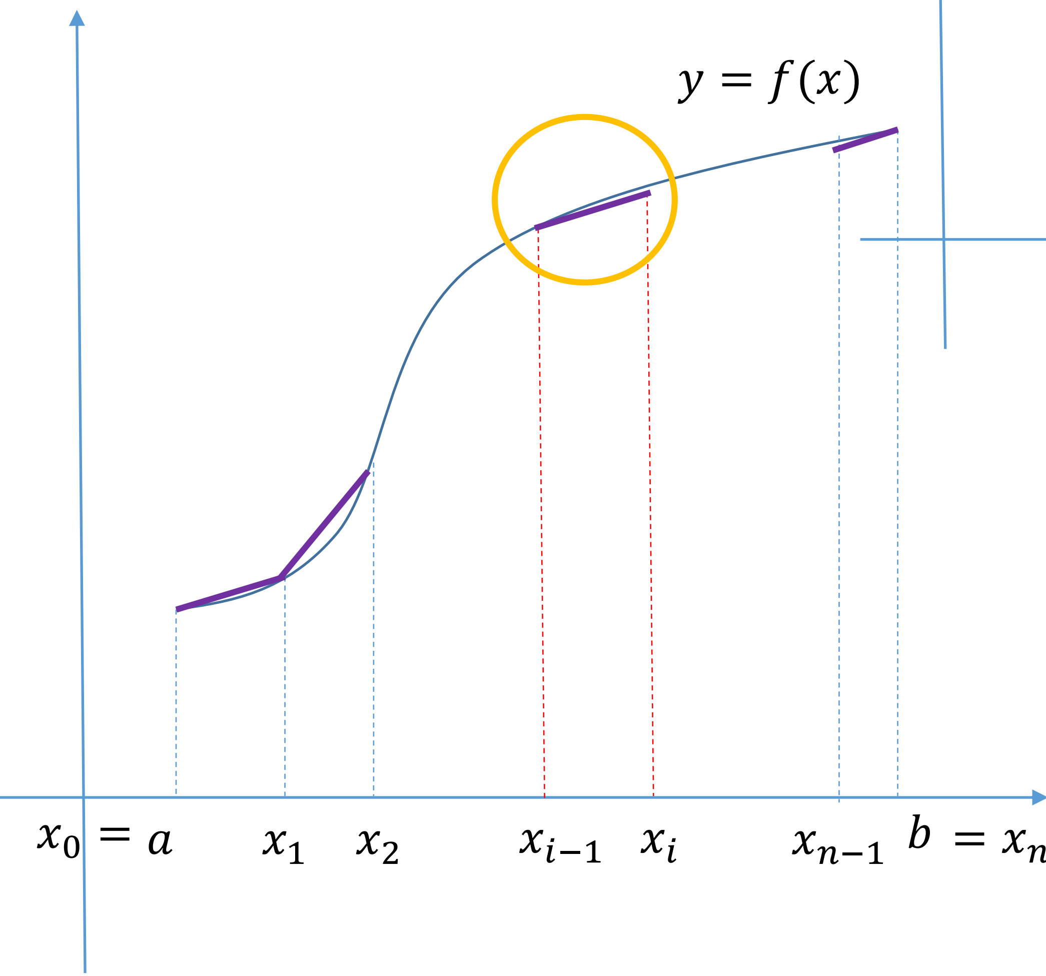
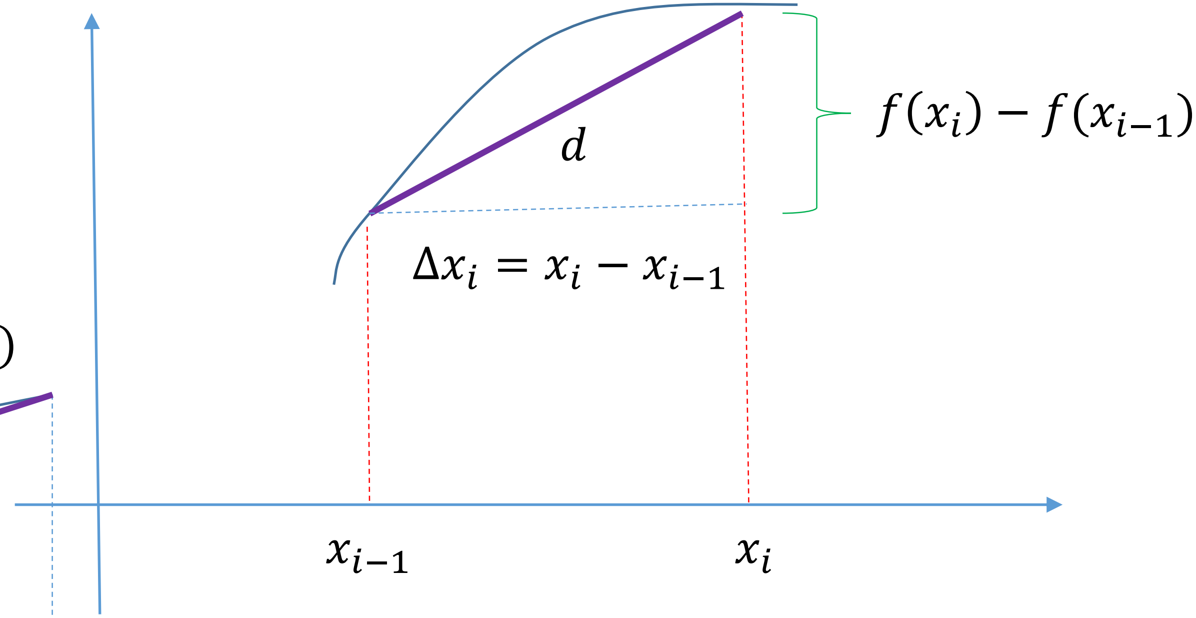
적분의 응용

호의 길이

회전체의 겉넓이

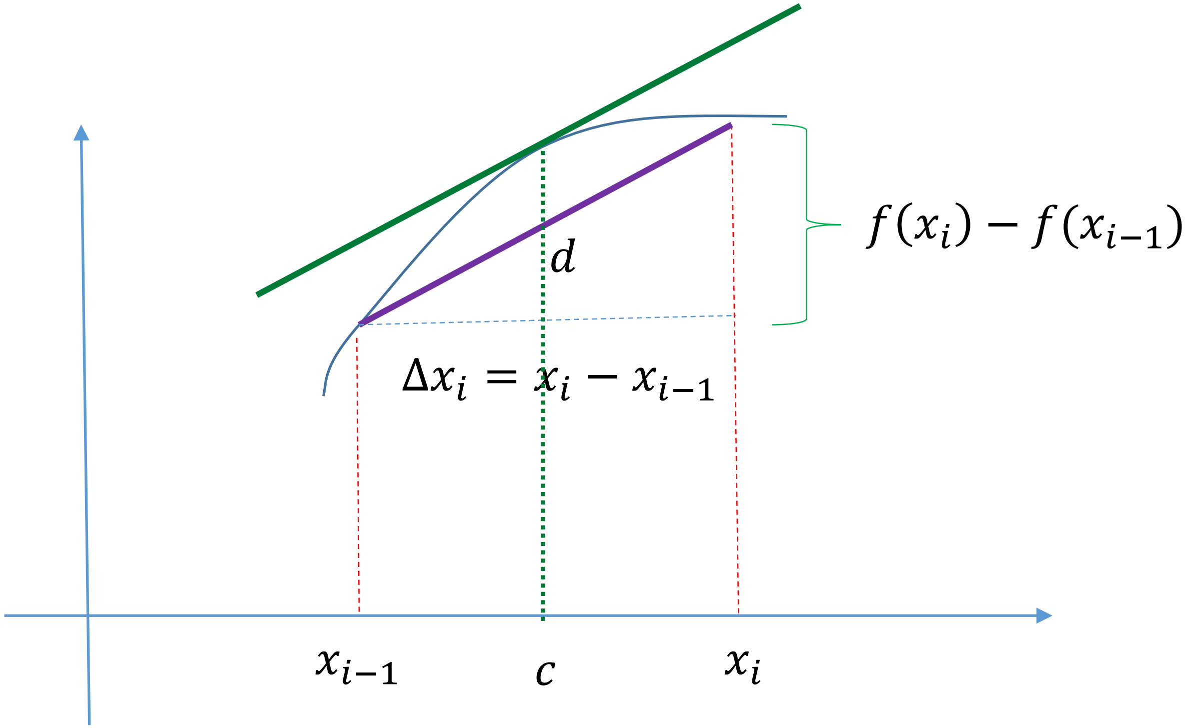
8.1 곡선의 길이 (Arc Length of a curve)





$$d = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

$$\lim \sum d$$



평균값의 정리:

$$\exists\, c \in (x_{i-1}, x_i) \ \ such\ that \ \ \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(c)$$

$$d = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

$$d = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 \left(1 + \frac{(f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}{(x_i - x_{i-1})^2}\right)}$$

$$d = \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2}\,(x_i - x_{i-1})$$

평균값의 정리

$$d = \sqrt{1 + (f'(c))^2}\,\Delta x_i$$

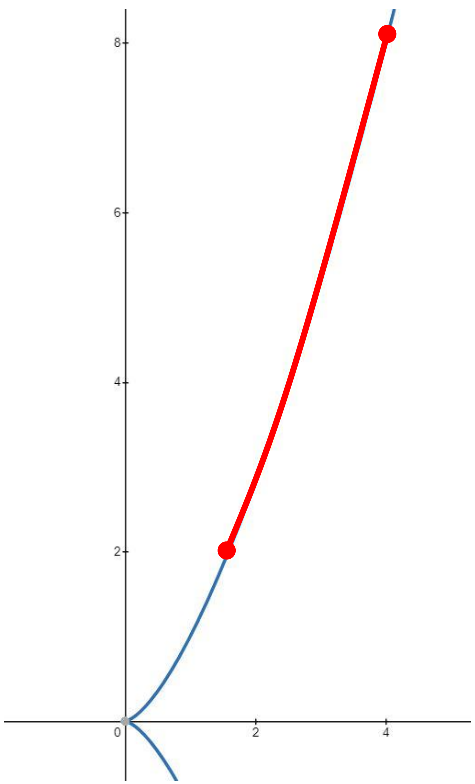
$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} d$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c))^2}\,\Delta x_i$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

(예제) $y^2 = x^3$ 위의 점 $(1,1), (4,8)$ 사이의 호의 길이



(풀이) x 축 위쪽에 있는 부분은 $y = x^{\frac{3}{2}}$ 이다.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \frac{8}{27}\left[\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$

$1 + \frac{9}{4}x = u$ 로 치환하면, $\frac{9}{4}dx = du$ 가 되어

$$= \frac{4}{9}\int \sqrt{u}\, du = \frac{4}{9} \times \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}$$

$$L = \frac{8}{27}\left(10^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{27}(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13})$$

(예제) (0,0) 에서 (1,1) 까지 곡선 $f(x) = x^2$ 의 호의 길이를 구하라.

(풀이) $L = \int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx$

$$\int \sec^3 t\ dt = \frac{1}{2}(\sec t \tan t + \ln(\sec t + \tan t))$$

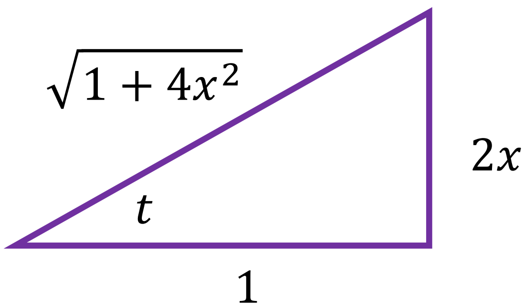
$$\int \sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{1+(\tan^2 t)}\sec^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int \sec^3 t\,dt$$

$x = \frac{1}{2}\tan t$ 로 치환하면 $dx = \frac{1}{2}\sec^2 t\ dt$

$$= \frac{1}{4}(\sec t \tan t + \ln(\sec t + \tan t))$$

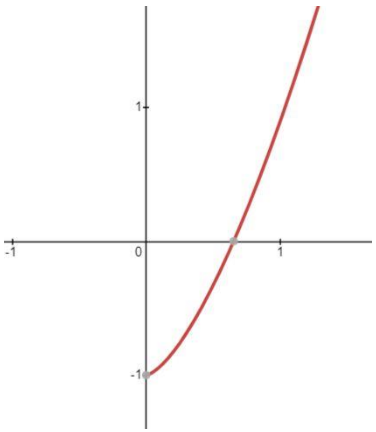
$$= \frac{1}{4}(\sec t \tan t + \ln(\sec t + \tan t))$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{1+4x^2}\cdot 2x + \ln(\sqrt{1+4x^2} + 2x)\right)$$



$$L = \int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx = \left[\frac{2x\sqrt{1+4x^2} + \ln(2x + \sqrt{1+4x^2})}{4}\right]_0^1 = \frac{2\sqrt{5} + \ln(2+\sqrt{5})}{4}$$

예제 3.1 , p. 453 $x = 0$ 에서 $x = 1$ $y = \frac{4\sqrt{2}}{3} x^{3/2} - 1$

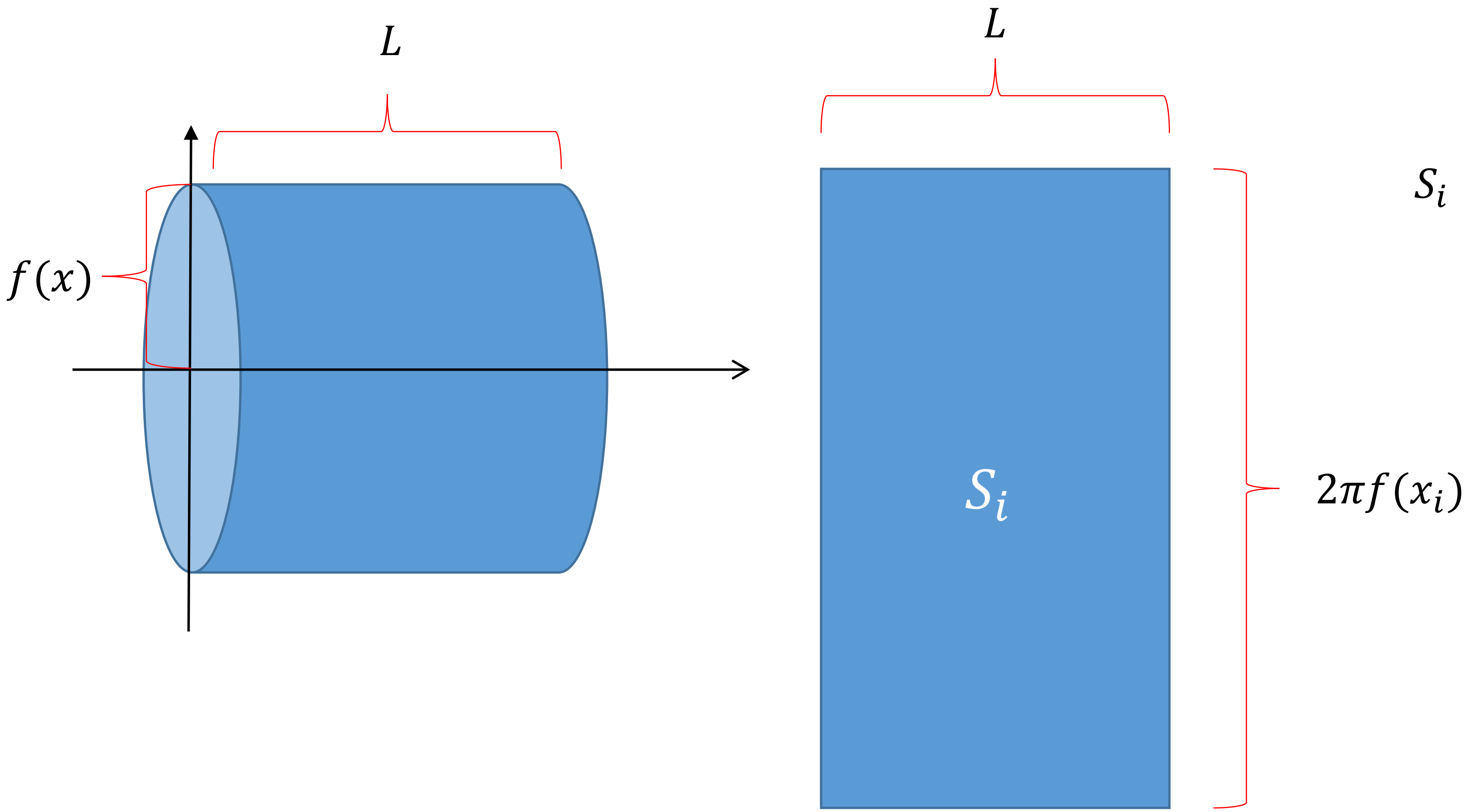


풀이 : $y' = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} x^{1/2}$

$$\sqrt{1 + \left(2\sqrt{2} x^{1/2}\right)^2} = \sqrt{1 + 8x}$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + 8x}\, dx = \qquad \frac{13}{6}$$

8.2 회전체의 겉넓이(Area of a surface of revolution)



$$S_i = 2\pi f(x_i) \cdot L$$

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} S_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(x_i)\sqrt{1 + (f'(x_i))^2}\,\Delta x_i \qquad S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

(예제) 반지름이 r 인 구의 겉넓이를 구하라.

(풀이) $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ 이므로

$$S = 2 \times 2\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,\sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\,dx \qquad = 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,dx$$

$$= 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,\sqrt{\frac{(r^2 - x^2) + x^2}{r^2 - x^2}}\,dx \qquad = 4\pi \int_0^r \cancel{\sqrt{r^2 - x^2}}\,\sqrt{\frac{r^2}{\cancel{r^2 - x^2}}}\,dx$$

$$= 4\pi \int_0^r r\,dx \quad = 4\pi\,[rx]_0^r \qquad = 4\pi\, r^2$$

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$y = f(x), \quad a \le x \le b$ 를 x 축 회전

$$S = 2\pi \int_c^d \boxed{x} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

$x = g(y),\ c \le y \le d$ 를 y 축 회전

교재 p 519 (6) 주의

$$S = 2\pi \int_c^d \boxed{y} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

$x = g(y),\ c \le y \le d$ 를 x 축 회전

(예제 1, p 520) $y = \sqrt{4 - x^2}, -1 \le x \le 1$ 를 x축으로 회전시켜 얻은 입체의 겉넓이

(풀이) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$

$$S = 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}\right)^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2} \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx$$

$$= 4\pi \int_{-1}^{1} 1\, dx = 8\pi$$

(예제) (1,1) 에서 (2,4) 까지 곡선 $y = x^2$ 의 호를 y 축 회전시켰을 때 회전된 곡면의 넓이를 구하라.

(풀이) $y = x^2$ 일 때 $\frac{dy}{dx} = 2x$ $x = \sqrt{y}$ 일 때 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

$$S = 2\pi \int_1^4 \sqrt{y} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2}\, dy \quad = 2\pi \int_1^4 \sqrt{y} \sqrt{1 + \frac{1}{4y}}\, dy$$

$$= 2\pi \int_1^4 \sqrt{y} \sqrt{\frac{4y+1}{4y}}\, dy \quad = \pi \int_1^4 \sqrt{4y+1}\, dy$$

$$= \pi \left[\frac{1}{6}(4y+1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{\pi}{6}\left(17^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}}\right)$$

$4y + 1 = u$ 로 치환하면 $4dy = du$

$$\frac{1}{4}\int \sqrt{u}\, du = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6}u^{3/2}$$

(예제) $y = e^x, \quad 0 \le x \le 1$ 을 x 축에 대하여 회전하여 생기는 곡면의 겉넓이를 구하라.

(풀이) $y = e^x, \qquad \dfrac{dy}{dx} = e^x$

$$S = 2\pi \int_0^1 y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \; = 2\pi \int_0^1 e^x \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \left[\left(\sqrt{1 + e^{2x}} \cdot e^x + \ln \left| \sqrt{1 + e^{2x}} + e^x \right| \right]_0^1 \right.$$

$$= \pi\left(e\sqrt{1 + e^2} + \ln\left(e + \sqrt{1 + e^2}\right) - \sqrt{2} - \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)\right)$$

$e^x = u$ 로 치환하면 $e^x dx = du$

$$\int e^x \sqrt{1 + e^{2x}} dx \; \rightarrow \; \int \sqrt{1 + u^2}\; du$$

$u = \tan t$ 로 치환하면 $du = \sec^2 t \, dt$

$$\int \sqrt{1 + u^2}\, du \rightarrow \int \sec^3 t \, dt$$

$$\int \sec^3 t \, dt = \frac{1}{2}(\sec t \tan t + \ln |\sec t + \tan t|)$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{1 + u^2} \cdot u + \ln |\sqrt{1 + u^2} + u|$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{1 + e^{2x}} \cdot e^x + \ln |\sqrt{1 + e^{2x}} + e^x|$$

예제 3.2 , p.455 $y = \sqrt{x}, (0 \le x \le 2)$ x축 회전

$$S = \int_0^2 2\pi y \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 \sqrt{x} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 \sqrt{x} \sqrt{\frac{4x+1}{4x}}\, dx \quad = 2\pi \int_0^2 \sqrt{x} \left(\frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}\right) dx$$

$$= \pi \int_0^2 \sqrt{4x+1}\, dx \qquad = \pi \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} (4x+1)^{3/2}\right]_0^2 = \frac{13\pi}{2}$$

1 학기 대학 수학은 여기까지입니다.

2 학기 대학 수학의 내용은 무한급수, 매개 방정식, 벡터와 공간 기하, 벡터 함수, 다변수 함수의 편미분과 다중적분, 벡터 미적분학입니다.

1 학기 내용이 미분과 적분의 기초를 다룬 것이라면, 2학기는 공학 수학에 좀 더 가까운 내용을 다루게 됩니다.

기말고사 일정: 15주 실시간 수업 시간에 대면으로 ~ 학교에서 만나요.

수고하셨습니다. 방학 잘 보내고, 건강한 모습으로 2학기 때 만납시다.