변화율과 도함수

P 89 ~p.100

제논(Zenon, BC 495~430, 엘레이 학파)

'운동은 불가능하다' : 운동은 시간에 따른 위치의 변화이다. 그러나 어느 한 순간에서만 보게 되면 위치의 변화는 일어나지 않는다. 그러므로 어느 한 순간에는 운동이 일어나지 않는다. 그런데 시간은 이런 순간들의 연속이기 때문에 운동은 절대 일어나지 않는다.

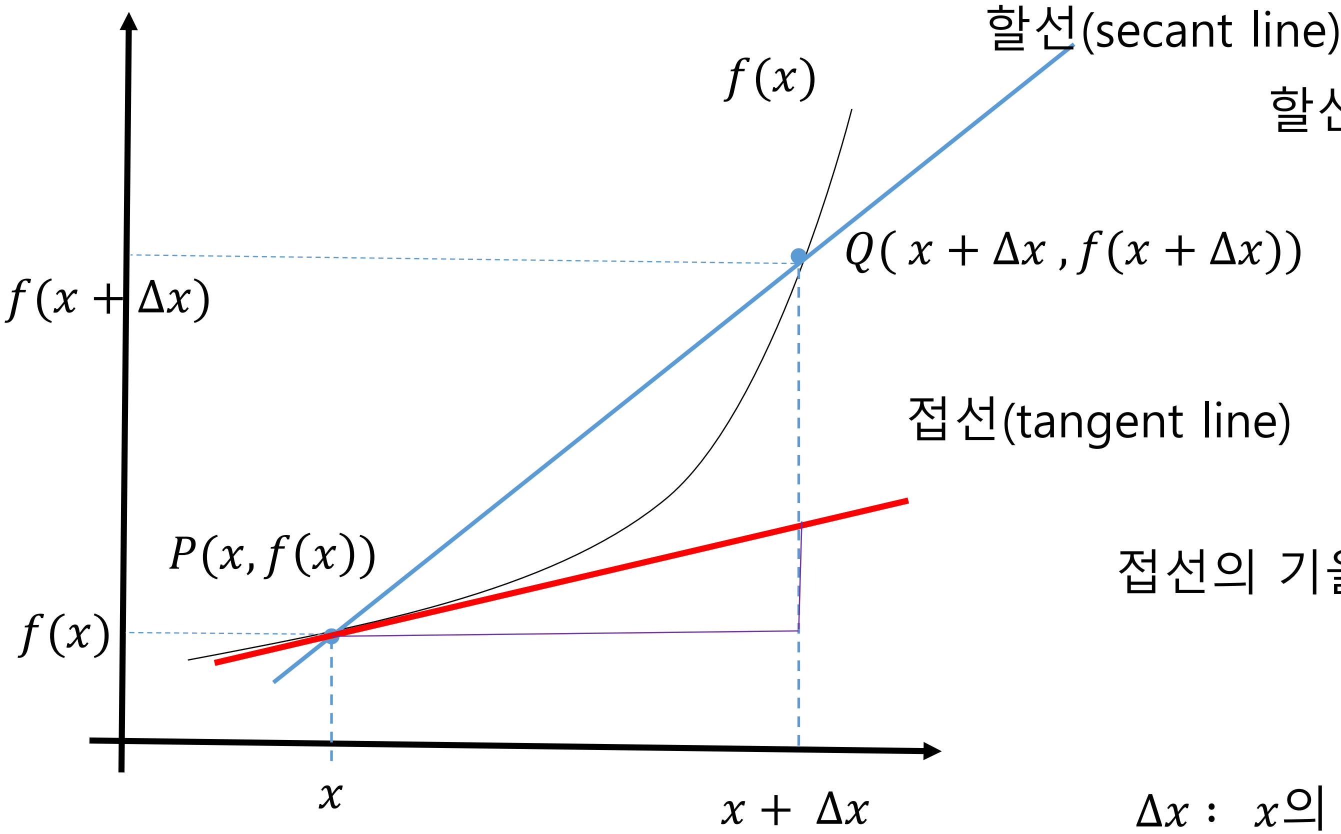
2000년의 시간이 지난 뒤에 1600년대 등장하는 두 사람: 뉴튼, 라이프니쯔

↓

날아가는 대포알은 어느 한 순간에서 보면 움직이지 않지만 운동을 나타내는 무엇인가를 갖고 있다.

↓

속도



할선의 기울기 : $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$Q \rightarrow P$

접선의 기울기: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Δx : x의 증분

$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)$: y 의 증분

(예제 1)$y=x^2$, $x=1$ 에서 $x=3$ 이 되었을 때,

$\Delta x = 3-1=2$, $\Delta y = f(3)-f(1)=9-1=8$

(예제 2)$y=x^2$, $x=1$ 에서 $x=-3$ 이 되었을 때,

$\Delta x = -3-1=-4$ $\Delta y = f(-3)-f(1)=9-1=8$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = y' = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{dy}{dx}$$

: Differentiable (미분가능)

도함수(導函數, derivative function)

dy : y 의 미분

dx : x 의 미분

미분가능성을 조사하라 = 극한값이 존재하는가?

도함수를 구하라 = 미분하여라

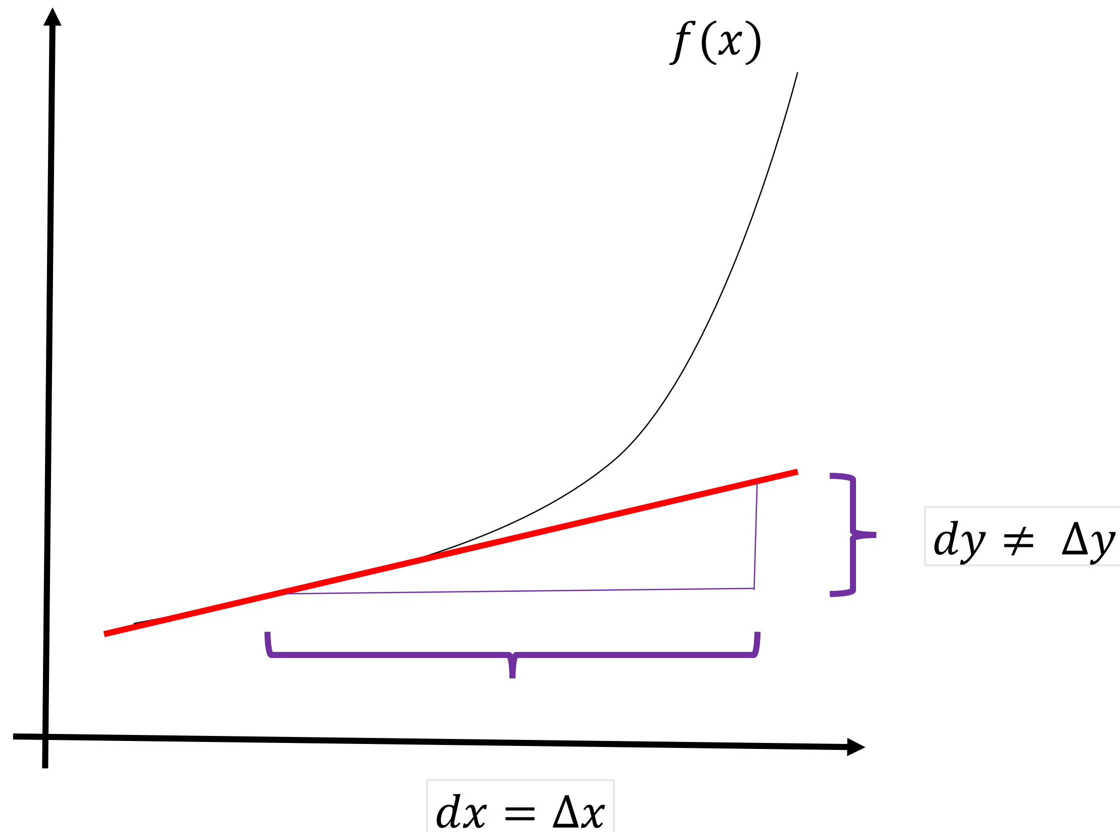
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

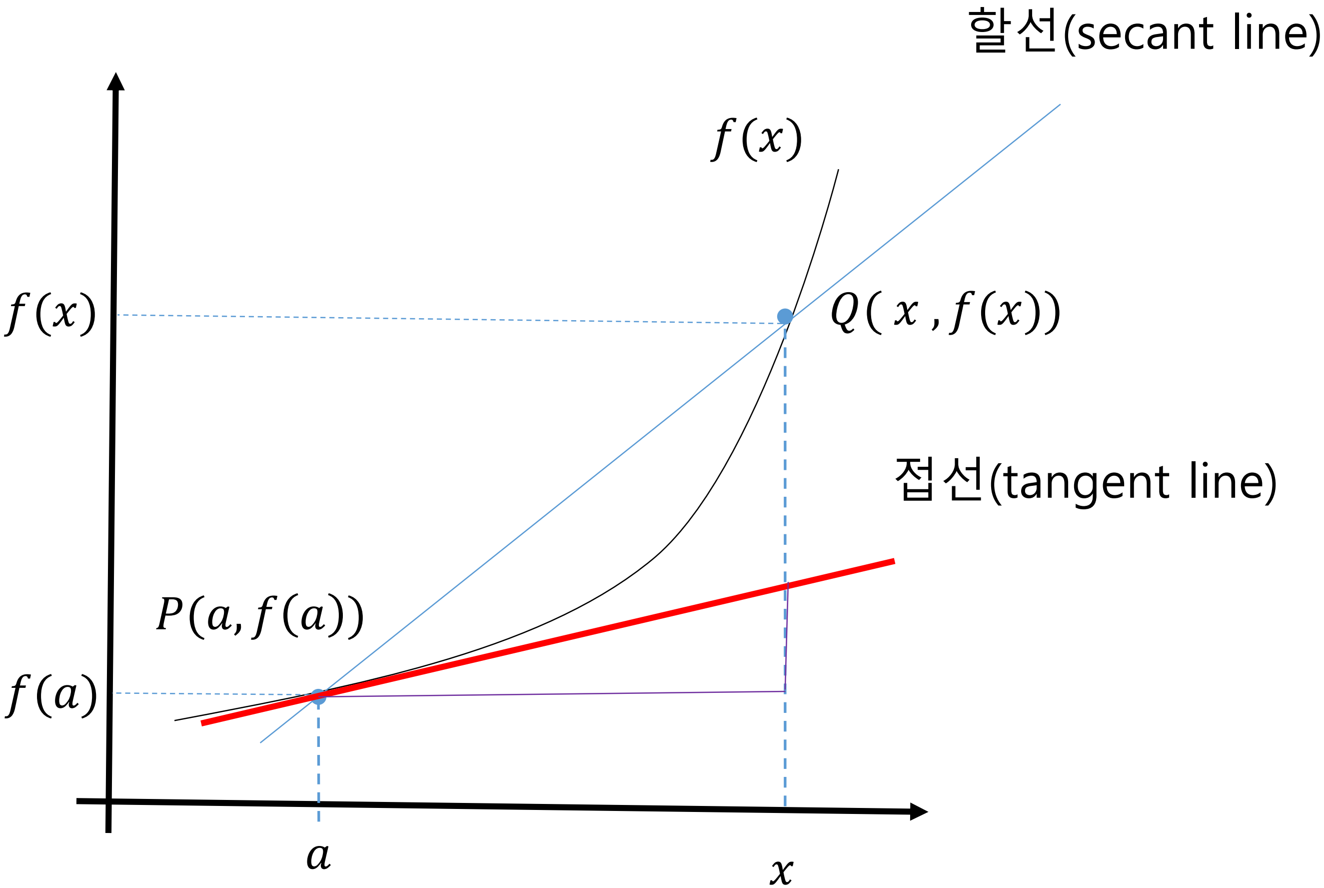
(예제 1)$y = x^2$, $x = 1$ 에서 $x = 3$ 이 되었을 때,

$\Delta x = 3 - 1 = 2$, $\Delta y = f(3) - f(1) = 9 - 1 = 8$

$dx = \Delta x = 2$, $dy = ?$

$$\frac{dy}{dx}$$





할선의 기울기 : $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$Q \rightarrow P$

접선의 기울기: $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

미분계수 : $f'(a) = y'\big|_{x=a} = \frac{d}{dx} f(a) = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=a}$

(예제 1) 함수 $y = \sqrt{x}$ 에 대하여 $x = 2$ 일 때의 미분계수를 구하라.

풀이:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} \quad \longrightarrow \quad \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{(\sqrt{x} + \sqrt{2})(\sqrt{x} - \sqrt{2})} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

인수분해
사용

(예제 2) 함수 $y = \sqrt{x}$ 에 대하여 $x = 3$ 일 때의 미분계수를 구하라.

풀이:

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} \quad \longrightarrow \quad \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{(\sqrt{x} + \sqrt{3})(\sqrt{x} - \sqrt{3})} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

인수분해
사용

(예제 3) 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 도함수를 구하라.

풀이:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \qquad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

유리화 사용

$x = 2$ 일 때, $\quad f'(2) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$x = 3$ 일 때, $\quad f'(3) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

$y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) 의 도함수를 구하라.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \qquad = \lim_{h \to 0} \frac{\left(x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}h + \binom{n}{2} x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n\right) - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(x^n + n\,x^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n\right) - x^n}{h}$$

$$\boxed{= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\cancel{x^n} + n\,x^{n-1}\cancel{h} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n\right) - \cancel{x^n}}{\cancel{h}}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(n\,x^{n-1} + \cdots h^{n-1}\right) = n x^{n-1}$$

$y = \frac{1}{x}$ 의 도함수를 구하라.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \quad \Rightarrow \quad = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

통분 사용

\# $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

\# $(x^n)' = nx^{n-1}$

\# $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

$$\lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

평균변화율

(순간)변화율

평균속도

(순간)속도