P100. 함수의 미분가능성

$f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하다. $\Longleftrightarrow$ $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 가 존재한다.

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 가 존재한다.

$f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하다. $\Longrightarrow$ $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이다.

충분

(증명) $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ 임을 보인다.

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)-f(a)\big)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\lim_{x\to a}(x-a)=f'(a)\cdot 0=0$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}(f(a)+(f(x)-f(a)))=\lim_{x\to a} f(a)+\lim_{x-a}\big(f(x)-f(a)\big)=f(a)+0=f(a)$$

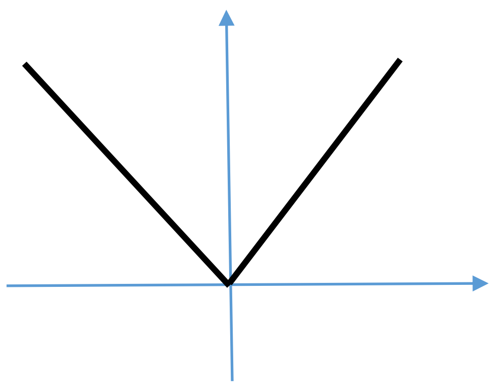
Q.E.D.

$f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하다. $\nLeftarrow$ $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이다.

(예제 4.5,p 101) $f(x)=|x|$ 는 $x=0$ 에서 연속인가?

(1) $f(0)=0$ 이다.

(2) $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{|0+h|-|0|}{h}$ 가 존재하는가?



$$\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(-h)}{h}=-1$$

예제: 함수 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$ 의 $x=0$ 에서의 연속성과 미분 가능성 을 조사하여라

$\nexists$존재

고계 도함수

$y = f(x)$: 미분 가능한 함수

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

일계(first order) 도함수

$$y'' = f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} \neq \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

이계(second order) 도함수

$$y''' = f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

삼계(third order) 도함수

$$y^{(n)} = f^{[n]}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

n계(n-th order) 도함수

$$(x^n)' = n\,x^{n-1}$$

$y = x^4 - x^2 + 1$ 일 때

(1) $y' = 4x^3 - 2x$

(2) $y'' = 12x^2 - 2$

(3) $y''' = 24x$

(4) $y^{(4)} = 24$ 4!

(5) $y^{(5)} = 0$

함수 $s = s(t)$ 가 직선 위를 움직이는 물체의 위치 함수 일 때

$v(t) = s'(t)$: 물체의 속도(velocity)

$a(t) = v'(t) = s''(t)$: 물체의 속도의 속도 즉, 가속도(acceleraion)

p103예제 4.8 직선 위를 움직이는 물체의 위치 함수가 $s(t) = t^3 + 2t$일 때, 1 초 후의 속도와 가속도를 구하라.

풀이: $v(t) = 3t^2 + 2$

$a(t) = 6t$

예제 4.9 삼각함수 미분법 후에

$y^{(100)} \quad y = \sin x$

3 장 미분법 (p. 108)

1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$ 2. $\frac{d}{dx}(x) = 1$

3. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

증명: $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

${}_nC_n \quad {}_nC_{n-1}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x^n + n\,x^{n-1}h + n(n-1)x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n) - x^n}{h}$$

Tip1. 거듭제곱형태로 바꾸어라. $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

$\perp$ 법선

예제1.7 . 곡선 $x^2\sqrt{x}$ 위의 점 (1, 1) 에서 접선의 방정식을 구하라.

(풀이) $y - 1 = f'(1)(x-1)$에서 $f'(x) = (x^{\frac{5}{2}})' = \frac{5}{2}\sqrt{x^3}$ 이므로 $f'(1) = \frac{5}{2}$ 이다.

따라서 $y - 1 = \frac{5}{2}(x-1)$이다.

p. 111 1.3 도함수의 성질

(1) $\left(cf(x)\right)' = c\,f'(x)$

(2) $\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$

$f'(x)$, $g'(x)$ 존재

증명

(1) $\left(cf(x)\right)' = \lim_{h\to 0} \dfrac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = \lim_{h\to 0} c\,\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = cf'(x)$

(2) $\left(f(x) \pm g(x)\right)' =$

37:00

$= f'(x) \pm g'(x)$

1.4 지수함수의 미분법

(1) $y = a^x$의 도함수

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \lim_{h\to 0}\frac{a^h - 1}{h}$$

$$= f'(0)a^x$$

(2) $y = e^x$의 도함수

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1$$

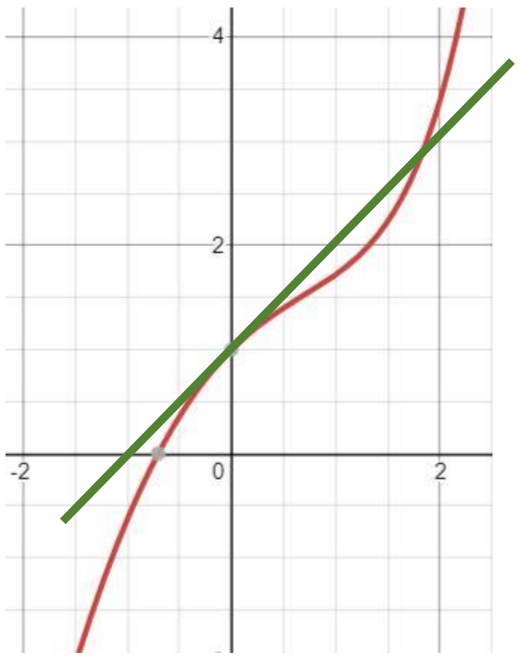
$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

미분하거나 적분 하거나 그 결과는 항상 자기 자신이다.

예제 1.14 $f(x) = e^x - x^2$ $f'(x) = e^x - 2x$

(1) y 절편에서의 접선의 기울기 $f'(0) = 1$

(2) $x = 0$ 일 때 접선의 방정식 $y - 1 = f'(0)(x - 0) = x$



1.5 곱의 미분법 $\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ f', g' 존재

증명

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)}{h}+\frac{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{(f(x+h)-f(x))g(x+h)}{h}+\frac{f(x)(g(x+h)-g(x))}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\ \lim_{h\to 0} g(x+h) + \lim_{h\to 0} f(x)\ \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$f'(x)\ g(x) \quad + \quad f(x)\ g'(x)$$

1.6 몫의 미분법

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

증명

1.7 삼각함수의 미분법

$y = \sin x$ 의 도함수

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h + \cos x\ \sin h - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h\ - 1) + \cos x\sin h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\sin x \times \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \times \frac{\sin h}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\sin x\ \times \lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h\to 0}\cos x\ \times \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = 0 \qquad \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$$

$(\sin x)' = \cos x$

$y=\cos x$ 의 도함수

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\ \sin h-\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{cos\,x(\cos h\ -1)-\sin x\sin h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\cos x\times\frac{\cos h-1}{h}-\ sin\,x\times\frac{\sin h}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\cos x\ \times\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}-\lim_{h\to 0}\sin x\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=0 \qquad \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$$

$(\cos x)'=-\sin x$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-sin\ x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$(\cot x)' = -csc^2 x$$

$$\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x}$$

$$\left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{0-(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$\left(\frac{1}{\sin x}\right)' = \frac{0-\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x}\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$(\csc x)' = -csc\, x\, cot\ x$$

반드시 기억 해야할 도함수(기본형)

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
- $(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x???$

- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \sec^2 x$
- $(\cot x)' = -\csc^2 x$
- $(\sec x)' = \sec x \tan x$
- $(\csc x)' = -\csc x \cot x$

연습문제

1. 다음을 미분 하여라.

(3) $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 5}{\sqrt{x}}$

(4) $s = \sqrt[3]{t^2} + \dfrac{2}{\sqrt{t^3}}$

(1) $f(x) = e^x \cos x$

(2) $f(\theta) = \theta \cos\theta \sin\theta$

(3) $y = \dfrac{x}{2021 - \tan x}$

2. 다음에 답하라.

(1) $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ $x = 0$ 에서 미분가능한가?

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\sin\frac{1}{h}}{\cancel{h}}$$ 존재 X

(2) $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

①$x = 0$ 일 때 $f'(0) = 0$ 임을 보여라.

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h} = 0$$

② $x \neq 0$ 일 때 미분 가능한가?

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

$y^{(100)}$

3. $y = \sin x$ 의 100계 도함수를 구하라. $= \sin x$

4. 다음 극한 값을 구하라.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{10}-1}{x-1} = f'(1) = 10 \qquad \lim_{x\to 1} \frac{e^{x}-e}{x-1} = f'(1) = e$$

5. $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4,\ f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2$ 이고 $g(x) = f(x)\sin x$, $h(x) = \frac{\cos x}{f(x)}$ 일 때, $h'(\frac{\pi}{3})$ 를 구하라.

$$h'(x) = \frac{f(x)(-\sin x) - \cos x\, f'(x)}{(f(x))^2} \qquad = \frac{1-2\sqrt{3}}{16}$$