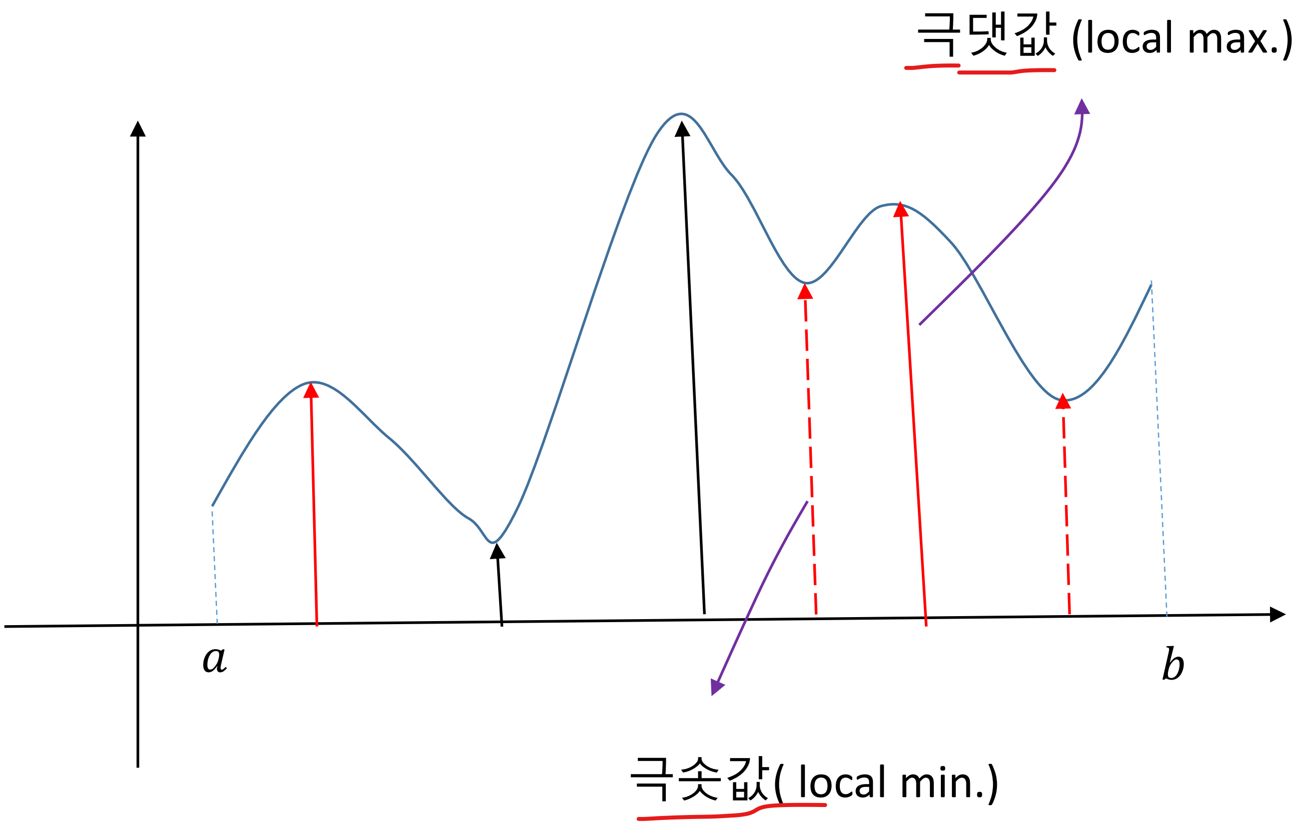
4장 미분의 응용 p 186

비교과 프로그램 :이런 수학 처음이지 (misdh@ hanmail.net)

1 최댓값과 최솟값

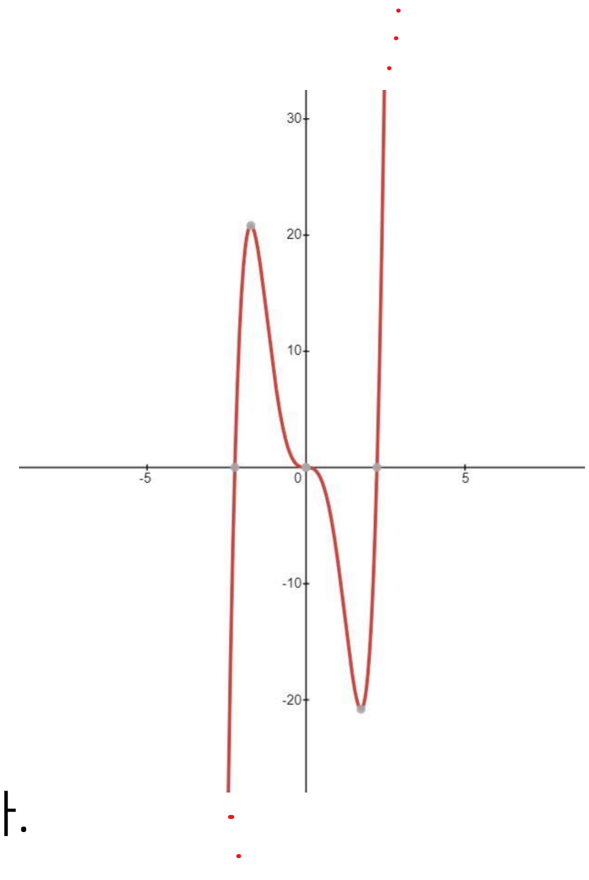
(1) $\forall x \in D, f(x) \leq f(c)$ 를 만족할 때 최댓값(maximum value)

(2) $\forall x \in D, f(c) \leq f(x)$ 를 만족할 때 최솟값(minimum value)



f 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속이면 f는 구간 $[a, b]$ 에서 어떤 수 c와 d에서 최댓값 $f(c)$와 최솟값 $f(d)$ 를 갖는다.

1.6 (Fermat Theorem) : f가 c에서 극값을 갖고 $f'(c)$가 존재 하면 $f'(c) = 0$ 이다.



(예제) 페르마 정리의 역은 성립하지 않는다.

(1) $f(x) = 2x^5 - 10x^3$.

$f'(x) = 10x^4 - 30x^2$, $f'(x) = 0$ 의 해는 $x = 0, x = \pm\sqrt{3}$

$x = -\sqrt{3}$ 에서 극댓값 $x = \sqrt{3}$ 에서 극솟값

$x = 0$ 에서 극대, 극소 아니다

f 는 최댓값이나 최솟값을 갖지않는다.

(2) $f(x) = |x|$. 최솟값을 갖지만 $f'(0)$ 은 존재하지 않는다.

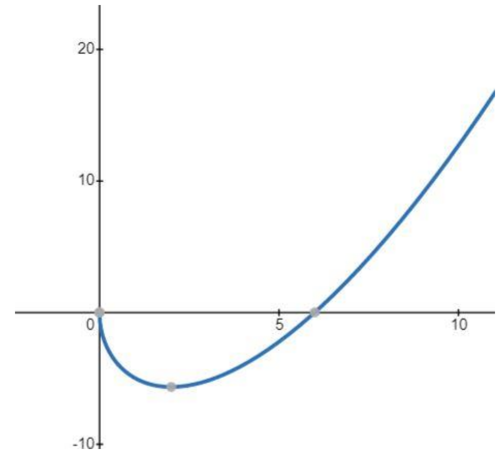
극값을 구하기 위해서는 $f'(c) = 0$ 이거나 $f'(c)$ 가 존재하지 않는 경우를 조사하여야 한다.

$f'(c) = 0$ 이거나 $f'(c)$ 가 존재하지 않는 c 를 임계점, 임계수(critical number) 라 한다.

p.193 예제1.8 $f(x) = \sqrt{x}(x-6)$의 임계점을 구하라.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-6) + \sqrt{x} = \frac{3x-6}{2\sqrt{x}}$$

$x = 0$: 임계점 $x = 2$: 임계점



(예제) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1, \quad -\frac{1}{2} \le x \le 4$ 최댓값, 최솟값, 극값

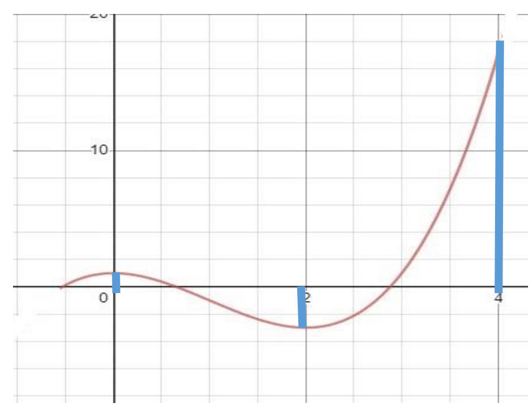
(풀이) $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$ 이므로 두 임계수 $x = 0,\ x = 2$ 를 얻는다.

이 점에서의 함숫값이 극값이 된다.

$f(0) = 1, \quad f(2) = -3$

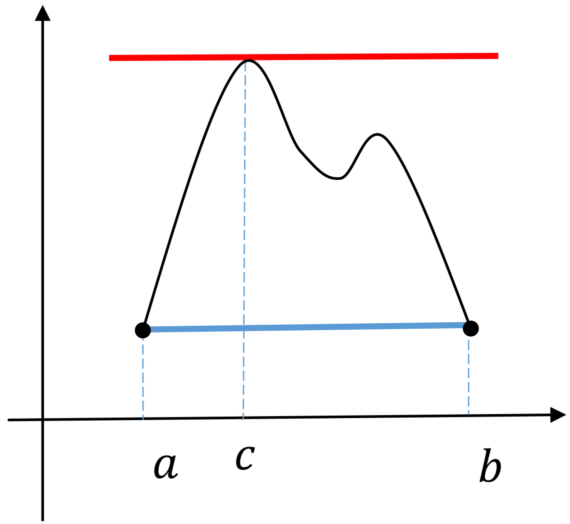
이때 주어진 구간의 양 끝점에서 함숫값을 구해보면

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}, \quad f(4) = 17$$



Rolle's Theorem: f 가 닫힌구간 $[a,b]$ 에서 연속, 열린구간 (a,b) 에서 미분가능.

$$f(a)=f(b) \implies \exists\ c \in (a,b)\ s.t.\ f'(c)=0$$



예제1.13 움직이는 물체의 시간에 대한 위치함수 $s=f(t)$ 가 미분 가능하다고 하자.

특정한 두 순간에 같은 위치에 있다면 그 순간 사이에 속도가 0이 되는 순간이 있다.

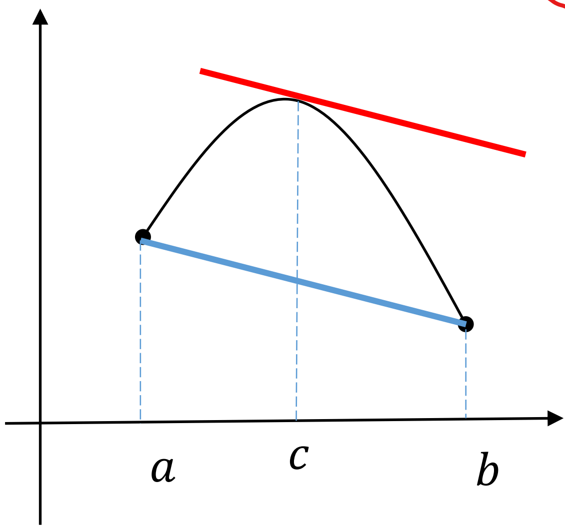
$f'(t)$

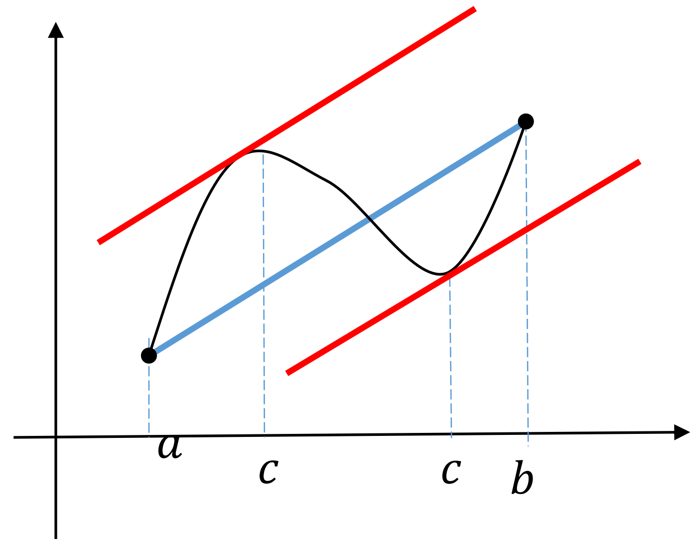
평균값 정리

The Mean Value Theorem: f 가 닫힌구간 $[a,b]$ 에서 연속, 열린구간 (a,b) 에서 미분가능.

$$\Rightarrow \exists\ c \in (a,b) \quad s.t. \quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

At least one





[평균값정리의 증명] $\quad y = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$

이 직선의 식에서 $f(x)$와 직선의 차이를 $g(x)$ 라 하면

$$g(x) = f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right)$$

g가 닫힌구간 $[a,b]$ 에서 연속, 열린구간 (a,b) 에서 미분가능, 롤의 정리에 의해

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$ 인 c가 존재한다.

예제 1.17 $f(x)=\sqrt{4x-3}$ 에 대하여 구간 [1,3]에서 평균값 정리를 만족하는 c를 구하라.

풀이: $f(1)=1,\ f(3)=3$ 이므로 $f'(c)=\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=1$

을 만족하는 c 가 존재한다. 즉 $\dfrac{4}{2\sqrt{4c-3}}=1$ 에서 $c=\frac{7}{4}$ 이다.

(정리) f 가 닫힌구간 $[a,b]$ 에서 연속, 열린구간 (a,b) 에서 미분가능.

f' 이 $[a,b]$ 에서 유계이면 $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$, $\exists M$ $s.t.$ $|f(x_1)-f(x_2)| \le M|x_1-x_2|$

(증명) 평균값의 정리에 의해 $x_1, x_2 \in [a,b]$ 일 때 $f(x_1)-f(x_2)=f'(c)(x_1-x_2)$

이 성립하는 $c \in (a,b)$ 가 존재한다.

f' 이 $[a,b]$ 에서 유계이면 실수 M이 존재해서 $|f'(x)| \le M$ 를 만족한다.

따라서, $|f(x_1)-f(x_2)|=|f'(c)||x_1-x_2| \le M|x_1-x_2|$

예제 1.19 $|\sin a-\sin b| \le |a-b|$

$f(x)=\sin x$ 라 두면 $f'(x)=cos\ x$ 이다. 평균값 정리에 의해

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{\sin b-\sin a}{b-a}=\cos c,$ $\left|\dfrac{\sin b-\sin a}{b-a}\right|=|\cos c| \le 1$

1.6 코시의 정리

Cauchy's Theorem: f, g 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속, 열린구간 (a, b) 에서 미분가능.

$$\big(f(b) - f(a)\big)g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(c)$$

를 만족하는 c 가 존재한다.

$g(a) \neq g(b)$ 이고 $g'(c) \neq 0$ 이면 $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$: $g(x) = x$ 이면 평균값정리

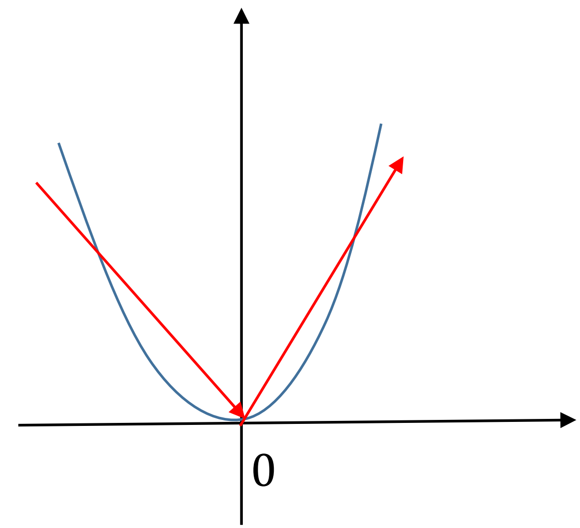
예제 1.28 $\dfrac{\sin x}{x} < 1$을 이용하여 $1 - \dfrac{x^2}{2} < \cos x$

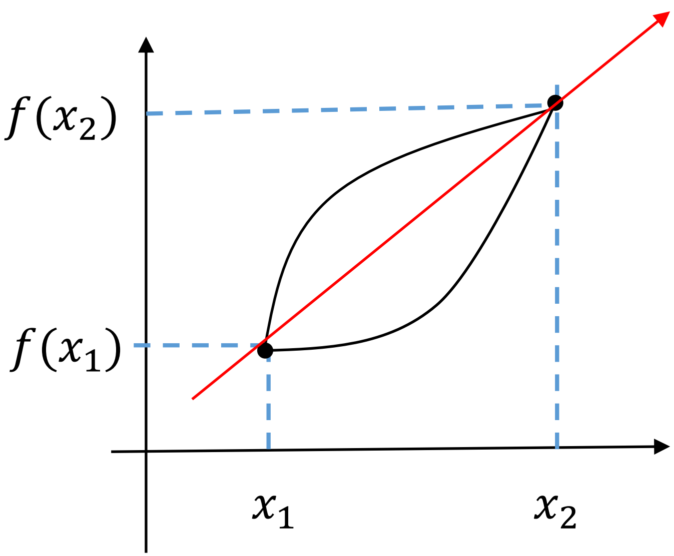
풀이: $f(x) = 1 - \cos x, g(x) = \dfrac{x^2}{2}$: 구간 $[0, x]$에서 코시의 평균값 정리를 적용하면

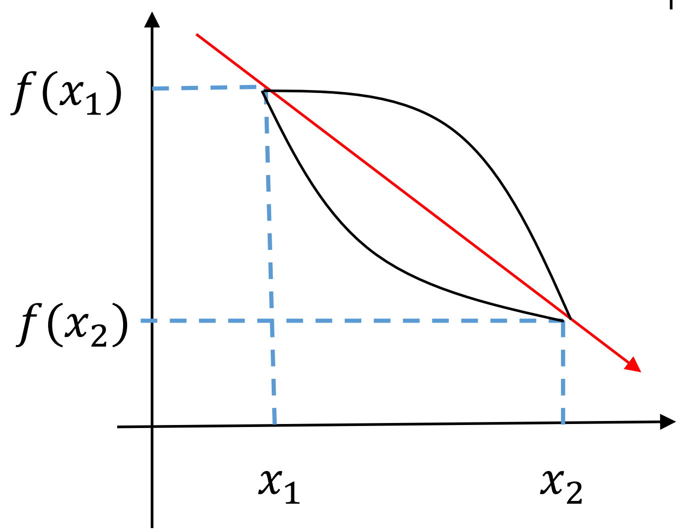
$$\frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

2 함수의 증감

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \ \rightarrow f(x_1) < f(x_2) & \text{: 증가 함수 (increasing)} \\ x_1 < x_2 \ \rightarrow f(x_1) > f(x_2) & \text{: 감소 함수 (decreasing)} \end{cases}$$







증가감소 판정법(1계 도함수 판정법)

(1) 어떤 구간에서 $f'(x) > 0$ 이면 증가함수이다.

(2) 어떤 구간에서 $f'(x) < 0$ 이면 감소함수이다.

(증명) (1) $x_1 < x_2$ 에 대하여 $f(x_1) < f(x_2)$ 임을 보인다.

f 가 구간 $[x_1, x_2]$ 에서 미분 가능하므로 평균값의 정리에 따라

$\exists\, c \in (x_1, x_2)$ s.t. $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$

양수

$f(x_2) - f(x_1) > 0$ $\quad f(x_2) > f(x_1)$

(3) 어떤 구간에서 $f'(x) = 0$ 이면 임계수

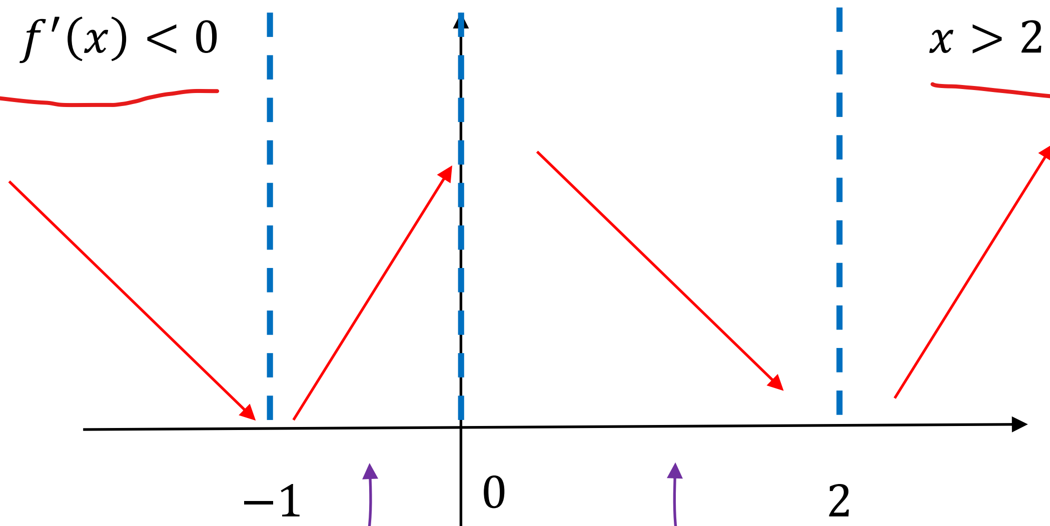
(예제) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x-2)(x+1)$

임계수 : $x = -1,\ x = 0, x = 2$ $\Rightarrow$ $f(-1) = 0,\ f(0) = 5,\ f(2) = -27$: 극값

$x < -1$, $f'(x) < 0$

$x > 2$, $f'(x) > 0$



$-1 < x < 0$, $f'(x) > 0$

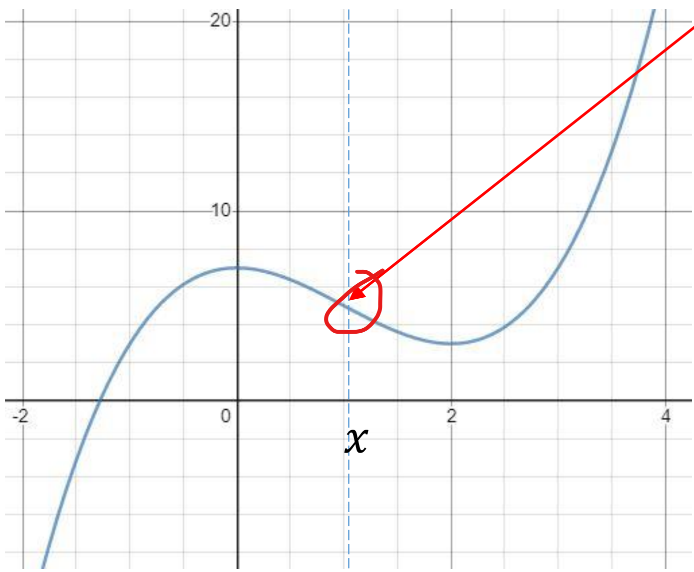
$0 < x < 2$, $f'(x) < 0$

2계 도함수판정법

(1) 구간의 모든 x 에 대하여 $f''(x) > 0$: f 위로 오목(concave up)

(2) 구간의 모든 x 에 대하여 $f''(x) < 0$: f 아래로 오목(concave down)

(3) 구간의 모든 x 에 대하여 $f''(x) = 0$: $(x, f(x))$ 변곡점 (inflection point)



(1) Concave up : 극솟값

(2) Concave down : 극댓값

$$y' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$$

(예제) $y = x^4 - 4x^3$

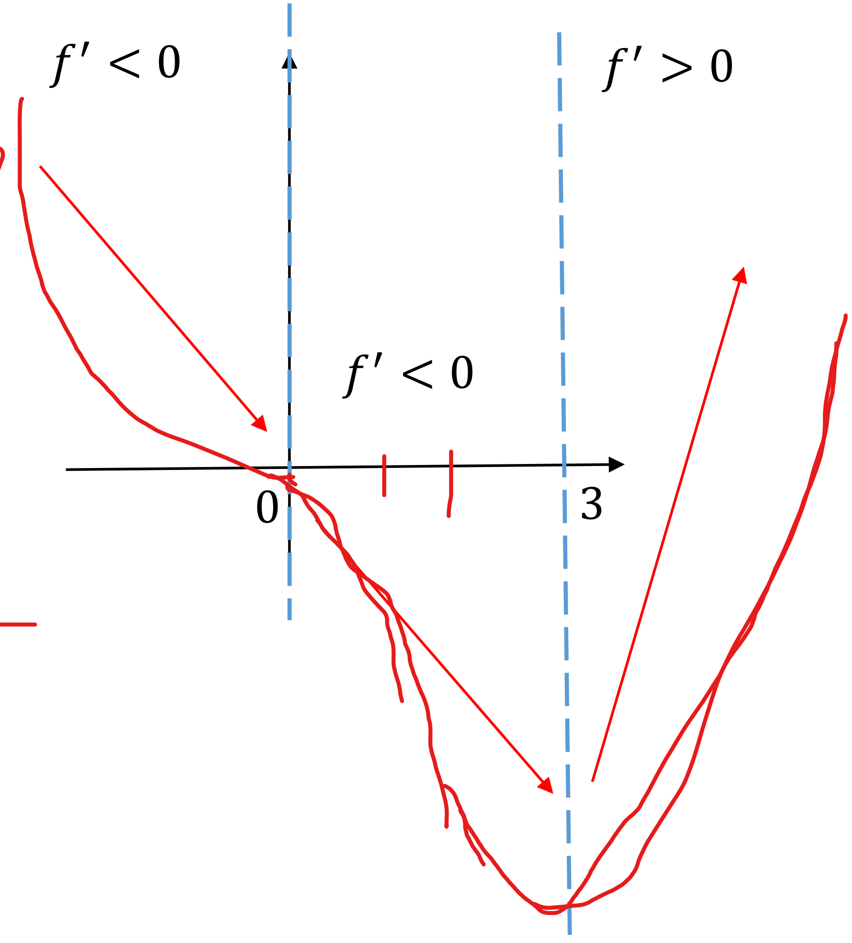
(1) 임계수 : $x = 0,\quad x = 3$

(2) 증가구간, 감소구간 : $(0, 0), (2, -16)$

(3) 변곡점 :

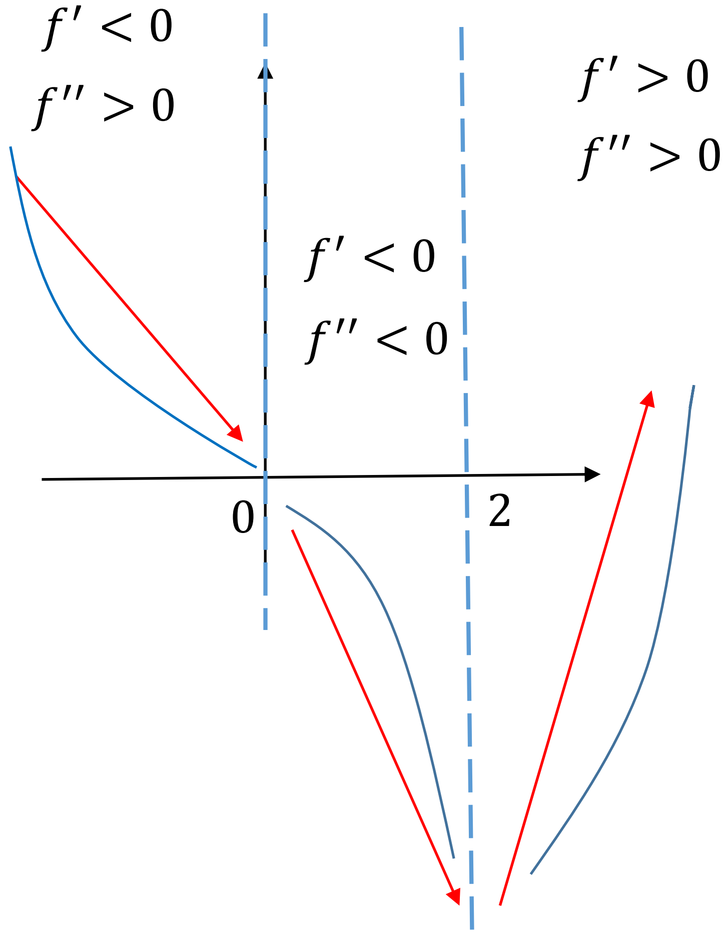
(4) 오목과 볼록 :

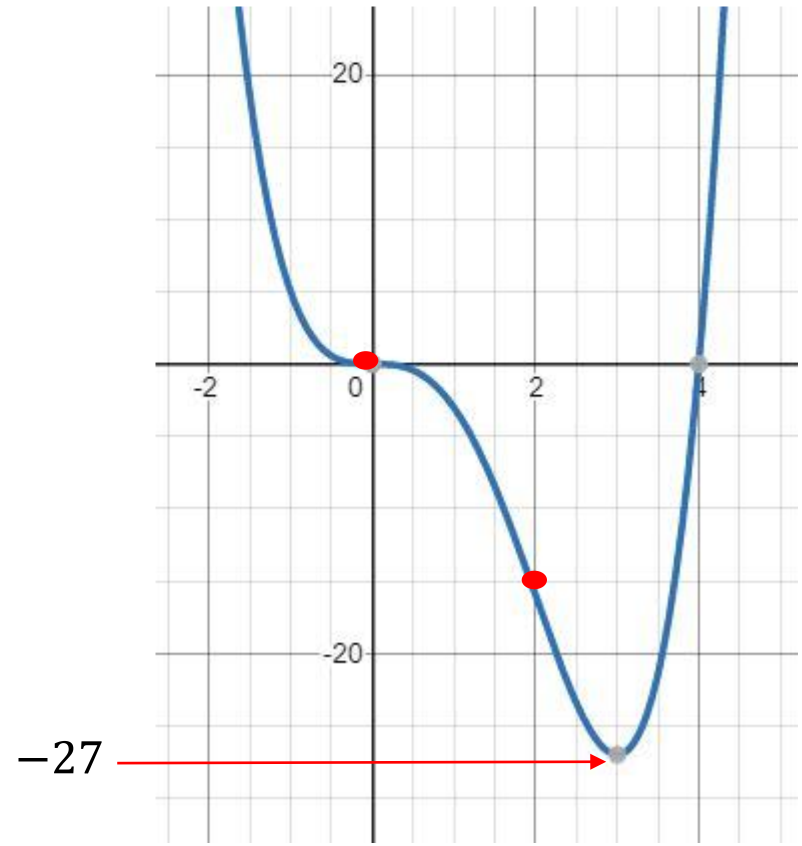
(5) 극댓값, 극솟값 : $\cancel{f(0) = 0}$, $f(3) = -27$



$$y' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$$

$$y'' = 12x(x-2) \qquad (0,0),(2,-16) \ : \text{변곡점}$$





극솟값 : -27

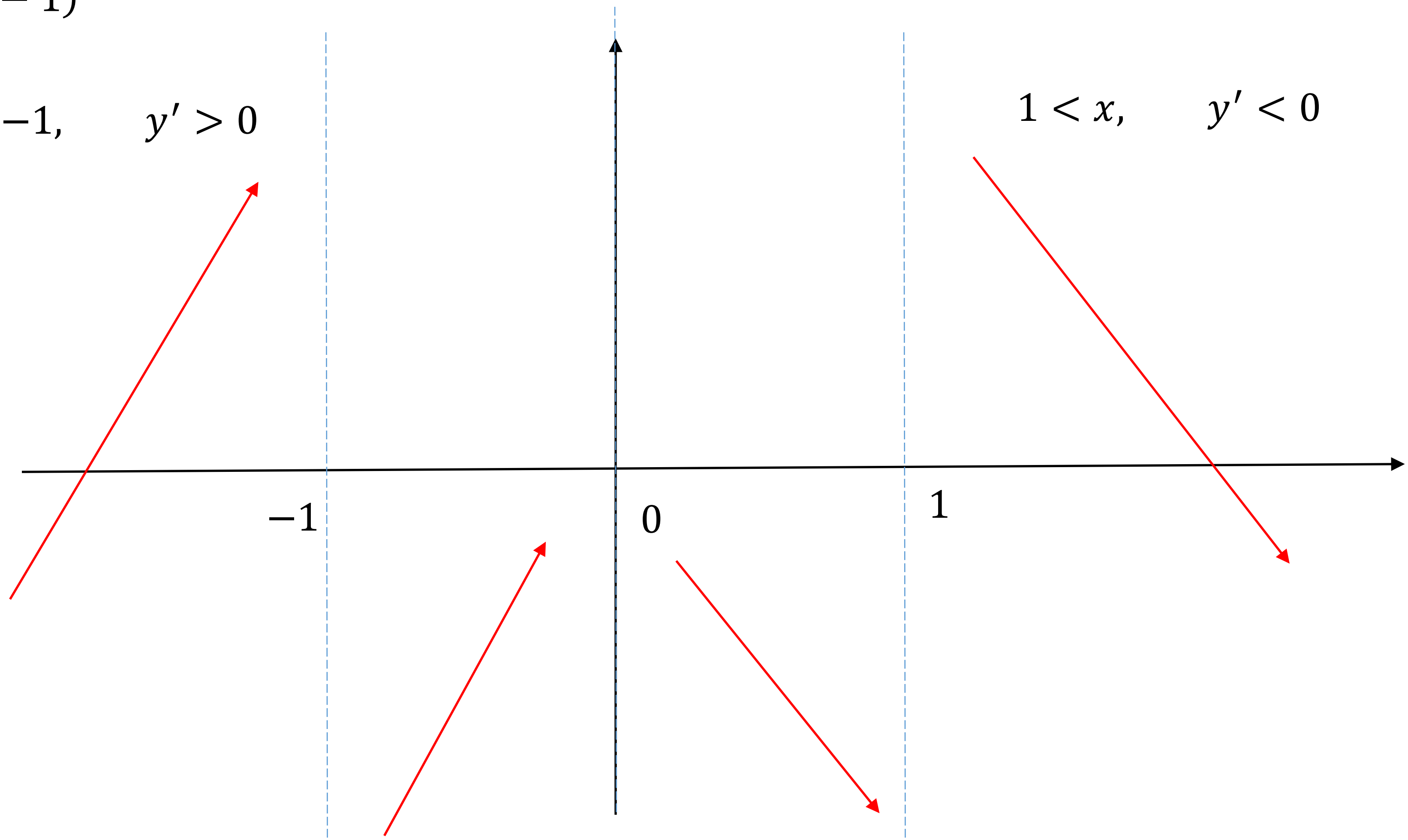
(예제) $y = \frac{2x^2}{x^2-1}$

$$y' = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

임계수 : 0 , -1 ,1 $\Rightarrow$ $f(0) = 0$: 극값

$x < -1, \quad y' > 0$

$1 < x, \quad y' < 0$



$-1 < x < 0, \quad y' > 0$

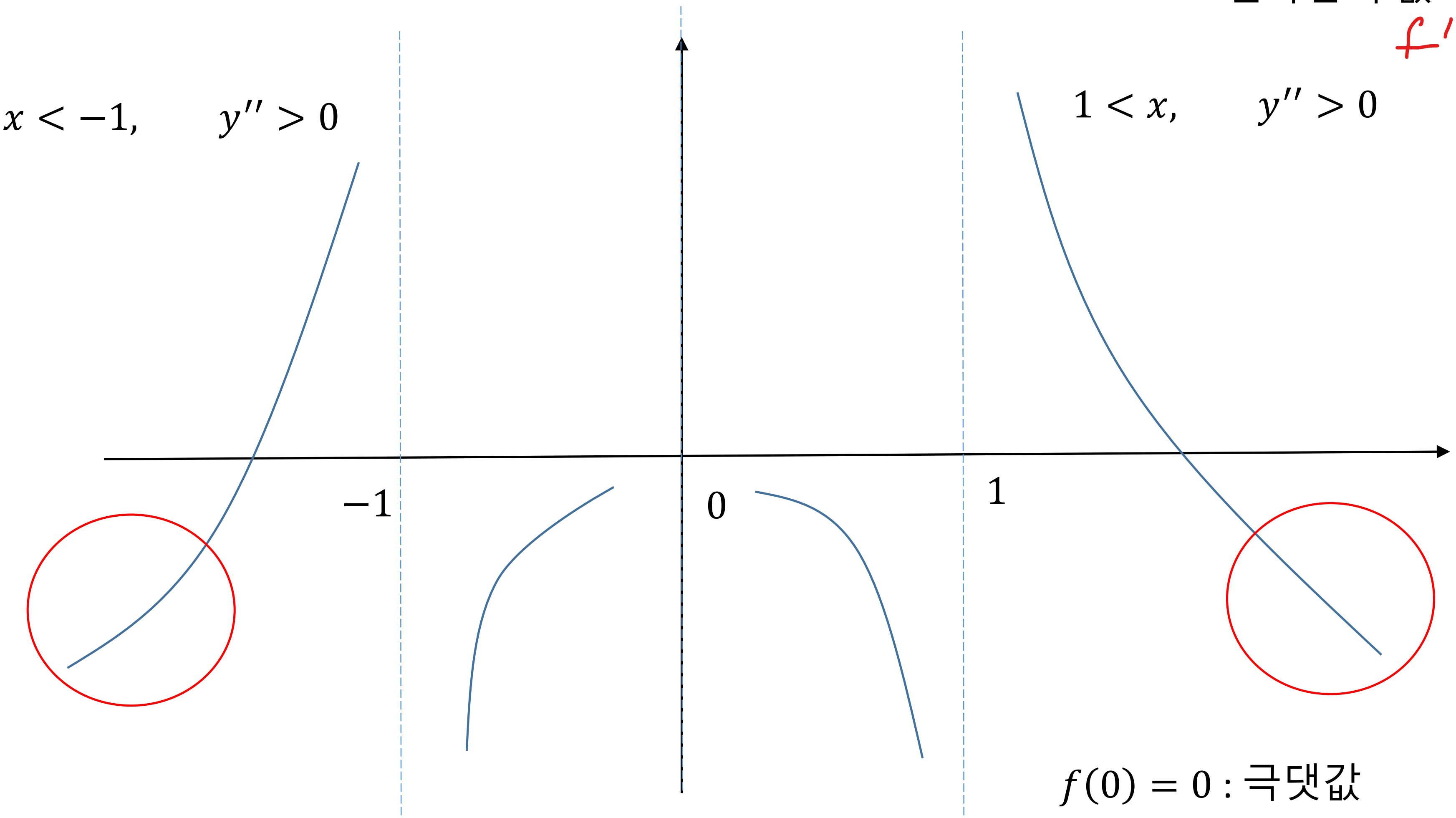
$0 < x < 1, \quad y' < 0$

$$y' = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

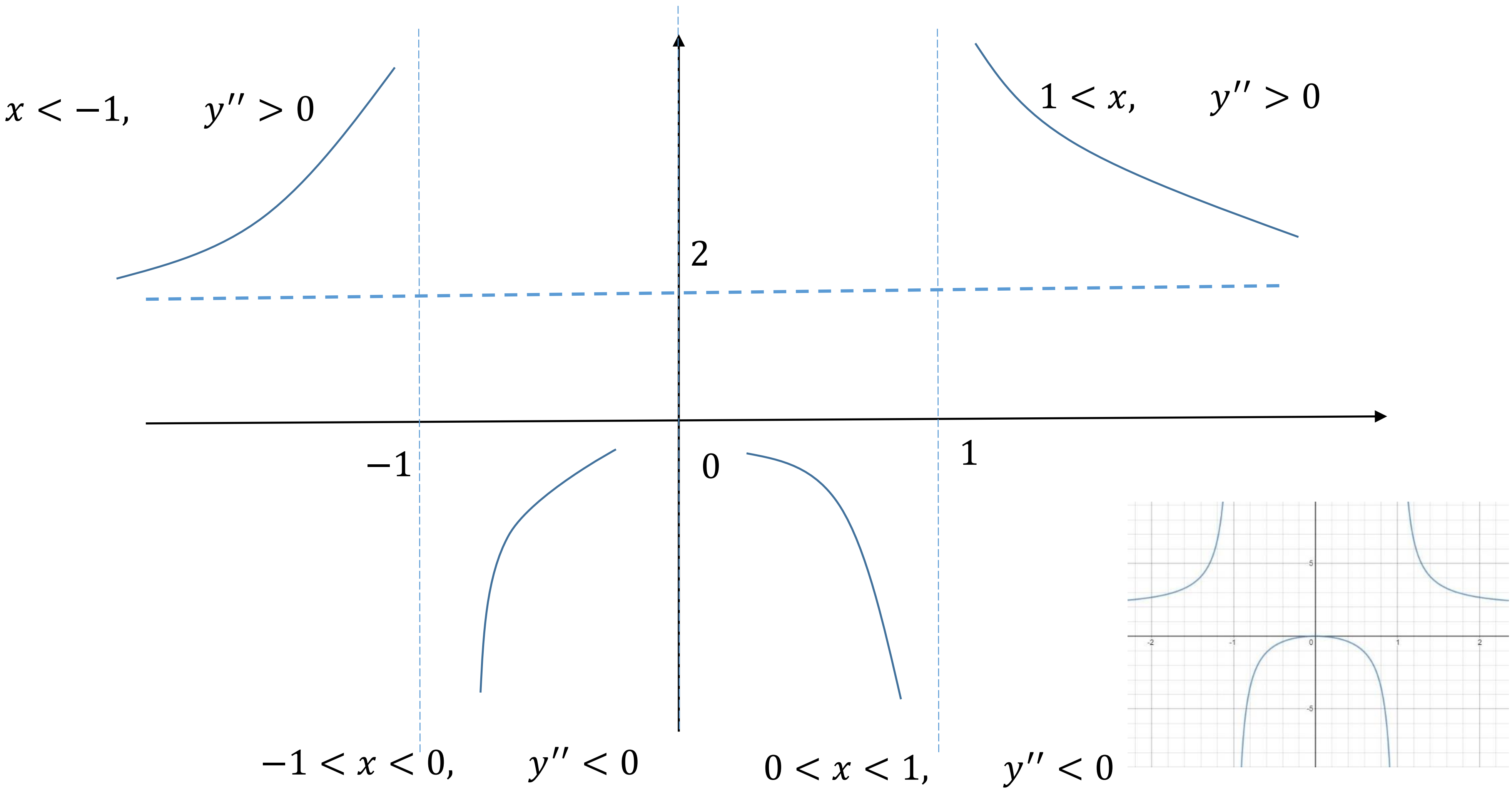
$$y'' = \frac{\cancel{(x^2-1)}^2(-4) + 4x \cdot 2\,\cancel{(x^2-1)} \cdot 2x}{\cancel{(x^2-1)}^4} = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$$

변곡점이 없다.

$f'' \neq 0$



$-1 < x < 0, \quad y'' < 0$ $\qquad 0 < x < 1, \quad y'' < 0$


$x < -1, \quad y'' > 0$
$1 < x, \quad y'' > 0$
2
-1
0
1
$-1 < x < 0, \quad y'' < 0$
$0 < x < 1, \quad y'' < 0$