

# 引言

## 图的引入

Lijie Wang

图的示例

无序对

图的定义



图论发源于十八世纪, 最早主要研究一些游戏问题: 如哥尼斯堡七桥问题, 迷宫问题和博弈问题等. 计算机出现以后, 图论得到了长足的发展, 至今仍然活跃在科研和实际应用的第一线, 如现在受到普遍关注的云计算, 大数据应用和深度学习等.

图论所讨论的图 (Graph) 与人们通常所熟悉的图 (如圆、椭圆、函数图表等) 是很不相同的. 图论中的图是指某类具体离散事物集合和该集合中的每对事物间以某种方式相联系的数学模型.



# 不同类型的图

图的引入

Lijie Wang

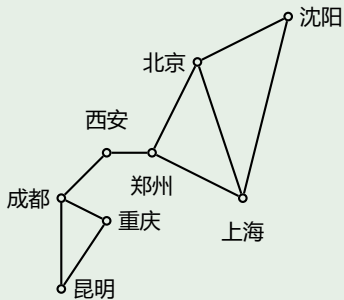
图的示例

无序对

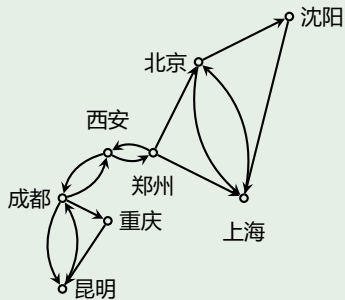
图的定义

## Example

考虑城市之间的电话网络.



无向图



有向图

# 不同类型的图-续

图的引入

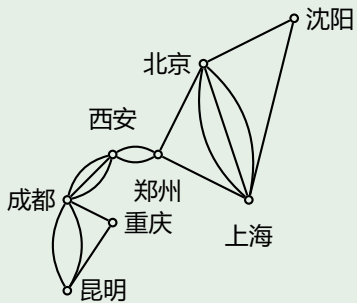
Lijie Wang

图的示例

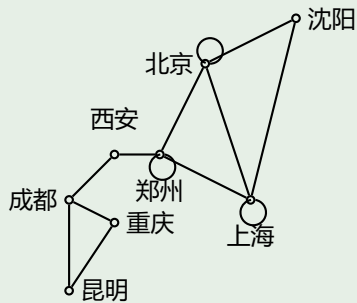
无序对

图的定义

## Example



多重图



有环图

# 不同领域的图

图的引入

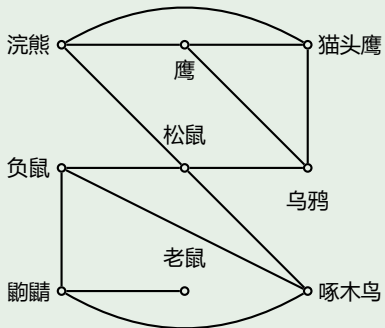
Lijie Wang

图的示例

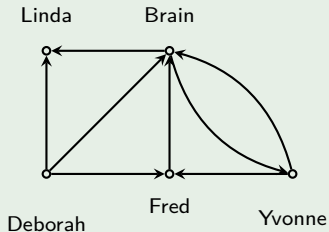
无序对

图的定义

## Example



栖息地重叠图



群体影响图

# 不同领域的图

图的引入

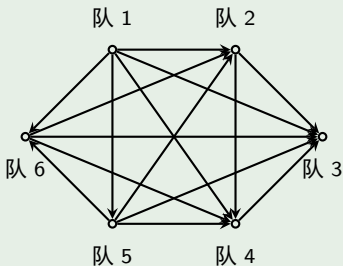
Lijie Wang

图的示例

无序对

图的定义

## Example



巡回联赛图

$S_1 a := 0$

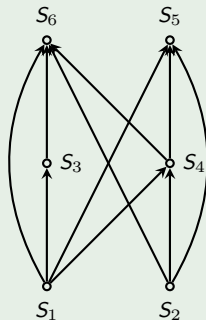
$S_2 b := 1$

$S_3 c := a + 1$

$S_4 d := b + a$

$S_5 e := d + 1$

$S_6 e := c + d$



优先图

# 无序对和无序积

图的引入

Lijie Wang

图的示例

无序对

图的定义

## Definition

设  $A, B$  为任意集合, 称集合  $A \& B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$  为  $A$  与  $B$  的**无序积**,  $(a, b)$  称为**无序对**.

与序偶不同, 对  $\forall a, b, (a, b) = (b, a)$ .

## Example

取  $A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2\}$ , 则

- $A \& B = B \& A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$ .
- $A \& A = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, c)\}$ .
- $B \& B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$ .

# 什么是图

图的引入

Lijie Wang

图的示例

无序对

图的定义

## Definition

一个图 (Graph) 是一个序偶  $\langle V, E \rangle$ , 记为  $G = \langle V, E \rangle$ , 其中:

- $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  是有限非空集合,  $v_i$  称为结点 (node),  $V$  称为结点集。
- $E$  是有限集合, 称为边集。  $E$  中的每个元素都有  $V$  中的结点对与之对应, 称之为边 (edge)。

与边对应的结点对即可以是无序的, 也可以是有序的。

若边  $e$  与无序结点对  $(u, v)$  相对应, 则称  $e$  为无向边 (undirected edge), 记为  $e = (u, v) = (v, u)$ , 这时称  $u, v$  是边  $e$  的两个端点。

若边  $e$  与有序结点对  $\langle u, v \rangle$  相对应, 则称  $e$  为有向边 (directed edge) (或弧), 记为  $e = \langle u, v \rangle$ , 这时称  $u$  为  $e$  的始点 (或弧尾),  $v$  为  $e$  的终点 (或弧头), 统称为  $e$  的端点。

# 什么是图

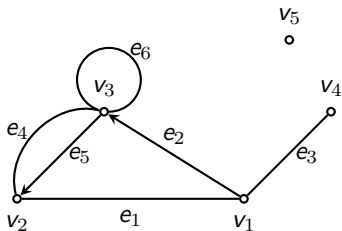
## 图的引入

Lijie Wang

图的示例

无序对

图的定义



$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

$$e_1 = (v_1, v_2) \quad e_2 = \langle v_1, v_3 \rangle$$

$$e_3 = (v_1, v_4) \quad e_4 = (v_2, v_3)$$

$$e_5 = \langle v_3, v_2 \rangle \quad e_6 = (v_3, v_3)$$

$e_1, e_3, e_4, e_6$  是无向边 ;

$e_2, e_5$  是有向边。



# 图的表示

## 图的表示

Lijie Wang

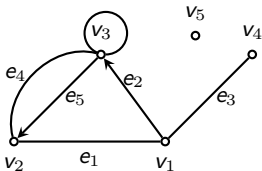
集合表示和图形表示

矩阵表示法

邻接点与邻接边

对于一个图  $G$ , 如果将其记为  $G = \langle V, E \rangle$ , 并写出  $V$  和  $E$  的集合表示, 这称为**图的集合表示**.

为了描述简便起见, 在一般情况下, 往往只画出它的图形: 用小圆圈表示  $V$  中的结点, 用由  $u$  指向  $v$  的有向线段或曲线表示有向边  $\langle u, v \rangle$ , 无向线段或曲线表示无向边  $(u, v)$ , 这称为**图的图形表示**.



图形表示法

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

$$e_1 = (v_1, v_2) \quad e_2 = \langle v_1, v_3 \rangle$$

$$e_3 = (v_1, v_4) \quad e_4 = (v_2, v_3)$$

$$e_5 = \langle v_3, v_2 \rangle \quad e_6 = (v_3, v_3)$$

集合表示法

# 邻接矩阵

图的表示

Lijie Wang

集合表示和图形  
表示

矩阵表示法

邻接点与邻接边

图形表示法的优点是形象直观, 但不适合于大图. 而集合表示法的优点是精确, 但抽象不易理解. 为了便于用代数知识来研究图的性质, 特别是便于用计算机来处理, 我们引入**图的矩阵表示**. 因为矩阵的存储和处理在计算机中是非常容易的, 从而能够把图的问题变为数字计算问题, 再利用矩阵代数的运算来计算图的通路、回路和其它特征.

## Definition

设图  $G = \langle V, E \rangle$ , 其中  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , 并假定结点已经有了从  $v_1$  到  $v_n$  的次序, 则  $n$  阶方阵  $A_G = (a_{ij})_{n \times n}$  称为  $G$  的**邻接矩阵** (adjacency matrix), 其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \langle v_i, v_j \rangle \in E \text{ 或 } (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{否则} \end{cases}, (i, j = 1, 2, 3, \dots, n)$$

# 邻接矩阵

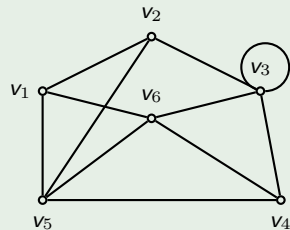
图的表示

Lijie Wang

集合表示和图形  
表示

矩阵表示法

邻接点与邻接边



$$A_G = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

对于  $V$  中各元素不同的排序, 可得到同一图  $G$  的不同邻接矩阵, 我们略去由结点排序不同而引起的邻接矩阵的不同.

# 邻接点与邻接边

图的表示

Lijie Wang

集合表示和图形表示

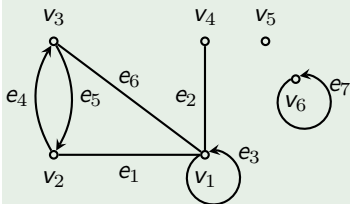
矩阵表示法

邻接点与邻接边

## Definition

在图  $G = \langle V, E \rangle$  中, 若两个结点  $v_i$  和  $v_j$  是边  $e$  的端点, 则称  $v_i$  与  $v_j$  互为邻接点, 否则  $v_i$  与  $v_j$  称为不邻接的; 具有公共结点的两条边称为邻接边; 两个端点相同的边称为环或自回路; 图中不与任何结点相邻接的结点称为孤立结点.

## Example



- $v_1$  的邻接点有  $v_1, v_2, v_3, v_4$ .
- $v_5$  是孤立结点.
- $e_4$  的邻接边有  $e_1, e_5, e_6$ .
- $e_3, e_7$  是环.

# 一些简单的特殊图

图的表示

Lijie Wang

集合表示和图形表示

矩阵表示法

邻接点与邻接边

## Definition

仅由孤立结点组成的图称为**零图**; 仅含一个结点的零图称为**平凡图**; 含有  $n$  个结点,  $m$  条边的图, 称为  $(n, m)$  图。

- 环的存在与否不会导致图论定理的重大变化, 很多场合下都会被忽略;
- 零图没有任何边, 邻接矩阵为全 0;
- $(8, 20)$  图表示一个图有 8 个结点, 20 条边, 但图的各边如何分布则不清楚。

# 按边有无方向分类

图的分类

Lijie Wang

按边的方向分类

按平行边分类

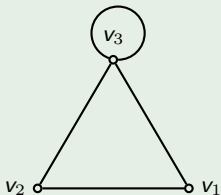
按权值分类

综合分类方法

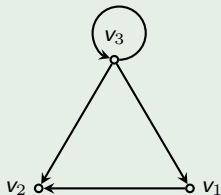
## 定义

每条边都是无向边的图称为**无向图**(undirected graph); 每条边都是有向边的图称为**有向图**(directed graph); 有些边是无向边, 而另一些边是有向边的图称为**混合图**(mixed graph)。

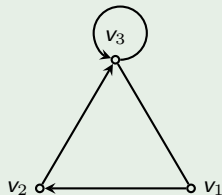
## 例



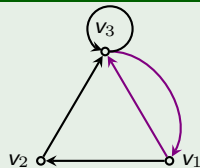
无向图



有向图



混合图



混合图变成有向图

# 按有无平行边分类

图的分类

Lijie Wang

按边的方向分类

按平行边分类

按权值分类

综合分类方法

- 从成都到西安有多条道路可以通行;
- 繁忙的通信结点间通常架设多条光纤线路;
- 两种动物间可能存在多种存在竞争的食物资源.

## 定义

在**有向图**中, 两结点间 (包括结点自身间) 若有**同始点和同终点**的几条边, 则这几条边称为**平行边**; 在**无向图**中, 两结点间 (包括结点自身间) 若有几条边, 则这几条边称为**平行边**。两结点  $a$ 、 $b$  间相互平行的边的条数称为边  $(a, b)$  或  $\langle a, b \rangle$  的**重数**。含有平行边的图称为**多重图**(multigraph); 非多重图称为**线图**(line graph); 无环的线图称为**简单图**(simple graph)。

# 多重图

图的分类

Lijie Wang

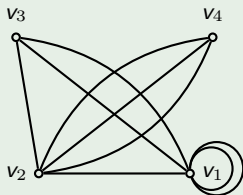
按边的方向分类

按平行边分类

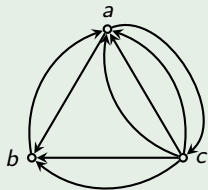
按权值分类

综合分类方法

例

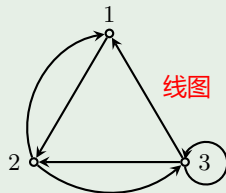


多重图

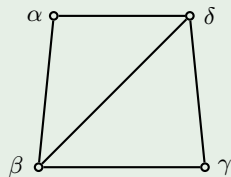


多重图

- 边  $(v_1, v_1)$  重数是 2;
- 边  $(v_1, v_3)$  重数是 2;
- 边  $(v_2, v_4)$  重数是 3.



线图



简单图

- 边  $\langle c, a \rangle$  重数是 3;
- 边  $\langle c, b \rangle$  重数是 2.



# 按有无权值分类

图的分类

Lijie Wang

按边的方向分类

按平行边分类

按权值分类

综合分类方法

- 两个城市间的道路有距离之分，也有通行时间之分；
- 架设通信线路时，要考虑单位距离的光纤成本；
- 两种动物间的竞争存在程度上的不同；
- 在影响图中，一个人对他人的影响力也存在程度上的不同。

## 定义

**赋权图**(weighted graph)  $G$  是一个三重组  $\langle V, E, g \rangle$  或四重组  $\langle V, E, f, g \rangle$ ，其中  $V$  是结点集合， $E$  是边的集合， $f$  是从  $V$  到非负实数集合的函数（即结点的权值函数）， $g$  是从  $E$  到非负实数集合的函数（即边的权值函数）。相应的，边或结点均无权值的称为**无权图**。

# 赋权图: 边有权值

图的分类

Lijie Wang

按边的方向分类

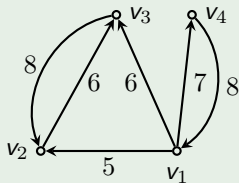
按平行边分类

按权值分类

综合分类方法

例

赋权图:  $G_1 = \langle V_1, E_1, g_1 \rangle$



- $g_1(\langle v_1, v_2 \rangle) = 5;$
- $g_1(\langle v_1, v_3 \rangle) = 6;$
- $g_1(\langle v_1, v_4 \rangle) = 7;$
- $g_1(\langle v_2, v_3 \rangle) = 6;$
- $g_1(\langle v_3, v_2 \rangle) = 8;$
- $g_1(\langle v_4, v_1 \rangle) = 8;$

# 赋权图: 边和结点都有权值

图的分类

Lijie Wang

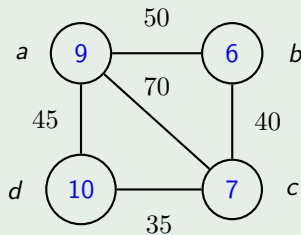
按边的方向分类

按平行边分类

按权值分类

综合分类方法

例



赋权图:  $G_2 = \langle V_2, E_2, f_2, g_2 \rangle$

- $f_2(a) = 9$
- $f_2(b) = 6$
- $f_2(c) = 7$
- $f_2(d) = 10$
- $g_2((a, b)) = 50$
- $g_2((a, c)) = 70$
- $g_2((a, d)) = 45$
- $g_2((b, c)) = 40$
- $g_2((c, d)) = 35$

# 赋权图的一个实际应用

图的分类

Lijie Wang

按边的方向分类

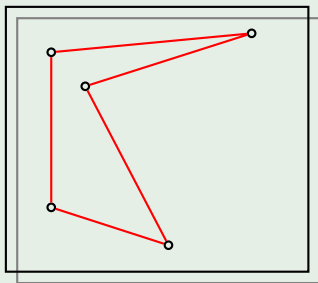
按平行边分类

按权值分类

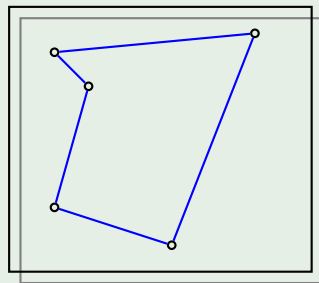
综合分类方法

在一块带螺钉孔的金属板上, 考虑制造加工业中的钻孔路径问题

例



drill walk distance:11.0197



drill walk distance:9.5972

# 综合分类方法

图的分类

Lijie Wang

按边的方向分类

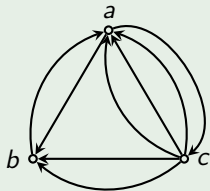
按平行边分类

按权值分类

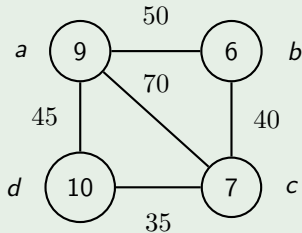
综合分类方法

可将以上三种分类方法综合起来对图进行划分.

例



有向无权多重图



无向赋权简单图

# 各类子图

子图和补图

Lijie Wang

子图

完全图

补图

## Definition

设有图  $G = \langle V, E \rangle$  和图  $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ .

- 若  $V_1 \subseteq V, E_1 \subseteq E$ , 则称  $G_1$  是  $G$  的**子图**(subgraph), 记为  $G_1 \subseteq G$ .
- 若  $G_1 \subseteq G$ , 且  $G_1 \neq G$  (即  $V_1 \subset V$  或  $E_1 \subset E$ ), 则称  $G_1$  是  $G$  的**真子图**(proper subgraph), 记为  $G_1 \subset G$ .
- 若  $V_1 = V, E_1 \subseteq E$ , 则称  $G_1$  是  $G$  的**生成子图**(spanning subgraph).
- 设  $V_2 \subseteq V$  且  $V_2 \neq \emptyset$ , 以  $V_2$  为结点集, 以两个端点均在  $V_2$  中的边的全体为边集的  $G$  的子图, 称为  $V_2$  导出的  $G$  的子图, 简称  $V_2$  的**导出子图**(induced subgraph).

# 各类子图

子图和补图

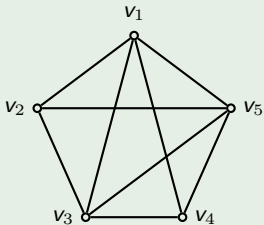
Lijie Wang

子图

完全图

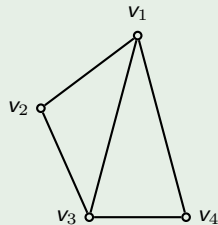
补图

## Example



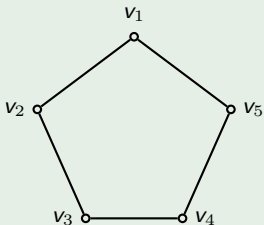
$G$

子图  
生成子图  
导出子图



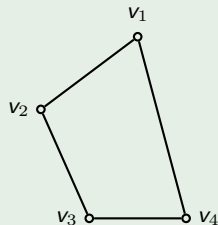
$G_1$

子图  
真子图  
导出子图



$G_2$

子图  
真子图  
生成子图



$G_3$

子图  
真子图

# 完全图

子图和补图

Lijie Wang

子图

完全图

补图

## Definition

- 设  $G = \langle V, E \rangle$  为一个具有  $n$  个结点的无向简单图，如果  $G$  中任意两个结点间都有边相连，则称  $G$  为无向完全图，简称  $G$  为完全图，记为  $K_n$ 。
- 设  $G = \langle V, E \rangle$  为一个具有  $n$  个结点的有向简单图，如果  $G$  中任意两个结点间都有两条方向相反的有向边相连，则称  $G$  为有向完全图，在不发生误解的情况下，也记为  $K_n$ 。

- 完全图的邻接矩阵除主对角线上的元素为 0 外，其余元素均为 1;
- 无向完全图  $K_n$  的边数为  $C_n^2 = \frac{1}{2}n(n-1)$ ;
- 有向完全图  $K_n$  的边数为  $P_n^2 = n(n-1)$ 。



# 完全图举例

子图和补图

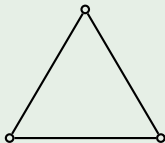
Lijie Wang

子图

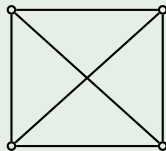
完全图

补图

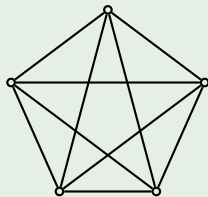
## Example



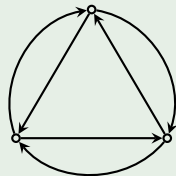
$K_3$



$K_4$



$K_5$



$K_3$

# 补图

子图和补图

Lijie Wang

子图

完全图

补图

## Definition

设  $G = \langle V, E \rangle$  为简单图,  $G' = \langle V, E_1 \rangle$  为完全图, 则称  $G_1 = \langle V, E_1 - E \rangle$  为  $G$  的补图(complement of graph), 记为  $\overline{G}$ 。

- 补图  $\overline{G}$  就是从完全图中删除图  $G$  中的边;
- 补图  $\overline{G}$  就是以  $V$  为结点集, 以所有能使  $G$  成为完全图  $K_n$  的添加边组成的集合为边集的图;
- 图  $G$  和它的补图  $\overline{G}$  有相同的结点, 两个结点在  $\overline{G}$  里相邻, 当且仅当它们在  $G$  里不相邻.

# 补图

子图和补图

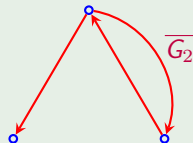
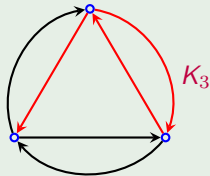
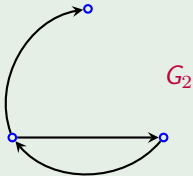
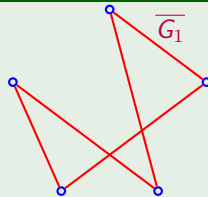
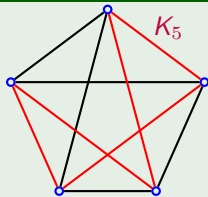
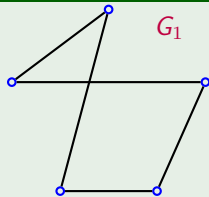
Lijie Wang

子图

完全图

补图

Example



# 补图

子图和补图

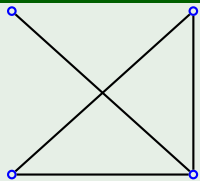
Lijie Wang

子图

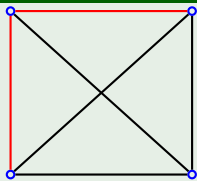
完全图

补图

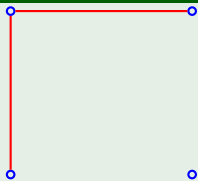
Example



$G_3$



$K_4$



$\overline{G_3}$

注意

画补图时，边和原图是互补关系，但结点不变。尤其是孤立结点，一定不要漏掉！

# 补图的邻接矩阵

子图和补图

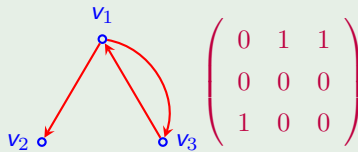
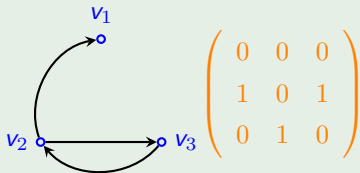
Lijie Wang

子图

完全图

补图

## Example



## 邻接矩阵求补图的方法

若设简单图  $G$  的邻接矩阵  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ , 则它的补图  $\bar{G}$  的邻接矩阵  $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{n \times n}$  为:

$$\bar{a}_{ij} = \begin{cases} 1 - a_{ij} & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}, (i, j = 1, 2, 3, \dots, n)$$

# 补图的应用

子图和补图

Lijie Wang

子图

完全图

补图

1958 年美国《数学月刊》上的一个数学问题：

## Example

证明：在任意 6 个人的集会上，总会有 3 个人相互认识或者有 3 个人互相不认识（假设认识是相互的）。

## Proof.

把参加集会的人作为结点，相互认识的人之间连边，得到图  $G$ ，设  $\bar{G}$  为  $G$  的补图，这样问题就转化为证明  $G$  或  $\bar{G}$  中至少有一个完全子图  $K_3$ 。考虑完全图  $K_6$ ，结点  $v_1$  与其余 5 个结点各有一条边相连，这 5 条边一定有 3 条在  $G$  或  $\bar{G}$  中，不妨设有 3 条边在  $G$  中，设这 3 条边为  $(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4)$ 。考虑结点  $v_2, v_3, v_4$ 。若  $v_2, v_3, v_4$  在  $G$  中无边相连，则  $v_2, v_3, v_4$  相互不认识；若  $v_2, v_3, v_4$  在  $G$  中至少有一条边相连，例如  $(v_2, v_3)$ ，则  $v_1, v_2, v_3$  就相互认识。因此，总会有 3 个人相互认识或者有 3 个人互相不认识。 □

# 结点的度数

握手定理

Lijie Wang

结点的度数

握手定理

度数序列

- 交通运输网络中，关联的边的数量较多的结点通常较为繁忙。
- 通信网络中，关联边的数量较多的结点通常是网络的关键结点，一旦出现故障，对整个网络通信的影响会非常大；反之，关联边较少的结点出现故障则不会造成全局性的影响。

## Definition

- 图  $G = \langle V, E \rangle$  中以结点  $v \in V$  为端点的次数之和称为结点  $v$  的度数或度，记为  $\text{deg}(v)$ 。显然，有环时则需计算两次。
- 有向图  $G = \langle V, E \rangle$  中以结点  $v$  为始点的次数称为  $v$  的出度，记为  $\text{deg}^+(v)$ ；以结点  $v$  为终点的次数称为  $v$  的入度，记为  $\text{deg}^-(v)$ 。显然， $\text{deg}(v) = \text{deg}^+(v) + \text{deg}^-(v)$ 。
- 度数为 1 的结点称为悬挂结点，以悬挂结点为端点的边称为悬挂边。

# 结点的度数

握手定理

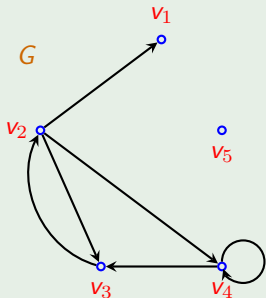
Lijie Wang

结点的度数

握手定理

度数序列

## Example



- $\deg(v_1) = 1, \deg^+(v_1) = 0, \deg^-(v_1) = 1$ ;
- $\deg(v_2) = 4, \deg^+(v_2) = 3, \deg^-(v_2) = 1$ ;
- $\deg(v_3) = 3, \deg^+(v_3) = 1, \deg^-(v_3) = 2$ ;
- $\deg(v_4) = 4, \deg^+(v_4) = 2, \deg^-(v_4) = 2$ ;
- $\deg(v_5) = 0, \deg^+(v_5) = 0, \deg^-(v_5) = 0$ ;
- $v_1$  是悬挂结点,  $\langle v_2, v_1 \rangle$  为悬挂边。



# 结点的度数

握手定理

Lijie Wang

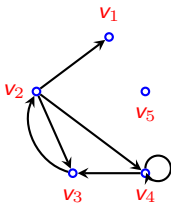
结点的度数

握手定理

度数序列

## Definition

- 图  $G = \langle V, E \rangle$  中, 称  $\Delta(G) = \max\{\deg(v) | v \in V\}$  为  $G$  的最大度,  $\delta(G) = \min\{\deg(v) | v \in V\}$  为  $G$  的最小度。
- 有向图  $G = \langle V, E \rangle$  中, 称  $\Delta^+(G) = \max\{\deg^+(v) | v \in V\}$  为  $G$  的最大出度,  $\delta^+(G) = \min\{\deg^+(v) | v \in V\}$  为  $G$  的最小出度;  $\Delta^-(G) = \max\{\deg^-(v) | v \in V\}$  为  $G$  的最大入度,  $\delta^-(G) = \min\{\deg^-(v) | v \in V\}$  为  $G$  的最小入度。



- $\Delta(G) = 4, \delta(G) = 0$
- $\Delta^+(G) = 3, \delta^+(G) = 0$
- $\Delta^-(G) = 2, \delta^-(G) = 0$

# 邻接矩阵计算度数

握手定理

Lijie Wang

结点的度数

握手定理

度数序列

设图  $G = \langle V, E \rangle$ ,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  的邻接矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- 若  $G$  是无向图, 则结点  $v_i$  的度数  $\deg(v_i) = \sum_{k=1}^n a_{ik} + a_{ii}$ , 或  $\deg(v_i) = \sum_{k=1}^n a_{ki} + a_{ii}$ ;
- 若  $G$  是有向图, 则结点  $v_i$  的出度  $\deg^+(v_i) = \sum_{k=1}^n a_{ik}$ , 入度  $\deg^-(v_i) = \sum_{k=1}^n a_{ki}$ .

# 邻接矩阵计算度数

握手定理

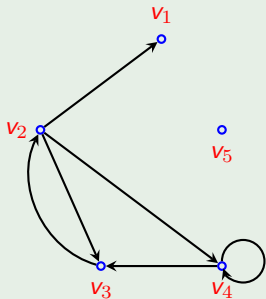
Lijie Wang

结点的度数

握手定理

度数序列

## Example



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$deg^+(v_2) = 3$

$deg^-(v_2) = 1$

# 握手定理

握手定理

Lijie Wang

结点的度数

握手定理

度数序列

图中每条边都有两个端点 (环的两个端点相同), 所以一条边就会为两个端点各增加 1 度, 总共 2 度, 因而得到握手定理。

## Theorem (图论基本定理, 握手定理)

图中结点度数的总和等于边数的二倍, 即设图  $G = \langle V, E \rangle$ , 则有

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|.$$

握手定理是由欧拉于 1736 年最先给出的。欧拉曾对此定理给出了这样一个形象论断：如果许多人在见面时握了手，两只手握在一起，被握过手的总次数为偶数。故此定理称为图论的基本定理或握手定理。

# 握手定理

握手定理

Lijie Wang

结点的度数

握手定理

度数序列

## Example

已知图  $G$  中有 15 条边，2 个度数为 4 的结点，4 个度数为 3 的结点，其余结点的度数均小于等于 2，问  $G$  中至少有多少个结点？为什么？

## Solution

图中边数为 15，由握手定理知， $G$  中所有结点的度数之和为 30，2 个度数为 4 的结点，4 个度数为 3 的结点占去 20 度，还剩下 10 度。若其余全是度数为 2 的结点，还需要 5 个结点来占用这 10 度，所以  $G$  至少有 11 个结点。

# 握手定理推论

握手定理

Lijie Wang

结点的度数

握手定理

度数序列

## Corollary

图中度数为奇数的结点个数为偶数。

常称度数为奇数的结点为奇度数结点，度数为偶数的结点为偶度数结点

## Proof.

设图  $G = \langle V, E \rangle$ ,  $V_1 = \{v | v \in V \text{ 且 } \deg(v) \text{ 为奇数} \}$ ,  $V_2 = \{v | v \in V \text{ 且 } \deg(v) \text{ 为偶数} \}$ 。显然,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ , 且  $V_1 \cup V_2 = V$ , 于是

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V_1} \deg(v) + \sum_{v \in V_2} \deg(v) = 2|E|.$$

式中  $2|E|$  和  $\sum_{v \in V_2} \deg(v)$  (偶数之和为偶数) 均为偶数, 因而  $\sum_{v \in V_1} \deg(v)$  也为偶数。于是  $|V_1|$  为偶数, 即度数为奇数的结点个数为偶数。□

# 握手定理推论

握手定理

Lijie Wang

结点的度数

握手定理

度数序列

## Theorem

有向图中各结点的出度之和等于各结点的入度之和，等于边数，即设有向图  $G = \langle V, E \rangle$ ，则有

$$\sum_{v \in V} \deg^+(v) = \sum_{v \in V} \deg^-(v) = |E|.$$

## Proof.

每条有向边具有一个始点和一个终点 (环的始点和终点是同一个结点)，因此，每条有向边对应一个出度和一个入度。图  $G$  中有  $|E|$  条有向边，则  $G$  中必产生  $|E|$  个出度，这  $|E|$  个出度即为各结点的出度之和， $G$  中也必产生  $|E|$  个入度，这  $|E|$  个入度即为各结点的入度之和。因而定理成立。 □

# 图的度数序列

握手定理

Lijie Wang

结点的度数

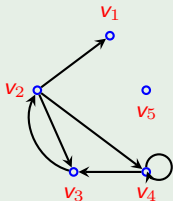
握手定理

度数序列

## Definition

设  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  为图  $G$  的结点集, 称  $(deg(v_1), deg(v_2), \dots, deg(v_n))$  为  $G$  的度数序列. 若  $G$  为有向图, 还可分别定义出度序列和入度序列.

## Example



度数序列为 (1,4,3,4,0)

## Example

- $(3, 5, 1, 4), (1, 2, 3, 4, 5)$  能成为图的度数序列吗?
- 已知一个有向图  $G$  的度数序列为  $(3,3,2,3,3)$ , 出度序列为  $(1,2,1,2,1)$ , 则其入度序列为 \_\_\_\_\_.



# 引言

图的同构

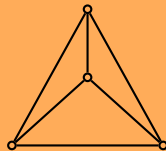
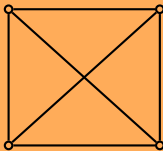
Lijie Wang

引言

定义

必要条件

- 图最本质的内容是结点和边的关联关系. 而在实际画图时, 由于结点的位置不同, 边的长短曲直不同, 同一事物间的关系可能画出不同形状的图来。例如下面两个图实际上是同一个图 $K_4$ 。



- 在化学里经常用图为化合物建模。不同的化合物可能分子式相同但结构不同, 这就是同分异构体。同分异构体在化学性质上可能有较大不同。

# 图的同构

图的同构

Lijie Wang

引言

定义

必要条件

## Definition

设两个图  $G = \langle V, E \rangle$  和  $G' = \langle V', E' \rangle$  , 如果存在双射函数  $g: V \rightarrow V'$  , 使得对于任意的  $e = (v_i, v_j)$  (或者  $\langle v_i, v_j \rangle \in E$  当且仅当  $e' = (g(v_i), g(v_j))$  (或者  $\langle g(v_i), g(v_j) \rangle \in E'$  , 并且  $e$  与  $e'$  的重数相同 , 则称  $G$  与  $G'$  同构(isomorphism) , 记为  $G \cong G'$  。

对于同构，形象地说，若图的结点可以任意挪动位置，而边是完全弹性的，只要在不拉断的条件下，一个图可以变形为另一个图，那么这两个图是同构的。

# 图的同构

图的同构

Lijie Wang

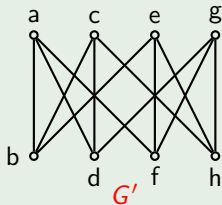
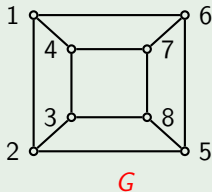
引言

定义

必要条件

## Example

证明下图中  $G \cong G'$ 。



**证明：**构造结点之间的双射函数  $f$ ：

$f(1) = a, f(2) = b, f(3) = c, f(4) = d, f(5) = e, f(6) = f, f(7) = g, f(8) = h$ . 容易验证， $f$  满足图的同构定义，所以  $G \cong G'$ 。

# 图的同构

图的同构

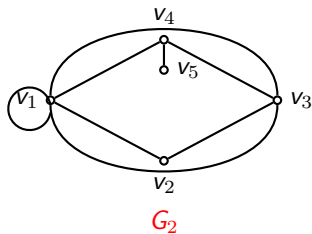
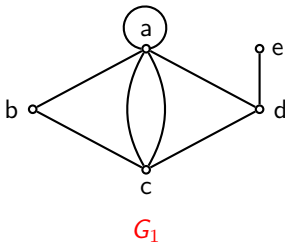
Lijie Wang

引言

定义

必要条件

判定同构的方法关键就是找到结点间的对应关系，而在两个带有  $n$  个结点的图之间有  $n!$  种可能的一一对应关系。尤其是当  $n$  很大时，判断任意两个图是否同构常常是一件困难的事情。



# 图同构的必要条件

图的同构

Lijie Wang

引言

定义

必要条件

## 同构的必要条件

- 结点数目相同
- 边数相同
- 度数相同的结点数相同

## 必要条件的应用场景

我们可以通过同构的必要条件说明两个图不同构。

# 图同构的必要条件

图的同构

Lijie Wang

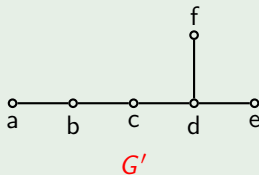
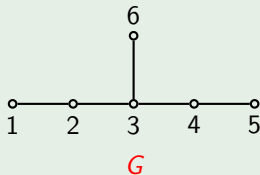
引言

定义

必要条件

## Example

下图中  $G$  和  $G'$  不同构。



图同构的三个必要条件一定不能作为充分条件来使用。

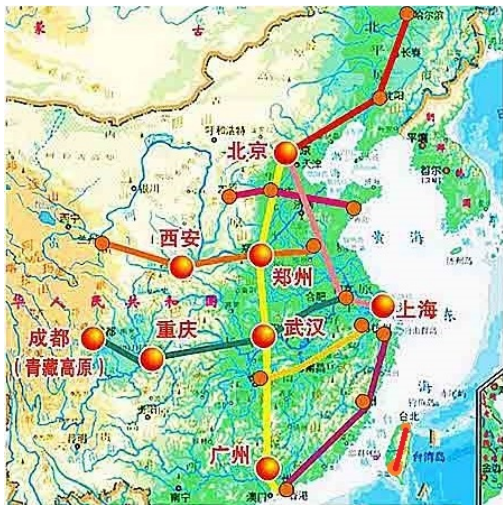
# 引言

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量



- 成都可经重庆、武汉、郑州到达北京;
- 成都无论如何也到不了台北.

# 通路与回路概念

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量

## Definition

给定图  $G = \langle V, E \rangle$  中结点和边相继交错出现的序列

$$\Gamma = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_k v_k$$

- ① 若  $\Gamma$  中边  $e_i$  的两端点是  $v_{i-1}$  和  $v_i$  (有向图时  $v_{i-1}$  与  $v_i$  分别是  $e_i$  的始点和终点),  $i = 1, 2, \dots, k$ , 则称  $\Gamma$  为结点  $v_0$  到结点  $v_k$  的**通路**。 $v_0$  和  $v_k$  分别称为此通路的始点和终点, 统称为**通路的端点**。通路中边的数目  $k$  称为**此通路的长度**。当  $v_0 = v_k$  时, 此通路称为**回路**。
- ② 若**通路中的所有边互不相同**, 则称此通路为**简单通路**, 否则称为复杂通路; 若**回路中的所有边互不相同**, 则称此回路为**简单回路**, 否则称为复杂回路。
- ③ 若**通路中的所有结点互不相同, 所有边也互不相同**, 则称此通路为**基本通路或者初级通路**; 若回路中除  $v_0 = v_k$  外的所有结点互不相同, 所有边也互不相同, 则称此回路为**基本回路或者初级回路**。



# 通路与回路举例

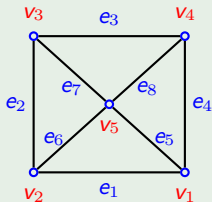
通路和回路

Lijie Wang

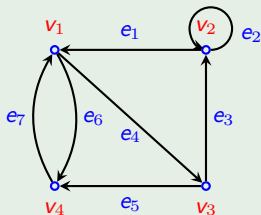
通路与回路

通路数量

## Example



- $\Gamma_1 : v_1 e_1 v_2 e_6 v_5 e_7 v_3 e_2 v_2 e_6 v_5 e_8 v_4$ ; 复杂通路, 长度 6
- $\Gamma_2 : v_1 e_5 v_5 e_7 v_3 e_2 v_2 e_6 v_5 e_8 v_4$ ; 简单通路, 长度 5
- $\Gamma_3 : v_1 e_1 v_2 e_6 v_5 e_7 v_3 e_3 v_4$ ; 基本通路, 简单通路, 长度 4



- $\Gamma_1 : v_3 e_5 v_4 e_7 v_1 e_4 v_3 e_3 v_2 e_1 v_1 e_4 v_3$ ; 复杂回路, 长度 6
- $\Gamma_2 : v_3 e_3 v_2 e_2 v_2 e_1 v_1 e_4 v_3$ ; 简单回路, 长度 4
- $\Gamma_3 : v_3 e_3 v_2 e_1 v_1 e_4 v_3$ ; 基本回路, 简单回路, 长度 3

# 记号的简化

通路和回路

Lijie Wang

通路和回路

通路数量

- 回路是通路的特殊情况;

# 记号的简化

通路和回路

Lijie Wang

通路和回路

通路数量

- 回路是通路的特殊情况;
- 在不会引起误解的情况下, 一条通路可以用边的序列  $e_1 e_2 \cdots e_n$  来表示;

# 记号的简化

通路和回路

Lijie Wang

通路和回路

通路数量

- 回路是通路的特殊情况;
- 在不会引起误解的情况下, 一条通路可以用边的序列  $e_1 e_2 \cdots e_n$  来表示;
- 在简单图中, 一条通路也可以用结点的序列  $v_0 v_1 v_2 \cdots v_n$  来表示.

# 记号的简化

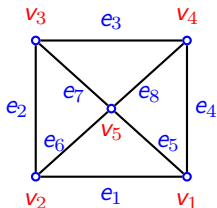
通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量

- 回路是通路的特殊情况;
- 在不会引起误解的情况下, 一条通路可以用边的序列  $e_1 e_2 \cdots e_n$  来表示;
- 在简单图中, 一条通路也可以用结点的序列  $v_0 v_1 v_2 \cdots v_n$  来表示.



$\Gamma_1 : v_1 e_1 v_2 e_6 v_5 e_7 v_3 e_2 v_2 e_6 v_5 e_8 v_4$

可简化为:  $e_1 e_6 e_7 e_2 e_6 e_8$

或:  $v_1 v_2 v_5 v_3 v_2 v_5 v_4$

# 引入

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量

我们经常会考虑如下的问题:

- 有多少种方式可从成都到达北京？
- 猫头鹰和松鼠之间的间接食物竞争有哪些方式？
- 报文有多少种方式可从 A 计算机发送到距离很远的 B 计算机？

这些问题都可以归结为求图中任何两个结点间有多少条长度为  $m$  的通路的问题。若使用人工方式，随着图中结点和边的数目增加，其难度将呈几何级数增加。而利用计算机，我们可以较为容易且准确的解决这个问题。

# 通路数量的计算

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量

## Theorem

设  $G = \langle V, E \rangle$  为线图,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  为  $G$  的邻接矩阵,  $A^m = (a_{ij}^{(m)})_{n \times n}$ . 则:

- $a_{ij}^{(m)}$  为从结点  $v_i$  到结点  $v_j$  长度为  $m$  的通路数目;
- $a_{ii}^{(m)}$  为结点  $v_i$  到自身的长度为  $m$  的回路数目;
- $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(m)}$  是  $G$  中长度为  $m$  的通路 (含回路) 总数.
- $\sum_{i=1}^n a_{ii}^{(m)}$  是  $G$  中长度为  $m$  的回路总数.

# 通路数量的计算

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量

Proof.

对  $m$  用数学归纳法。

① 当  $m = 1$  时，显然成立。

② 设  $m = k$  时，定理成立。

③ 证明  $m = k + 1$  时定理成立。因为  $(a_{ij}^{(k+1)})_{n \times n} = A^{k+1} = A \times A^k = (\sum_{p=1}^n a_{ip} a_{pj}^{(k)})_{n \times n}$ ，

故  $a_{ij}^{(k+1)} = \sum_{p=1}^n a_{ip} a_{pj}^{(k)}$ ，而  $a_{ip}$  是结点  $v_i$  到  $v_p$  长度为 1 的通路数目， $a_{pj}^{(k)}$  是结点  $v_p$  到  $v_j$  长度为  $k$  的通路数目，故  $a_{ip} a_{pj}^{(k)}$  是从结点  $v_i$  经过  $v_p$  到结点  $v_j$  的长度为  $k + 1$  的通路数目，那么  $\sum_{p=1}^n a_{ip} a_{pj}^{(k)}$  是从结点  $v_i$  到结点  $v_j$  的长度为  $k + 1$  的通路数目。





# 通路数量的计算

通路和回路

Lijie Wang

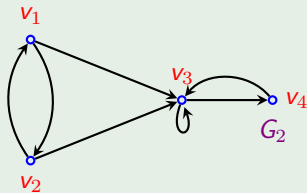
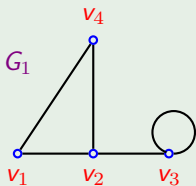
通路与回路

通路数量

## Example

针对如下两个图  $G_1$  与  $G_2$ , 求:

- ① 从结点  $v_1$  到结点  $v_3$  长度为 2 和 3 的通路数目。
- ② 所有长度为 2 和 3 的通路数目。



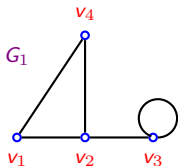
# 解：对于图 $G_1$

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量



$$A_{G_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{G_1}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- $a_{13}^{(2)} = 1$ , 即结点  $v_1$  到  $v_3$  长度为 2 的通路数为 1;
- $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_{ij}^{(2)} = 21, \sum_{i=1}^4 a_{ii}^{(2)} = 9$ , 即图中所有长度为 2 的通路数为 21(含 9 条回路);

$$A_{G_1}^3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- $a_{13}^{(3)} = 2$ , 即结点  $v_1$  到  $v_3$  长度为 3 的通路数为 2;
- $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_{ij}^{(3)} = 48, \sum_{i=1}^4 a_{ii}^{(3)} = 10$ , 即图中所有长度为 3 的通路数为 48(含 10 条回路);

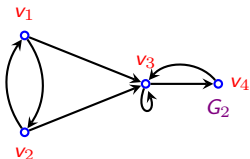
## 解：对于图 $G_2$

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量



$$A_{G_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{G_2}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- $a_{13}^{(2)} = 2$ , 即结点  $v_1$  到  $v_3$  长度为 2 的通路数为 2;
- $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_{ij}^{(2)} = 13, \sum_{i=1}^4 a_{ii}^{(2)} = 5$ , 即图中所有长度为 2 的通路数为 13(含 5 条回路);

$$A_{G_2}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- $a_{13}^{(3)} = 4$ , 即结点  $v_1$  到  $v_3$  长度为 3 的通路数为 4;
- $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_{ij}^{(3)} = 22, \sum_{i=1}^4 a_{ii}^{(3)} = 4$ , 即图中所有长度为 3 的通路数为 22(含 4 条回路);

# 通路数量

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量

想一想，如何求图中两结点间长度不大于  $m$  的通路数目？

## Corollary

设矩阵  $B_m = (b_{ij})_{n \times n} = A + A^2 + \cdots + A^m (m \geq 1)$ , 则  $b_{ij}$  表示结点  $v_i$  到  $v_j$  长度不大于  $m$  的通路数目, 而  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}$  则可表示图中长度不大于  $m$  的通路总数,  $\sum_{i=1}^n b_{ii}$  则可表示图中所有长度不大于  $m$  的回路总数。

# 引言

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

很多时候，我们可能并不关心到底有多少条通路，而只关心从  $v_i$  到  $v_j$  是否存在通路，以及长度最短的通路是什么，从而有可达性以及短程线和距离的定义。

## Definition

在图  $G = \langle V, E \rangle$  中， $v_i, v_j \in V$ 。如果从  $v_i$  到  $v_j$  **存在通路**，则称  $v_i$  到  $v_j$  是**可达**的，否则称  $v_i$  到  $v_j$  **不可达**。规定：任何结点到自己都是可达的。

考虑：如何判断图中两结点间是否可达？

判断图中两结点  $v_i$  到  $v_j$  是否可达的关键是判断是否存在通路，因而只要求邻接矩阵  $A$  及其正整数次幂  $A, A^2, A^3, \dots$ ，一旦发现这些矩阵中  $i$  行  $j$  列元素为非 0，则表示存在通路。

# 可达关系判定-引理

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

## Theorem

在一个具有  $n$  个结点的图中，如果从结点  $v_i$  到结点  $v_j (v_i \neq v_j)$  存在一条通路，则从  $v_i$  到  $v_j$  存在一条长度不大于  $n - 1$  的通路。

## Proof.

设  $v_{i_0} v_{i_1} \cdots v_{i_k}$  为从  $v_i$  到  $v_j$  的长度为  $k$  的一条通路，其中  $v_{i_0} = v_i$ ， $v_{i_k} = v_j$ ，此通路上有  $k + 1$  个结点。若  $k \leq n - 1$ ，这条通路即为所求。若  $k > n - 1$ ，则此通路上的结点数  $k + 1 > n$ ，由鸽笼原理知，必存在一个结点在此通路中不止一次出现，设  $v_{i_s} = v_{i_t}$ ，其中， $0 \leq s < t \leq k$ 。去掉  $v_{i_s}$  到  $v_{i_t}$  中间的通路，至少去掉一条边，得通路  $v_{i_0} v_{i_1} \cdots v_{i_s} v_{i_{t+1}} \cdots v_{i_k}$ ，此通路比原通路的长度至少小 1。如此重复进行下去，必可得一条从  $v_i$  到  $v_j$  的长度不大于  $n - 1$  的通路。 □

# 可达关系判定-引理

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

## Corollary

在一个具有  $n$  个结点的图中，如果从结点  $v_i$  到结点  $v_j (v_i \neq v_j)$  存在一条通路，则从  $v_i$  到  $v_j$  存在一条长度不大于  $n - 1$  的**基本通路**。

## Theorem

在一个具有  $n$  个结点的图中，如果存在经过结点  $v_i$  回路，则存在一条经过  $v_i$  的**长度不大于  $n$  的回路**。

## Corollary

在一个具有  $n$  个结点的图中，如果存在经过结点  $v_i$  回路，则存在一条经过  $v_i$  的长度不大于  $n$  的**基本回路**。

# 可达关系的判定定理

可达性与最短通路

Lijie Wang

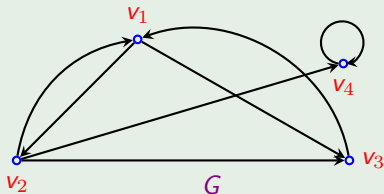
可达性

最短通路

## Theorem

设  $G = \langle V, E \rangle$  为线图,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  为  $G$  的邻接矩阵,  $A^m = (a_{ij}^{(m)})_{n \times n}$ ,  $m = 1, 2, \dots, n$ ,  $B_n = (b_{ij}^{(n)})_{n \times n} = A + A^2 + A^3 + \dots + A^n$ . 则有当  $v_i \neq v_j$  时, 如果  $b_{ij}^{(n)} > 0$ , 那么从  $v_i$  到  $v_j$  可达, 否则不可达。

## Example



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



# 可达关系的判定

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

## Example

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_4 = A + A^2 + A^3 + A^4 = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 7 & 5 \\ 7 & 4 & 7 & 7 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- 从  $v_1$  到  $v_1, v_2, v_3, v_4$  都是可达的;
- 从  $v_2$  到  $v_1, v_2, v_3, v_4$  都是可达的;
- 从  $v_3$  到  $v_1, v_2, v_3, v_4$  都是可达的;
- 从  $v_4$  到  $v_4$  是可达的, 从  $v_4$  到  $v_1, v_2, v_3$  都是不可达的.

# 可达性矩阵

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

## Definition

设  $G = \langle V, E \rangle$  是一个线图, 其中  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , 并假定结点已经有了从  $v_1$  到  $v_n$  的次序, 称  $n$  阶方阵  $P = (p_{ij})_{n \times n}$  为图  $G$  的 **可达性矩阵**(accessibility matrix), 其中

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{当 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 可达} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}, (i, j = 1, 2, 3, \dots, n)$$

- ① 无向图的可达性矩阵是对称的, 而有向图的可达性矩阵则不一定对称;
- ② 由前面的讨论可知, 通过计算  $B_n$  就可计算出  $P$  中各元素, 即

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & b_{ij}^{(n)} \neq 0 \\ 0 & b_{ij}^{(n)} = 0 \end{cases}, (i, j = 1, 2, 3, \dots, n)$$

# 可达性矩阵的简洁求法

可达性与最短通路

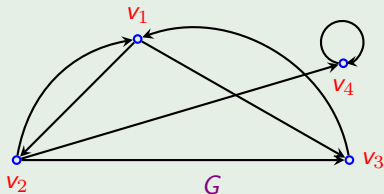
Lijie Wang

可达性  
最短通路

## Theorem

设  $G = \langle V, E \rangle$  为线图,  $A$ 、 $P$  分别是  $G$  的邻接矩阵和可达性矩阵, 则有  $P = A \vee A^{(2)} \vee A^{(3)} \vee \dots \vee A^{(n)}$ , 这里,  $A^{(i)}$  表示做矩阵布尔乘法的  $i$  次幂.

## Example



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# 可达性矩阵的简洁求法

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

## Example

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = A \vee A^{(2)} \vee A^{(3)} \vee A^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# 短程线及距离

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

## Definition

如果  $v_i$  到  $v_j$  可达，则称长度最短的通路为从  $v_i$  到  $v_j$  的短程线，从  $v_i$  到  $v_j$  的短程线的长度称为从  $v_i$  到  $v_j$  的距离(distance)，记为  $d(v_i, v_j)$ 。如果  $v_i$  到  $v_j$  不可达，则通常记为  $d(v_i, v_j) = \infty$ 。

## 结点间距离的性质

- ①  $d(v_i, v_j) \geq 0$
- ②  $d(v_i, v_i) = 0$
- ③  $d(v_i, v_k) + d(v_k, v_j) \geq d(v_i, v_j)$ 。
- ④ 无向图满足  $d(v_i, v_j) = d(v_j, v_i)$ ，而有向图不行。

# 结点间距离的判定定理

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

## Theorem

设  $G = \langle V, E \rangle$  为线图,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  为  $G$  的邻接矩阵,

$A^m = (a_{ij}^{(m)})_{n \times n}$ ,  $m = 1, 2, \dots, n$ ,

$$d(v_i, v_j) = \begin{cases} \infty & \text{如果所有 } a_{ij}^{(m)} \text{ 均为 } 0 \\ k & k = \min\{m \mid a_{ij}^{(m)} \neq 0\} \end{cases}, (m = 1, 2, 3, \dots, n).$$

显然, 这里也可以使用邻接矩阵的布尔积幂来判定。

# 结点间距离的判定

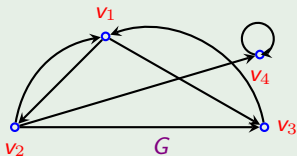
可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

## Example



- $d(v_1, v_2) = d(v_1, v_3) = d(v_2, v_1) = 1$  ;
- $d(v_2, v_3) = d(v_2, v_4) = d(v_3, v_1) = 1$ ;
- $d(v_1, v_4) = d(v_3, v_2) = 2$ ;
- $d(v_3, v_4) = 3$ ;
- $d(v_4, v_1) = d(v_4, v_2) = d(v_4, v_3) = \infty$ .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# 无向图的连通性

无向图的连通性

Lijie Wang

无向图的连通性

点割集与边割集

连通度

现在，我们从之前对于两个具体结点间可达的研究过渡到对于图的整体特性的研究。

## Definition

若无向图  $G$  中的任何两个结点都是可达的，则称  $G$  是连通图，否则称  $G$  是非连通图或分离图。

- 无向完全图  $K_n (n \geq 1)$  都是连通图;
- 多于一个结点的零图都是非连通图。
- 非平凡无向线图  $G$  是连通图当且仅当它的可达性矩阵  $P$  的所有元素均为 1。



# 无向图结点间的可达关系

无向图的连通性

Lijie Wang

无向图的连通性

点割集与边割集

连通度

## Theorem

无向图  $G = \langle V, E \rangle$  中结点之间的可达关系  $R = \{ \langle u, v \rangle \mid u, v \in V, u \text{ 到 } v \text{ 可达} \}$ , 则  $R$  是  $V$  上的等价关系.

## Proof.

- ① 对任意  $v \in V$ , 由于规定任何结点到自身总是可达的, 因此  $\langle v, v \rangle \in R$ , 故  $R$  是自反的;
- ② 对任意  $u, v \in V$ , 若  $\langle u, v \rangle \in R$ , 则  $u$  到  $v$  可达, 即存在从  $u$  到  $v$  的通路, 由于  $G$  是无向图, 因此该通路也是从  $v$  到  $u$  的通路, 从而  $v$  到  $u$  可达, 即  $\langle v, u \rangle \in R$ , 故  $R$  是对称的;
- ③ 对任意  $u, v, w \in V$ , 若  $\langle u, v \rangle \in R$ ,  $\langle v, w \rangle \in R$ , 则  $u$  到  $v$  可达,  $v$  到  $w$  可达, 即存在从  $u$  到  $v$  的通路和从  $v$  到  $w$  的通路, 于是存在从  $u$  经过  $v$  到  $w$  的通路, 即  $u$  到  $w$  是可达的, 即  $\langle u, w \rangle \in R$ , 故  $R$  是传递的。

可见,  $R$  是  $V$  上的等价关系。



# 可达关系-> 连通分支

无向图的连通性

Lijie Wang

无向图的连通性

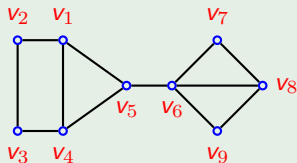
点割集与边割集

连通度

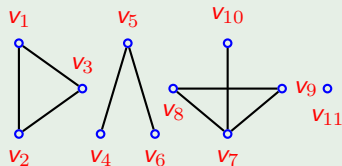
## Definition

无向图  $G = \langle V, E \rangle$  中结点之间的可达关系  $R$  的每个等价类导出的子图都称为  $G$  的一个连通分支。用  $p(G)$  表示  $G$  中的连通分支个数。

## Example



$$p(G_1) = 1$$



$$p(G_2) = 4$$

# 点割集与边割集

无向图的连通性

Lijie Wang

无向图的连通性

点割集与边割集

连通度

对于图的连通性而言，不同结点或边的“重要性”是不同的，比如在通信网络中，有的结点或边出现中断，会对整个连通性的影响至关重要，而有的则不影响全局。另外，也存在一部分结点联合起来，从而对于整个图的连通性起关键作用。

## 图的删除操作

对于一个无向图  $G$  ,

- $G - e$  表示从图  $G$  中删除边  $e$  ,  $G - E'$  表示从图  $G$  中删除边的集合  $E'$  中所有边。
- $G - v$  表示从图  $G$  中删除结点  $v$  及其关联的所有边 ,  $G - V'$  表示从图  $G$  中删除结点集合  $V'$  中所有结点以及这些结点关联的所有的边。

# 点割集

无向图的连通性

Lijie Wang

无向图的连通性

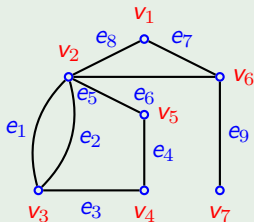
点割集与边割集

连通度

## Definition

设无向图  $G = \langle V, E \rangle$ , 若存在结点子集  $V' \subset V$ , 使得  $p(G - V') > p(G)$ , 而对于任意的  $V'' \subset V'$ , 均有  $p(G - V'') = p(G)$ , 则称  $V'$  为  $G$  的一个点割集。特别地, 若点割集中只有一个结点  $v$ , 则称  $v$  为割点。

## Example



- $\{v_3, v_5\}$   $\{v_2\}$   $\{v_6\}$  为点割集;
- $v_2, v_6$  是割点;
- $\{v_2, v_4\}$   $\{v_1, v_6\}$  都不是点割集.

# 边割集

无向图的连通性

Lijie Wang

无向图的连通性

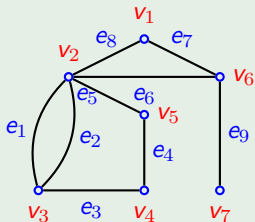
点割集与边割集

连通度

## Definition

设无向图  $G = \langle V, E \rangle$ , 若存在边的子集  $E' \subset E$ , 使得  $p(G - E') > p(G)$ , 而对于任意的  $E'' \subset E'$ , 均有  $p(G - E'') = p(G)$ , 则称  $E'$  为  $G$  的一个**边割集**。特别地, 若边割集中只有一条边  $e$ , 则称  $e$  为**割边**。

## Example



- $\{e_3, e_4\}$ ,  $\{e_4, e_5\}$ ,  $\{e_1, e_2, e_3\}$ ,  $\{e_1, e_2, e_4\}$ ,  $\{e_9\}$  为边割集;
- $e_9$  是割边;
- $\{e_6, e_7, e_9\}$ ,  $\{e_1, e_2, e_5, e_6, e_9\}$  都不是边割集.

# 点连通度与边连通度

无向图的连通性

Lijie Wang

无向图的连通性

点割集与边割集

连通度

在连通的无向图中，由点割集和边割集可知，其连通的程度也有较大差异，这一点可用点连通度和边连通度来表示。

## Definition

设无向连通图  $G = \langle V, E \rangle$ ,

- 称  $\kappa(G) = \min\{|V'| \mid V' \text{ 为 } G \text{ 的点割集或 } G - V' \text{ 为平凡图}\}$  为  $G$  的点连通度，若  $\kappa(G) \geq k$ ，则称  $G$  为  $k$ -连通图。
- 称  $\lambda(G) = \min\{|E'| \mid E' \text{ 为 } G \text{ 的边割集}\}$  为  $G$  的边连通度，若  $\lambda(G) \geq k$ ，则称  $G$  为  $k$  边-连通图。

# 点连通度与边连通度

无向图的连通性

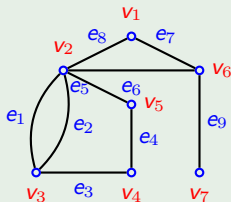
Lijie Wang

无向图的连通性

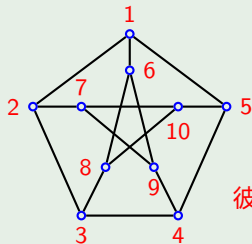
点割集与边割集

连通度

## Example



- 点连通度 1, 是 1-连通图;
- 边连通度 1, 是 1 边-连通图;
- 不是 2-连通图, 也不是 2 边-连通图.



彼得森图

- 点连通度 3, 是 1-,2-,3-连通图;
- 边连通度 3, 是 1 边-,2 边-,3 边-连通图;
- 不是 4-连通图, 也不是 4 边-连通图.

# 点连通度与边连通度

无向图的连通性

Lijie Wang

无向图的连通性

点割集与边割集

连通度



- 若  $G$  是平凡图, 则  $V' = \emptyset$ ,  $E' = \emptyset$ , 所以  $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$ ;
- 若  $G$  是完全图  $K_n$ , 则  $G$  无点割集。当删除  $n - 1$  个结点后成为平凡图, 因而  $\kappa(G) = n - 1$ 。显然,  $\lambda(G) = n - 1$ ;
- 若  $G$  中存在割点, 则  $\kappa(G) = 1$ 。若  $G$  中存在割边, 则  $\lambda(G) = 1$ 。
- 若  $G$  是非连通图, 因为不用删除结点或边就已经不连通了, 所以规定非连通图的点连通度和边连通度均为 0。



# 有向图的连通性

有向图的连通性

Lijie Wang

有向图的连通性

连通分支

由于有向图中边都有方向性，因此有向图结点之间的可达关系仅仅具有自反性和传递性，而不具有对称性。因此，有向图中的可达关系不是等价关系。

## Definition

设  $G = \langle V, E \rangle$  是一个有向图，

- 略去  $G$  中所有有向边的方向得无向图是连通图，则称有向图  $G$  是连通图或称为弱连通图。否则称  $G$  是非连通图；
- 若  $G$  中任何一对结点之间至少有一个结点到另一个结点是可达的，则称  $G$  是单向连通图；
- 若  $G$  中任何一对结点之间都是相互可达的，则称  $G$  是强连通图。

# 有向图的连通性

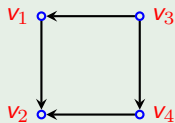
有向图的连通性

Lijie Wang

有向图的连通性

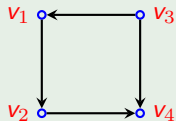
连通分支

## Example



$G_1$

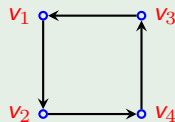
弱连通图



$G_2$

弱连通图

单向连通图

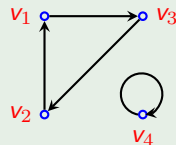


$G_3$

弱连通图

单向连通图

强连通图



$G_4$

非连通图

显然，强连通图必是单向连通图；单向连通图必是（弱）连通图。但反之均不成立。

# 强连通图的判定

有向图的连通性

Lijie Wang

有向图的连通性

连通分支

## Definition

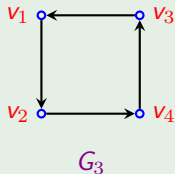
有向图  $G$  是**强连通图**的充分必要条件是  $G$  中存在一条经过所有结点至少一次的回路。

## Proof.

略。



## Example



强连通图

回路:  $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_4 \rightarrow v_3 \rightarrow v_1$

# 单向连通图的判定

有向图的连通性

Lijie Wang

有向图的连通性

连通分支

## Definition

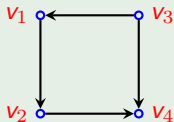
有向图  $G$  是**单向连通图**的充分必要条件是  $G$  中存在一条**经过所有结点至少一次的通路**。

## Proof.

略。



## Example



$G_2$

单向连通图

通路:  $v_3 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_4$

# 邻接矩阵判定法

有向图的连通性

Lijie Wang

有向图的连通性

连通分支

由邻接矩阵  $A$  , 求出可达性矩阵  $P$  ,

- 有向线图  $G$  是**强连通图**当且仅当它的可达性矩阵  $P$  的**所有元素均为 1** ;
- 有向线图  $G$  是**单向连通图**当且仅当它的可达性矩阵  $P$  及其转置矩阵  $P^T$  经过布尔加运算后所得的**矩阵  $P' = P \vee P^T$  中除主对角元外其余元素均为 1** ;
- 有向线图  $G$  是**弱连通图**当且仅当它的邻接矩阵  $A$  及其转置矩阵  $A^T$  经布尔加运算所得的矩阵  $A' = A \vee A^T$  作为邻接矩阵而求得的**可达性矩阵  $P'$  中所有元素均为 1**.

# 三类连通分支

有向图的连通性

Lijie Wang

有向图的连通性

连通分支

## Definition

在有向图  $G = \langle V, E \rangle$  中, 设  $G'$  是  $G$  的子图, 如果

- $G'$  是**强连通的**(**单向连通的**、**弱连通的**);
- 对任意  $G'' \subseteq G$ , 若  $G' \subset G''$ , 则  $G''$  不是**强连通的**(**单向连通的**、**弱连通的**);

那么称  $G'$  为  $G$  的**强连通分支**(**单向连通分支**、**弱连通分支**), 或称为**强分图**(**单向分图**、**弱分图**)。

- 弱连通分支也就是忽略边的方向所对应的无向图的连通分支;
- 注意把握 (强、单向、弱) 连通分支的**极大性**特点, 即任意增加一个结点或一条边就不是 (强、单向、弱) 连通的了。

# 三类连通分支

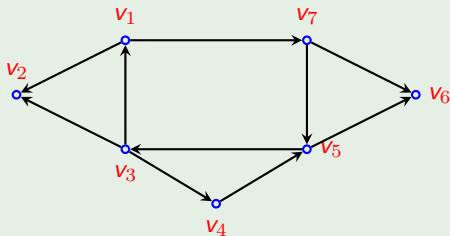
有向图的连通性

Lijie Wang

有向图的连通性

连通分支

## Example



- $\{v_2\}$  ,  $\{v_6\}$  ,  $\{v_1, v_3, v_4, v_5, v_7\}$  导出的子图是强连通分支;
- $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_7\}$  ,  $\{v_1, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$  导出的子图是单向连通分支;
- 该图自身即是弱连通分支.

# 三类连通分支

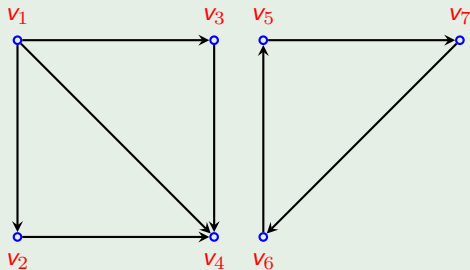
有向图的连通性

Lijie Wang

有向图的连通性

连通分支

## Example



- $\{v_1\}$ ,  $\{v_2\}$ ,  $\{v_3\}$ ,  $\{v_4\}$ ,  $\{v_5, v_6, v_7\}$  导出的子图是强连通分支;
- $\{v_1, v_2, v_4\}$ ,  $\{v_1, v_3, v_4\}$ ,  $\{v_5, v_6, v_7\}$  导出的子图是单向连通分支;
- $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ,  $\{v_5, v_6, v_7\}$  导出的子图是弱连通分支.



# 连通分支的判定

有向图的连通性

Lijie Wang

有向图的连通性

连通分支

## Theorem

在有向图  $G = \langle V, E \rangle$  中，它的每一个结点位于且仅位于一个强（弱）连通分支中，至少位于一个单向连通分支中。

## Theorem

在有向图  $G = \langle V, E \rangle$  中，它的每一条边至多在一个强连通分支中；至少在一个单向连通分支中；在且仅在一个弱连通分支中。

- 弱连通分支: 图的不互连部分
- 强连通分支: 出度为 0 或入度为 0 的结点, 极大回路, ...
- 单向连通分支: 极大通路