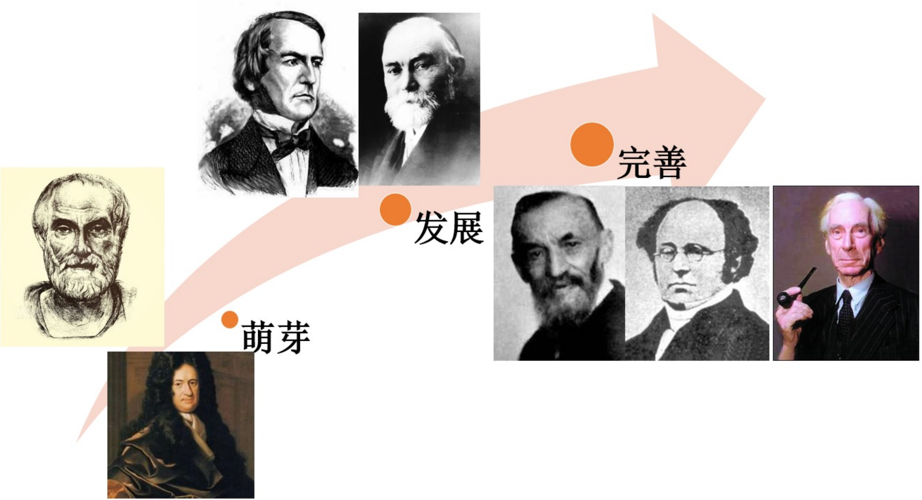
数理逻辑的起源和发展



什么是命题

☞ 注意

数理逻辑研究的中心问题是推理，而推理的前提和结论都是命题。因而命题是推理的基本单位。

Definition

具有确切真值的陈述句称为命题(proposition)。该命题可以取一个“值”，称为真值。真值只有“真”和“假”两种，分别用“T”(或“1”)和“F”(或“0”)表示。

Example

1. 成都是一个旅游城市。真值：T
2. 北京是中国的首都。真值：T
3. 3 能被 2 整除。真值：F

非命题

☞ 注意

一切没有判断内容的句子，如命令句 (或祈使句)、感叹句、疑问句、二义性的陈述句等都不能作为命题。

Example

1. 这个语句是假的；
2. $x + y > 0$；
3. 把门关上；
4. 滚出去！
5. 你要出去吗？

复合命题 (如何产生新命题)

Example

1. 四川不是一个国家；
2. 3 既是素数又是奇数；
3. 张谦是大学生或是运动员；
4. 如果周末天气晴朗，则我们将到郊外旅游；
5. 两个三角形全等当且仅当三角形的三条边全部相等。

Definition

- 原子命题 (简单命题)：不能再分解为更为简单命题的命题。
- 复合命题：可以分解为更为简单命题的命题。这些简单命题之间是通过如 "或者"、"并且"、"不"、"如果……则……"、"当且仅当" 等这样的关联词和标点符号复合而成。

☞ 约定：通常用大写的带或不带下标的英文字母表示命题 (包括原子命题和复合命题)。

$$A, B, C, \cdots, P, Q, R, \cdots,\ A_i, B_i, C_i, \cdots, P_i, Q_i, R_i, \cdots$$

引入

☞ 注意

回顾复合命题中，一般是通过联结词和标点符号将简单命题联结成复杂的语句，最常见的联结词主要有以下五种：

“或者”、“并且”、“不”、“如果…… 则……”、“当且仅当”

Example

1. 四川不是一个国家；
2. 3既是素数又是奇数；
3. 张谦是大学生或是运动员；
4. 如果周末天气晴朗，则我们将到郊外旅游；
5. 两个三角形全等当且仅当三角形的三条边全部相等。

否定联结词

Definition

设 P 是任意一个命题，复合命题“非 P”(或 “P 的否定”)称为 P 的否定式(negation)，记作$\neg P$，“$\neg$” 为否定联结词。P 为真当且仅当 $\neg P$ 为假。

Example

- P：四川是一个国家。
- $\neg P$：四川不是一个国家。

P	$\neg P$
0	1
1	0

“$\neg$” 是自然语言中的 “非”、“不”、“没有” 等的逻辑抽象。

合取联结词

Definition

设 P、Q 是任意两个命题，复合命题"P 并且 Q"(或 "P 和 Q")称为 P 与 Q 的合取式(conjunction)，记作$P \wedge Q$，"$\wedge$" 为合取联结词。$P \wedge Q$ 为真当且仅当 P，Q 同为真。

Example

- P：3 是素数；
- Q：3 是奇数。
- $P \wedge Q$：3 既是素数又是奇数。

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

合取联结词

☞ 注意

"$\wedge$" 是自然语言中的 "并且"、"既...又..."、"但"、"和"、"与"、"不仅...而且..."、"虽然...但是..."、"一面..., 一面..." 等的逻辑抽象；但不是所有的 "和"，"与" 都要使用合取联结词表示，要根据句子的语义进行分析。

Example

1. 2 和 3 的最小公倍数是 6；
2. 点 a 位于点 b 与点 c 之间。

这两个命题都是简单命题，不能再分。

析取联结词

Definition

设 P、Q 是任意两个命题，复合命题"P 或 Q"称为 P 与 Q 的析取式(disjunction)，记作$P \vee Q$，"$\vee$" 为析取联结词。$P \vee Q$ 为真当且仅当 P，Q 至少有一个为真。

Example

- P：张谦是大学生；
- Q：张谦是运动员。
- $P \vee Q$：张谦是大学生或是运动员。

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

析取联结词

☞ 注意

联结词“$\vee$”是自然语言中的“或”、“或者”等的逻辑抽象。自然语言中的“或”有“可兼或”(或称为同或)、“不可兼或”(即异或) 两种。严格来讲，析取联结词实际上代表的是可兼或，异或有时会使用单独的异或联结词“$\oplus$”或“$\bar{\vee}$”来表示。

Example

命题：张红生于 1982 年或 1983 年，令

1. P: 张红生于 1982 年；
2. Q: 张红生于 1983 年。

P 与 Q 不能同时为真，即为“不可兼或”。

蕴涵联结词

Definition

设 P、Q 是任两个命题，复合命题“如果 P，则 Q”称为 P 与 Q 的蕴涵式(implication)，记作$P \to Q$，“$\to$” 为蕴涵联结词。$P \to Q$ 为假当且仅当 P 为真且 Q 为假。一般把蕴涵式 $P \to Q$ 中的 P 称为该蕴涵式的前件，Q 称为蕴涵式的后件。

Example

- P：周末天气晴朗；
- Q：我们将到郊外旅游。
- $P \to Q$：如果周末天气晴朗，则我们将到郊外旅游。

P	Q	$P \to Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

蕴涵联结词

☞ 注意

在自然语言中，前件为假，不管结论真假，整个语句的意义，往往无法判断。但对于数理逻辑中的蕴涵联结词来说，当前件 P 为假时，不管 Q 的真假如何，则 $P \to Q$ 都为真。此时称为 “善意推定”。

Example

命题：如果角 A 和角 B 是对顶角，则角 A 等于角 B。

这个命题是我们非常熟悉的一个定理，当然是真命题。当前件为假时，这个定理依然成立。

蕴涵联结词

Example

设 P：约翰学习微积分，Q：约翰是大学一年级学生。则以下的复合命题均可用 $P \to Q$ 表示。

1. 如果约翰学习微积分，则他是大学一年级学生。如果 P，则 Q
2. 因为约翰学习微积分，所以他是大学一年级学生。因为 P，所以 Q
3. 只要约翰学习微积分，他就是大学一年级学生。只要 P，就 Q
4. 约翰学习微积分仅当他是大学一年级学生。P 仅当 Q
5. 只有约翰是大学一年级学生，他才能学习微积分。只有 Q，才 P
6. 除非约翰是大学一年级学生，他才能学习微积分。除非 Q，才 P
7. 除非约翰是大学一年级学生，否则他不学习微积分。除非 Q，否则 $\neg P$

等价联结词

Definition

设 P、Q 是任两个命题，复合命题“P 当且仅当 Q”称为 P 与 Q 的等价式(equivalence)，记作$P \leftrightarrow Q$，“$\leftrightarrow$” 为等价联结词(也称作双条件联结词)。$P \leftrightarrow Q$ 为真当且仅当 P、Q 同为真假。

Example

- P：两个三角形全等；
- Q：三角形的三条边全部相等。
- $P \leftrightarrow Q$：两个三角形全等当且仅当三角形的三条边全部相等。

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

“$\leftrightarrow$” 是自然语言中的 “等价”、“充分必要条件”、“当且仅当” 等的逻辑抽象。

回顾命题联结词

联结词	记号	复合命题	读法	记法	真值结果
否定	$\neg$	P 的否定	非 P	$\neg P$	$\neg P$ 的真值为 “真” 当且仅当 P 的真值为 “假”
合取	$\wedge$	P 并且 Q	P 合取 Q	$P \wedge Q$	$P \wedge Q$ 的真值为 “真” 当且仅当 P、Q 的真值同为 “真”
析取	$\vee$	P 或者 Q	P 析取 Q	$P \vee Q$	$P \vee Q$ 的真值为 “真” 当且仅当 P、Q 的真值至少一个为 “真”
蕴涵	$\rightarrow$	若 P，则 Q	P 蕴涵 Q	$P \rightarrow Q$	$P \rightarrow Q$ 的真值为 “假” 当且仅当 P 的真值为 “真”、Q 的真值为 “ 假”
等价	$\leftrightarrow$	P 当且仅当 Q	P 等价于 Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$ 的真值为 “真” 当且仅当 P、Q 的真值同为 “ 真” 或同为 “ 假”

命题联接词 “$\wedge$”、“$\vee$”、“$\leftrightarrow$” 具有对称性，而 “$\neg$”、“$\rightarrow$” 没有。

命题联结词的真值表

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

联结词是两个命题真值之间的联结，而不是命题内容之间的连接，因此复合命题的真值只取决于构成他们的各简单命题的真值，而与它们的内容无关，与二者之间是否有关系无关。

Example

命题 1：雪是白的当且仅当北京是中国的首都。

命题 2：如果 2 是偶数，则天上就可以掉馅饼。

尽管两个简单命题的内容之间无关联，但二者均为合法命题，且具有确定的真值。

命题联结词的优先级

☞ 优先级顺序

1. 所有五个联接词的优先顺序为：否定，合取，析取，蕴涵，等价；
2. 同级的联结词，按其出现的先后次序 (从左到右)；
3. 若运算要求与优先次序不一致时，可使用括号；同级符号相邻时，也可使用括号。括号中的运算为最高优先级。

Example

$\neg P \vee \neg Q \rightarrow R \wedge S \leftrightarrow T$ 的运算步骤是如何呢？

$\neg P \vee (\neg Q \rightarrow R) \wedge S \leftrightarrow T$的运算步骤又是如何？

复合命题符号化

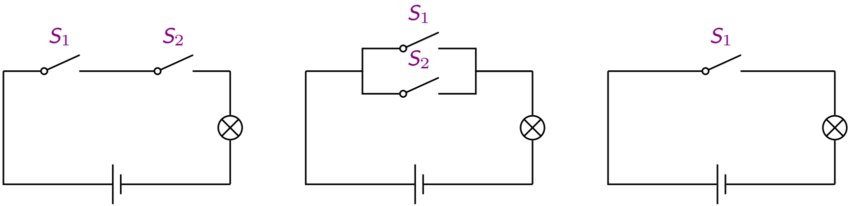
Example

设命题 P : 你陪伴我;
Q : 你代我叫车子;
R : 我将出去.

符号化下述语句：

1. 如果你陪伴我并且代我叫辆车子，则我将出去。
   符号化为： $(P \wedge Q) \to R$
2. 如果你不陪伴我或不代我叫辆车子，我将不出去。
   符号化为： $(\neg P \vee \neg Q) \to \neg R$
3. 除非你陪伴我或代我叫车子，否则我将不出去。
   符号化为：$R \to (P \vee Q)$ 或 $(\neg P \wedge \neg Q) \to \neg R$

命题联接词与开关电路

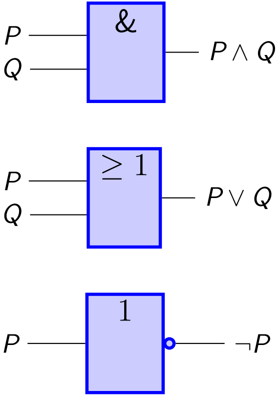


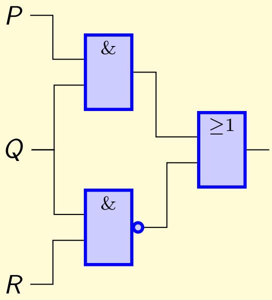
设命题 P；开关 S_1 闭合；命题 Q；开关 S_2 闭合。则用复合命题表示：

- (图 1) 开关电路的“串联”：$P \wedge Q$
- (图 2) 开关电路的“并联”：$P \vee Q$
- (图 3) 开关电路的“断开”：$\neg P$

命题联接词与逻辑电路

命题联接词“∧”、“∨”、“¬”对应于与门、或门和非门电路，从而命题逻辑是计算机硬件电路的表示、分析和设计的重要工具。





$(P \wedge Q) \vee \neg(Q \wedge R)$

命题联接词与网页检索

☞ 布尔检索

在布尔检索中，联接词“$\wedge$”（一般用 AND 表示）用于匹配包含两个检索项的记录，联接词“$\vee$”（一般用 OR 表示）用于匹配包含两个检索项至少一个的记录，而联接词“$\neg$”（一般用 NOT 表示）用于排除某个特定的检索项。

Example

1. New AND Mexico AND universities：
   检索新墨西哥州各大学的网页。
2. (New AND Mexico OR Arizona) AND universities：
   检索新墨西哥州或亚利桑那州各大学的网页。

命题联接词与位运算

☞ 位运算

计算机中的信息采用二进制的方式来表达。每个二进制位只能是 1 或 0，可对应于某一个布尔变量的真值。当我们需要判断该布尔变量的真值时，就可以利用按位与（bitwise AND）或按位或（bitwise OR）以及按位取反（bitwise NOT）等来操作。

Example

<table>
<tr><td>比特</td><td>1</td><td>4</td><td>8</td><td>16</td><td>19 … 31</td></tr>
<tr><td></td><td>版本</td><td>头长</td><td>服务类型</td><td colspan="2">总长度</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">标识</td><td>标志</td><td>段偏移</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">寿命</td><td>协议</td><td colspan="2">首部校验和</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="5">源 IP 地址</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="5">目的 IP 地址</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="5">…</td></tr>
</table>

☞ 这是 TCP/IP 网络协议栈中的 IP 报头的基本格式，考虑：如何获取版本号？

$ipdata[0]\&0xF0 >> 4$

命题变元

定义

一个特定的命题是一个常值命题，它不是具有值“T”(“1”)，就是具有值“F”(“0”)。

定义

一个任意的没有赋予具体内容的原子命题是一个变量命题，常称它为命题变量 (或命题变元)(propositional variable)，该命题变量无具体的真值，它的变域是集合{T, F}(或 {0, 1})。

☞

复合命题是由原子命题与联结词构成的命题。所以，当其中的原子命题是命题变元时，此复合命题也即为命题变元的函数，且该函数的值仍为“真”或“假”值，这样的函数可形象地称为“真值函数”或“命题公式”，此命题公式没有确切的真值。
例如：$G = P \wedge Q \rightarrow \neg R$.

命题公式

定义

命题演算的合式公式 (well formed formula，wff)，又称命题公式 (简称公式)，按如下规则生成：

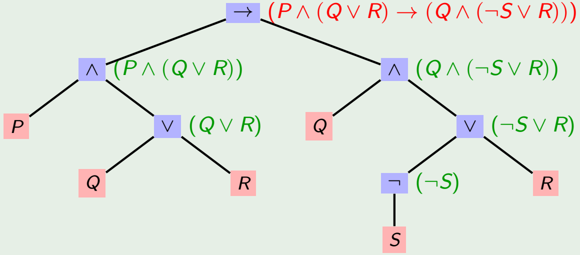
1. 命题变元本身是一个公式；（如：$P, Q, R, \cdots$）
2. 如 G 是公式，则$(\neg G)$也是公式；（如：$\neg P, \neg Q, \neg R, \cdots$）
3. 如 G，H 是公式，则$(G \wedge H)$、$(G \vee H)$、$(G \rightarrow H)$、$(G \leftrightarrow H)$也是公式；（如：$P \wedge Q, (\neg Q) \rightarrow R, \cdots$）
4. 仅由有限步使用规则 (1)、(2)、(3)后所得到的包含命题变元、联结词和括号的符号串才是命题公式.
   （如：$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow R, (\neg Q \vee (P \wedge \neg R)) \rightarrow R, \cdots$）

如果 G 是含有 n 个命题变元 P_1、P_2、P_3、$\cdots$、P_n 的公式，可记为：$G(P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n)$ 或简写为 G。

关于命题公式的说明

1. 原子命题变元是最简单的合式公式，称为原子合式公式，简称原子公式；
2. 命题公式没有真值，只有对其命题变元进行真值指派后，方可确定命题公式的真值；
3. 整个公式的最外层括号可以省略；公式中不影响运算次序的括号也可以省略。
4. 在实际应用中，为了便于存储和运算，命题公式常用二元树的方式来表达。

例



公式的解释

定义

设 P_1、P_2、P_3、$\cdots$、P_n 是出现在公式 G 中的所有命题变元，指定 P_1、P_2、P_3、$\cdots$、P_n 一组真值，则这组真值称为 G 的一个解释，常记为 I。

例

设有公式：$G = P \rightarrow (\neg Q \wedge R)$

1. $I_1 : P = 0, Q = 1, R = 0$是 G 的一个解释，使得 G 的真值为 1。
2. $I_2 : P = 1, Q = 0, R = 0$是 G 的一个解释，使得 G 的真值为 0。

☞ 如果公式 G 在解释 I 下是真的，则称I 满足 G，此时 I 是 G 的成真赋值；如果 G 在解释 I 下是假的，则称I 弄假于 G，此时 I 是 G 的成假赋值。

真值表

☞

- 一般来说，若有 n 个命题变元，则应有 2^n 个不同的解释。
- 利用真值表，可得到公式的所有成真赋值和成假赋值。

定义

由公式 G 在其所有可能的解释下所取真值构成的表，称为 G 的**真值表**(truth table)。

☞ **真值表画法**

一般我们将公式中的命题变元放在真值表的左边，将公式的结果放在真值表的右边。有时为了清楚起见，可将求公式的中间结果也放在真值表中。

真值表

例

设有公式：$G = (P \to ((\neg P \leftrightarrow Q) \wedge R)) \vee Q$，则 G 的真值表为：

P	Q	R	$\neg P$	$\neg P \leftrightarrow Q$	$(\neg P \leftrightarrow Q) \wedge R$	$P \to ((\neg P \leftrightarrow Q) \wedge R)$	G
0	0	0	1	0	0	1	**1**
0	0	1	1	0	0	1	**1**
0	1	0	1	1	0	1	**1**
0	1	1	1	1	1	1	**1**
1	0	0	0	1	0	0	**0**
1	0	1	0	1	1	1	**1**
1	1	0	0	0	0	0	**1**
1	1	1	0	0	0	0	**1**

真值表

例

可进一步简化为：

P	Q	R	$G=(P\rightarrow((\neg P\leftrightarrow Q)\wedge R))\vee Q$
0	0	0	**1**
0	0	1	**1**
0	1	0	**1**
0	1	1	**1**
1	0	0	**0**
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

真值表告诉我们什么？

Example

写出下面一组命题公式的真值表：

$$G_1 = \neg(P \rightarrow Q) \rightarrow P$$
$$G_2 = (P \rightarrow Q) \wedge P$$
$$G_3 = \neg(P \wedge \neg Q) \leftrightarrow \neg(P \rightarrow Q)$$

P	Q	G_1	G_2	G_3
0	0	**1**	**0**	**0**
0	1	**1**	**0**	**0**
1	0	**1**	**0**	**0**
1	1	**1**	**1**	**0**
		全为真	有真有假	全为假

命题公式分类

Definition

- 公式 G 称为永真公式(重言式,tautology)，如果在它的所有解释之下其真值都为“真”。
- 公式 G 称为永假公式(矛盾式,contradiction)，如果在它的所有解释之下其真值都为“假”。有时也称永假公式为不可满足公式。
- 公式 G 称为可满足公式(satisfiable)，如果它不是永假的。

☞ 三种特殊公式之间的关系

1. G 是永真的当且仅当 $\neg G$ 是永假的；
2. G 是可满足的当且仅当至少有一个解释 I，使 G 在 I 下为真。
3. 若 G 是永真式，则 G 一定是可满足式，但反之可满足公式不一定是永真式；

命题公式分类

Example

写出下列公式的真值表并判定其公式类型。

$$G_1 = (P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$$
$$G_2 = (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\neg(P \to Q) \vee \neg(Q \to P))$$
$$G_3 = (P \to \neg Q) \vee \neg Q$$

P	Q	G_1	G_2	G_3
0	0	**1**	**0**	**1**
0	1	**1**	**0**	**1**
1	0	**1**	**0**	**1**
1	1	**1**	**0**	**0**
		重言式	矛盾式	可满足公式

公式的等价

考虑上一个例子中的永真公式 $G_1 = (P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$，将这个公式拆开，令

$$G = P \to Q\text{，}H = \neg P \vee Q\text{，}$$

从而 $G_1 = G \leftrightarrow H$，由于 G_1 是永真公式，根据等价联接词的定义可知 G, H 必同为真或者同为假。此时我们称公式 G, H 具有逻辑等价关系。

Definition

设 G，H 是两个命题公式，P_1，P_2，P_3，$\cdots$，P_n是出现在 G，H 中所有的命题变元，如果对于 P_1，P_2，P_3，$\cdots$，P_n 的 2^n 个解释，G 与 H 的真值结果都相同，则称公式 G 与 H 是等价的，记作$G = H$。（或$G \Leftrightarrow H$）

公式等价的充分必要条件

Theorem

对于任意两个公式 G 和 H，$G = H$的充分必要条件是公式 $G \leftrightarrow H$ 是永真公式。

Proof.

- 必要性：假定 $G = H$，则 G，H 在其任意解释 I 下或同为真或同为假，于是由 "$\leftrightarrow$" 的意义知，公式 $G \leftrightarrow H$ 在其任何的解释 I 下，其真值为 "真"，即 $G \leftrightarrow H$ 为永真公式。
- 充分性：假定公式 $G \leftrightarrow H$ 是永真公式，I 是它的任意解释，在 I 下，$G \leftrightarrow H$ 为真，因此，G，H 或同为真，或同为假，由于 I 的任意性，故有 $G = H$。 □

☞ 命题公式的可判定性

可判定性: 能否给出一个可行方法，完成对任意公式的判定类问题。（类型或等价判定）
命题公式是可判定的。

基本等价关系

Theorem

设 G, H, S 为任意的命题公式。

1. $E_1 : G \vee G = G;$ (幂等律)
   $E_2 : G \wedge G = G.$
2. $E_3 : G \vee H = H \vee G;$ (交换律)
   $E_4 : G \wedge H = H \wedge G.$
3. $E_5 : G \vee (H \vee S) = (G \vee H) \vee S;$ (结合律)
   $E_6 : G \wedge (H \wedge S) = (G \wedge H) \wedge S.$
4. $E_7 : G \vee 0 = G;$ (同一律)
   $E_8 : G \wedge 1 = G.$

基本等价关系

Theorem

5. $E_9 : G \vee 1 = 1;$ (零律)
   $E_{10} : G \wedge 0 = 0.$
6. $E_{11} : G \vee (H \wedge S) = (G \vee H) \wedge (G \vee S);$ (分配律)
   $E_{12} : G \wedge (H \vee S) = (G \wedge H) \vee (G \wedge S).$
7. $E_{13} : G \vee (G \wedge H) = G;$ (吸收律)
   $E_{14} : G \wedge (G \vee H) = G.$
8. $E_{15} : \neg G \wedge G = 0.$ (矛盾律)
9. $E_{16} : \neg G \vee G = 1.$ (排中律)
10. $E_{17} : \neg(\neg G) = G.$ (双重否定律)

基本等价关系

Theorem

11. $E_{18}: \neg(G \vee H) = \neg G \wedge \neg H;$ (德摩根律)
    $E_{19}: \neg(G \wedge H) = \neg G \vee \neg H.$
12. $E_{20}: G \to H = \neg G \vee H.$ (蕴涵式)
13. $E_{21}: G \to H = \neg H \to \neg G.$ (假言易位)
14. $E_{22}: G \leftrightarrow H = (G \to H) \wedge (H \to G) = (\neg G \vee H) \wedge (\neg H \vee G).$ (等价式)
15. $E_{23}: G \leftrightarrow H = \neg G \leftrightarrow \neg H.$ (等价否定等式)
16. $E_{24}: (G \to H) \wedge (G \to \neg H) = \neg G.$ (归谬论)

判断公式类型

Example

利用命题公式的基本等价关系，证明 $(P \to Q) \land P \to Q$ 是重言式。

证明

$$
\begin{aligned}
& (P \to Q) \land P \to Q \\
= \; & (\neg P \lor Q) \land P \to Q = \neg((\neg P \lor Q) \land P) \lor Q && \text{(蕴含式)} \\
= \; & (\neg(\neg P \lor Q) \lor \neg P) \lor Q = ((P \land \neg Q) \lor \neg P) \lor Q && \text{(德摩根律)} \\
= \; & ((P \lor \neg P) \land (\neg Q \lor \neg P)) \lor Q && \text{(分配律)} \\
= \; & (1 \land (\neg Q \lor \neg P)) \lor Q && \text{(排中律)} \\
= \; & (\neg Q \lor \neg P) \lor Q && \text{(同一律)} \\
= \; & (\neg Q \lor Q) \lor \neg P && \text{(结合律，交换律)} \\
= \; & 1 \lor \neg P && \text{(排中律)} \\
= \; & 1 && \text{(零律)}
\end{aligned}
$$

证明公式等价

Example

利用命题公式的基本等价关系，证明 $P \to (Q \to R) = (P \wedge Q) \to R$。

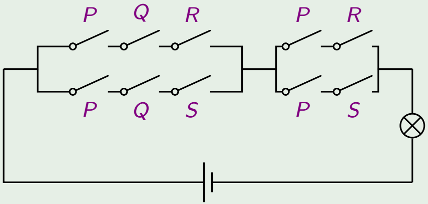
证明

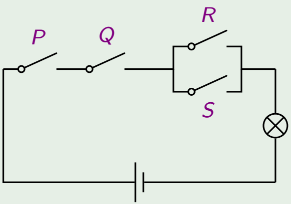
$$
\begin{aligned}
& P \to (Q \to R) & \\
= \;& \neg P \vee (Q \to R) & \text{(蕴含式)} \\
= \;& \neg P \vee (\neg Q \vee R) & \text{(蕴含式)} \\
= \;& (\neg P \vee \neg Q) \vee R & \text{(结合律)} \\
= \;& \neg (P \wedge Q) \vee R & \text{(德摩根律)} \\
= \;& (P \wedge Q) \to R & \text{(蕴含式)}
\end{aligned}
$$

开关电路化简

Example

利用命题公式的基本等价关系，化简如下左图所示开关电路。





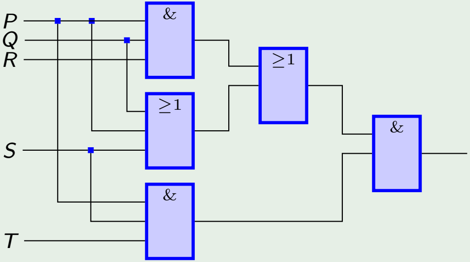
解

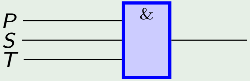
$$
\begin{aligned}
& ((P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge S)) \wedge ((P \wedge R) \vee (P \wedge S)) \\
= \quad & (P \wedge Q \wedge (R \vee S)) \wedge (P \wedge (R \vee S)) \\
= \quad & P \wedge Q \wedge (R \vee S) \wedge P \wedge (R \vee S) \\
= \quad & P \wedge Q \wedge (R \vee S)
\end{aligned}
$$

逻辑电路化简

Example

利用命题公式的基本等价关系，化简如下左图所示逻辑电路。





解

$$
\begin{aligned}
& ((P \wedge Q \wedge R) \vee (P \vee Q \vee S)) \wedge (P \wedge S \wedge T) \\
= \; & (P \vee Q \vee S) \wedge (P \wedge S \wedge T) \\
= \; & P \wedge S \wedge T
\end{aligned}
$$

智力游戏

Example

侦探调查了罪案的四位证人。从证人的话侦探得出的结论是：如果男管家说的是真话，那么厨师说的也是真话；厨师和园丁说的不可能都是真话；园丁和杂役不可能都在说谎；如果杂役说真话，那么厨师在说谎。侦探能判定这四位证人分别是在说谎还是在说真话吗？解释你的推理。

解 令命题 P: 男管家说的是真话；Q：厨师说的是真话；R：园丁说的是真话；S：杂役说的是真话。则将上述已知条件符号化并列出真值表，选取真值结果全为真的行如下表：

P	Q	R	S	$P \to Q$	$\neg(Q \wedge R)$	$\neg(\neg R \wedge \neg S)$	$S \to \neg Q$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1

可见，我们能确定 P，Q 必然为假，但无法确定 R 和 S 的值，因而侦探只能判定男管家和厨师在说谎，但无法判定园丁与杂役谁在说真话。

基本术语

☞ 引入范式

真值表能够方便的给出命题公式的真值情况，但真值表的规模随命题变元的数量呈指数形式增长，因而我们考虑一种真值表的替代方法，这种方法是基于命题公式的一种标准形式。

Definition

- 命题变元或命题变元的否定称为**文字**。$P, \neg P, Q, \neg Q, \cdots$
- 有限个文字的析取称为**简单析取式**(或**子句**)。$P \vee Q \vee \neg R, \cdots \quad P, \neg P$
- 有限个文字的合取称为**简单合取式**(或**短语**)。$\neg P \wedge Q \wedge R, \cdots \quad P, \neg P$
- P 与 $\neg P$ 称为**互补对**。

范式

Definition

- 有限个简单合取式（短语）的析取式称为**析取范式**(disjunctive normal form)；如 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ ，又如 $P \wedge \neg Q$，$P, \neg P$
- 有限个简单析取式（子句）的合取式称为**合取范式**(conjunctive normal form)。如 $(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q)$，又如 $P \vee \neg Q$，$P, \neg P$

Example

1. $P, \neg P$ 是文字，短语，子句，析取范式，合取范式
2. $P \vee Q \vee \neg R$ 是子句，合取范式，析取范式;$(P \vee Q \vee \neg R)$ 是子句，合取范式。
3. $\neg P \wedge Q \wedge R$ 是短语，析取范式，合取范式;$(\neg P \wedge Q \wedge R)$ 是短语，析取范式。
4. $P \vee (Q \vee \neg R)$ 即不是析取范式也不是合取范式，但转换为 $P \vee Q \vee \neg R$ 后，即是析取范式和合取范式。

范式存在定理

☞ 总结

1. 范式关注的是命题公式的当前书写形式；
2. 单个的文字是子句、短语、析取范式，合取范式；
3. 析取范式、合取范式仅含联结词集 $\{\neg, \wedge, \vee\}$，且否定联结词仅出现在命题变元之前。

Theorem (范式存在定理)

对于任意命题公式，都存在与其等价的析取范式和合取范式。

范式存在定理

Proof.

由于联结词之间可以通过命题公式的基本等价关系进行相互的转换，所以可通过逻辑等价公式求出等价于它的析取范式和合取范式，具体步骤如下：

1. 将公式中的 $\rightarrow,\leftrightarrow$ 用联结词 $\neg,\wedge,\vee$ 来取代：
   $E_{20}: G \rightarrow H = \neg G \vee H,$ (蕴涵式)
   $E_{22}: G \leftrightarrow H = (G \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow G) = (\neg G \vee H) \wedge (\neg H \vee G)$ (等价式)
2. 将否定联接词移到各个命题变元的前端，并消去多余的否定号：
   $E_{17}: \neg(\neg G) = G.$ (双重否定律)
   $E_{18}: \neg(G \vee H) = \neg G \wedge \neg H;$ (德摩根律)
   $E_{19}: \neg(G \wedge H) = \neg G \vee \neg H.$
3. 利用分配律，可将公式化成一些合取式的析取，或化成一些析取式的合取：
   $E_{11}: G \vee (H \wedge S) = (G \vee H) \wedge (G \vee S);$ (分配律)
   $E_{12}: G \wedge (H \vee S) = (G \wedge H) \vee (G \wedge S).$

对任意一个公式，经过以上步骤，必能化成与其等价的析取范式和合取范式。 $\square$

范式求解定理

Example

求公式 $(P \to \neg Q) \vee (P \leftrightarrow R)$ 的析取范式和合取范式。

解

$$
\begin{aligned}
& (P \to \neg Q) \vee (P \leftrightarrow R) \\
= \quad & (\neg P \vee \neg Q) \vee ((\neg P \vee R) \wedge (\neg R \vee P)) \\
= \quad & ((\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg P \vee R)) \wedge ((\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg R \vee P)) \\
= \quad & (\neg P \vee \neg Q \vee \neg P \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R \vee P) \\
= \quad & ((\neg P \vee \neg P) \vee \neg Q \vee R) \wedge ((\neg P \vee P) \vee \neg Q \vee \neg R) \\
= \quad & (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (1 \vee \neg Q \vee \neg R) \\
= \quad & (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge 1 \\
= \quad & (\neg P \vee \neg Q \vee R) && \text{—合取范式} \\
= \quad & \neg P \vee \neg Q \vee R && \text{—析取范式}
\end{aligned}
$$

范式与真值

☞ 总结

1. 命题公式的析取范式可以指出公式何时为真，而合取范式可以指出公式何时为假，从而能够替代真值表。$((\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg R), \neg P \vee (\neg Q \wedge R))$
2. 命题公式的范式表达并不唯一，比如对公式 $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ 而言，对应的析取范式有很多：
   - $P \vee (Q \wedge R)$
   - $(P \wedge P) \vee (Q \wedge R)$
   - $P \vee (Q \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge R)$
   - $P \vee (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$
3. 一般而言，求解范式时，需要进行最后的化简步骤；

极小项和极大项

☞ 引入主范式

由于范式的不唯一性，我们考虑对构成范式的子句或短语进一步规范化，从而形成唯一的主析取范式和主合取范式。

定义

在含有 n 个命题变元 $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$ 的短语或子句中，若每个命题变元与其否定不同时存在，但二者之一恰好出现一次且仅一次，并且出现的次序与 $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$ 一致，则称此短语或子句为关于 $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$ 的一个极小项或极大项。

一般来说，若有 n 个命题变元，则应有 2^n 个不同的极小项和 2^n 个不同的极大项。

极小项的性质

P	Q	$m_{00}(m_0)$ $\neg P \wedge \neg Q$	$m_{01}(m_1)$ $\neg P \wedge Q$	$m_{10}(m_2)$ $P \wedge \neg Q$	$m_{11}(m_3)$ $P \wedge Q$
0	0	**1**	0	0	0
0	1	0	**1**	0	0
1	0	0	0	**1**	0
1	1	0	0	0	**1**

- 没有两个不同的极小项是等价的。
- 每个极小项只有一组成真赋值，因此可用于给极小项编码。 编码规律为：命题变元与 1 对应，命题变元的否定与 0 对应。

极大项的性质

		$M_{11}(M_3)$	$M_{10}(M_2)$	$M_{01}(M_1)$	$M_{00}(M_0)$
P	Q	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg P \vee Q$	$P \vee \neg Q$	$P \vee Q$
0	0	1	1	1	**0**
0	1	1	1	**0**	1
1	0	1	**0**	1	1
1	1	**0**	1	1	1

- 没有两个不同的极大项是等价的。
- 每个极大项只有一组成假赋值，因此可用于给极大项编码。 编码规律为：命题变元与 0 对应，命题变元的否定与 1 对应。

极小项和极大项的编码

例

设有 P, Q, R 三个命题变元，给出以下极小项和极大项的编码：

- $\neg P \wedge Q \wedge R$: $m_{011}(m_3)$
- $P \wedge \neg Q \wedge R$: $m_{101}(m_5)$
- $\neg P \vee Q \vee R$: $M_{100}(M_4)$
- $P \vee \neg Q \vee R$: $M_{010}(M_2)$

根据编码给出相应的极小项或极大项：

- $m_6 = m_{110} = P \wedge Q \wedge \neg R$
- $M_6 = M_{110} = \neg P \vee \neg Q \vee R$

☞ 注意：极小项和极大项的编码方式刚好相反，不要混淆。

极小项和极大项的性质

P	Q	R	**极小项**	**极大项**
0	0	0	$m_0 = \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$M_0 = P \vee Q \vee R$
0	0	1	$m_1 = \neg P \wedge \neg Q \wedge R$	$M_1 = P \vee Q \vee \neg R$
0	1	0	$m_2 = \neg P \wedge Q \wedge \neg R$	$M_2 = P \vee \neg Q \vee R$
0	1	1	$m_3 = \neg P \wedge Q \wedge R$	$M_3 = P \vee \neg Q \vee \neg R$
1	0	0	$m_4 = P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$M_4 = \neg P \vee Q \vee R$
1	0	1	$m_5 = P \wedge \neg Q \wedge R$	$M_5 = \neg P \vee Q \vee \neg R$
1	1	0	$m_6 = P \wedge Q \wedge \neg R$	$M_6 = \neg P \vee \neg Q \vee R$
1	1	1	$m_7 = P \wedge Q \wedge R$	$M_7 = \neg P \vee \neg Q \vee \neg R$

1. $m_i \wedge m_j = 0$
   $M_i \vee M_j = 1$
   $(i \neq j)$
2. $m_i = \neg M_i$
   $M_i = \neg m_i$
3. $\bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1$
   $\bigwedge_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0$

主析取范式和主合取范式

定义

- 在给定的析取范式中，若每一个短语都是极小项，且按照编码从小到大的顺序排列，则称该范式为主析取范式(principal disjunctive normal form)。
- 在给定的合取范式中，若每一个子句都是极大项，且按照编码从小到大的顺序排列，则称该范式为主合取范式(principal conjunctive normal form)。
- 如果一个主析取范式不包含任何极小项，则称该主析取范式为“空”；如果一个主合取范式不包含任何极大项，则称主合取范式为“空”。

定理

任何一个公式都有与之等价的主析取范式和主合取范式。

主范式求解定理

证明.

1. 求出该公式所对应的析取范式和合取范式；
2. 消去重复出现的命题变元，矛盾式或重言式；
   $E_1: G \vee G = G$; $E_2: G \wedge G = G$. (幂等律) $E_{15}: \neg G \wedge G = 0$. (矛盾律)
   $E_7: G \vee 0 = G$; $E_8: G \wedge 1 = G$.(同一律) $E_{16}: \neg G \vee G = 1$. (排中律)
   $E_9: G \vee 1 = 1$; $E_{10}: G \wedge 0 = 0$.(零律)
3. 若析取（合取）范式的某一个短语（子句）B_i 中缺少命题变元 P，则可用如下方式将 P 补进去：
   $B_i = B_i \wedge 1 = B_i \wedge (\neg P \vee P) = (B_i \wedge \neg P) \vee (B_i \wedge P)$;
   $B_i = B_i \vee 0 = B_i \vee (\neg P \wedge P) = (B_i \vee \neg P) \wedge (B_i \vee P)$。
   重复至所有短语或子句都是标准的极小项或极大项为止。
4. 利用幂等律将重复的极小项和极大项合并，并利用交换律进行顺序调整，由此可转换成标准的主析取范式和主合取范式。
   $E_1: G \vee G = G$; $E_2: G \wedge G = G$. (幂等律) $E_3: G \vee H = H \vee G$; $E_4: G \wedge H = H \wedge G$.(交换律) $\square$

范式求解方法一、公式转换法

例

求公式 $(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \wedge R)$ 的主析取范式和主合取范式。

解

1. 求主析取范式

$$
\begin{aligned}
& (P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \wedge R) \\
= \; & \neg(\neg P \vee Q) \vee (Q \wedge R) \\
= \; & (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge R) \qquad \text{——析取范式} \\
= \; & (P \wedge \neg Q \wedge (\neg R \vee R)) \vee ((\neg P \vee P) \wedge Q \wedge R) \\
= \; & (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \\
= \; & (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)
\end{aligned}
$$

——主析取范式$(m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7)$

范式求解方法一、公式转换法

例

解 (续)

2. 求主合取范式

$$
\begin{aligned}
& (P \to Q) \to (Q \wedge R) = (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge R) \\
= \;& (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R) \\
= \;& (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R) \qquad \text{–合取范式} \\
= \;& (P \vee Q \vee (\neg R \wedge R)) \wedge (P \vee (\neg Q \wedge Q) \vee R) \wedge ((\neg P \wedge P) \vee \neg Q \vee R) \\
= \;& (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R) \\
& \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \\
= \;& (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \\
= \;& (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \\
& \text{—主合取范式}(M_0 \wedge M_1 \wedge M_2 \wedge M_6)
\end{aligned}
$$

范式求解方法二、真值表技术

考虑任意公式 G 的主析取范式应该包含哪些极小项:

P_1	P_2	$\cdots$	P_n	m_0	m_1	$\cdots$	m_i (选)	$\cdots$	m_j (不选)	$\cdots$	G
x_1	x_2	$\cdots$	x_n	0	0	0	1	0	0	0	1
y_1	y_2	$\cdots$	y_n	0	0	0	0	0	1	0	0

考虑任意公式 G 的主合取范式应该包含哪些极大项:

P_1	P_2	$\cdots$	P_n	M_0	M_1	$\cdots$	M_i (不选)	$\cdots$	M_j (选)	$\cdots$	G
x_1	x_2	$\cdots$	x_n	1	1	1	0	1	1	1	1
y_1	y_2	$\cdots$	y_n	1	1	1	1	1	0	1	0

范式求解方法二、真值表技术

真值表技术

利用真值表技术求主析取范式和主合取范式的简要方法：

- 列出真值表，选出公式的真值结果为真的所有的行，在这样的每一行中，找到其每一个解释所对应的极小项，将这些极小项进行析取即可得到相应的主析取范式。
- 列出真值表，选出公式的真值结果为假的所有的行，在这样的每一行中，找到其每一个解释所对应的极大项，将这些极大项进行合取即可得到相应的主合取范式。

从真值表按所给的算法求出主范式的方法，称为真值表技术 (technique of truth table)。

范式求解方法二、真值表技术

例

求公式 $G = \neg(P \rightarrow Q) \vee R$ 的主析取范式和主合取范式。

P	Q	R	G
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

1. 主析取范式：
   选出真值为真的行：第 2,4,5,6,8 行，分别对应极小项 m_1, m_3, m_4, m_5, m_7，这 5 个极小项构成了该公式的主析取范式。
   $G = \neg(P \rightarrow Q) \vee R = (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$
2. 主合取范式：
   选出真值为假的行：第 1,3,7 行，分别对应极大项 M_0, M_2, M_6，这 3 个极大项构成了该公式的主合取范式。
   $G = \neg(P \rightarrow Q) \vee R =$
   $(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

范式的相互转化

由真值表技术可知，对于任一个命题公式而言，主析取范式所使用的极小项的编码和主合取范式所使用的极大项的编码是“互补”的关系。从而我们在求主析取范式和主合取范式时，可根据公式特点，先求出二者之一，然后可直接写出另一个。

例

$$
\begin{aligned}
G &= (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R) \vee (\neg Q \wedge \neg R) \\
&= (P \wedge Q \wedge (\neg R \vee R)) \vee (\neg P \wedge (\neg Q \vee Q) \wedge R) \vee ((\neg P \vee P) \wedge \neg Q \wedge \neg R) \\
&= (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \\
&\quad \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \\
&= (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \\
&\quad \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \\
&= m_0 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_6 \vee m_7 \qquad \text{— 主析取范式}
\end{aligned}
$$

从而，主合取范式为：$G = M_2 \wedge M_5 = (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$

主范式的应用

主范式可用于了解公式的真值情况，进行公式类型的判定以及等价关系的判定。

- 如果主析取范式包含所有的极小项，则该公式为永真公式；
- 如果主合取范式包含所有的极大项，则该公式为永假公式；
- 若两个公式具有相同的主析取范式或主合取范式，则两公式等价。

主范式的应用

例

某研究所要从 A, B, C 三名科研骨干中挑选 1-2 名出国进修人员，由于工作需要，选派时要满足以下条件：若 A 去，则 C 同去；若 B 去，则 C 不能去；若 C 不能去，则 A 或 B 可以去。问该如何选派？

解 设P：派 A 去；Q：派 B 去；R：派 C 去，

则已知条件表示为:$(P \to R) \wedge (Q \to \neg R) \wedge (\neg R \to (P \vee Q))$.

求出公式的主析取范式:

$$
\begin{aligned}
G &= (P \to R) \wedge (Q \to \neg R) \wedge (\neg R \to (P \vee Q)) \\
&= (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee \neg R) \wedge (R \vee (P \vee Q)) \\
&= ((\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg R) \vee (\neg Q \wedge R)) \wedge (P \vee Q \vee R) \\
&= (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)
\end{aligned}
$$

可见，有三种选派方案:

1. C 去，A, B 都不去；
2. B 去，A, C 都不去；
3. A, C 同去，B 不去。

推理形式

所谓推理，是指从一组前提合乎逻辑的推出结论的思维过程。在这里，我们使用命题公式来表达前提和结论。

Definition

设$G_1, G_2, \cdots, G_n$, H是公式，称 H是$G_1, G_2, \cdots, G_n$的逻辑结果当且仅当对任意解释 I，如果 I使得$G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n$为真，则 I也会使 H为真。记为$G_1, G_2, \cdots, G_n \Rightarrow H$。"$\Rightarrow$"称为蕴涵关系。此时称 $G_1, G_2, \cdots, G_n \Rightarrow H$ 为有效的, 否则称为无效的。$G_1, G_2, \cdots, G_n$ 称为一组前提，有时用集合 Γ 来表示，记为 $\Gamma = \{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$，$H$ 称为结论。此时也称 H 是前提集合 Γ 的逻辑结果。记为 $\Gamma \Rightarrow H$。

推理的判定定理

Theorem

公式 H 是前提集合 $\Gamma = \{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$ 的逻辑结果当且仅当 $(G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n) \to H$ 为永真公式。

Proof.

证明略。 □

☞ 判定方法

- 真值表技术。
- 公式转换法。
- 主析取范式法。

推理的判定定理

Example

判断推理 $P \to Q, P \Rightarrow Q$ 是否有效？

方法一：真值表技术

P	Q	$((P \to Q) \wedge P) \to Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

方法二：公式转换法

$$\begin{aligned} & ((P \to Q) \wedge P) \to Q \\ = \; & \neg((\neg P \vee Q) \wedge P) \vee Q \\ = \; & \neg(\neg P \vee Q) \vee \neg P \vee Q \\ = \; & \neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee Q) \\ = \; & 1 \end{aligned}$$

方法三：主析取范式法

$$\begin{aligned} & ((P \to Q) \wedge P) \to Q = \neg((\neg P \vee Q) \wedge P) \vee Q = \neg(\neg P \vee Q) \vee \neg P \vee Q \\ = \; & (P \wedge \neg Q) \vee \neg P \vee Q = (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge (\neg Q \vee Q)) \vee ((\neg P \vee P) \wedge Q) \\ = \; & (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \;\; (m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3) \end{aligned}$$

推理定律–基本蕴涵关系

Theorem

设 G, H, I 为任意的命题公式。

1. $I_1: G \wedge H \Rightarrow G; \quad I_2: G \wedge H \Rightarrow H.$ (简化规则)
2. $I_3: G \Rightarrow G \vee H; \quad I_4: H \Rightarrow G \vee H.$ (添加规则)
3. $I_5: G, H \Rightarrow G \wedge H;$ (合取引入规则)
4. $I_6: G \vee H, \neg G \Rightarrow H; \quad I_7: G \vee H, \neg H \Rightarrow G.$ (选言三段论)
5. $I_8: G \rightarrow H, G \Rightarrow H;$ (假言推理规则)
6. $I_9: G \rightarrow H, \neg H \Rightarrow \neg G;$ (否定后件式)
7. $I_{10}: G \rightarrow H, H \rightarrow I \Rightarrow G \rightarrow I;$ (假言三段论)
8. $I_{11}: G \vee H, G \rightarrow I, H \rightarrow I \Rightarrow I;$ (二难推论)

基本蕴涵关系举例

Example

- 如果 a 是偶数，则 a 能被 2 整除；a 是偶数。所以，a 能被 2 整除。
  可描述为：$P \to Q, P \Rightarrow Q$ (假言推理规则)
- 如果一个人是单身汉，则他不幸福；如果一个人不幸福，则他死得早。所以，单身汉死得早。
  可描述为：$P \to Q, Q \to R \Rightarrow P \to R$ (假言三段论)
- 若你发电子邮件告诉我密码，则我将完成程序的编写；我没有完成程序的编写。所以，你没有发电子邮件告诉我密码。
  可描述为：$P \to Q, \neg Q \Rightarrow \neg P$ (否定后件式)
- 这个案件的凶手肯定是王某或陈某；经过调查，王某不是凶手。所以，陈某是凶手。
  可描述为：$P \vee Q, \neg P \Rightarrow Q$ (选言三段论)

推理规则

Theorem

- **规则** P (称为**前提引用规则**)：在推导的过程中，可随时引入前提集合中的任意一个前提；
- **规则** T (称为**逻辑结果引用规则**)：在推导的过程中，可以随时引入公式 S，该公式 S 是由其前的一个或多个公式推导出来的逻辑结果。
- **规则** CP (称为**附加前提规则**)：如果能从给定的前提集合 Γ 与公式 P 推导出 S，则能从此前提集合 Γ 推导出 $P \to S$。

☞ 关于规则 CP

- 原理：$P \to (Q \to R) = (P \land Q) \to R$。
- 使用场合: 当结论公式是蕴涵式或析取式时使用。

自然演绎法

三个推理规则加上全部的基本等价公式和基本蕴涵公式，可作为推理与演绎的基础，从而构造一个完整的命题演算推理系统。即所有命题逻辑的定理都可以用这些规则严格地证明出来。

Definition

从前提集合 Γ 推出结论 H 的一个演绎是构造命题公式的一个有限序列：

$$H_1, H_2, H_3, \cdots, H_{n-1}, H_n$$

其中，H_i 或者是 Γ 中的某个前提，或者是前面的某些 $H_j (j < i)$ 的有效结论，并且 H_n 就是 H，则称公式 H 为该演绎的有效结论，或者称从前提 Γ 能够演绎出结论 H 来。

演绎–直接证明法

Example

设前提集合 $\Gamma = \{P \vee Q, Q \rightarrow R, P \rightarrow S, \neg S\}$，结论 $H = R \wedge (P \vee Q)$。
证明 $\Gamma \Rightarrow H$。

Proof.

(1)	$P \rightarrow S$	P
(2)	$\neg S$	P
(3)	$\neg P$	$T, (1), (2), I$
(4)	$P \vee Q$	P
(5)	Q	$T, (3), (4), I$
(6)	$Q \rightarrow R$	P
(7)	R	$T, (5), (6), I$
(8)	$R \wedge (P \vee Q)$	$T, (4), (7), I$

$\square$

演绎–规则 CP 证明法

Example

设前提集合 $\Gamma = \{P \to (Q \to S), \neg R \vee P, Q\}$，结论 $H = R \to S$。
证明 $\Gamma \Rightarrow H$。

Proof.

(1)	R	P(附加前提)
(2)	$\neg R \vee P$	P
(3)	P	$T, (1), (2), I$
(4)	$P \to (Q \to S)$	P
(5)	$Q \to S$	$T, (3), (4), I$
(6)	Q	P
(7)	S	$T, (5), (6), I$
(8)	$R \to S$	$CP, (1), (7)$

$\square$

演绎–间接证明法（反证法，归谬法）

要证明：$G_1, G_2, \cdots, G_n \Rightarrow H$

根据判定定理：$(G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n) \rightarrow H$ 为永真公式

即：$G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n \wedge \neg H$ 是矛盾式

因此：$G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n \wedge \neg H \Rightarrow R \wedge \neg R$

演绎–间接证明法（反证法，归谬法）

Example

设前提集合 $\Gamma = \{P \vee Q, P \to R, Q \to R\}$，结论 $H = R$。证明 $\Gamma \Rightarrow H$。

Proof.

(1)	$\neg R$	P(附加前提)
(2)	$P \to R$	P
(3)	$\neg P$	$T, (1), (2), I$
(4)	$Q \to R$	P
(5)	$\neg Q$	$T, (1), (4), I$
(6)	$P \vee Q$	P
(7)	P	$T, (5), (6), I$
(8)	$P \wedge \neg P$	$T, (3), (7), I$

$\square$

演绎–间接证明法

☞ 说明

反证法在逻辑推理中有时也十分方便。(想一下，什么时候会特别有用？)然而，总可以不使用它而用规则 CP 证明法来代替它。因为，它实际上本身就是规则 CP 的一种变型。

反证法：$G_1, G_2, \cdots, G_n, \neg H \Rightarrow R \wedge \neg R$

⬇

根据规则 CP：$G_1, G_2, \cdots, G_n \Rightarrow \neg H \rightarrow (R \wedge \neg R)$

⬇

即：$G_1, G_2, \cdots, G_n \Rightarrow \neg\neg H \vee (R \wedge \neg R)$

⬇

也就是：$G_1, G_2, \cdots, G_n \Rightarrow H$

命题演绎举例一

Example

符号化下面的语句，并使用演绎法证明：

“若数 a 是实数，则它不是有理数就是无理数。若 a 不能表示成分数，则它不是有理数。a 是实数且它不能表示成分数。所以，a 是无理数。”

解

设命题 P : a 是实数;

Q : a 是有理数;

R : a 是无理数;

S : a 能表示成分数.

则推理符号化成：

$$P \to (Q \vee R), \neg S \to \neg Q, P \wedge \neg S \Rightarrow R$$

命题演绎举例一

$$P \to (Q \vee R), \neg S \to \neg Q, P \wedge \neg S \Rightarrow R$$

Proof.

(1)	$P \wedge \neg S$	P
(2)	P	$T, (1), I$
(3)	$\neg S$	$T, (1), I$
(4)	$P \to (Q \vee R)$	P
(5)	$Q \vee R$	$T, (2), (4), I$
(6)	$\neg S \to \neg Q$	P
(7)	$\neg Q$	$T, (3), (6), I$
(8)	R	$T, (5), (7), I$

□

命题演绎举例二

Example

符号化下面的语句，并使用演绎法证明：

“如果马会飞或羊吃草，则母鸡就会是飞鸟；如果母鸡是飞鸟，那么烤熟的鸭子还会跑；烤熟的鸭子不会跑。所以羊不吃草。”

解

设命题 P : 马会飞;

Q : 羊吃草;

R : 母鸡是飞鸟;

S : 烤熟的鸭子会跑.

则推理符号化成：

$$(P \vee Q) \to R, R \to S, \neg S \Rightarrow \neg Q$$

命题演绎举例二

$$(P \vee Q) \to R, R \to S, \neg S \Rightarrow \neg Q$$

Proof.

(1)	$\neg S$	P
(2)	$R \to S$	P
(3)	$\neg R$	$T, (1), (2), I$
(4)	$(P \vee Q) \to R$	P
(5)	$\neg(P \vee Q)$	$T, (3), (4), I$
(6)	$\neg P \wedge \neg Q$	$T, (5), E$
(7)	$\neg Q$	$T, (6), I$

$\square$