命题逻辑的局限性

Example (苏格拉底三段论)

所有的人都是要死的；苏格拉底是人。所以，苏格拉底是要死的。

Example (含变量的语句)

如:$x > 3$；$x = y + 3$；$x + y = z$... 等。

☞

为了研究简单命题句子内部的逻辑关系，我们需要对简单命题进行分解，利用个体词，谓词和量词来描述它们，并研究个体与总体的内在联系和数量关系，这就是谓词逻辑或一阶逻辑。

个体词和谓词

☞ 简单命题分解

命题是具有真假意义的陈述句，从语法上分析，一个陈述句由主语和谓语两部分组成。

Example

考虑如下两个命题：

- 陈华是电子科技大学的学生
- 张强是电子科技大学的学生

设 $P(x)$：x 是电子科技大学的学生。

则上述两个句子可写为：

P(陈华)；P(张强)。

个体词和谓词

Example

- 语句 "x 大于 3" 可用 $Q(x)$ 表示。
  $Q(x)$ 无固定真值，一旦给变量 x 赋一个值，则成为命题，具有一个或真或假的真值。如 $x = 5$，则 $Q(5) = 1$。
- 语句 "x=y+3" 可用 $R(x, y)$ 表示。
  $R(x, y)$ 无固定真值，一旦给变量 x,y 赋一个值，则成为命题，具有一个或真或假的真值。如 $x = 5, y = 3$，则 $R(5, 3) = 0$。

Definition

在原子命题中，可以独立存在的客体（句子中的主语、宾语等），称为个体词。而用以刻划客体的性质或客体之间的关系即是谓词。

个体词

Definition

个体词可分为两种，个体常量和个体变量，均在个体域内取值。

1. 表示具体或特定的个体词称为个体常量。一般用带或不带下标的小写英文字母 $a, b, c, \cdots, a_1, b_1, c_1, \cdots$ 等表示。
2. 表示抽象的或泛指的个体词称为个体变量。一般用带或不带下标的小写英文字母 $x, y, z, \cdots, x_1, y_1, z_1, \cdots$ 等表示。
3. 个体词的取值范围称为**个体域** (或论域)，常用 D 表示；
4. 宇宙间的所有个体域聚集在一起所构成的个体域称为**全总个体域**。若无特别说明，均使用全总个体域。

谓词

Definition

设 D 为非空的个体域，定义在D^n(表示 n 个个体都在个体域 D 上取值) 上取值于$\{0,1\}$上的 n 元函数，称为 n 元命题函数或 n 元谓词，记为$P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。其中，个体变量$x_1, x_2, \cdots, x_n \in D$。

1. 表示具体性质或关系的谓词称为谓词常量。
2. 表示抽象的或泛指的性质或关系的谓词称为谓词变量。

谓词均使用大写英文字母 $P, Q, R, \cdots, F, G, H, \cdots$ 来表示。

Example

- 小张和小李同岁。可描述为：$F(a,b)$，其中 a：小张，b：小李，这里的 F 是谓词常量。
- x 与 y 具有关系 L。可描述为：$L(x,y)$，这里的 L 是谓词变量。

复合命题的谓词符号化

Example

- 如果王童是一个三好学生，那么她的学习成绩一定很好。
  设 $S(x)$:x 是一个三好学生，$H(x)$：x 学习成绩好，a：王童,
  则该命题符号化为：$S(a) \to H(a)$
- 李新华是李兰的父亲并且李兰和张三是同班同学。
  设 $F(x,y)$:x 是 y 的父亲，$M(x,y)$：x 与 y 是同班同学，b: 李新华，c: 李兰，d: 张三，
  则该命题符号化为：$F(b,c) \wedge M(c,d)$
- 北京是中国的首都当且仅当 2 是偶数。
  设 $C(x)$:x 是中国的首都，$E(x)$：x 是偶数，b: 北京，c:2，
  则该命题符号化为：$C(b) \leftrightarrow E(c)$

谓词

☞ 说明和总结

- 谓词中个体词的顺序是十分重要的，不能随意变更。$F(b,c) \neq F(c,b)$
- 一元谓词用以描述某一个个体的某种特性，而 n 元谓词 $(n \geqslant 2)$ 则用以描述 n 个个体之间的关系。
- 谓词 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 包含了个体变量，因而本身并不是命题，只有用谓词常量取代 P，用个体常量取代 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 后才会成为命题。
- 一般将没有任何个体变量的谓词称为0 元谓词，如 $F(a), G(a,b), H(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 等。当 F, G, H 为谓词常量时，0 元谓词就成为了命题。此时，命题逻辑中的所有命题都可以表示成 0 元谓词。

量词

虽然目前有了个体词和谓词，但对于有些命题而言，还是无法准确描述。

Example

- 所有的老虎都要吃人；
- 每一个大学生都会说英语；
- 有一些人登上过月球；
- 存在自然数是素数。

量词

Definition

- **全称量词** $(\forall x)$: 所有的 x；任意的 x；一切的 x；每一个 x；$\cdots$
- **存在量词** $(\exists x)$: 有些 x；至少有一个 x；某一些 x；存在 x；$\cdots$

其中的 x 称为作用变量。一般将其量词加在其谓词之前，记为 $(\forall x)F(x)$，$(\exists x)F(x)$。此时，$F(x)$ 称为全称量词和存在量词的辖域。

Example

- 所有的老虎都要吃人；P(x):x 要吃人。$(\forall x)P(x), x \in$\{老虎\}
- 每一个大学生都会说英语；Q(x):x 会说英语。$(\forall x)Q(x), x \in$\{大学生\}
- 有一些人登上过月球； R(x):x 登上过月球。$(\exists x)R(x), x \in$\{人\}
- 存在自然数是素数。S(x):x 是素数。$(\exists x)S(x), x \in$\{自然数\}

更准确的表达

以上符号化必须要特别注明个体域，在表达比较复杂的命题时会容易混淆。下面引入更准确的表达方式：

Example

- 所有的老虎都要吃人；
  T(x):x 是老虎，P(x):x 要吃人。$(\forall x)(T(x) \to P(x))$
- 每一个大学生都会说英语；
  C(x):x 是大学生，Q(x):x 会说英语。$(\forall x)(C(x) \to Q(x))$
- 有一些人登上过月球；
  H(x):x 是人，R(x):x 登上过月球。$(\exists x)(H(x) \land R(x))$
- 存在自然数是素数。
  N(x):x 是自然数，S(x):x 是素数。$(\exists x)(N(x) \land S(x))$

谓词逻辑符号化的两条规则

统一个体域为全总个体域，而对每一个句子中个体变量的变化范围用一元特性谓词刻划之。这种特性谓词在加入到命题函数中时必定遵循如下原则：

- 对于全称量词 $(\forall x)$，刻划其对应个体域的特性谓词作为蕴涵式之前件加入。
- 对于存在量词 $(\exists x)$，刻划其对应个体域的特性谓词作为合取式之合取项加入。

想一想，为什么要这样规定特性谓词加入的原则呢？若不遵循会出现什么样的问题？

量词相关的真值确定

考虑命题"所有同学都通过了离散数学考试"，这个命题在什么情况下取值为真，什么情况下取值为假？那么，命题"有些同学通过了离散数学考试"的真值又如何确定呢？

- $(\forall x)G(x)$：对 $\forall x \in D, G(x)$ 都成立。
  - $(\forall x)G(x)$ 取值为 1 当且仅当对任意 $x \in D, G(x)$ 都取值为 1；
  - $(\forall x)G(x)$ 取值为 0 当且仅当存在 $x_0 \in D$, 使得 $G(x_0)$ 取值为 0。
- $(\exists x)G(x)$：存在一个 $x_0 \in D$, 使得 $G(x_0)$ 成立。
  - $(\exists x)G(x)$ 取值为 1 当且仅当存在 $x_0 \in D$, 使得 $G(x_0)$ 取值为 1；
  - $(\exists x)G(x)$ 取值为 0 当且仅当对任意 $x \in D, G(x)$ 都取值为 0。

谓词翻译和真值

Example

设 P(x)：x 是素数；I(x)：x 是整数；Q(x, y)：x+y=0。用语句描述下述句子，并判断其真假值。

- $(\forall x)(I(x) \rightarrow P(x))$; “所有整数都是素数”， 真值为假
- $(\exists x)(I(x) \wedge P(x))$ “有一些整数是素数”， 真值为真
- $(\forall x)(\forall y)(I(x) \wedge I(y) \rightarrow Q(x, y))$
  “对任意整数 x,y 都有 x+y=0”， 真值为假
- $(\forall x)(I(x) \rightarrow (\exists y)(I(y) \wedge Q(x, y)))$
  “对任意整数 x, 都存在整数 y，使得 x+y=0”， 真值为真
- $(\exists x)(\forall y)(I(x) \wedge (I(y) \rightarrow Q(x, y)))$
  “存在整数 x, 对任意的整数 y，都有 x+y=0”， 真值为假

个体域有限的情况下

特别的，当个体域 $D=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ 是有限集合时，$(\forall x)G(x)$ 和 $(\exists x)G(x)$ 的真值可以用与之等价的命题公式来进行表示。

$$(\forall x)G(x)=G(x_0)\wedge G(x_1)\wedge\cdots\wedge G(x_n)$$
$$(\exists x)G(x)=G(x_0)\vee G(x_1)\vee\cdots\vee G(x_n)$$

Example

设个体域 $D=\{1,2,3,4,5\}$,$P(x)$：x 是素数，则

$$(\forall x)P(x)=P(1)\wedge P(2)\wedge P(3)\wedge P(4)\wedge P(5)=0\wedge 1\wedge 1\wedge 0\wedge 1=0$$
$$(\exists x)P(x)=P(1)\vee P(2)\vee P(3)\vee P(4)\vee P(5)=0\vee 1\vee 1\vee 0\vee 1=1$$

谓词逻辑符号化示例一

Example

1. 没有人登上过木星；
   令H(x)：x 是人，M(x)：x 登上过木星,
   则命题符号化为$\neg(\exists x)(H(x) \wedge M(x))$ 或 $(\forall x)(H(x) \to \neg M(x))$
2. 在美国留学的学生未必都是亚洲人；
   令A(x)：x 是亚洲人，H(x)：x 是在美国留学的学生,
   则命题符号化为$\neg(\forall x)(H(x) \to A(x))$ 或 $(\exists x)(H(x) \wedge \neg A(x))$
3. 尽管有人很聪明，但未必一切人都聪明；
   令M(x)：x 是人；C(x)：x 很聪明,
   则命题符号化为$(\exists x)(M(x) \wedge C(x)) \wedge \neg(\forall x)(M(x) \to C(x))$

谓词逻辑符号化示例二

Example

1. 天下乌鸦一般黑；
   令F(x)：x 是乌鸦；G(x, y)：x 与 y 一般黑,
   则命题符号化为$(\forall x)(\forall y)(F(x) \land F(y) \rightarrow G(x,y))$ 或 $\neg(\exists x)(\exists y)(F(x) \land F(y) \land \neg G(x,y))$
2. 每个实数都存在比它大的另外的实数；
   令R(x)：x 是实数；L(x, y)：x 小于 y,
   则命题符号化为$(\forall x)(R(x) \rightarrow (\exists y)(R(y) \land L(x,y)))$
   若假定个体域为所有实数，则命题符号化为$(\forall x)(\exists y)L(x,y)$

量词对变元的约束往往与量词的次序有关。不同的量词次序，可以产生不同的真值。因此当多个量词同时出现时，不能随意颠倒它们的顺序，否则会改变原有的含义。

谓词逻辑符号化示例三

Example

符号化下面一组语句：
所有狮子都是凶猛的；有些狮子不喝咖啡；有些凶猛的动物不喝咖啡。

解

令P(x)：x 是狮子；Q(x):x 是凶猛的;R(x):x 喝咖啡,
假定所有动物的集合为个体域，则命题符号化为

$$(\forall x)(P(x) \to Q(x));$$
$$(\exists x)(P(x) \land \neg R(x));$$
$$(\exists x)(Q(x) \land \neg R(x))$$

谓词逻辑符号化示例四

Example

符号化下面一组语句：

所有的蜂鸟都五彩斑斓；没有大鸟以蜜为生；不以蜜为生的鸟都色彩单调；蜂鸟都是小鸟。

解

令P(x)：x 是蜂鸟；Q(x)：x 是大鸟;R(x)：x 是以蜜为生的鸟；S(x)：x 五彩斑斓，假定所有鸟的集合为个体域，则命题符号化为

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow S(x));$$
$$\neg(\exists x)(Q(x) \wedge R(x));$$
$$(\forall x)(\neg R(x) \rightarrow \neg S(x));$$
$$(\forall x)(P(x) \rightarrow \neg Q(x)).$$

四类符号

在基于谓词的形式化中，我们将使用如下四种符号：

1. 常量符号：指所属个体域 D 中的某个元素，用带或不带下标的小写英文字母 $a, b, c, \cdots, a_1, b_1, c_1, \cdots$ 来表示。
2. 变量符号：指所属个体域D 中的任意元素，用带或不带下标的小写英文字母 $x, y, z, \cdots, x_1, y_1, z_1, \cdots$ 来表示。
3. 函数符号：n 元函数符号 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 可以是所属个体域集合$D^n \to D$的任意一个函数，用带或不带下标的小写英文字母 $f, g, h, \cdots, f_1, g_1, h_1, \cdots$ 来表示。
4. 谓词符号：n 元谓词符号 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 可以是所属个体域集合$D^n \to \{0, 1\}$的任意一个谓词，用带或不带下标的大写英文字母 $P, Q, R, \cdots, P_1, Q_1, R_1, \cdots$ 来表示。

为何需要函数符号？

Example

命题“周红的父亲是教授”：

- 若令 $f(x)$：x 的父亲；$P(x)$：x 是教授；c：周红，则该命题符号化为 $P(f(c))$
- 若令 $P(x)$：x 是教授；$F(x,y)$：x 是 y 的父亲；c：周红，则该命题符号化为 $(\forall x)(F(x,c) \rightarrow P(x))$

☞

从上面的例子可以看出，函数可用于表达个体词之间的转换关系，给谓词逻辑中的个体词表示带来了很大的方便。

项

Definition

谓词逻辑中的项（Term），被递归地定义为：

- 任意的常量符号或任意的变量符号是项；
- 若 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 n 元函数符号，$t_1, t_2, \cdots, t_n$ 是项，则$f(t_1, t_2, \cdots, t_n)$是项；
- 仅由有限次使用以上两个规则产生的符号串才是项。

Example

- 命题“周红的父亲是教授”可表示为 $P(f(c))$，这里的 $f(c)$ 是项。
- $f(g(x, y), h(a, g(x, y), z))$ 是项；

合式公式

Definition

若 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 n 元谓词，$t_1, t_2, \cdots, t_n$ 是项，则称 $P(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 为原子谓词公式，简称原子公式。

Definition

满足下列条件的表达式，称为合式公式(well-formed formulae/wff)，简称公式。

1. 原子公式是合式公式；
2. 若 G，H 是合式公式，则 $(\neg G)$，$(\neg H)$，$(G \vee H)$，$(G \wedge H)$，$(G \rightarrow H)$，$(G \leftrightarrow H)$ 也是合式公式；
3. 若 G 是合式公式，x 是个体变量，则$(\forall x)G$、$(\exists x)G$也是合式公式；
4. 由有限次使用以上三个规则产生的表达式才是合式公式。

合式公式

Example

- $(\forall x)(\exists y)(P(x,y) \rightarrow (Q(x,y) \vee R(x,a,f(z))))$，$(\forall x)(P(x) \vee (\exists y)R(x,y))$，$(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$ 等都是公式；
- $(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x)$，$(\exists y)(\forall x)(\vee P(x,y))$ 等则不是公式。

☞ 关于合式公式

- 公式的最外层括号可省略；
- 量词后面的括号省略方式为：一个量词的辖域中仅出现一个原子公式，则此辖域的外层括号可省略，否则不能省略；
- 一个个体词只能受一个量词的约束，否则就是没有意义的。

自由变元与约束变元

Definition

给定一个合式公式 G，若变元 x 出现在使用变元的量词的辖域之内，则称变元 x 的出现为约束出现，此时的变元 x 称为约束变元。若 x 的出现不是约束出现，则称它为自由出现，此时的变元 x 称为自由变元。

☞ 量词辖域的确定

- 若量词后有括号，则括号内的子公式就是该量词的辖域；$(\forall x)(\cdots)$
- 若量词后无括号，则与量词邻接的子公式为该量词的辖域。$(\forall x)F(x)$

自由变元与约束变元

Example

确定以下公式各量词的辖域以及各个体变量为自由变元还是约束变元。

1. $(\forall x)\boxed{(P(x) \rightarrow (\exists y)\boxed{R(x,y)})}$ P(x) 中的 x，R(x,y) 的 x，y 都为约束变元。
2. $(\exists x)\boxed{P(x)} \wedge Q(x,y)$ P(x) 中的 x 为约束变元，Q(x,y) 中的 x，y 是自由变元。
3. $(\forall x)\boxed{(\exists y)\boxed{(P(y,z) \vee Q(x,y))}} \wedge (\exists x)\boxed{R(x,y)}$

   P(y,z)、Q(x,y) 中的 x,y 都为约束变元，z 为自由变元；R(x,y) 中的 x 为约束变元，y 为自由变元。
4. $(\forall x)\boxed{(P(x) \rightarrow R(x))} \wedge (\exists y)\boxed{Q(x,y)}$

   P(x)，R(x) 中的 x 为约束变元，Q(x, y) 中的 x 为自由变元、y 为约束变元。

两个规则

☞

在上面的公式 $(\forall x)(P(x) \to R(x)) \wedge (\exists y)Q(x,y)$ 中，$P(x), R(x)$ 中的 x 和 $Q(x,y)$ 中的 x 不同，一个是约束变元，一个是自由变元，二者完全不同，为了更明确的区分，我们可以不同的变量符号来表示，可将公式改为 $(\forall z)(P(z) \to R(z)) \wedge (\exists y)Q(x,y)$ 或 $(\forall x)(P(x) \to R(x)) \wedge (\exists y)Q(z,y)$。

规则 1：约束变元的改名规则

- 将量词中的变元以及该量词辖域中此变量之所有约束出现都用新的个体变元替换；
- 新的变元一定要有别于改名辖域中的所有其它变量。

规则 2：自由变元的代入规则

- 将公式中出现该自由变元的每一处都用新的个体变元替换；
- 新的变元不允许在原公式中以任何约束形式出现。也可用个体常量代入。

两个规则

Example

1. 将公式 $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x, y)) \wedge R(x, y)$ 中的约束变元 x 进行改名；

   $(\forall z)(P(z) \rightarrow Q(x, y)) \wedge R(x, y)$ ✖

   $(\forall y)(P(y) \rightarrow Q(y, y)) \wedge R(x, y)$ ✖

   $(\forall z)(P(z) \rightarrow Q(z, y)) \wedge R(x, y)$ ✔

2. 将公式 $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x, y)) \wedge R(x, y)$ 中的自由变元 y 进行代入。

   $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x, z)) \wedge R(x, y)$ ✖

   $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x, x)) \wedge R(x, x)$ ✖

   $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x, z)) \wedge R(x, z)$ ✔

闭式

Definition

设 G 是任意一个公式，若 G 中无自由出现的个体变元，则称 G 为封闭的合式公式，简称闭式。

Example

- $(\forall x)(P(x) \to (\exists y)R(x,y))$ 是闭式；
- $(\exists x)P(x) \wedge Q(x,y)$ 不是闭式。

☞

显然，闭式是一个命题。

公式的解释

Definition

谓词逻辑中公式 G 的每一个解释 I 由如下四部分组成：

- 非空的个体域集合 D；
- G 中的每个常量符号，指定 D 中的某个特定的元素；
- G 中的每个 n 元函数符号，指定 D^n 到 D 中的某个特定的函数；
- G 中的每个 n 元谓词符号，指定 D^n 到 $\{0, 1\}$ 中的某个特定的谓词。

☞

规定：公式中无自由变元，或将自由变元看成是常量符号。

公式的解释与真值

Example

设有解释 I 为：

1. 个体域为 $D = \{\alpha, \beta\}$；
2. a 指定为：α；
3. $f(\alpha) = \beta,\ f(\beta) = \alpha$；
4. $P(\alpha) = 1,\ P(\beta) = 0$，$Q(\alpha, \alpha) = 0$，$Q(\alpha, \beta) = 1$，$Q(\beta, \alpha) = 1$，$Q(\beta, \beta) = 1$。

判断公式 $(\exists x)(P(f(x)) \wedge Q(x, f(a)))$ 在解释 I 下的真值结果。

解:

当$x = \alpha$时，$P(f(x)) \wedge Q(x, f(a)) = P(f(\alpha) \wedge Q(\alpha, f(\alpha))) = P(\beta) \wedge Q(\alpha, \beta) = 0 \wedge 1 = 0$

当$x = \beta$时，$P(f(x)) \wedge Q(x, f(a)) = P(f(\beta) \wedge Q(\beta, f(\alpha))) = P(\alpha) \wedge Q(\beta, \beta) = 1 \wedge 1 = 1$

可见原公式真值为真。

公式的分类

Example

1. $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \land Q(x,y) \to P(x,y))$；有效公式
2. $(\forall x)(\forall y)(\neg P(x,y) \lor P(x,y))$；有效公式
3. $(\forall x)(\forall y)(\neg P(x,y) \land P(x,y))$。矛盾公式

Definition

1. 如果公式 G 在它所有的解释下都取值为真，则称 G 为有效公式。
2. 如果公式 G 在它所有的解释下都取值为假，则称 G 为矛盾公式。
3. 如果至少有一种解释使得公式 G 取值为真，则称 G 为可满足公式。

公式的判定问题

☞ 谓词公式的可判定性

- 谓词逻辑是不可判定的；
- 只含有一元谓词变项的公式是可判定的；
- 如下形式的公式：

  $(\forall x_1)(\forall x_2)\cdots(\forall x_n)P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，

  $(\exists x_1)(\exists x_2)\cdots(\exists x_n)P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。

  若 P 中无量词和其它自由变元时，也是可判定的；
- 个体域有穷时的谓词公式是可判定的。

等价

定义

如果公式 $G \leftrightarrow H$ 是有效公式，则公式 G,H 称为等价的，记为 $G = H$。

定义

设 $G(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ 是命题演算中的命题公式，$P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是出现在 G 中的命题变元，当用任意的谓词公式 $G_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 分别代入 P_i 后，得到的新谓词公式 $G(G_1, G_2, \cdots, G_n)$ 称为原公式的代入实例。

定理

永真公式的任意一个代入实例必为有效公式。

☞

命题演算中的基本等价公式 E_1—E_{24} 在谓词演算中仍然成立。

谓词演算中的基本等价公式

定理

假设 $G(x), H(x)$ 是只含自由变元 x 的公式，S 是不含 x 的公式，则在全总个体域中，有

1. $E_{25}: (\exists x)G(x) = (\exists y)G(y)$; (改名规则)
   $E_{26}: (\forall x)G(x) = (\forall y)G(y)$.
2. $E_{27}: \neg(\exists x)G(x) = (\forall x)\neg G(x)$; (量词转换律/量词否定等价式)
   $E_{28}: \neg(\forall x)G(x) = (\exists x)\neg G(x)$.

例

设 $P(x)$：x 今天来上课，个体域为某班全体同学的集合。则

- $$\left.\begin{array}{lcl} \neg(\forall x)P(x) & : & \text{不是所有的同学今天来上课了} \\ (\exists x)\neg P(x) & : & \text{今天有同学没来上课} \end{array}\right\} \text{同义}$$
- 同样，$\neg(\exists x)P(x)$ 与 $(\forall x)\neg P(x)$ 意义也相同。

谓词演算中的基本等价公式

定理

3. $E_{29}: (\forall x)(G(x) \vee S) = (\forall x)G(x) \vee S;$ (量词辖域的扩张与收缩律)
   $E_{30}: (\forall x)(G(x) \wedge S) = (\forall x)G(x) \wedge S.$
   $E_{31}: (\exists x)(G(x) \vee S) = (\exists x)G(x) \vee S.$
   $E_{32}: (\exists x)(G(x) \wedge S) = (\exists x)G(x) \wedge S.$
4. $E_{33}: (\forall x)(G(x) \wedge H(x)) = (\forall x)G(x) \wedge (\forall x)H(x);$ (量词分配律)
   $E_{34}: (\exists x)(G(x) \vee H(x)) = (\exists x)G(x) \vee (\exists x)H(x).$

例

设 $G(x)$：x 勤奋学习，$H(x)$：x 喜欢体育活动，个体域是大学里的学生。

$$\left.\begin{array}{lcl} (\forall x)(G(x) \wedge H(x)) & : & \text{大学所有学生即勤奋学习又喜欢体育活动} \\ (\forall x)G(x) \wedge (\forall x)H(x) & : & \text{大学所有学生都勤奋学习且大学所有学生都喜欢体育活动} \end{array}\right\} \text{同义}$$

谓词演算中的基本等价公式

定理

5. $E_{35}: (\forall x)G(x) \vee (\forall x)H(x) = (\forall x)(\forall y)(G(x) \vee H(y));$
   $E_{36}: (\exists x)G(x) \wedge (\exists x)H(x) = (\exists x)(\exists y)(G(x) \wedge H(y)).$

对于多个量词的公式，设 $G(x, y)$ 是含有自由变元 x, y 的谓词公式，则有

6. $E_{37}: (\forall x)(\forall y)G(x, y) = (\forall y)(\forall x)G(x, y);$
   $E_{38}: (\exists x)(\exists y)G(x, y) = (\exists y)(\exists x)G(x, y).$

例

利用谓词之间的等价关系证明：$\neg(\exists x)(M(x) \wedge F(x)) = (\forall x)(M(x) \to \neg F(x))$

证明:

$\neg(\exists x)(M(x) \wedge F(x)) = (\forall x)\neg(M(x) \wedge F(x)) = (\forall x)(\neg M(x) \vee \neg F(x)) = (\forall x)(M(x) \to \neg F(x))$

前束范式

在命题逻辑里，每一公式都有与之等值的范式，范式是一种统一的表达形式，当研究一个公式的特点 (如永真、永假) 时，范式起着重要作用。对谓词逻辑的公式来说，也有范式，其中前束范式与原公式是等值的，而其它范式与原公式只有较弱的关系。

Definition

称公式 G 是一个前束范式，如果 G 中的一切量词都位于该公式的最前端 (不含否定词) 且这些量词的辖域都延伸到公式的末端。其标准形式如下：

$$(Q_1x_1)(Q_2x_2)\cdots(Q_nx_n)M(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

其中 Q_i 为量词 $\forall$ 或 $\exists(i=1,\cdots\ n)$，M 称作公式 G 的母式 (基式)，M 中不再有量词。

前束范式的求解步骤

1. 消去公式中的联结词“$\rightarrow$”,“$\leftrightarrow$”(如果有的话)；
2. 反复运用量词转换律，德摩根律和双重否定律，直到将所有的“$\neg$”都内移到原子谓词公式的前端；

   $\neg(\exists x)G(x) = (\forall x)\neg G(x)$; $\neg(\forall x)G(x) = (\exists x)\neg G(x)$. (量词转换律)
3. 使用谓词的等价公式将所有量词提到公式的最前端并保证其辖域直到公式的末端。

   $(\exists x)G(x) = (\exists y)G(y)$; $(\forall x)G(x) = (\forall y)G(y)$; (改名规则)

   $(\forall x)(G(x) \wedge H(x)) = (\forall x)G(x) \wedge (\forall x)H(x)$; (量词分配律)

   $(\exists x)(G(x) \vee H(x)) = (\exists x)G(x) \vee (\exists x)H(x)$.

   $(\forall x)G(x) \vee (\forall x)H(x) = (\forall x)(\forall y)(G(x) \vee H(y))$;

   $(\exists x)G(x) \wedge (\exists x)H(x) = (\exists x)(\exists y)(G(x) \wedge H(y))$.

   $(\forall x)(G(x) \vee S) = (\forall x)G(x) \vee S$; $(\forall x)(G(x) \wedge S) = (\forall x)G(x) \wedge S$; (量词辖域的扩张与收缩律)

   $(\exists x)(G(x) \vee S) = (\exists x)G(x) \vee S$; $(\exists x)(G(x) \wedge S) = (\exists x)G(x) \wedge S$.

前束范式的求解步骤

Example

求 $\neg((\forall x)(\exists y)P(a,x,y) \rightarrow (\exists x)(\neg(\forall y)Q(y,b) \rightarrow R(x)))$ 的前束范式。

解

1. 消去联结词 "$\rightarrow$","$\leftrightarrow$"，得： $\neg(\neg(\forall x)(\exists y)P(a,x,y) \vee (\exists x)(\neg\neg(\forall y)Q(y,b) \vee R(x)))$
2. "$\neg$" 消除和内移，得：
$$\begin{aligned} & (\forall x)(\exists y)P(a,x,y) \wedge \neg(\exists x)((\forall y)Q(y,b) \vee R(x)) \\ = \; & (\forall x)(\exists y)P(a,x,y) \wedge (\forall x)((\exists y)\neg Q(y,b) \wedge \neg R(x)) \end{aligned}$$
3. 量词左移，得：
$$\begin{aligned} & (\forall x)((\exists y)P(a,x,y) \wedge (\exists y)\neg Q(y,b) \wedge \neg R(x)) \\ = \; & (\forall x)((\exists y)P(a,x,y) \wedge (\exists z)\neg Q(z,b) \wedge \neg R(x)) \\ = \; & (\forall x)(\exists y)(\exists z)(P(a,x,y) \wedge \neg Q(z,b) \wedge \neg R(x)) \\ = \; & (\forall x)(\exists y)(\exists z)S(a,b,x,y,z) \end{aligned}$$

即：$((\forall x)(\exists y)(\exists z)S(a,b,x,y,z)$ 为原公式的前束范式，这里 $S(a,b,x,y,z) = P(a,x,y) \wedge \neg Q(z,b) \wedge \neg R(x)$ 是母式。

推理形式

Definition

设 $G_1, G_2, \cdots, G_n$，H 是公式，称 H 是 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 的逻辑结果(或称 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 共同蕴涵 H) 当且仅当对任意解释 I，若 I 同时满足 $G_1, G_2, \cdots, G_n$，则 I 满足 H，记为$G_1, G_2, \cdots, G_n \Rightarrow H$，此时称 $G_1, G_2, \cdots, G_n \Rightarrow H$ 是有效的，否则称为无效的。$G_1, G_2, \cdots, G_n$ 称为一组前提 (premise)，有时用集合 Γ 来表示，记$\Gamma = \{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$，$H$ 称为结论 (conclusion)，又称 H 是前提集合 Γ 的逻辑结果，记为$\Gamma \Rightarrow H$。

Theorem

设 $G_1, G_2, \cdots, G_n$，H 是公式，公式 H 是前提集合 $\Gamma = \{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$ 的逻辑结果当且仅当$G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n \rightarrow H$ 为有效公式。

根据代入实例的特性，命题演算中的基本蕴涵公式 I_1—I_{11} 在谓词演算中仍然成立。

推理规律

Theorem

假设 $G(x), H(x)$ 是只含自由变元 x 的公式，则在全总个体域中，有

1. $I_{12}: (\forall x)G(x) \Rightarrow (\exists x)G(x)$;
2. $I_{13}: (\forall x)G(x) \vee (\forall x)H(x) \Rightarrow (\forall x)(G(x) \vee H(x))$;
   $I_{14}: (\exists x)(G(x) \wedge H(x)) \Rightarrow (\exists x)G(x) \wedge (\exists x)H(x)$.
3. $I_{15}: (\forall x)(G(x) \rightarrow H(x)) \Rightarrow (\forall x)G(x) \rightarrow (\forall x)H(x)$;
   $I_{16}: (\forall x)(G(x) \rightarrow H(x)) \Rightarrow (\exists x)G(x) \rightarrow (\exists x)H(x)$.

推理规律

Theorem

假设 $G(x), H(x)$ 是只含自由变元 x 的公式，则在全总个体域中，有

1. $I_{12}: (\forall x)G(x) \Rightarrow (\exists x)G(x)$;
2. $I_{13}: (\forall x)G(x) \vee (\forall x)H(x) \Rightarrow (\forall x)(G(x) \vee H(x))$;
   $I_{14}: (\exists x)(G(x) \wedge H(x)) \Rightarrow (\exists x)G(x) \wedge (\exists x)H(x)$.
3. $I_{15}: (\forall x)(G(x) \rightarrow H(x)) \Rightarrow (\forall x)G(x) \rightarrow (\forall x)H(x)$;
   $I_{16}: (\forall x)(G(x) \rightarrow H(x)) \Rightarrow (\exists x)G(x) \rightarrow (\exists x)H(x)$.

对于多个量词的公式，设 $G(x, y)$ 是含有自由变元 x, y 的谓词公式，则有

4. $I_{17}: (\exists x)(\forall y)G(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)G(x, y)$;
   $I_{18}: (\forall x)(\forall y)G(x, y) \Rightarrow (\exists y)(\exists x)G(x, y)$;
   $I_{19}: (\forall y)(\forall x)G(x, y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)G(x, y)$;
   $I_{20}: (\exists y)(\forall x)G(x, y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)G(x, y)$;
   $I_{21}: (\forall x)(\exists y)G(x, y) \Rightarrow (\exists y)(\exists x)G(x, y)$;
   $I_{22}: (\forall y)(\exists x)G(x, y) \Rightarrow (\exists x)(\exists y)G(x, y)$;

全称特指规则

US（全称特指规则）：

$(\forall x)G(x) \Rightarrow G(y)$，y 不在 $G(x)$ 中约束出现

或：$(\forall x)G(x) \Rightarrow G(c)$，$c$ 为任意个体常量

Example

设实数集中，语句“不存在最大的实数”可符号化为：$(\forall x)(\exists y)G(x,y)$。其中：$G(x,y)$：$y > x$

如下推导正确吗？为什么？

(1) $(\forall x)(\exists y)G(x,y)$ P

(2) $(\exists y)G(y,y)$ $US,(1)$

解 以上推导不正确。正确的推导应为：

(1) $(\forall x)(\exists y)G(x,y)$ P

(2) $(\exists y)G(z,y)$ $US,(1)$

存在特指规则

ES（存在特指规则）: $(\exists x)G(x) \Rightarrow G(c)$ ，c 为使得 G(c) 为真的特定的个体常量。
当 $G(x)$ 中还有除 x 之外的自由变元，则必须用关于这些变元的函数符号来取代 c。

Example

设实数集中，语句“不存在最大的实数”可符号化为：$(\forall x)(\exists y)G(x,y)$。其中：$G(x,y)$: $y > x$
如下推导正确吗？为什么？

(1)	$(\forall x)(\exists y)G(x,y)$	P
(2)	$(\exists y)G(z,y)$	$US,(1)$
(3)	$G(z,c)$	$ES,(2)$

解 以上推导不正确。正确的推导应为：

(1)	$(\forall x)(\exists y)G(x,y)$	P
(2)	$(\exists y)G(z,y)$	$US,(1)$
(3)	$G(z,f(z))$	$ES,(2)$

全称推广规则

UG（全称推广规则）: $G(y) \Rightarrow (\forall x)G(x)$，G(y) 中无变元 x

Example

设实数集中，语句“不存在最大的实数”可符号化为：$(\forall x)(\exists y)G(x,y)$。其中：$G(x,y)$：$y > x$

如下推导正确吗？为什么？

(1)	$(\forall x)(\exists y)G(x,y)$	P
(2)	$(\exists y)G(z,y)$	$US,(1)$
(3)	$(\forall y)(\exists y)G(y,y)$	$UG,(2)$

解 以上推导不正确。正确的推导应为：

(1)	$(\forall x)(\exists y)G(x,y)$	P
(2)	$(\exists y)G(z,y)$	$US,(1)$
(3)	$(\forall z)(\exists y)G(z,y)$	$UG,(2)$

存在推广规则

EG（存在推广规则）：

$G(c) \Rightarrow (\exists x)G(x)$，c 为特定个体常量

或：$G(y) \Rightarrow (\exists x)G(x)$，G(y) 中无变元 x

Example

设：$G(x,y)$：$y > x$

如下推导正确吗？为什么？

(1)	$G(x,c)$	P
(2)	$(\exists x)G(x,x)$	$EG,(1)$

解 以上推导不正确。正确的推导应为：

(1)	$G(x,c)$	P
(2)	$(\exists y)G(x,y)$	$EG,(1)$

谓词的演绎推理

假定推导过程都是在相同的个体域内进行的（通常是全总个体域）。

☞ 综合推理方法

- 推导过程中可以引用命题演算中的规则 P 和规则 T；
- 如果结论是以条件形式或析取形式给出，则可使用规则 CP；
- 若需消去量词，可以引用规则 US 和规则 ES；
- 当所求结论需定量时，可引用规则 UG 和规则 EG 引入量词;
- 证明时可采用如命题演算中的直接证明方法和间接证明方法;
- 在推导过程中，对消去量词的公式或公式中不含量词的子公式，可以引用命题演算中的基本等价公式和基本蕴涵公式;
- 在推导过程中，对含有量词的公式可以引用谓词中的基本等价公式和基本蕴涵公式。

谓词演绎举例一、苏格拉底三段论

例

"所有的人都是要死的；苏格拉底是人。所以苏格拉底是要死的。"

解:

设$H(x)$:x 是人； $M(x)$:x 是要死的； s: 苏格拉底.

则推理符号化成:

$$(\forall x)(H(x) \to M(x)), H(s) \Rightarrow M(s)$$

证明.

(1)	$(\forall x)(H(x) \to M(x))$	P
(2)	$\cancel{H(y) \to M(y)}$ $H(s) \to M(s)$	$US, (1), I$
(3)	$H(s)$	P
(4)	$M(s)$	$T, (2), (3), I$

$\square$

谓词演绎举例二：三步走策略

例

演绎法证明：$(\forall x)(P(x) \to Q(x)), (\exists x)P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x)$

证明.

(1)	$(\forall x)(P(x) \to Q(x))$	P
(2)	$\cancel{P(y) \to Q(y)}$ $P(a) \to Q(a)$	$US, (1), I$
(3)	$(\exists x)P(x)$	P
(4)	$P(a)$	$ES, (3)$
(5)	$Q(a)$	$T, (2), (4), I$
(6)	$(\exists x)Q(x)$	$EG, (5)$

□

谓词演绎举例二：三步走策略

$$(\forall x)(P(x) \to Q(x)), (\exists x)P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x)$$

以上推理的正确推导应为：

证明.

(1)	$(\exists x)P(x)$	P
(2)	$P(a)$	$ES, (1), I$
(3)	$(\forall x)(P(x) \to Q(x))$	P
(4)	$P(a) \to Q(a)$	$US, (3)$
(5)	$Q(a)$	$T, (2), (4), I$
(6)	$(\exists x)Q(x)$	$EG, (5)$

$\square$

谓词的推理难点

☞ 难点总结

- 在推导过程中，如既要使用规则 US 又要使用规则 ES 消去量词，而且选用的个体是同一个符号，则必须先使用规则 ES，再使用规则 US。然后再使用命题演算中的推理规则，最后使用规则 UG 或规则 EG 引入量词，得到所求结论。
- 如一个变量是用规则 ES 消去量词，对该变量在添加量词时，则只能使用规则 EG；如使用规则 US 消去量词，对该变量在添加量词时，则可使用规则 EG 和规则 UG。
- 在用规则 US 和规则 ES 消去量词时，此量词必须位于整个公式的最前端，且辖域为其后的整个公式。
- 在添加量词 $(\forall x)$ 和 $(\exists x)$ 时，所选用的 x 不能在公式 $G(y)$ 或 $G(c)$ 中出现。

谓词演绎举例三：CP 规则证明法

演绎法证明：$(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$

证明.

(1)	$\neg(\forall x)P(x)$	P(附加前提)
(2)	$(\exists x)\neg P(x)$	$T,(1),E$
(3)	$\neg P(c)$	$ES,(2)$
(4)	$(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$	P
(5)	$P(c) \vee Q(c)$	$US,(4)$
(6)	$Q(c)$	$T,(3),(5),I$
(7)	$(\exists x)Q(x)$	$EG,(6)$
(8)	$\neg(\forall x)P(x) \to (\exists x)Q(x)$	$CP,(1),(7)$
(9)	$(\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$	$T,(8),E$

□

谓词演绎举例四：反证法

演绎法证明：$(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$

(1)	$\neg((\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x))$	P(附加前提)
(2)	$\neg(\forall x)P(x) \wedge \neg(\exists x)Q(x)$	$T,(1),E$
(3)	$\neg(\forall x)P(x)$	$T,(2),I$
(4)	$\neg(\exists x)Q(x)$	$T,(2),I$
(5)	$(\exists x)\neg P(x)$	$T,(3),E$
(6)	$\neg P(c)$	$ES,(5)$
(7)	$(\forall x)\neg Q(x)$	$T,(4),E$
(8)	$\neg Q(c)$	$US,(7)$
(9)	$\neg P(c) \wedge \neg Q(c)$	$T,(6),(8),I$
(10)	$\neg(P(c) \vee Q(c))$	$T,(9),E$
(11)	$(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$	P
(12)	$P(c) \vee Q(c)$	$US,(11)$
(13)	$(P(c) \vee Q(c)) \wedge (\neg(P(c) \vee Q(c)))$	$T,(10),(12),I$

谓词逻辑推理的应用

例

证明下述论断的正确性："所有的哺乳动物都是脊椎动物；并非所有的哺乳动物都是胎生动物；故有些脊椎动物不是胎生的。"

解

设 $P(x)$: x是哺乳动物;
$Q(x)$: x是脊椎动物;
$R(x)$: x是胎生动物.

则推理符号化成:

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)), \neg(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x)) \Rightarrow (\exists x)(Q(x) \wedge \neg R(x))$$

正确推导过程

$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)), \neg(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x)) \Rightarrow (\exists x)(Q(x) \wedge \neg R(x))$

(1)	$\neg(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$	P
(2)	$(\exists x)\neg(\neg P(x) \vee R(x))$	$T, (1), E$
(3)	$\neg(\neg P(c) \vee R(c))$	$ES, (2)$
(4)	$P(c) \wedge \neg R(c)$	$T, (3), E$
(5)	$P(c)$	$T, (4), I$
(6)	$\neg R(c)$	$T, (4), I$
(7)	$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$	P
(8)	$P(c) \rightarrow Q(c)$	$US, (7)$
(9)	$Q(c)$	$T, (5), (8), I$
(10)	$Q(c) \wedge \neg R(c)$	$T, (6), (9), I$
(11)	$(\exists x)(Q(x) \wedge \neg R(x))$	$EG, (10)$