引言

☞

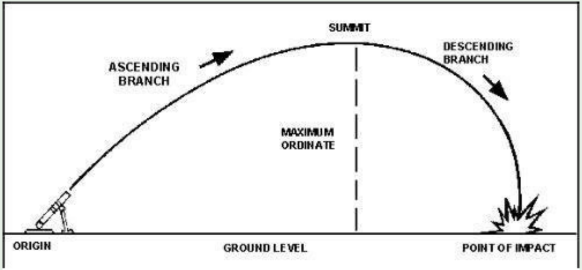
函数是数学中的一个基本概念，它非常古老，这个词出现于十七世纪下半叶，比关系理论早两个多世纪，由伟大的数学家莱布尼兹提出，他也与牛顿各自独立的发现了微积分的基本定理.

在高等数学中，函数一般是在实数集的基础上来研究，通常是连续或间断连续的函数. 在这里，我们将函数看作是一种特殊的二元关系，从离散量的角度讨论函数的定义，运算和性质.

函数的概念在日常生活和计算机科学中非常重要. 例如，各种高级程序语言中都大量的使用了函数。实际上，计算机的任何输出都可看成是某些输入的函数.

引例

Example

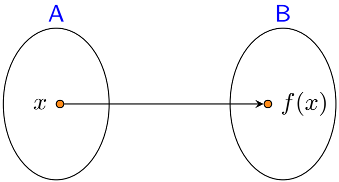


假定你需要编写一个函数，函数的输入是目标的距离 x，函数的输出是大炮射角 α. 考虑这个函数的输入 x 和输出 α 应该满足什么性质？

函数

Definition

设 f 是集合 A 到 B 的关系, 如果对每个 $x \in A$, 都存在惟一的 $y \in B$, 使得 $<x, y> \in f$, 则称关系 f 为 A 到 B 的函数或映射, 记为 $f : A \to B$.A 为函数 f 的定义域, 记为 $domf = A$;$f(A)$ 为函数 f 的值域, 记为 $ranf$.



当 $<x, y> \in f$ 时, 通常记为 $y = f(x)$, 这时称 x 为函数 f 的自变量 (或原像),y 为 x 在 f 下的函数值 (或像). 注意区分 f 和 $f(x)$, 二者是不同的。

函数

Example

设 $A=\{1,2,3,4\}, B=\{a,b,c,d\}$, 则.

- $f_1=\{<1,a>,<2,a>,<3,d>,<4,c>\}$; 函数
- $f_2=\{<1,a>,<2,a>,<2,d>,<4,c>\}$; 非函数
- $f_3=\{<1,a>,<2,b>,<3,d>,<4,c>\}$; 函数
- $f_4=\{<2,b>,<3,d>,<4,c>\}$. 非函数

如果关系 f 具备下列两种情况之一，那么 f 就不是函数：

- 存在元素 $a \in A$，在 B 中没有像；
- 存在元素 $a \in A$，有两个及两个以上的像。

函数

Example (更多函数的例子)

- $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}, f(x) = x + 1$;
- $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g(x) = x^2 + 2x + 1$;
- $h : A \to P(A), h(x) = \{x\}$;
- 设 $V = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 是 n 项任务的集合,$M = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$ 是 m 个人的集合, 则 $t : V \to M$ 表示任务的安排方案: $t(a_i) = b_j$ 表示 a_i 任务由 b_j 来完成.

Definition

所有从 A 到 B 的一切函数构成的集合记为 B^A:

$$B^A = \{f | f : A \to B\}.$$

函数的数量

Example

设 $A=\{a,b,c\}, B=\{1,2\}$，则 A 到 B 的所有不同函数有:

1. $f_1=\{<a,1>,<b,1>,<c,1>\}$;
2. $f_2=\{<a,1>,<b,1>,<c,2>\}$;
3. $f_3=\{<a,1>,<b,2>,<c,1>\}$;
4. $f_4=\{<a,1>,<b,2>,<c,2>\}$;
5. $f_5=\{<a,2>,<b,1>,<c,1>\}$;
6. $f_6=\{<a,2>,<b,2>,<c,1>\}$;
7. $f_7=\{<a,2>,<b,1>,<c,2>\}$;
8. $f_8=\{<a,2>,<b,2>,<c,2>\}$.

设函数 $f:A\to B, |A|=m, |B|=n$, 对 A 中的每个元素而言, 其序偶的第二元素都有 n 种可能的选择, 因而总共有 n^m 种选法, 也就是有 n^m 个不同的函数.

关系与函数的差别

当 A 和 B 都是有限集合时, 函数和一般关系具有如下差别:

- 关系和函数的数量不同: 从 A 到 B 的不同关系有 $2^{|A|\times|B|}$ 个, 从 A 到 B 的不同函数却仅有 $|B|^{|A|}$ 个;
- 关系和函数的基数不同: 每一个关系的基数可以从零一直到 $|A| \times |B|$, 每一个函数的基数都为 $|A|$ 个;
- 关系和函数的第一元素存在差别: 关系的第一个元素可以相同, 函数的第一元素一定是互不相同的.

函数类型

Definition

设 f 是从集合 A 到 B 的函数,

- 对任意 $x_1, x_2 \in A$, 如果 $x_1 \neq x_2$, 都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 为从 A 到 B 的单射;
- 如果 $ranf = B$, 则称 f 为从 A 到 B 的满射;
- 如果 f 既是单射又是满射, 则称 f 为从 A 到 B 的双射.

Example

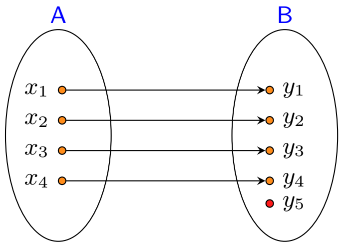
- 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{a, b, c, d\}. f : A \to B$ 定义为: $\{< 1, a >, < 2, c >, < 3, b >, < 4, a >, < 5, d >\}$; 满射
- 设 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c, d\}. f : A \to B$ 定义为: $f = \{< 1, a >, < 2, c >, < 3, b >\}$; 单射
- 设 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c\}. f : A \to B$ 定义为: $f = \{< 1, b >, < 2, c >, < 3, a >\}$. 双射

函数类型

☞

若 f 是从有限集 A 到有限集 B 的函数，则有

- f 是单射的必要条件为 $|A| \leqslant |B|$;
- f 是满射的必要条件为 $|A| \geqslant |B|$;
- f 是双射的必要条件为 $|A| = |B|$.



函数类型

Example

设 $A = B = \mathbf{R}$, 试判断下列函数的类型。

- $f_1 = \{< x, x^2 > | x \in \mathbf{R}\}$; 一般函数
- $f_2 = \{< x, x+1 > | x \in \mathbf{R}\}$; 双射
- $f_3 = \{< x, e^x > | x \in \mathbf{R}\}$. 单射

☞ 函数类型的数学化描述

- $f : A \to B$ 是单射当且仅当对 $\forall x_1, x_2 \in A$，若 $x_1 \neq x_2$，则 $f(x_1) \neq f(x_2)$
- $f : A \to B$ 是满射当且仅当对 $\forall y \in B$，一定存在 $x \in A$，使得 $f(x) = y$；
- $f : A \to B$ 是双射当且仅当满足以上两点.

典型 (自然) 映射

Example

设 R 是集合 A 上的一个等价关系,$g: A \to A/R$ 称为 A 对商集 A/R 的典型 (自然) 映射, 其定义为 $g(a) = [a]_R, a \in A$. 证明典型映射是一个满射.

Proof.

由等价类的定义, 对任意 $[a]_R \in A/R$, 都有 $a \in A$, 使得 $g(a) = [a]_R$, 即任意 A/R 中的元素都有原像, 根据满射的定义知, 典型映射是满射. $\square$

函数类型证明

Example

设 $< A, \leqslant >$ 是偏序集, 对任意 $a \in A$, 令 $f(a) = \{x | x \in A, x \leqslant a\}$. 证明 f 是从 A 到 $P(A)$ 的单射函数, 并且 f 保持 $< A, \leqslant >$ 与 $< P(A), \subseteq >$ 的偏序关系, 即对任意 $a, b \in A$, 若 $a \leqslant b$, 则 $f(a) \subseteq f(b)$.

Proof.

- 证明 f 是函数:
  任取 $a \in A$, 由于 $f(a) = \{x | x \in A, x \leqslant a\} \subseteq A$, 所以 $f(a) \in P(A)$, 即 f 是从 A 到 $P(A)$ 的函数。
- 证明 f 是单射:...
- 证明保序性:...

□

函数类型证明

Continue...

- 证明 f 是单射:
  对任意 $a, b \in A$,$a \neq b$,
  1) 若 a, b 存在偏序关系, 不妨设 $a \leqslant b$(或 $b \leqslant a$), 由于“$\leqslant$ ”是反对称的, 所以 $b \nleqslant a$(或 $a \nleqslant b$), 从而 $b \notin f(a) = \{x|x \in A, x \leqslant a\}$, 而“$\leqslant$ ”是自反的, 所以 $b \leqslant b$, 即 $b \in f(b)$, 所以 $f(a) \neq f(b)$, 此时,f 是单射;
  2) 若 a, b 不存在偏序关系, 则有 $a \nleqslant b$, 从而 $a \notin f(b) = \{x|x \in A, x \leqslant b)\}$, 而“$\leqslant$ ”是自反的, 所以 $a \leqslant a$, 即 $a \in f(a)$, 所以 $f(a) \neq f(b)$, 此时,f 仍是单射. 因此对任意 $a, b \in A$, 当 $a \neq b$, 总有 $f(a) \neq f(b)$. 从而 f 是从 A 到 $P(A)$ 的单射函数.
- 证明保序性. 对任意 $a, b \in A$, 若 $a \leqslant b$, 则任取 $y \in f(a)$, 则 $y \leqslant a$, 由 $a \leqslant b$, 根据“$\leqslant$ ”的传递性, 有 $y \leqslant b$, 从而 $y \in f(b)$, 所以 $f(a) \subseteq f(b)$, 即保序性成立. $\square$

函数的复合

Definition

设 $f : A \to B, g : B \to C$ 是两个函数, 则 f 与 g 的复合关系 $f \circ g = \{< x, z > | x \in A, z \in C, \exists y \in B, 使得 y = f(x) 且 z = g(y)\}$ 是从 A 到 C 的函数, 称为函数 f 与 g 的复合函数(composition function), 记为 $f \circ g : A \to C$.

☞

- 函数 f 和 g 可以复合的前提条件是 $ranf \subseteq domg$;
- $dom(f \circ g) = domf, ran(f \circ g) \subseteq rang$;
- 对任意 $x \in A$, 有 $f \circ g(x) = g(f(x))$;
- $I_A \circ f = f \circ I_B = f$.

函数的复合

Example

设 $A=\{1,2,3,4,5\}$,$B=\{a,b,c,d\}$, 函数 $f: A \to B, g: B \to A$ 定义如下:

- $f=\{<1,a>,<2,a>,<3,d>,<4,c>,<5,b>\}$;
- $g=\{<a,1>,<b,3>,<c,5>,<d,2>\}$.

则,

- $f \circ g=\{<1,1>,<2,1>,<3,2>,<4,5>,<5,3>\}$;
- $g \circ f=\{<a,a>,<b,d>,<c,b>,<d,a>\}$.

☕ 函数的复合不满足交换律.

函数的复合

Example

设 f, g, h 都是实数集 $\mathbf{R}$ 上的函数, 满足

$$f(x) = 2x,\ g(x) = (x+1)^2,\ h(x) = \frac{x}{2}\ .$$

- 求 $(f \circ g) \circ h$ 和 $f \circ (g \circ h)$:

  $((f \circ g) \circ h)(x) = h((f \circ g)(x)) = h(g(f(x))) = h(g(2x)) = h((2x+1)^2) = \frac{(2x+1)^2}{2}$;

  $(f \circ (g \circ h))(x) = (g \circ h)(f(x)) = h(g(f(x))) = h(g(2x)) = h((2x+1)^2) = \frac{(2x+1)^2}{2}$;

- 求 $f \circ h$ 和 $h \circ f$:

  $f \circ h(x) = h(f(x)) = h(2x) = x,\ h \circ f(x) = f(h(x)) = f(\frac{x}{2}) = x.$

函数的复合满足结合律.

保守性

Example

设 f 和 g 分别是从 A 到 B 和从 B 到 C 的函数，则

- 若 f, g 是满射，则 $f \circ g$ 也是从 A 到 C 的满射；
- 若 f, g 是单射，则 $f \circ g$ 也是从 A 到 C 的单射；
- 若 f, g 是双射，则 $f \circ g$ 也是从 A 到 C 的双射。 可由前面两条直接得到

Proof.

- 对 $\forall c \in C$, 由 g 是满射, 所以 $\exists b \in B$, 有 $g(b) = c$. 又 f 是满射, 所以 $\exists a \in A$, 有 $f(a) = b$, 从而 $f \circ g(a) = g(f(a)) = g(b) = c$. 即 $\exists a \in A$, 使得 $f \circ g(a) = c$, 所以 $f \circ g$ 是满射;
- 对 $\forall a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$. 由于 f 是单射, 所以 $f(a_1) \neq f(a_2)$. 令 $b_1 = f(a_1), b_2 = f(a_2)$, 所以 $g(b_1) \neq g(b_2)$, 即 $g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$. 从而有 $f \circ g(a_1) \neq f \circ g(a_2)$, 所以 $f \circ g$ 是单射; □

函数的逆

Definition

设 $f: A \to B$ 是函数，如果 $f^{-1} = \{< y, x > | x \in A, y \in B, y = f(x)\}$ 是从 B 到 A 的函数，则称 $f^{-1}: B \to A$ 为函数 f 的逆函数(inverse function).

Example

- 函数 $f_1(x) = x^2, x \in \mathbf{R}$ 时没有逆函数，但当 $x \in \mathbf{R}^+$ 时有逆函数 $\sqrt{x}$;
- 函数 $f_2(x) = 2x, x \in \mathbf{R}$ 时有逆函数 $\frac{1}{2}x$;

- 函数 f^{-1} 存在当且仅当 f 是双射，此时 f^{-1} 也是双射.
- $f \circ f^{-1} = I_A \quad ; \quad f^{-1} \circ f = I_B$.