3. 로피탈의 법칙(L'Hospital's Rule, L'Hopital's Rule)

$f(x), \ g(x)$ 가 a 근방에서 미분가능하고 $g(x) \neq 0$ 라고 하자.

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad \overset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

(예제) 다음 극한값을 구하라. $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$ $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$ 이므로

(예제3.3 (1)) 다음 극한값을 구하라. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$ 이므로

(예제3.3.(2)) 다음 극한값을 구하라.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}(e^x)}{\frac{d}{dx}(x^2)} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2} = \infty$$

(예제) 다음 극한값을 구하라.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\tan x}{6x} = \frac{1}{3}\times\underbrace{\lim_{x\to 0}\sec^2 x}_{=1}\times\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$$ 이므로

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\sec^2 x = \frac{1}{3}$$

로피탈 법칙의 역

$f, g: [0,1] \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ $\qquad g(x) = \sin x$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x} = \lim_{x\to 0+} \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{1} \cdot \underbrace{x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{0} = 0$$

But

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos x}$$

$\lim\limits_{x\to 0+} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ 는 존재하지 않는다.

P243, $0 \cdot \infty, \infty - \infty$

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+} (-x) = 0$$

(예제3.11, p 246)

$$\lim_{x\to 0+} x^x$$

$y = x^x$ 이라 두고 양변에 로그를 취한다. $\ln y = x\ln x$ 가 되어

$$\lim_{x\to 0+} \ln y = \lim_{x\to 0+} x\ln x = 0 \qquad \ln\left(\lim_{x\to 0+} y\right) = 0 \qquad \lim_{x\to 0+} y = \lim_{x\to 0+} x^x = 1$$

(별해)

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0+} x\ln x} = e^0 = 1$$

예제 3.11

$$\lim_{x\to 0+}(1+\sin 3x)^{\cot 5x} \qquad y=(1+\sin 3x)^{\cot 5x} \qquad \ln y = \cot 5x\ \ln(1+\sin 3x)$$

$$\lim_{x\to 0+}\ln y = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+\sin 3x)}{\tan 5x} = \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{3\cos 3x}{1+\sin 3x}}{5\sec^2 5x} = \frac{3}{5}$$

$$\ln(\lim_{x\to 0+} y) = \frac{3}{5} \qquad \lim_{x\to 0+} y = e^{3/5} \qquad = \lim_{x\to 0+} y = e^{\lim_{x\to 0+}\ln y} = e^{3/5}$$

예제 3.12 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$ $\qquad y=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x \qquad \ln y = x\left(\ln\frac{x+1}{x-1}\right)$

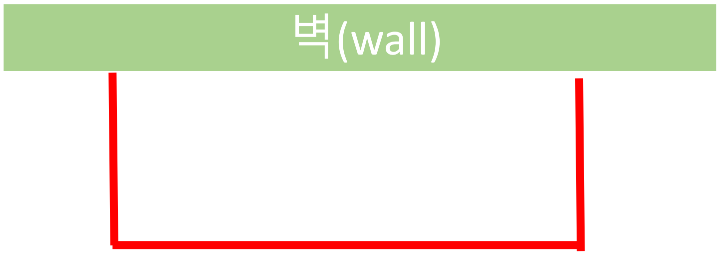
$$\lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)-\ln(x-1)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-2}{x^2-1}}{-\frac{1}{x^2}}$$

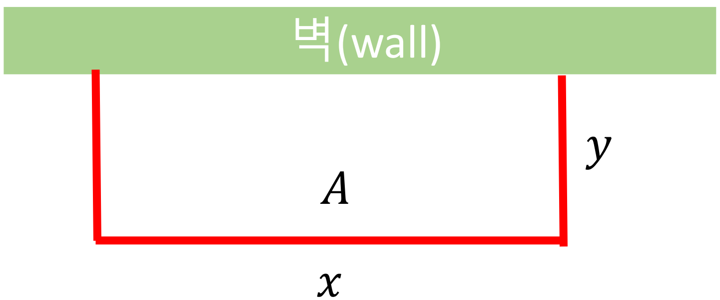
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2-1} = 2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = e^2$$

4. 최적화

(예제4.3, p253) 울타리 재료 $40\ m$, 직사각형 모양의 울타리, 한 쪽이 벽





$$A = xy = x\left(20 - \frac{1}{2}x\right) = \underbrace{20x - \frac{1}{2}x^2}_{A(x)}$$

극대/소

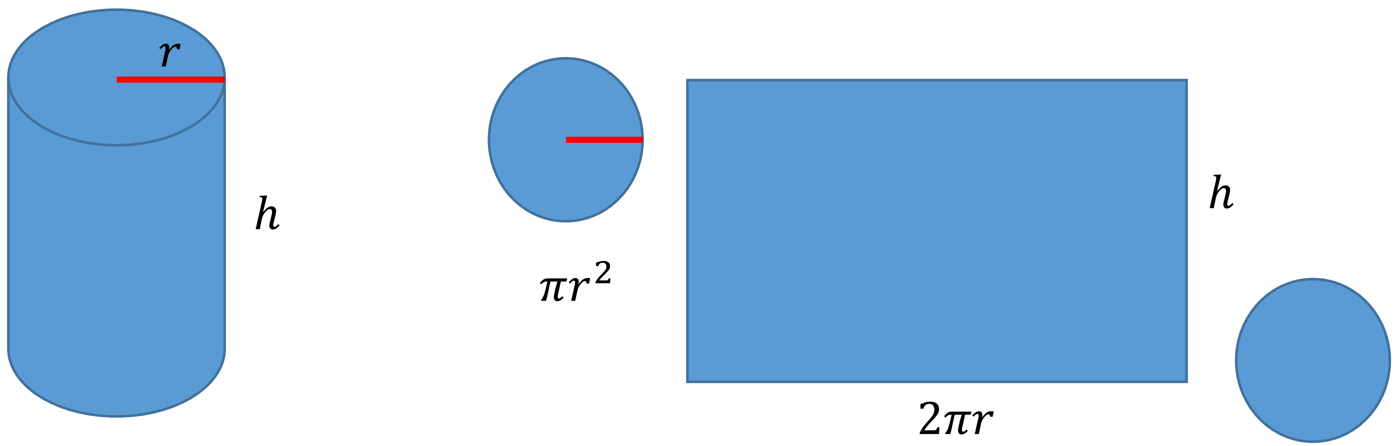
$$x + 2y = 40$$

$$y = 10$$

$\underbrace{A'(x) = 20 - x}_{=0}$ 에서 임계수 $x = 20$ 을 얻는다.

따라서 $A(20) = 200$ 이 최대 넓이 이다.

(예제4.6) 뚜껑이 없는 $2L$ 용량의 원기둥 모양의 통, 재료의 최소화



$$A = \pi r^2 + 2\pi r h \qquad = \pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{2000}{\pi r^2}\right) = \pi r^2 + \frac{4000}{r}$$

A(r)

$$h = \frac{2000}{\pi r^2} = \frac{2000}{\pi\left(\frac{2000}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{2000}{\pi}} = r$$

$$\pi r^2 h = 2000$$

(mL)

$$A'(r) = 2\pi r - \frac{4000}{r^2} = \frac{2(\pi r^3 - 2000)}{r^2}$$ 에서 임계수 $r = \sqrt[3]{2000/\pi}$

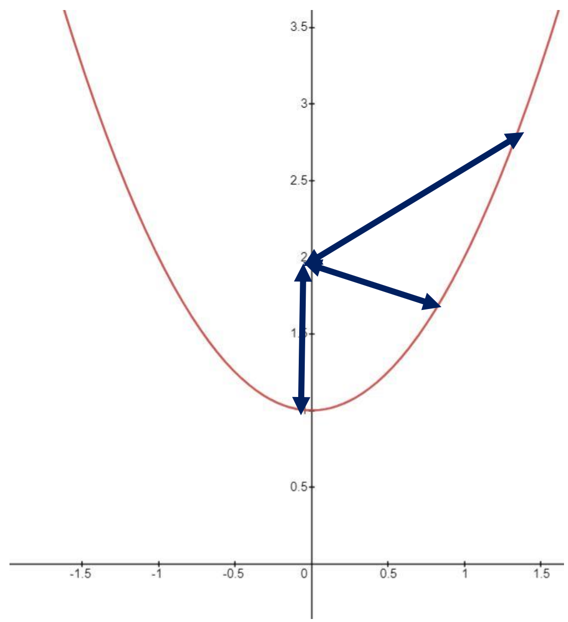
(예제4.8) $y = x^2 + 1$ 위의 점 중에서 (0,2) 와 가장 가까이 있는 점을 구하라.

(풀이) 포물선 위의 점을 $A(x, y)$ 라 두고 점 $(0,2)$ 까지의 거리를 r 라 하자.

$$r = \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = \sqrt{y - 1 + (y-2)^2} = \sqrt{y^2 - 3y + 3}$$

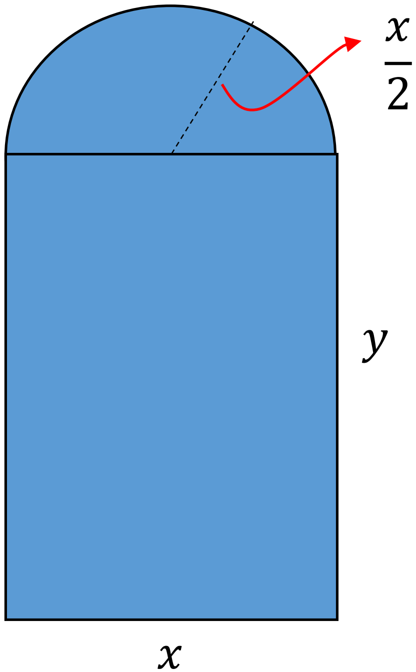
이 때 $f(y) = y^2 - 3y + 3$의 임계점을 구하면 $f'(y) = 2y - 3$ 에서 $y = \frac{3}{2}$ 이다.

$x^2 = y - 1 = \dfrac{3}{2} - 1 = \dfrac{1}{2}, \quad x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로 구하는 점은 $\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$



Norman style: Durhum cathedral

창문의 둘레가 10 m 라면, 빛이 가장 많이 드는 창문의 변의 길이를 구하라.



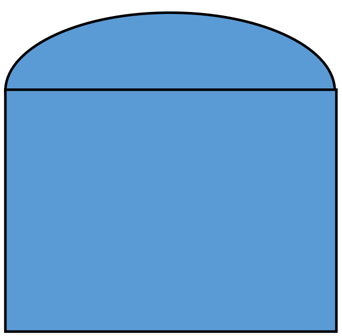
$$2y + x + \pi\left(\frac{x}{2}\right) = 10 \qquad y = \frac{1}{2}\left(10 - x - \frac{\pi x}{2}\right) = 5 - \frac{x}{2} - \frac{\pi x}{4}$$

창문의 넓이 $A = xy + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2$

$$= x\left(5 - \frac{x}{2} - \frac{\pi x}{4}\right) + \frac{1}{8}\pi x^2 = \underline{5x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{\pi}{8}x^2}$$

A(x)

$A'(x) = 5 - \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)x = 0$ 에서 임계수 $x = \frac{20}{4+\pi}$



$$y = 5 - \frac{10}{4+\pi} - \frac{5\pi}{4+\pi} = \frac{10}{4+\pi}$$