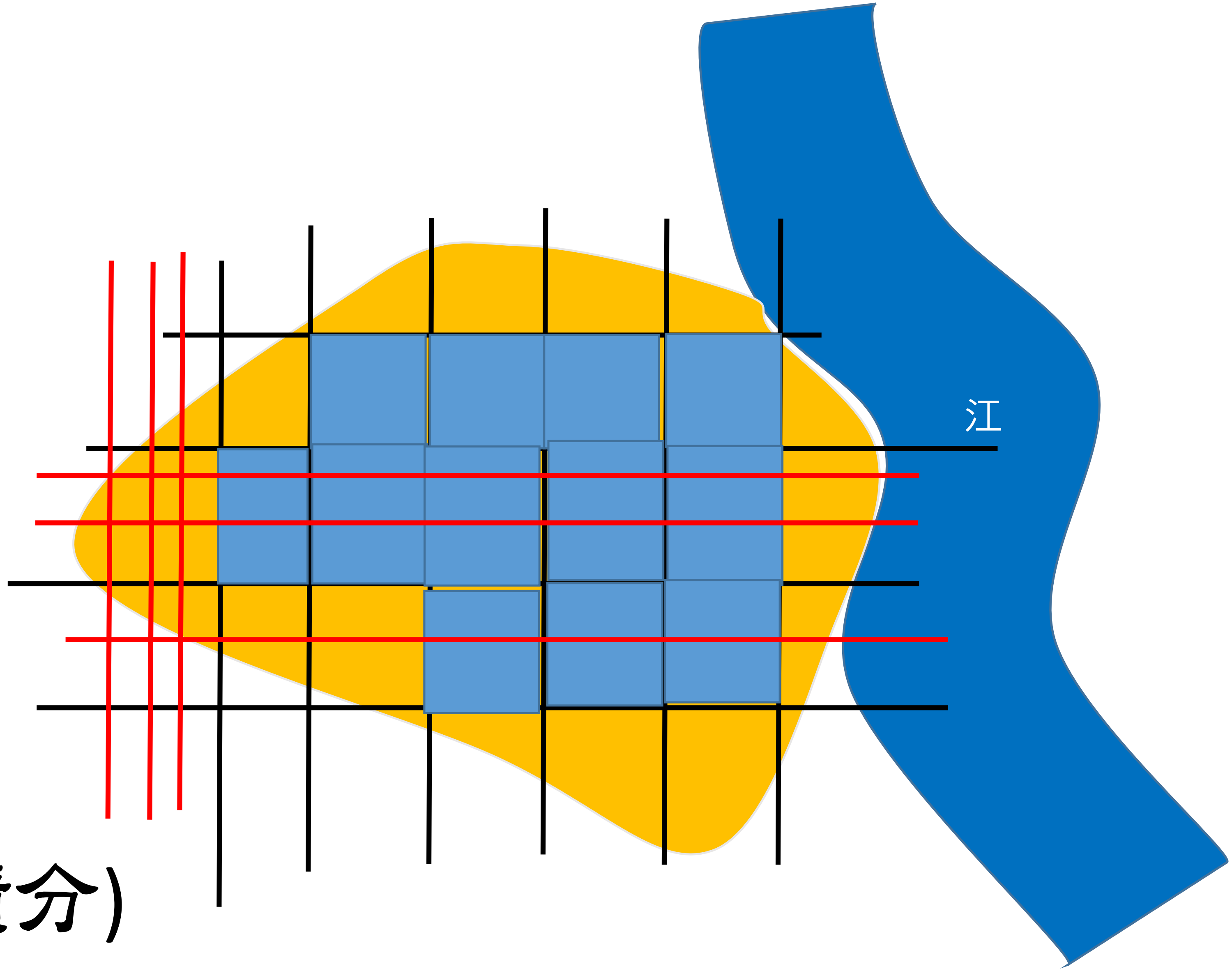
정적분

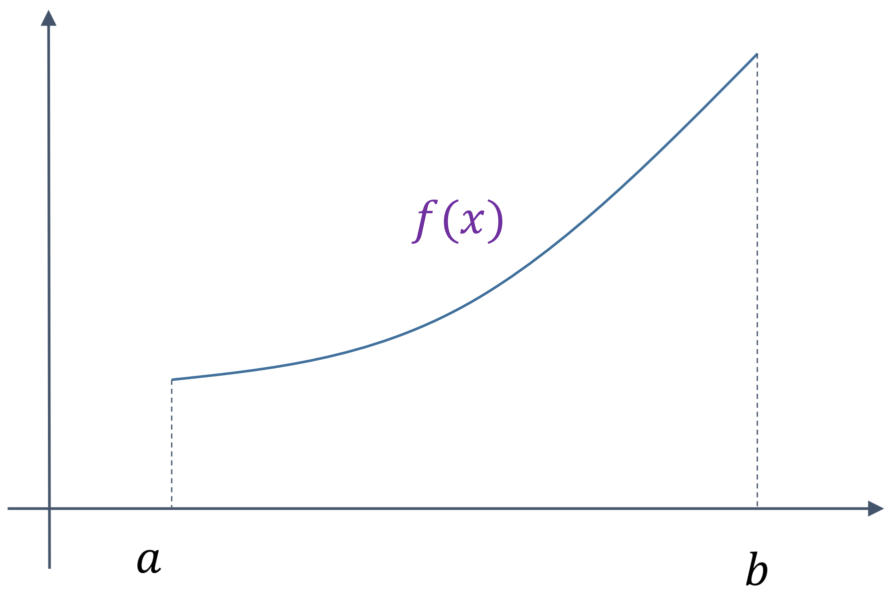
미적분의 기본정리

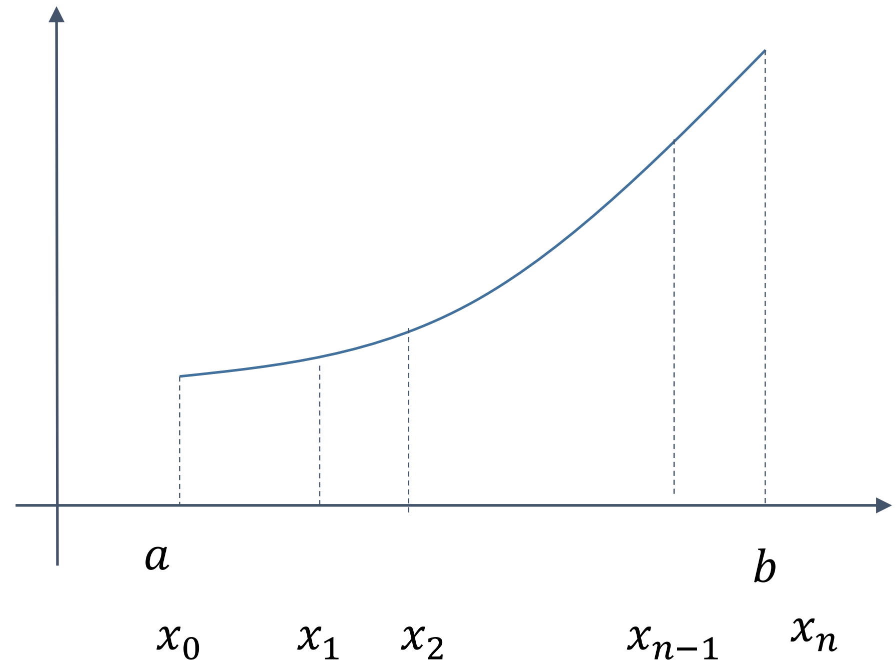


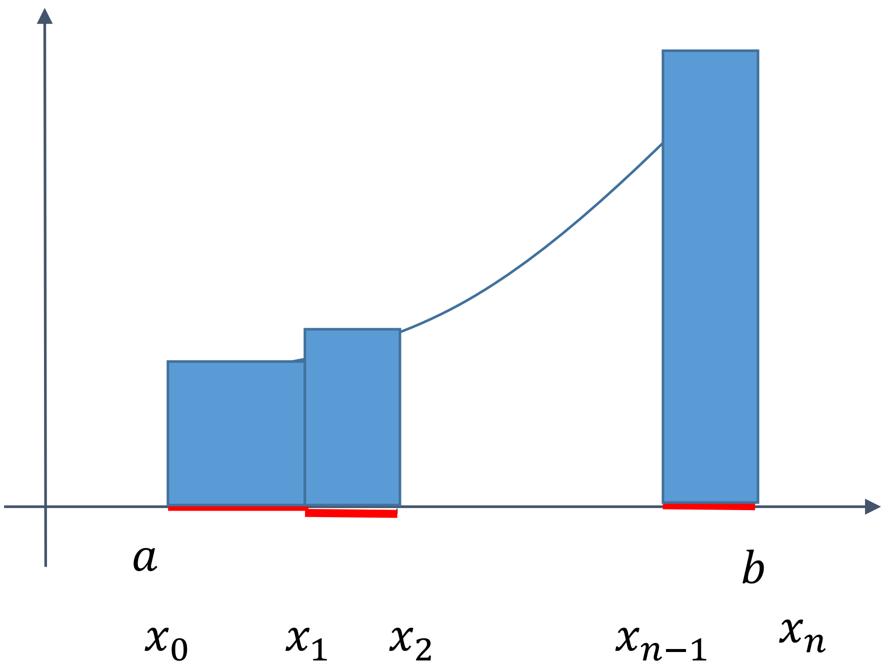
적분(積分)

적분의 시작은 넓이이다.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$





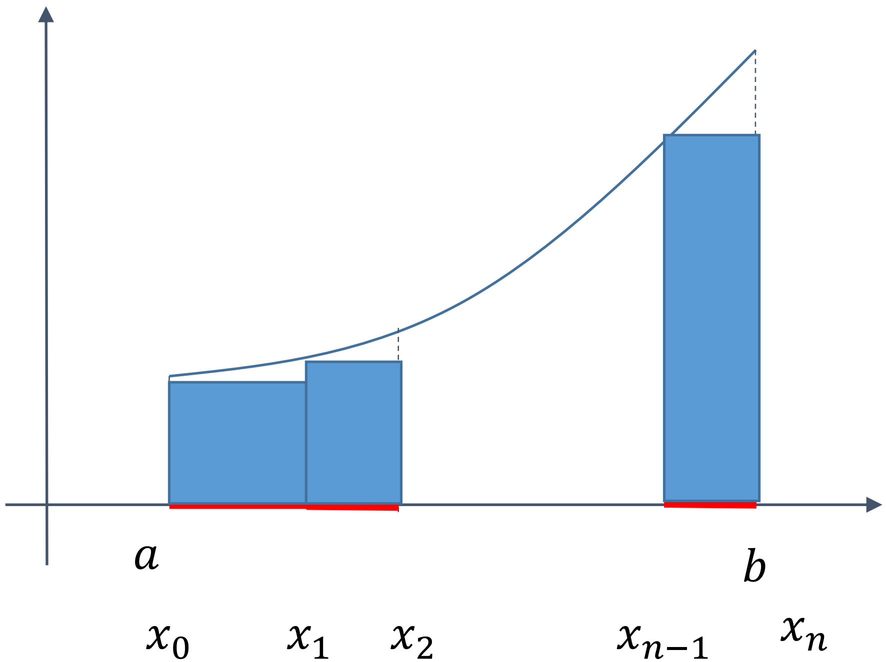


$\Delta x_1 = x_1 - x_0$ $\quad\quad$ $\Delta x_2 = x_2 - x_1$ $\quad\quad$ $\Delta x_n = x_n - x$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = dx$$

x의 증분 $\quad\quad\quad\quad$ x의 미분

$$f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \ldots + f(x_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$: 상합(upper sum)



$\Delta x_1 = x_1 - x_0$ $\quad\quad$ $\Delta x_2 = x_2 - x_1$ $\quad\quad$ $\Delta x_n = x_n - x$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = dx$$

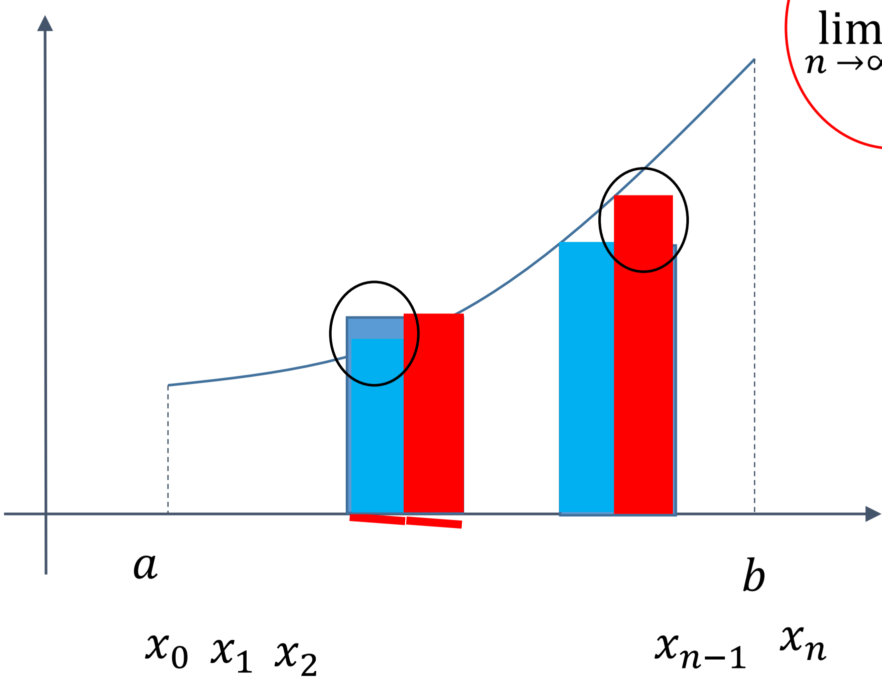
x의 증분 $\quad\quad\quad\quad$ x의 미분

$f(x_0)\Delta x_1 \ + f(x_1)\Delta x_2 \ \ +..+ f(x_{n-1})\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i$: 하합(lower sum)

$$f(x_1)\Delta x_1 \quad + f(x_2)\Delta x_2 \quad +..+ f(x_n)\Delta x_n \quad = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

$n \to \infty$

$$f(x_0)\Delta x_1 \quad + f(x_1)\Delta x_2 \quad +..+ f(x_{n-1})\Delta x_n \quad = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i$$



$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i$$

$$A = \int_a^b f(x) \ dx \ = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

정적분 (definite integral)

뉴턴(Isaac Newton, 1642~1727)

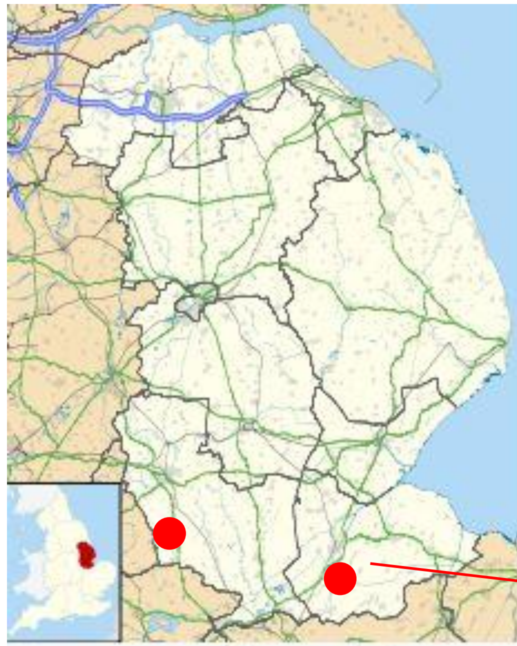
1665년 페스트 유행, 고향인 올즈소프(Woolsthorpe)로 낙향

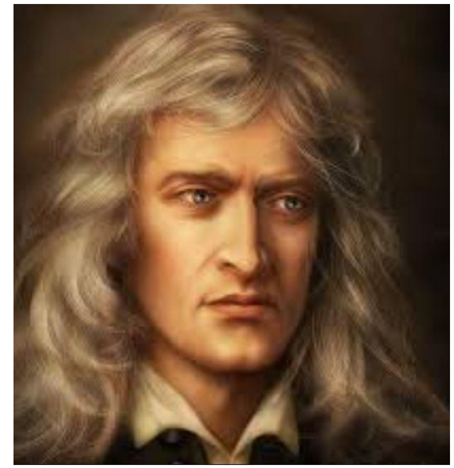
기적의 해 : 3가지 업적

1. 미적분

2. 빛의 성질

3. 만유인력 이론





University of Cambridge

영국의 시인 포프(Alexander Pope) : 자연과 자연의 법칙은 어둠에 묻혀 숨겨져 있었는데 신 께서 ' 뉴턴이 있으라(Let Newton be) ' 하시니 모든 것이 빛이 되었도다.

라이프니츠 (G.W.Leibniz, 1646~1716)

1673~1676 사이에 카발리에리의 불가분량의 합을 나타내는 라틴어 summa(합) 의 첫 문자 s를 길게 늘인 문자로서 현대의 적분 기호를 처음 도입하였다.

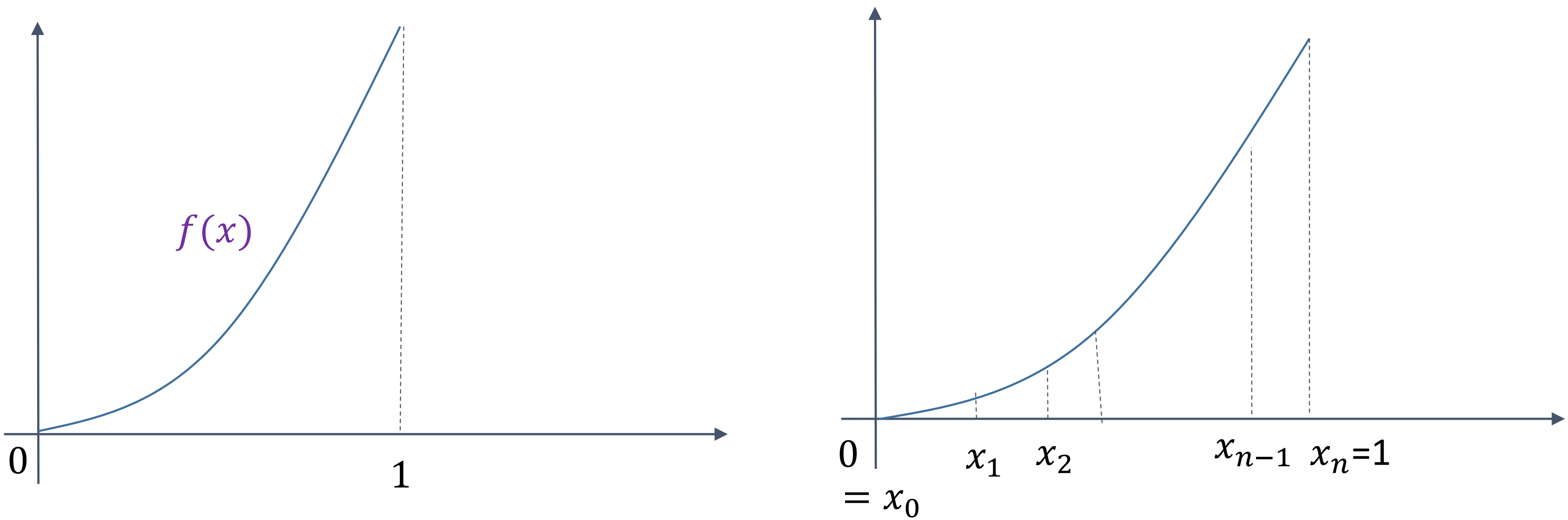
$$\int$$

미분학에 관한 최초의 논문은 1684년에 발간

이 때 dx, dy 라는 기호를 소개했다.

뉴턴에 대한 평가: 태초부터 뉴턴이 살았던 시대까지의 수학을 놓고 볼 때, 그가 이룩한 업적이 반 이상이다.

(예제) 곡선 $f(x) = x^2$ 과 두 직선 $x = 0, x = 1$로 둘러 싸인 부분의 넓이를 구하라.



$$\Delta x_i = \frac{1}{n}$$

$$f(x_1)\Delta x_1 \quad + f(x_2)\Delta x_2 \quad + .. + f(x_n)\Delta x_n \quad = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$: 상합(upper sum)

$$f\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} + f\left(\frac{2}{n}\right)\frac{1}{n} + f\left(\frac{3}{n}\right)\frac{1}{n} + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\frac{1}{n} = \left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots \left(\frac{n}{n}\right)^2\right)\frac{1}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$$

$$f(x_0)\Delta x_1 \quad + f(x_1)\Delta x_2 \quad +..+ f(x_{n-1})\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i$$: 하합(lower sum)

$$f\left(\frac{0}{n}\right)\frac{1}{n} + f\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} + f\left(\frac{2}{n}\right)\frac{1}{n} + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n} = \left(\left(\frac{0}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right)\frac{1}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{i}{n}\right)^2\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{i^2}{n^3} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}}$$

어느 것이 더 쉽고 빠를까요?

위끝(upper limit)

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

아래끝(lower limit)

정적분 (Definite Integral)

→ 닫힌구간 $[a, b]$, 연속

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

(예제) 다음을 정적분으로 나타내어라.

(1) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1 \sqrt{1+x}\ dx$

(2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\ dx$

(3) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(\frac{2i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\ dx$

(4) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\underbrace{\left(\frac{2i}{n}\right)}_{x}^2}\cdot\frac{2}{n} = \int_0^2 \sqrt{1+x^2}\ dx$

성질 1 $a \leq x \leq b$ 인 x에 대하여

$$(1) \quad 0 \leq f(x) \implies 0 \leq \int_a^b f(x)\, dx$$

$$(2) \quad f(x) \leq g(x) \implies \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$$

$$(3) \quad m \leq f(x) \leq M \implies \int_a^b m\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b M\, dx$$

$\leq$

$$\implies (b-a)m \int_a^b f(x)\, dx \leq (b-a)M$$

(예제) $2 \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\, dx \leq 2\sqrt{2}$

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 시작

양 변을 제곱한다. $0 \leq x^2 \leq 1$

양 변에 1을 더한다. $1 \leq 1 + x^2 \leq 2$

양 변에 제곱근을 취한다. $1 \leq \sqrt{1+\ x^2} \leq \sqrt{2}$

양 변을 적분한다.

$$\int_{-1}^{1} 1\, dx \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\, dx \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{2}\ dx$$

(예제) $$\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx \le \frac{\pi^2}{8}$$

$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ 에서 시작 $\qquad 0 \le \sin x \le 1 \qquad 0 \le x\sin x \le x$

양 변을 적분한다.

$$\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx = \frac{1}{2}[x^2]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}$$

(연습문제, p. 365 #68) $\int_0^{0.5} \cos(x^2)\,dx \qquad \int_0^{0.5} \cos(\sqrt{x})\,dx$ 어느 것이 더 클까?

(풀이) $0 \le x \le 0.5$ 에 대하여 $x^2 < \sqrt{x}$ 이다.

또한 주어진 구간에서 코사인 함수는 감소함수 이므로 $\cos(x^2) > \cos\sqrt{x}$ 이다.

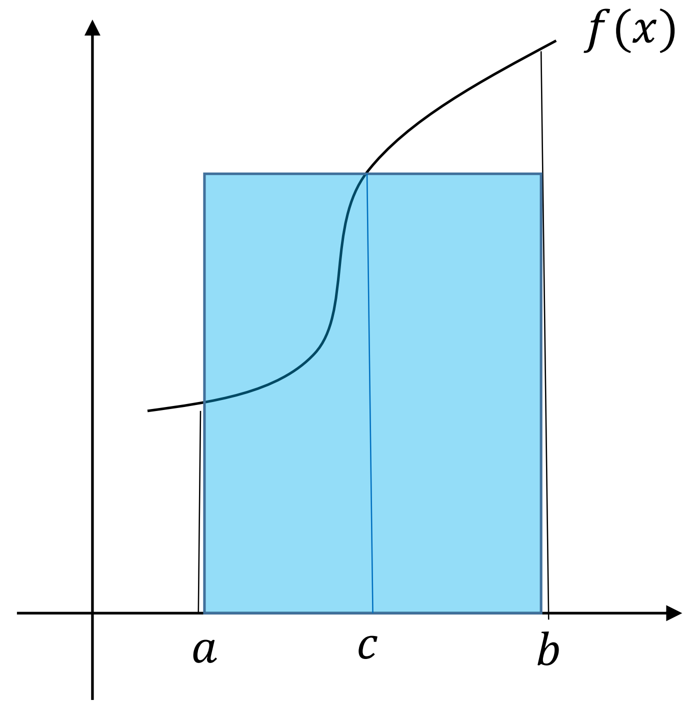
$$\int_0^{0.5} \cos(x^2)\,dx > \int_0^{0.5} \cos\sqrt{x}\,dx$$

적분의 평균값의 정리

함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a,b]$ 에서 연속이면 $\exists\, c \in (a,b)\ s.t.$

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\ dt$$

(증명)



함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a,b]$ 에서 연속이므로 최솟값 m 과 최댓값 M 이 존재해서 다음이 성립한다.

$$m \le f(x) \le M \implies (b-a)m \le \int_a^b f(x)\ dx \le (b-a)M$$

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx \le M$$

연속함수의 중간값 정리에 의해

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\ dt$$ 를 만족하는 점 $c \in (a,b)$ 가 존재한다.