

교재

5. 부정적분

5.1 부정적분

5.2 치환적분

5.3 부분적분

5.4 삼각함수의 적분

5.5 유리함수의 적분

5.6 무리함수의 적분

6. 정적분

6.2 정적분

6.3 정적분의 계산

6.5 이상적분

7. 응용

7.1 넓이

7.2 부피

7.3 겉넓이, 호의 길이

기말고사: 6월 7일 ~11일

~~시험범위: 5.3 미적분의 기본 정리 ~~~

p. 288 부정적분의 성질

$$(1) \int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$(2) \int af(x) dx = a \int f(x) dx$$

우리의 목표 $\int (f(x)g(x)) dx \stackrel{?}{\neq} \int f(x) dx \int g(x) dx$

도함수를 이용

치환적분법

부분 적분법

삼각함수의 적분법

유리함수의 적분법

무리함수의 적분법

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad n \neq -1$$

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

289 P 예제 $\int \sqrt[3]{x^5} dx = \int x^{5/3} dx = \frac{1}{\frac{5}{3}+1} x^{\frac{5}{3}+1} + C$ Tip: 거듭제곱 형태로 바꿔라.

$$\int \frac{x^\pi - \sqrt{x} + 1}{2x} dx$$

Tip: 나누어라.

$$= \int \left(\frac{x^\pi}{2x} - \frac{\sqrt{x}}{2x} + \frac{1}{2x} \right) dx = \int \left(\frac{x^{\pi-1}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{(\pi-1)+1} x^{(\pi-1)+1} - \sqrt{x} + \frac{1}{2} \ln|x| + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \quad \int e^x \, dx = e^x \quad \int a^x \, dx = \frac{1}{\ln a} a^x$$

291 p 예제

$$\int \left(\sec x \tan x - \frac{1}{x^2} + 3e^x \right) dx = \sec x + \frac{1}{x} + 3e^x + C$$

$$\int \tan^2 x \, dx = \int (\sec^2 x - 1) \, dx = \tan x - x + C$$

$$\begin{aligned} \int \frac{5^{2x} - 2}{5^x} \, dx &= \int \left(5^x - \frac{2}{5^x} \right) \, dx = \int \left(5^x - 2 \left(\frac{1}{5} \right)^x \right) \, dx \\ &= \frac{5^x}{\ln 5} - 2 \frac{\left(\frac{1}{5} \right)^x}{\ln \frac{1}{5}} + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x$$

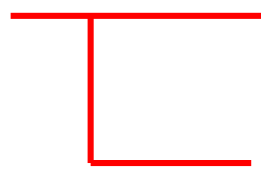
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \sinh^{-1} x$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \tanh^{-1} x$$

$$\int \sinh x \, dx = \cosh x$$

예제 $\int \left(\frac{1}{1+x^2} + \operatorname{sech}^2 x \right) dx = \tan^{-1} x + \tanh x + C$

번들러 1~8번

$$\int f(x)g(x) dx$$


5.2 치환적분법 (Substitution Rule)

5.3 부분 적분법 (Integration by parts)

$$\int \sqrt{x^2 + 5} dx$$

$$\int 2x\sqrt{x^2 + 5} dx$$

$$\int f(x)g'(x) dx$$

$f(x) = u$ 로 치환

or

양변을 x 로 미분하여 진행

유형 (1) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$

$\int (x-5)^{10} dx:$ $x-5 = t$ 로 치환 $= \frac{1}{11} (x-5)^{11} + C$

$1 = \frac{dt}{dx} \quad dx = dt$

$\int t^{10} dt = \frac{1}{11} t^{11}$

$\int \frac{1}{(2x+3)^4} dx:$ $2x+3 = t$ 로 치환 $= -\frac{1}{6} (2x+3)^{-3} + C$

$2 = \frac{dt}{dx} \quad 2dx = dt$

$\int \frac{1}{t^4} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int t^{-4} dt = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3} t^{-3} \right)$

$$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}$$

$$\int 2x\sqrt{x^2 + 5} dx$$

$$\int \sqrt{2x+1} dx$$

$2x+1 = u$ 로 치환

$$~~2 = \frac{du}{dx}~~$$

$$2dx = du$$

양변
마분

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$$

$$\int \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int \sin x \sqrt{\cos x} dx$$

$$\int \frac{\csc^2 x}{\sqrt{\cot x}} dx$$

$$\int 2x\sqrt{x^2 + 5} dx = \frac{2}{3}(x^2 + 5)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\underline{x^2 + 5 = u} \text{로 치환} \quad \underline{2x dx = du}$$

$$= \int \sqrt{u} du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx = -\frac{1}{4} \sqrt{1 - 4x^2} + C$$

$$\underline{1 - 4x^2 = u} \text{로 치환} \quad -8x dx = du$$

$$= -\frac{1}{8} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = -\frac{1}{8} \cdot 2\sqrt{u}$$

$$\int \sin x \sqrt{\cos x} dx = -\frac{2}{3} (\cos x)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\cos x = u \text{로 치환} \quad -\sin x dx = du$$

$$= -\int \sqrt{u} du = -\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}}$$

$$\int \frac{\csc^2 x}{\sqrt{\cot x}} dx = -2\sqrt{\cot x} + C$$

$$\cot x = u \text{로 치환} \quad -\csc^2 x dx = du$$

$$= -\int \frac{1}{\sqrt{u}} du = -2\sqrt{u}$$

유형 (2) $\int \frac{\sqrt{\quad}}{\sqrt{\quad}} dx$ $\sqrt{\quad} = u$ 로 치환 $\frac{1}{2\sqrt{\quad}} dx = du$

$\sqrt{x} = u, \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = du$

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \sin \underline{u} \cdot 2 \underline{du} = -2 \cos u = -2 \cos \sqrt{x} + C$$

$$\int \frac{\cos \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} dx = \int \cos u \cdot 2 du = 2 \sin u = 2 \sin \sqrt{x+1} + C$$

$$\int \frac{\overset{\text{red arc}}{\cancel{x}} \cos \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int \cos u du = \sin u = \sin \sqrt{x^2+1} + C$$

$\sqrt{x^2+1} = u$ 로 치환 $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = du$

유형(3) $\int \frac{1}{x}$ 과 $\ln x \, dx$ $\ln x = u$ 로 치환, $\frac{1}{x} \, dx = du$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx$$



$$\begin{aligned} & \int u \, du \\ &= \frac{1}{2} u^2 \\ &= \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx$$



$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{u} \, du \\ &= \ln |u| \\ &= \ln(\ln x) + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$$



$$\begin{aligned} & \int \sin u \, du \\ &= -\cos u \\ &= -\cos(\ln x) + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x \sqrt{\ln x}} dx$$



$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{\sqrt{u}} \, du \\ &= 2\sqrt{u} \\ &= 2\sqrt{\ln x} \end{aligned}$$

유형(4) $\int e^x dx = e^x$

$$\int e^x (1 + e^x)^3 dx$$

$1 + e^x = u$ 로 치환, $e^x dx = du$

$$= \int u^3 du = \frac{1}{4} u^4$$

$$= \frac{1}{4} (1 + e^x)^4 + C$$

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1 + e^x}} dx$$

$1 + e^x = u$ 로 치환, $e^x dx = du$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{u}$$

$$= 2\sqrt{1 + e^x} + C$$

특수한 치환들 308p

$$(1) \int \underline{x} \sqrt{\underline{x+1}} \, dx = \int (\underline{u-1}) \sqrt{\underline{u}} \, du = \int (u^{\frac{3}{2}} - \sqrt{u}) \, du = \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}}$$

$$\underline{x+1 = u \text{ 로 치환, } x = u-1, dx = du}$$

$$(2) \int \frac{1}{\underline{x} + \sqrt[3]{\underline{x}}} \, dx = \int \frac{3u^2}{u^3 + u} \, du = \int \frac{3u}{u^2 + 1} \, du = \frac{3}{2} \ln |u^2 + 1|$$

$$\underline{\sqrt[3]{x} = u \text{ 로 치환, } x = u^3, dx = 3u^2 du}$$

$$(3) \int \frac{\underline{e^{4x}}}{\underline{e^{2x}-1}} \, dx = \int \frac{\underline{e^{2x}} \cdot \underline{e^{2x}}}{\underline{e^{2x}-1}} \, dx = \int \frac{u+1}{2u} \, du = \frac{1}{2} \int \left(1 + \frac{1}{u}\right) \, du = \frac{1}{2} (u + \ln |u|)$$

$$\underline{e^{2x} - 1 = u \text{ 로 치환, } e^{2x} = u + 1, 2e^{2x} dx = du}$$

$$= \frac{1}{2} (e^{2x} + \ln(e^{2x} - 1)) + C$$

혼자 해보기

$$(1) \int \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2} dx \quad \text{귀뜸: } \tan^{-1} x = u$$

$$(2) \int \frac{x(x+2) \sin \sqrt{x^3+3x^2+1}}{\sqrt{x^3+3x^2+1}} dx \quad \text{귀뜸: } \sqrt{x^3+3x^2+1} = u$$

$$(3) \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx \quad \text{귀뜸: } e^x = u$$

$$(4) \int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3}} dx \quad \text{귀뜸: } x^{\frac{1}{4}} = u$$

$$(5) \int \frac{x^2}{\sqrt{3-2x}} dx \quad \text{귀뜸: } \sqrt{3-2x} = u$$

+ 연습문제