p. 139 역삼각함수의 미분

$y = \sin^{-1} x$ 의 도함수를 구한다. (즉, $\frac{dy}{dx}$ 를 구한다.)

$x = \sin y$ 의 양변을 x 로 미분한다.

$1 = \cos y \cdot y'$ 이므로

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2 y}}$ 이다. 여기서 $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ 이고, 이 때의 $\cos$ 값은 양수이다.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$y = \cos^{-1} x$ 의 도함수를 구한다. (즉, $\frac{dy}{dx}$ 를 구한다.)

$x = \cos y$ 의 양변을 x 로 미분한다.

$1 = -\sin\ y \cdot y'$ 이므로

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2 y}}$ 이다. 여기서 $0 \le y \le \pi$이고, 이 때의 sin 값은 양수이다.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$y = \tan^{-1} x$의 도함수를 구한다. (즉, $\frac{dy}{dx}$ 를 구한다.)

$x = tan\, y$ 의 양변을 x 로 미분한다.

$1 = \sec^2 y \cdot y'$ 이므로

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y}$ 이다. 여기서 $-\frac{\pi}{2}<y < \frac{\pi}{2}$ 이다.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\cot^{-1} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\sec^{-1} x)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$(\csc^{-1} x)' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

기억소환!!!!

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\cot^{-1} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(\sec^{-1} x)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$(\csc^{-1} x)' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

(예제) 다음을 미분하여라.

(1) $y = \dfrac{1}{\sin^{-1} x}$ (2) $f(x) = x \arctan\sqrt{x}$

(3) $y = \cos^{-1}(X^2 - 3x)$ (4) $y = \tan^{-1}(\sqrt{x^2-1})$

(풀이) (1) $y' = \left(\dfrac{1}{\sin^{-1} x}\right)' = \dfrac{-(\sin^{-1} x)'}{(\sin^{-1} x)^2} = -\dfrac{1}{(\sin^{-1} x)^2\sqrt{1-x^2}}$

(2) $f'(x) = \arctan\sqrt{x} + x\ (\tan^{-1}\sqrt{x})' = \arctan\sqrt{x} + x \cdot \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+(\sqrt{x})^2} = \arctan\sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$

(3) $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-(x^2-3x)^2}} \cdot (2x-3)$

(4) $y' = \dfrac{1}{1+(x^2-1)} \cdot \left(\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

(예제) 다음을 미분하여라.

(1) $f(x) = \sec^{-1}(x^2 - 2x)$

(풀이) (1) $f'(x) = \dfrac{1}{|x^2 - 2x|\sqrt{(x^2 - 2x)^2 - 1}} \cdot (2x - 2)$

(2) $f(x) = x\cot^{-1}(1 - 2x)$

(풀이) (2) $f'(x) = \cot^{-1}(1 - 2x) + x\left(-\dfrac{1}{1 + (1 - 2x)^2}\right) \cdot (-2)$

지수 함수와 로그 함수: 16세기 네이피어(Napier)가 새로운 함수를 착안

$$y = a^x$$

$$y = \log_a x$$

~~여기에 수식을 입력하십시오.~~

$$y = e^x$$

$$y = \ln x$$

$\frac{1}{x}$ 을 곱함

3.2 $y = \ln x$ 의 도함수 (p 145)

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{x}\frac{x}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{h\to 0} \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \Rightarrow = \frac{1}{x} \lim_{n\to\infty} ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{x} \ln \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}$$

$\frac{x}{h} = n$ 으로 치환

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$\mathrm{y} = \log_a x$ 의 도함수 : $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ 이므로

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

(예제) $(\log_3 x)' = \frac{1}{x \ln 3}$

p.146 예제

$$(\ln(x^2-2x))' = \frac{2x-2}{x^2-2x}$$

$$(\ln(\cos x))' = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

$$(\log_2(\tan x - 2x))' = \frac{\sec^2 x - 2}{(\tan x - 2x)\ln 2}$$

$$\left(\log_{10}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)' = (\log_{10}(x+1) - \log_{10}(x-1))' = \frac{1}{(x+1)\ln 10} - \frac{1}{(x-1)\ln 10}$$

로그함수의 미분법 응용(p207)

$y = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$ 을 미분하라.

Step1: 양변에 로그 ln 을 취한다.

$\ln y = \frac{3}{4}\ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 5\ln(3x+2)$ 가 된다.

Step 2: 각 항 별로 미분한다.

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$$???= \frac{3}{4}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} - 5 \cdot \frac{3}{3x+2}$$

Step3: $\ln y$ 를 미분한다.

$(\ln y)' = \frac{1}{y}y'$ 이므로

$y' = y\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$ 이다.

p.148 예제

$$f(x) = y = \frac{e^x \cos x}{x^3(3-x)^2}$$

$$\ln y = \ln\left(\frac{e^x \cos x}{x^3(3-x)^2}\right) = \ln e^x + \ln \cos x - 3\ln x \; - 2\ln(3-x)$$

양변 미분하면

$$\frac{1}{y}y' = 1 - \tan x \; - \frac{3}{x} + \frac{2}{3-x}$$

$$f'(x) = \frac{e^x \cos x}{x^3(3-x)^2}\left(1 - \tan x - \frac{3}{x} + \frac{2}{3-x}\right)$$

(예제) 다음 함수의 도함수를 구하라.

(1) $y = x^{\cos x}$

(풀이) 양변에 로그를 취하면 $\ln y = \cos x \ln x$

$$\frac{1}{y} y' = (-\sin x)\ln x + (\cos x) \cdot \frac{1}{x}$$

(2) $y = (\cos x)^x$

(풀이) 양변에 로그를 취하면 $\ln y = x \ln(\cos x)$

$$\frac{1}{y} y' = \ln(\cos x) + x \cdot \frac{(-\sin x)}{\cos x}$$

p.149 예제

$$y = x^{\sqrt{x}}$$

(풀이) 양변에 로그를 취하면 $\ln y = \sqrt{x}\ln x$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \sqrt{x}\frac{1}{x}$$

$$y = (\ln x)^{\sin x}$$

(풀이) 양변에 로그를 취하면 $\ln y = \sin x \ (\ln(\ln x))$

$$\frac{1}{y}y' = \cos x\ (\ln(\ln x)) + \sin x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$$

$y = a^x$ 의 도함수를 구하자.

양변에 로그를 취하면 $\ln y = x \ln a$ 이다. 항 별로 미분하면

$\frac{1}{y} y' = \ln a$ 이므로 $(a^x)' = a^x \ln a$

$$\boxed{(e^x)' = e^x, \quad (a^x)' = a^x \ln a \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}}$$

(예제) $y = x^x$ 의 도함수를 구하라. $\not\Leftarrow$ $\cancel{y' = x \cdot x^{x-1} = x^x}$

$\ln y = x \ln x$ 이므로

$\frac{1}{y} y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$ 가 되어 $y' = (1 + \ln x)\, x^x$

p. 154 로그의 성질을 이용한 극한 구하기

e

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln e = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n} = e^{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n} = e^{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{5n} = e^{\frac{5}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}$$

$e^{x}-1=t$ 로 치환,

$x=\ln(1+t)$ 가 되어

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)} = 1$$