# 什么是集合？



## Definition

- A set is a group of objects. (simplest way)
- By a set we mean any collection M into a whole of definite distinct objects m (which we called elements of M) of our perception or of our thought. (Cantor's way)
- 集合 是由指定范围内的满足给定条件的所有对象聚集在一起构成，每一个对象称为这个集合的元素。(In chinese)
- 外延公理 + 空集存在公理 + 无序对公理 + 并集公理 + 幂集公理 + 无穷公理 + 替换公理 + 正则公理 + 选择公理。(ZFC 公理化集合论)

# 什么是集合？

**Example**

1. 所有英文字母
2. 所有小于 100 的正奇数
3. 中国所有的残疾人
4. 世界上所有的数学家
5. 某植物园的所有植物
6. 天安门广场所有的路灯和树

# 集合的符号表示

## 集合的数学符号

通常情况下

- 用带或不带下标的大写英文字母表示集合: $A, B, C, \cdots, A_1, B_1, C_1, \cdots$
- 用带或不带下标的小写英文字母表示元素: $a, b, c, \cdots, a_1, b_1, c_1, \cdots$

## 常用集合 (我们的老朋友)

- 自然数集合 N: $0, 1, 2, 3, \cdots$
- 整数集合 Z: $\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$
- 有理数集合 Q 与实数集合 R，等等

# 属于关系



## Definition

- 若 $a$ 是集合 $A$ 中的元素，则称 $a$属于$A$，记为 $a \in A$
- 若 $a$ 不是集合 $A$ 中的元素，则称 $a$不属于$A$，记为 $a \notin A$

## Example

- $2 \in N$
- $-2 \notin N$
- $\frac{2}{3} \in Q$ 但 $\pi \notin Q$

# 枚举法



列出集合中的全部元素或者仅列出一部分元素，其余用省略号 $(\cdots)$ 表示。

**Example**

- $A = \{a, b, c, d\}$
- $B = \{2, 4, 6, 8, 10, \cdots\}$

# 叙述法



通过刻画集合中元素所具备的某种性质或特性来表示一个集合。

$$P = \{x | P(x)\}$$

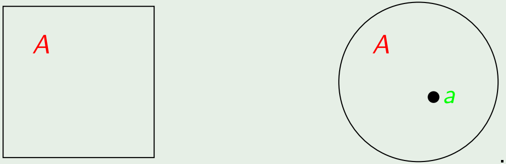
**Example**

- $A = \{x | x\text{是英文字母中的元音字母}\}$
- $B = \{x | x \in Z,\ x < 10\}$
- $C = \{x | x = 2k, k \in N\}$

# 文氏图

文氏图是利用平面上的点来做成对集合的图解方法。一般使用平面上的方形或圆形表示一个集合，而使用平面上的一个小圆点来表示集合的元素。

## Example



# 基数

## Definition

- 集合 $A$ 中的元素个数称为集合的基数(base number)，记为 $|A|$
- 若一个集合的基数是有限的，称该集合为有限集(finite set)
- 若一个集合的基数是无限的，称该集合为无限集(infinite set)

## Example

- $A = \{a, b, c\}$, $|A| = 3$
- $B = \{a, \{b, c\}\}$, $|B| = 2$

# 空集



## Definition

不含任何元素的集合叫做空集(empty set)，记作 $\varnothing$.
空集可以符号化为 $\varnothing = \{x|x \neq x\}$.

## Example

- 设 $A = \{x|x \in R, x^2 < 0\}$, 则 $A = \varnothing$
- $|\varnothing| = 0, |\{\varnothing\}| = 1$

空集是绝对唯一的。

# 全集



**Definition**

针对一个具体范围，我们考虑的所有对象的集合叫做全集(universal set)，记作 $U$ 或 $E$.
在文氏图一般使用方形表示全集。

**Example**

- 在立体几何中，全集是由空间的全体点组成的；
- 在我国的人口普查中，全集是由我国所有人组成的。

全集是相对唯一的。

# 集合的相等关系



## 元素的基本特性

- 集合中的元素是无序的。$\{1,2,3,4\}$ 与 $\{2,3,1,4\}$ 相同。
- 集合中的元素是不同的。$\{1,2,2,3,4,3,4,2\}$ 与 $\{1,2,3,4\}$ 相同。

## citing example

设 $E=\{x|(x-1)(x-2)(x-3)=0, x\in R\}, F=\{x|x\in Z^+, x^2<12\}$,
可见 $E$ 和 $F$ 具有相同的元素 $\{1,2,3\}$, 此时称两个集合相等。

## Theorem (外延性原理)

两个集合 $A$ 和 $B$ 相等，当且仅当它们的元素完全相同，记为 $A=B$, 否则 $A$ 和 $B$ 不相等，记为 $A\neq B$.

# 子集和真子集



**citing example**

设 $A = \{BASIC, PASCAL, ADA\}, B = \{ADA, PASCAL\}$,
此时 $A$ 中含有 $B$ 中所有的元素，这种情况称为$A$ 包含 $B$.

**Definition**

设 $A, B$ 是任意两个集合，

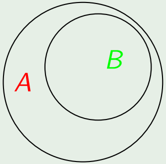
- 如果 $B$ 的每个元素都是 $A$ 中的元素，则称 $B$ 是 $A$ 的子集，也称做$B$ 被 $A$ 包含或$A$ 包含 $B$，记作$B \subseteq A$，否则记作$B \nsubseteq A$.
- 如果 $B \subseteq A$ 并且 $A \neq B$，则称 $B$ 是 $A$ 的真子集，也称做$B$ 被 $A$ 真包含或$A$ 真包含 $B$，记作$B \subset A$，否则记作$B \not\subset A$.

"$\subseteq$" 关系的数学语言描述为：$B \subseteq A \Leftrightarrow$ 对 $\forall x$, 如果 $x \in B$, 则 $x \in A$.

# 子集和真子集



## 文氏图:$B \subseteq A$




## 由子集定义可有

1. $\varnothing \subseteq A$
2. $A \subseteq A$

## Example

已知 $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 2, 4\}, C = \{2, 3\}, D = \{3, 2\}$ ，可见

1. $A \subseteq A, B \subseteq A, C \subseteq A, D \subseteq A,$
2. $C \subseteq D, D \subseteq C,$ 同时, $C = D$

# 证明集合相等

## Theorem

设 $A, B$ 为任意两个集合，则 $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ 并且 $B \subseteq A$

★★★ 上面的定理非常重要，这是证明集合相等的一种非常有效的方式。

### 证明框架

证明：

1. 首先证明 $A \subseteq B$ : $\forall x \in A, \cdots, x \in B. \therefore A \subseteq B.$
2. 其次证明 $B \subseteq A$ : $\forall x \in B, \cdots, x \in A. \therefore B \subseteq A.$

由以上两点，可知 A=B。

# n 元集的子集

## Example

设 $A=\{a,b,c\}$，求出 $A$ 的所有子集。

**解**：由于 $|A|=3$，因而 $A$ 的子集可能包含的元素个数 $m=0,1,2,3$

- $m=0$, 即没有任何元素，也就是空集 $\varnothing$
- $m=1$, 从 $A$ 中任取 1 个元素，则有 $C_3^1=3$ 个：$\{a\},\{b\},\{c\}$
- $m=2$, 从 $A$ 中任取 2 个元素，则有 $C_3^2=3$ 个：$\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\}$
- $m=3$, 从 $A$ 中任取 3 个元素，则有 $C_3^3=1$ 个：$\{a,b,c\}$

以上 8 个集合就是 $A$ 的所有子集。

**★ 推广: 对于任意 $n$ 元集合 $A$，它的 $m$ 元 $(0\leqslant m\leqslant n)$ 子集个数为 $C_n^m$ 个，**
**所以不同的子集个数为：$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=(1+1)^n=2^n$.**

# 幂集

## Definition

设 $A$ 为任意集合，把 $A$ 的所有不同子集构成的集合叫做 $A$ 的幂集(power set), 记作 $P(A)$，即，

$$P(A) = \{x|x \subseteq A\}$$

$x \in P(A) \Leftrightarrow x \subseteq A$

## Example

设 $A = \{a, b, c\}$，$B = \{a, \{b, c\}\}$，求他们的幂集 $P(A)$ 和 $P(B)$。

**解**：$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$

$P(B) = \Big\{\varnothing, \{a\}, \{\{b, c\}\}, \{a, \{b, c\}\}\Big\}$

## 说明

幂集也叫做集族或集合的集合，对集族的研究在数学方面、知识库和表处理语言以及人工智能等方面都有十分重要的意义。

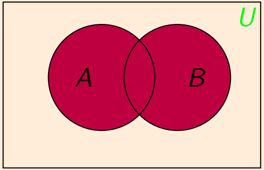
# 并集

## Definition

设 $A, B$ 是两个集合，则集合 $A$ 与 $B$ 的并集定义为：

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

## 文氏图:$A \cup B$




## Example

- 集合 $\{1, 3, 5\}$ 和集合 $\{1, 2, 3\}$ 的并集是 $\{1, 2, 3, 5\}$;
- 若集合 $A$ 是选修了音乐欣赏的学生，$B$ 是选修了西方文学的学生，则 $A \cup B$ 是选修了音乐欣赏或选修了西方文学或两门课都同时选修的学生.

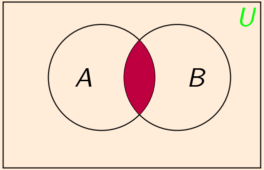
# 交集

## Definition

设 $A, B$ 是两个集合，则集合 $A$ 与 $B$ 的交集定义为：

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 并且 } x \in B\}$$

## 文氏图:$A \cap B$




## Example

- 集合 $\{1, 3, 5\}$ 和集合 $\{1, 2, 3\}$ 的交集是 $\{1, 3\}$;
- 若集合 $A$ 是选修了音乐欣赏的学生，$B$ 是选修了西方文学的学生，则 $A \cap B$ 是即选修了音乐欣赏又选修了西方文学的学生.

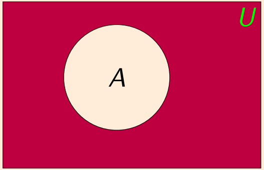
# 补集

**Definition**

设 $U$ 是全集，则集合 $A$ 的补集定义为：

$$\overline{A} = \{x | x \notin A\}$$

**文氏图:$\overline{A}$**




**Example**

- 集合 $\{1, 3, 5\}$ 对于全集 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 的补集是 $\{2, 4, 6, 7, 8\}$;
- 若集合 $A$ 是选修了音乐欣赏的学生，全集 $U$ 是所有在校学生，则 $\overline{A}$ 是没有选修音乐欣赏的学生.

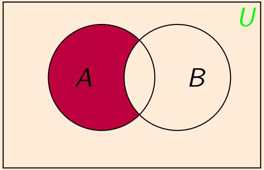
# 差集

**Definition**

设 $A, B$ 是两个集合，则集合 $A$ 与 $B$ 的差集定义为：

$$A - B = \{x | x \in A \text{ 并且 } x \notin B\}$$

**文氏图:$A - B$**




**Example**

- 集合 $\{1, 3, 5\}$ 和集合 $\{1, 2, 3\}$ 的差集是 $\{5\}$;
- 若集合 $A$ 是选修了音乐欣赏的学生，$B$ 是选修了西方文学的学生，则 $A - B$ 是选修了音乐欣赏但没有选修西方文学的学生.

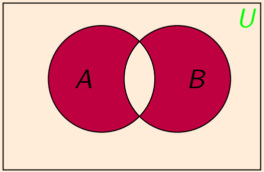
# 对称差集

## Definition

设 $A, B$ 是两个集合，则集合 $A$ 与 $B$ 的**对称差集**定义为：

$$A \oplus B = \{x | (x \in A \text{ 并且 } x \notin B) \text{或者} (x \notin A \text{ 并且 } x \in B)\}$$

## 文氏图:$A \oplus B$




## Example

- 集合 $\{1, 3, 5\}$ 和集合 $\{1, 2, 3\}$ 的对称差集是 $\{2, 5\}$;
- 若集合 $A$ 是选修了音乐欣赏的学生，$B$ 是选修了西方文学的学生，则 $A \oplus B$ 是只选修了音乐欣赏和西方文学两门课中某一门的学生.

# 并集和交集的扩展

**Definition**

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是任意 $n$ 个集合，则这 $n$ 个集合的并集是包含那些至少是这组集合中一个集合成员的元素的集合，即

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x | x \in A_1 \text{ 或者 } x \in A_2 \cdots \text{ 或者 } x \in A_n\}$$

**Definition**

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是任意 $n$ 个集合，则这 $n$ 个集合的交集是包含那些属于这组集合中所有集合成员的元素的集合，即

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x | x \in A_1 \text{ 并且 } x \in A_2 \cdots \text{ 并且 } x \in A_n\}$$

**Example**

设 $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}, B = \{0, 1, 2, 3, 4\}, C = \{0, 3, 6, 9\}$，则

$A \cup B \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$ $\qquad A \cap B \cap C = \{0\}$

# 集合运算的基本等式

## Theorem

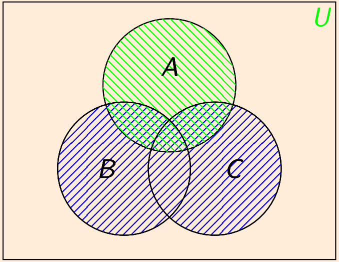
设 $U$ 为全集，$A, B, C$ 为任意集合。

1. $A \cup A = A, A \cap A = A.$ (幂等律)
2. $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A.$ (交换律)
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$ (结合律)
4. $A \cup \varnothing = A, A \cap U = A.$ (同一律)
5. $A \cup U = U, A \cap \varnothing = \varnothing.$ (零律)
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$ (分配律)
7. $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A.$ (吸收律)
8. $\overline{A} \cap A = \varnothing, \overline{A} \cup A = U.$ (矛盾律和排中律)
9. $\overline{\overline{A}} = A.$ (双重否定律)
10. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$ (德摩根律)

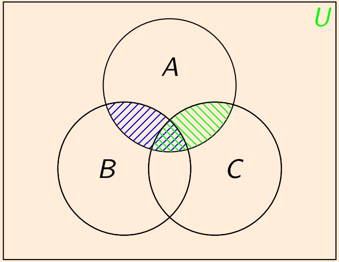
# 基于文氏图的形象理解



## $A \cap (B \cup C)$




## $(A \cap B) \cup (A \cap C)$



# 集合相等的证明

## ☞ 回顾证明方法

**如需证明集合 $A$ 和 $B$ 相等，通常的方法是证明两个集合间的相互包含关系，即**

$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ **并且** $B \subseteq A$

**而证明集合的包含关系则使用如下方法：** $B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x \in B, x \in A$

## 证明框架

**证明：**

1. **首先证明** $A \subseteq B$ **:** $\forall x \in A, \cdots, x \in B. \therefore A \subseteq B.$
2. **其次证明** $B \subseteq A$ **:** $\forall x \in B, \cdots, x \in A. \therefore B \subseteq A.$

**由以上两点，可知 A=B。**

# 集合相等的证明

**Example**

证明德摩根律的等式之一：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

**证明**：

1. 首先证明 $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

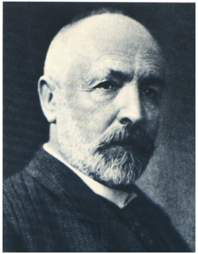
$$\begin{aligned} \forall x \in \overline{A \cup B} \quad & \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A \text{ 并且 } x \notin B \\ & \Rightarrow x \in \overline{A} \text{ 并且 } x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B} \end{aligned}$$

2. 其次证明 $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

$$\begin{aligned} \forall x \in \overline{A} \cap \overline{B} \quad & \Rightarrow x \in \overline{A} \text{ 并且 } x \in \overline{B} \Rightarrow x \notin A \text{ 并且 } x \notin B \\ & \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in \overline{A \cup B} \end{aligned}$$

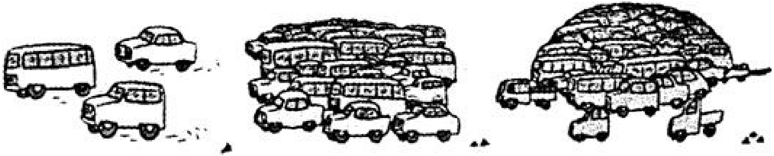
由以上两点，可知等式 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ 成立。

# 有限 → 无限，量变 → 质变



$$1.01^{365} = 37.8 \qquad \lim_{n\to\infty} 1.01^n = \infty$$

$$0.99^{365} = 0.03 \qquad \lim_{n\to\infty} 0.99^n = 0$$



# 自然数集的定义



**定义 (皮亚诺公理)**

1891 年, 意大利数学家皮亚诺公开发表了基于序数的自然数定义公理。这组公理包括:

1. $0$ 是自然数;
2. 每个自然数 $n$ 都有一个后继，这个后继也是一个自然数，记为 $S(n)$;
3. 两个自然数相等当且仅当它们有相同的后继，即 $m=n$ 当且仅当 $S(m)=S(n)$;
4. 没有任何自然数的后继是 $0$;
5. (归纳公理) 若 $\varphi$ 是关于一个自然数的预测，如果❶$\varphi(0)$ 为真；❷当 $\varphi(n)$ 为真，则有 $\varphi(S(n))$ 为真；则 $\varphi(n)$ 对任意自然数 $n$ 都成立。

# 自然数集的定义



**定义 (冯 • 诺依曼的自然数定义)**

20 世纪初，集合称为数学的基本概念之后，数学奇才，计算机之父冯 • 诺依曼基于基数，利用一个集合的序列来定义自然数：

1. $\varnothing \in \mathbf{N}$
2. 若$n \in \mathbf{N}$,则$n' \equiv n \cup \{n\} \in \mathbf{N}$。

从而，这个集合序列的基数就可以来定义自然数：

- $0 \equiv |\varnothing|$;
- $1 \equiv |\varnothing \cup \{\varnothing\}| = |\{\varnothing\}|$;
- $2 \equiv |\{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\}| = |\{\varnothing, \{\varnothing\}\}|$;
- $\cdots$

# 如何比较集合的大小?



**例**

比较下列的集合对，哪一个的元素个数更多?

1. 集合 $\{1, 2, 3\}$ 与集合 $\{a, b, c, d, \cdots, x, y, z\}$
2. 自然数集合 $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ 与奇数集合 $\{1, 3, 5, 7, \cdots\}$

☞

对于两个有限集合而言，比较二者的大小只需要看集合的基数，但对于无限集合却没有这么简单。如何比较无限集合的“大小”呢？这里需要采用一种通过判断两个无限集合之间是否存在一种一一对应的关系来解决这个问题。

# 等势

## 定义

设 $A, B$ 为两个集合，若在 $A, B$ 之间存在一种一一对应的关系：

$$\Psi : A \to B$$

则称 $A$ 与 $B$ 是等势的 (equipotential)，记作：

$$A \sim B$$

☞

由等势定义可以看出，如果 $A = B$，那么 $A \sim B$，反之却不成立。

# 可数集合

## 定义

凡与自然数集合 $\mathbb{N}$ 等势的集合，称为可数集合(countable set)，该集合的基数记为$\aleph_0$(读作阿列夫零)

## 例

试证明下列集合都是可数集合.

(1) $O^+ = \{x|x \in \mathbb{N}, x\text{是正奇数}\}$;

(2) $P = \{x|x \in \mathbb{N}, x\text{是素数}\}$;

(3) 有理数集合$Q$;

# 正奇数集合 $O^+$ 与素数集合 $P$

**证明.**

在 $O^+$ 与 $\mathbf{N}$ 之间建立一个一一对应关系 $\varphi_1 : \mathbf{N} \to O^+$ 如下:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 1 & 3 & 5 & 7 & \cdots & 2n+1 & \cdots \end{array}$$

所以 $O^+$ 是可数集合。
在 $P$ 与 $\mathbf{N}$ 之间建立一个一一对应关系 $\varphi_2 : \mathbf{N} \to P$ 如下:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 11 & 13 & 17 & 19 & \cdots \end{array}$$

所以 $P$ 是可数集合。 $\square$

# (3) 有理数集合 $Q$

**证明.**

在 $Q$ 与 $\mathbf{N}$ 之间建立一个一一对应关系 $\varphi_3 : \mathbf{N} \to Q$ 如下图所示。注意，所有有理数以 $p/q$ 的形式表示，其上标表示对应的自然数。

$$
\begin{tikzcd}
\cdots & -3/1^{[18]} \arrow[l] & -2/1^{[5]} \arrow[d] & -1/1^{[4]} \arrow[l] & 0/1^{[0]} \arrow[r] & 1/1^{[1]} \arrow[d] & 2/1^{[10]} \arrow[r] & 3/1^{[11]}\cdots \arrow[d] \\
\cdots & -3/2^{[17]} \arrow[u] & -2/2 \arrow[d] & -1/2^{[3]} \arrow[u] & 0/2 \arrow[l] & 1/2^{[2]} \arrow[l] & 2/2 \arrow[u] \arrow[r] & 3/2^{[12]}\cdots \arrow[d] \\
\cdots & -3/3 \arrow[u] & -2/3^{[6]} \arrow[r] & -1/3^{[7]} \arrow[r] & 0/3 \arrow[r] & 1/3^{[8]} \arrow[r] & 2/3^{[9]} \arrow[u] & 3/3\cdots \arrow[d] \\
\cdots & -3/4^{[16]} \arrow[u] & -2/4 \arrow[l] & -1/4^{[15]} \arrow[l] & 0/4 \arrow[l] & 1/4^{[4]} \arrow[l] & 2/4 \arrow[l] & 3/4^{[13]}\cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

所以 $Q$ 是可数集合。 $\square$

☞

从有限到无限，不仅仅是简单数量上的变化 (量变)，而引起了本质的改变 (质变)。

- 两个无限集合的 “大小” 已经不能单纯使用集合中的元素个数来衡量。$\aleph_0$ 表示一切可数集合的基数，是一种抽象的表达。
- 表面上个数完全不相等的两个集合之间仍可能存在等势关系，如集合与其真子集之间，这体现了有限集合和无限集合的根本差别。

# 不可数集合

## 定义

开区间 $(0,1)$称为不可数集合，凡与开区间 $(0,1)$ 等势的集合，称为不可数集合，该类集合的基数记为$\aleph$(读作阿列夫)

## 例

- 闭区间 $[0,1]$ 是不可数集合; $\begin{cases} \frac{1}{4} & \to & 0 \\ \frac{1}{2} & \to & 1 \\ \frac{1}{2^n} & \to & \frac{1}{2^{n-2}} & (n=3,4,5\cdots) \\ n & \to & n & (others \quad n\in(0,1)) \end{cases}$
- 实数集合 $\mathbf{R}$ 是不可数集合. $n\to tan\pi(\frac{2n-1}{2})$