 한 번 더 미분하면

$$y'' = -\left(\frac{y - x\,y'}{y^2}\right) = -\left(\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}\right) = -\left(\frac{\frac{y^2 + x^2}{y}}{y^2}\right) = -\left(\frac{x^2 + y^2}{y^3}\right) = -\frac{a^2}{y^3}$$

$x^4 + y^4 = a^4$ 일 때 y'' 을 구하자. $y' = -\frac{x^3}{y^3}$ 임을 일고 있다. 이것을 한 번 더 미분하면

$$y'' = -\left(\frac{3x^2y^3 - x^3\,(y^3)'}{y^6}\right) = -\left(\frac{3x^2y^3 - 3x^3y^2\left(-\frac{x^3}{y^3}\right)}{y^6}\right) = -\left(\frac{3x^2(x^4 + y^4)}{y^7}\right) = -\frac{3x^2a^4}{y^7}$$