有序组的定义

Definition

由两个元素按照一定的次序组成的二元组称为序偶，记作$< x, y >$，其中 x 是第一元素，y 是第二元素。

由定义可见，两个序偶$< a, b > = < c, d >$当且仅当$a = c, b = d$

Example

1. 张明喜欢离散数学可用序偶表示为：$<$ 张明, 离散数学 $>$
2. 英语课本在书桌上可用序偶表示为：$<$ 英语课本, 书桌 $>$
3. 若序偶 $< x + y, 2y - 1 > = < 3y - 4, 5 >$, 根据序偶相等的定义有 $x + y = 3y - 4, 2y - 1 = 5$, 解得 $x = 2, y = 3$

笛卡儿积

Definition

设 A, B 是两个集合，称集合 $A \times B = \{< x, y > |(x \in A) \wedge (y \in B)\}$ 为集合 A 与 B 的笛卡儿积。

Example

1. 令 A 为某大学所有学生的集合，B 表示该大学开设的所有课程的集合，则 $A \times B$ 可表示该校学生选课的所有可能情况。
2. 集合 $A = \{1, 2\}, B = \{a, b, c\}$ 的笛卡儿积
   $A \times B = \{< 1, a >, < 1, b >, < 1, c >, < 2, a >, < 2, b >, < 2, c >\}$，
   而 $B \times A = \{< a, 1 >, < b, 1 >, < c, 1 >, < a, 2 >, < b, 2 >, < c, 2 >\}$.

笛卡儿积的性质

☞

由笛卡儿积定义可以看出:

1. 设 A, B 是任意两个集合，则不一定有 $A \times B = B \times A$，即笛卡儿积不满足交换律；
2. $A \times B = \varnothing$ 当且仅当 $A = \varnothing$ 或者 $B = \varnothing$；
3. 设 A, B, C 是任意三个集合，则不一定有 $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$，即笛卡儿积不满足结合律；
4. 当集合 A, B 都是有限集时，$|A \times B| = |B \times A| = |A| \times |B|$。
5. 笛卡儿积对并运算和交运算满足分配律。

推广

Definition

- 由 n 个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 按照一定次序组成的 n 元组称为n 重有序组，记作$< a_1, a_2, \cdots, a_n >$. 其中 a_1 是第一个元素，a_2 是第二个元素，$\cdots$，a_n 是第 n 个元素。
- 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个集合，称集合 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{< a_1, a_2, ..., a_n > | a_i \in A_i, i = 1, 2, 3, \cdots, n\}$ 为集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的笛卡儿积。当 $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$ 时，可记 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = A^n$。

- 两个 n 重有序组$< a_1, a_2, \cdots, a_n >=< b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n >$当且仅当$a_i = b_i$,$i = 1, 2, ..., n$
- 当集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都是有限集时，$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \cdots \times |An|$.

什么是二元关系

Example

1. 令 A 为某大学所有学生的集合，B 表示该大学开设的所有课程的集合，则 $A \times B$ 可表示该校学生选课的所有可能情况。而真正的选课情况（即选课关系）则会是 $A \times B$ 的某一个子集。
2. 令 F 为某地所有父亲的集合，S 表示该地所有儿子的集合，则 $F \times S$ 可表示父子关系的所有可能情况。 而真正的父子关系则会是 $F \times S$ 的某一个子集。

Definition

设 A, B 为两个非空集合，称$A \times B$ 的任意子集 R 为从 A 到 B 的一个二元关系，简称关系 (relation)。其中，A 称为关系 R 的前域，B 称为关系 R 的后域。如果$A = B$，则称 R 为A 上的一个二元关系。

二元关系的数学符号

标记

1. 若序偶 $<x, y> \in R$，通常把这一事实记为 xRy，读作 “x 对 y 有关系 R”；
2. 若序偶 $<x, y> \notin R$，通常把这一事实记为 $x\not R y$，读作 “x 对 y 没有关系 R”。

Example

1. 设 R_1 为自然数集合上的小于关系，则 $< 2, 3 > \in R_1$(或 $2R_1 3$)，但 $< 5, 5 > \notin R_1$(或 $5 \not R_1 5$)；
2. 设 R_2 为中国城市的地区归属关系，则 成都R_2四川，但 重庆$\not R_2$四川.

枚举二元关系

Example

假设 $A = \{a, b\}$ $B = \{c, d\}$，试写出从 A 到 B 的所有不同关系。

解　首先求两个集合的笛卡儿积：$A \times B = \{< a, c >, < a, d >, < b, c >, < b, d >\}$。

再求 $A \times B$ 的所有不同子集：

- 0–元子集：$\varnothing$；
- 1–元子集：$\{< a, c >\}, \{< a, d >\}, \{< b, c >\}, \{< b, d >\}$；
- 2–元子集：$\{< a, c >, < a, d >\}$,$\{< a, c >, < b, c >\}$, $\{< a, c >, < b, d >\}$,$\{< a, d >, < b, d >\}$, $\{< a, d >, < b, d >\}$, $\{< b, c >, < b, d >\}$；
- 3–元子集：
  $\{< a, c >, < a, d >, < b, c >\}$,$\{< a, c >, < a, d >, < b, d >\}$,$\{< a, c >, < b, c >, < b, d >\}$, $\{< a, d >, < b, c >, < b, d >\}$；
- 4–元子集：$\{< a, c >, < a, d >, < b, c >, < b, d >\}$。

所以，上面的 16 个不同子集就是从 A 到 B 的所有不同关系。

由定义及示例可见

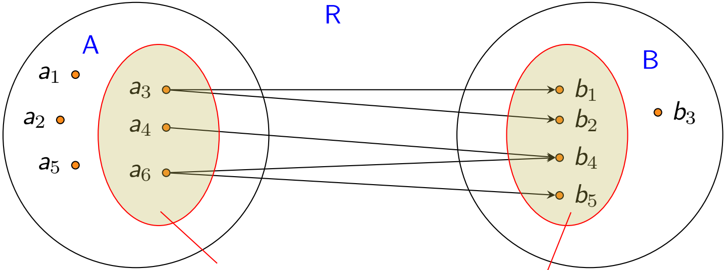
几种重要关系

1. 当 $R=\varnothing$ 时，称 R 为从 A 到 B 的空关系(empty relation)；
2. 当 $R=A\times B$ 时，称 R 为从 A 到 B 的全关系(total relation)；A 上的全关系通常记为 E_A。
3. 当 $R=I_A=\{<x,x>|x\in A\}$ 时，称 R 为 A 上的恒等关系(identity relation)。

有限集合的二元关系数量

当集合 A,B 都是有限集时，$A\times B$ 共有 $|A|\times|B|$ 个不同的元素，这些元素将会产生 $2^{|A|\times|B|}$ 个不同的子集。即，从 A 到 B 的不同关系共有 $2^{|A|\times|B|}$ 个。

定义域和值域



$C = \{a_3, a_4, a_6\} = domR$

$D = \{b_1, b_2, b_4, b_5\} = ranR$

定义域和值域

Definition

设 R 是从 A 到 B 的二元关系，则 A 为关系 R 的前域，B 为关系 R 的后域。令：
$C = \{x|x \in A, \exists y \in B, <x, y> \in R\}$，$D = \{y|y \in B, \exists x \in A, <x, y> \in R\}$。称 C 为 R 的定义域(domain)，记为 $C = domR$；D 为 R 的值域(range)，记为 $D = ranR$；
$fldR = domR \cup ranR$ 为 R 的域(field)。

Example

1. $R_Z = \{<x, y> |(x, y \in Z) \wedge (|x| = |y| = 7)\}$, 则
   $domR_Z = \{7, -7\}, ranR_Z = \{7, -7\}, fldR_Z = \{7, -7\}$；
2. 设 $H = \{f, m, s, d\}$ 表示一个家庭中父母子女四个人的集合，R_H 是 H 上的长幼关系, 则
   $domR_H = \{f, m\}, ranR_H = \{s, d\}$ $fldR_H = \{f, m, s, d\}$.

二元关系概念的推广

Definition

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个非空集合，称$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 的任意子集 R 为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的一个n 元关系(n-ary relation)。

☞

在 n 元关系中，最常用的是二元关系，因而，在不引起混淆的情况下，提到的关系均指二元关系.

关系的集合表示

☞

关系是一种特殊的集合，因此集合的两种基本表示法 (枚举法和叙述法)，可以用到关系的表示中.

Example

1. 集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 上的整除关系 R 可用枚举法表示为：
   $R = \{< 1, 1 >, < 1, 2 >, < 1, 3 >, < 1, 4 >, < 2, 2 >, < 2, 4 >, < 3, 3 >, < 4, 4 >\}$；
2. 实数集 $\mathbf{R}$ 上的“相等”关系 S 可用叙述法表示为：
   $S = \{< x, y > |(x, y \in R) \wedge (x = y)\}$。

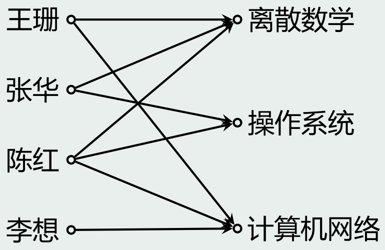
关系的图形表示 ($A \neq B$)

Definition

设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$B = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$，$R$ 是从 A 到 B 的一个关系.

1. 集合中的元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 分别作为图中的结点，用 "$\circ$" 表示；
2. 如果 $< a_i, b_j > \in R$，则从 a_i 到 b_j 可用一有向边 $a_i \longrightarrow b_j$ 相连。

某选课关系 R



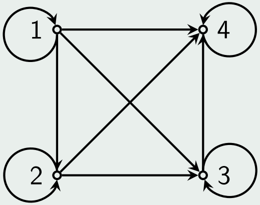
关系的图形表示 $(A = B)$

Definition

设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$R$ 是 A 上的一个关系.

1. 集合中的元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 分别作为图中的结点，用“$\circ$”表示；
2. 如果 $< a_i, a_j >\in R$，则从 a_i 到 a_j 可用一有向边 $a_i \longrightarrow a_j$ 相连。
3. 如果 $< a_i, a_i >\in R$，则从 a_i 到 a_i 可用一带箭头的小圆圈 $a_i \circlearrowleft$ 表示，即画一个自环。

某小于等于关系 R



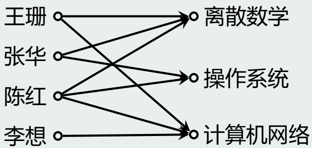
关系的矩阵表示

Definition

设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$，R 是从 A 到 B 的一个二元关系，称矩阵 $M_R=(m_{ij})_{n\times m}$ 为关系 R 的关系矩阵(relation matrix)，其中:

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & <a_i,b_j>\in R\\ 0 & <a_i,b_j>\notin R\end{cases},(1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n)$$ 又称 M_R 为 R 的邻接矩阵(adjacency matrix)。

某选课关系 R



$$M_R=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

布尔矩阵的并和交运算

Definition

1. 如果 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$ 是两个 $m\times n$ 矩阵，则A 和 B 的并也是一个 $m\times n$ 矩阵，记为$A\vee B=C=(c_{ij})$, 其中：

$$c_{ij}=\begin{cases}1 & \text{if } a_{ij}=1 \text{ or } b_{ij}=1\\ 0 & \text{if } a_{ij}=0 \text{ and } b_{ij}=0\end{cases}$$

2. 如果 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$ 是两个 $m\times n$ 矩阵，则A 和 B 的交也是一个 $m\times n$ 矩阵，记为$A\wedge B=C=(c_{ij})$, 其中：

$$c_{ij}=\begin{cases}1 & \text{if } a_{ij}=1 \text{ and } b_{ij}=1\\ 0 & \text{if } a_{ij}=0 \text{ or } b_{ij}=0\end{cases}$$

布尔矩阵的并和交运算

Example

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

则

$A \vee B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A \wedge B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

布尔矩阵的积运算

Definition

如果 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times p$ 矩阵, $B=(b_{ij})$ 是 $p\times n$ 矩阵，则A 和 B 的积是一个 $m\times n$ 矩阵，记为$A\odot B=C=(c_{ij})$, 其中：

$$c_{ij}=\begin{cases}1 & \exists k, a_{ik}=1 \text{ and } b_{kj}=1\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

Example

设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&1&1\\1&1&0&0\end{pmatrix}$, 则 $A\odot B=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\1&1&0&0\end{pmatrix}$.

关系的并交差补运算

☞

关系是一种特殊的集合，因此集合的所有基本运算（并、交、差、补），都可以应用到关系中，并且同样满足集合的所有运算定律.

Definition

设 R, S 是从 A 到 B 的两个关系，则

- $R \cup S = \{< x, y > |(xRy) \vee (xSy)\}$；
- $R \cap S = \{< x, y > |(xRy) \wedge (xSy)\}$；
- $R - S = \{< x, y > |(xRy) \wedge (x\not{S}y)\}$；
- $\overline{R} = \{< x, y > |(x\not{R}y)\}$(即全集为 $A \times B$)。

关系的并交差补运算

Example

设 $A = \{a, b, c\}$，$B = \{1, 2, 3, 4\}$，从 A 到 B 的关系 R 和 S 定义为：
$R = \{<a, 1>, <b, 2>, <c, 3>\}, S = \{<a, 1>, <a, 2>, <a, 3>, <a, 4>\}$
计算 $R \cup S, R \cap S, S - R, \overline{R}$.

解：

1. $R \cup S = \{<a, 1>, <b, 2>, <c, 3>, <a, 2>, <a, 3>, <a, 4>\}$；
2. $R \cap S = \{<a, 1>\}$；
3. $S - R = \{<a, 2>, <a, 3>, <a, 4>\}$；
4. $\overline{R} = A \times B - R = \{<a, 1>, <a, 2>, <a, 3>, <a, 4>, <b, 1>, <b, 2>, <b, 3>, <b, 4>, <c, 1>, <c, 2>, <c, 3>, <c, 4>\} - \{<a, 1>, <b, 2>, <c, 3>\} = \{<a, 2>, <a, 3>, <a, 4>, <b, 1>, <b, 3>, <b, 4>, <c, 1>, <c, 2>, <c, 4>\}$；

关系的复合运算

Definition

设 A, B, C 是三个集合，R 是从 A 到 B 的关系，S 是从 B 到 C 的关系 (即 $R: A \to B, S: B \to C$)，则 R 与 S 的复合关系(合成关系)(composite relation)$R \circ S$ 是从 A 到 C 的关系，并且：$R \circ S = \{< x, z > | (x \in A) \wedge (z \in C) \wedge (\exists y)(y \in B \wedge xRy \wedge ySz)\}$。运算 “$\circ$” 称为复合运算(composite operation)。

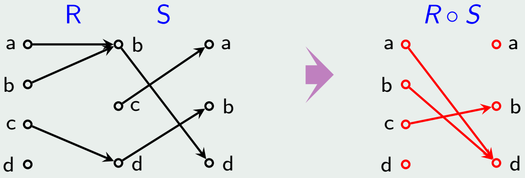
Example

设 $A = \{a, b, c, d\}, B = \{b, c, d\}, C = \{a, b, d\}$, $R = \{< a, b >, < c, d >, < b, b >\}$ 是 A 到 B 的关系，$S = \{< d, b >, < b, d >, < c, a >\}$ 是 B 到 C 的关系。

则 $R \circ S = \{< a, d >, < c, b >, < b, d >\}$。

用三种关系表示法进行复合运算

复合运算(关系图形式)



复合运算(关系矩阵形式)

$$M_{R\circ S} = M_R \odot M_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

用三种关系表示法进行复合运算

☞ 总结

1. 集合表示法求复合：寻找所有满足 $<x, y> \in R$ 并且 $<y, z> \in S$，从而得到 $<x, z> \in R \circ S$；
2. 关系图表示法求复合：将关系 R, S 的关系图画在一起，然后寻找所有首尾相接的两条有向边，再去掉中间相接的结点 y，可得到 $R \circ S$ 的关系图；

$$x \longrightarrow y \longrightarrow z$$

3. 关系矩阵表示法求复合：直接将关系 R 和 S 的关系矩阵做布尔积运算即得 $R \circ S$ 的关系矩阵.

关系的逆运算

Definition

设 A, B 是两个集合，R 是 A 到 B 的关系，则从 B 到 A 的关系 $R^{-1} = \{< b, a > \mid < a, b > \in R\}$ 称为 R 的逆关系(inverse relation)，运算 “-1” 称为逆运算(inverse operation)。

☞

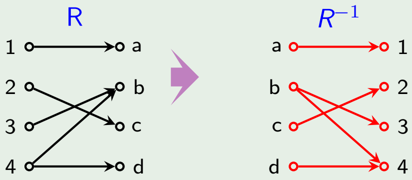
由逆运算的定义可知：

1. $(R^{-1})^{-1} = R$
2. $\varnothing^{-1} = \varnothing$
3. $(A \times B)^{-1} = B \times A$

用三种关系表示法求逆

Example

设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{a, b, c, d\}$，R 是从 A 到 B 的一个关系且
$R = \{< 1, a >, < 2, c >, < 3, b >, < 4, b >, < 4, d >\}$ 则
$R^{-1} = \{< a, 1 >, < c, 2 >, < b, 3 >, < b, 4 >, < d, 4 >\}$。



$$M_{R^{-1}} = (M_R)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

用三种关系表示法求逆

☞ 总结

1. 将 R 的关系图中有向边的方向改变成相反方向即得 R^{-1} 的关系图，反之亦然;
2. 将 R 的关系矩阵转置即得 R^{-1} 的关系矩阵，即 R 和 R^{-1} 的关系矩阵互为转置矩阵;
3. R^{-1} 的定义域和值域正好是 R 的值域和定义域，即 $domR = ranR^{-1}$，$domR^{-1} = ranR$;
4. $|R| = |R^{-1}|$.

结合律与同一律

Theorem

设 A、B、C 和 D 是任意四个集合，R、S 和 T 分别是从 A 到 B，B 到 C 和 C 到 D 的二元关系，I_A 和 I_B 分别是 A 和 B 上的恒等关系，则

1. $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$；
2. $I_A \circ R = R \circ I_B = R$.

☞ 二元关系相等的证明方法

目标: 证明两个关系 R_1 和 R_2 相等

也即: 证明两个集合 R_1 和 R_2 相等

从而: 1) $\forall <x, y> \in R_1, \cdots, <x, y> \in R_2. \therefore R_1 \subseteq R_2$;

2) $\forall <x, y> \in R_2, \cdots, <x, y> \in R_1. \therefore R_2 \subseteq R_1$.

结合律的证明：$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

Proof.

任取 $< a, d > \in (R \circ S) \circ T$， 则由复合运算定义知，存在 $c \in C$，使得 $< a, c > \in R \circ S$ 且 $< c, d > \in T$.

又因为 $< a, c > \in R \circ S$，所以存在 $b \in B$，使得 $< a, b > \in R$ 且 $< b, c > \in S$.

因为 $< b, c > \in S, < c, d > \in T$，由复合运算定义知，有 $< b, d > \in S \circ T$；

又由 $< a, b > \in R$ 且 $< b, d > \in S \circ T$ 有， $< a, d > \in R \circ (S \circ T)$.

从而$(R \circ S) \circ T \subseteq R \circ (S \circ T)$.

同理可证：$R \circ (S \circ T) \subseteq (R \circ S) \circ T$.

由以上可知，$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$. $\square$

同一律的证明：$I_A \circ R = R \circ I_B = R$

Proof.

任取 $<a,b> \in I_A \circ R$, 其中 $a \in A, b \in B$， 由复合运算定义可知, 存在 $a \in A$，使得 $<a,a> \in I_A$ 且 $<a,b> \in R$， 从而有$I_A \circ R \subseteq R$。

反过来，任取 $<a,b> \in R$， 由 I_A 的定义知,$<a,a> \in I_A$, 即 $<a,b> \in I_A \circ R$. 从而$R \subseteq I_A \circ R$。

由以上可知，$I_A \circ R = R$.

同理可证$R \circ I_B = R$.

于是 $I_A \circ R = R \circ I_B = R$ 得证。 $\square$

分配律

Theorem

设 A、B、C 和 D 是任意四个集合，R 是从 A 到 B 的关系,S_1, S_2 是从 B 到 C 的关系,T 是从 C 到 D 的关系，则

1. $R \circ (S_1 \cup S_2) = (R \circ S_1) \cup (R \circ S_2)$；
2. $R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$；
3. $(S_1 \cup S_2) \circ T = (S_1 \circ T) \cup (S_2 \circ T)$；
4. $(S_1 \cap S_2) \circ T \subseteq (S_1 \circ T) \cap (S_2 \circ T)$.

证明②.

对任意 $< a, c >\in R \circ (S_1 \cap S_2)$， 则由复合运算定义知，存在 $b \in B$，使得 $< a, b >\in R$ 且 $< b, c >\in S_1 \cap S_2$。

根据交运算的定义，$< b, c >\in S_1$，且 $< b, c >\in S_2$.

于是有 $< a, c >\in R \circ S_1$ 并且 $< a, c >\in R \circ S_2$，即有 $< a, c >\in (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$.

从而，$R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$。 □

逆运算性质定律

Theorem

设 A, B, C 是三个集合，R,S 分别是从 A 到 B，从 B 到 C 的关系，则

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}.$$

Proof.

任取 $< c, a >\in (R \circ S)^{-1}$，则 $< a, c >\in R \circ S$，由复合运算定义知, 存在 $b \in B$, 使得 $< a, b >\in R$ 且 $< b, c >\in S$. 根据逆运算的定义, 有 $< b, a >\in R^{-1}$ 且 $< c, b >\in S^{-1}$. 于是得到 $< c, a >\in S^{-1} \circ R^{-1}$. 即 $(R \circ S)^{-1} \subseteq S^{-1} \circ R^{-1}$.

反之, 任取 $< c, a >\in S^{-1} \circ R^{-1}$，由复合运算定义知, 存在 $b \in B$, 使得 $< b, a >\in R^{-1}$ 且 $< c, b >\in S^{-1}$. 又根据逆运算的定义, 有 $< a, b >\in R$ 且 $< b, c >\in S$. 从而有 $< a, c >\in R \circ S$, 即有 $< c, a >\in (R \circ S)^{-1}$, 故有 $S^{-1} \circ R^{-1} \subseteq (R \circ S)^{-1}$.

由以上可知，$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$. $\square$

逆运算性质定律

Theorem

设 R, S 是从集合 A 到集合 B 的关系, 则有

1. $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$; (分配性)
   $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$;
   $(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$;
2. $(\overline{R})^{-1} = \overline{R^{-1}}$; (可换性)
3. $(R^{-1})^{-1} = R$;
4. $S \subseteq R \Leftrightarrow S^{-1} \subseteq R^{-1}$. (单调性)

证明④ .

必要性: 任取 $< b, a > \in S^{-1}$, 有 $< a, b > \in S$. 因为 $S \subseteq R$, 所以 $< a, b > \in R$, 从而 $< b, a > \in R^{-1}$. 即有 $S^{-1} \subseteq R^{-1}$;

充分性: 任取 $< a, b > \in S$, 有 $< b, a > \in S^{-1}$. 因为 $S^{-1} \subseteq R^{-1}$, 所以 $< b, a > \in R^{-1}$, 从而 $< a, b > \in R$. 即有 $S \subseteq R$. $\square$

关系的幂运算

Definition

设 R 是集合 A 上的关系，则 R 的 n 次幂，记为 R^n，定义如下：

1. $R^0 = I_A$;
2. $R^1 = R$;
3. $R^{n+1} = R^n \circ R = R \circ R^n$.

☞

- R^n 仍然是 A 上的关系, 表示 R 多次自我复合的结果;
- $R^{m+n} = R^m \circ R^n = R^n \circ R^m = R^{n+m}$,
  $(R^m)^n = R^{mn}, m, n \in \mathbf{N}$;

幂运算的性质

Example

设 $R=\{<1,1>,<1,2>,<2,3>,<3,4>,<4,5>,<5,6>\}$ 是定义在集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ 上的关系，考察 $R^n(n=1,2,3,\cdots)$：

$R^1=R$，

$R^2=R\circ R=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,4>,<3,5>,<4,6>\}$，

$R^3=R^2\circ R=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<2,5>,<3,6>\}$，

$R^4=R^3\circ R=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<1,5>,<2,6>\}$，

$R^5=R^4\circ R=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<1,5>,<1,6>\}$，

$R^6=R^5\circ R=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<1,5>,<1,6>\}=R^5$,

$R^7=R^6\circ R=R^5$，

$\ldots$

$R^n=R^5(n>5)$.

幂运算的性质

Example

设 $S=\{<1,2>,<2,3>,<3,4>,<4,5>,<5,6>\}$ 是定义在集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ 上的关系，考察 $S^n(n=1,2,3,\cdots)$：

$S^1=S,\quad S^2=S\circ S=\{<1,3>,<2,4>,<3,5>,<4,6>\},$

$S^3=S\circ S\circ S=S^2\circ S=\{<1,4>,<2,5>,<3,6>\},\quad S^4=S^3\circ S=\{<1,5>,<2,6>\},$

$S^5=S^4\circ S=\{<1,6>\},\quad S^6=S^5\circ S=\varnothing,\quad S^7=\varnothing,\quad \cdots\ S^n=\varnothing(n>5)$；

☞ 由前例可见

- R^n 的基数并非随着 n 的增加而增加，而是呈递减趋势;
- 当 $n\geqslant|A|$ 时，则 $R^n\subseteq\bigcup_{i=1}^{|A|}R^i$.

幂运算的收敛性

Theorem

设 A 是有限集合，且 $|A| = n$，R 是 A 上的关系，则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = \bigcup_{i=1}^{n} R^i.$$

Proof.

显然有 $\bigcup_{i=1}^{n} R^i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$. 下面仅证明 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$.

因为 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = (\bigcup_{i=1}^{n} R^i) \cup (\bigcup_{i=n+1}^{\infty} R^i)$, 所以只要证明 $\forall k > n, R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$ 即可。

对任意 $< a, b > \in R^k$，由复合运算定义可知，存在 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{k-1} \in A$，使得 $< a, a_1 > \in R, < a_1, a_2 > \in R, < a_2, a_3 > \in R, ..., < a_{k-1}, b > \in R$

由于 $|A| = n$，且 $k > n$，根据鸽笼原理可知,$k + 1$ 个元素 $a = a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_k = b$ 中至少有两个元素相同. $\square$

幂运算的收敛性

continue..

不妨假设 $a_i = a_j (i < j)$，则可在上式中删去

$$< a_i, a_{i+1} >\in R, < a_{i+1}, a_{i+2} >\in R, < a_{i+2}, a_{i+3} >\in R, \cdots, < a_{j-1}, a_j >\in R$$

后仍有

$$< a_0, a_1 >\in R, \cdots, < a_{i-1}, a_i >\in R, < a_j, a_{j+1} >\in R, ..., < a_{k-1}, a_k >\in R$$

由复合运算得 $< a, b >=< a_0, a_k >\in R^{k'}$，其中 $k' = k - (j - i)$. 此时:

若 $k' \leqslant n$，则 $< a, b >\in \bigcup\limits_{i=1}^{n} R^i$；

若 $k' > n$，则重复上述做法，最终总能找到 $k'' \leqslant n$，使得 $< a, b >=< a_0, a_k >\in R^{k''}$， 即有 $< a, b >\in \bigcup\limits_{i=1}^{n} R^i$. 于是得到 $R^k \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} R^i$.

由 k 的任意性知:$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} R^i$.

综上所述,$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} R^i = \bigcup\limits_{i=1}^{n} R^i$. □

自反性与反自反性

Definition

设 R 是集合 A 上的关系.

1. 如果对任意的 $x \in A$, 都有 $< x, x > \in R$, 那么称 R 在 A 上是自反的(reflexive), 或称 R 具有自反性(reflexivity);
2. 如果对任意的 $x \in A$, 都有 $< x, x > \notin R$, 那么称 R 在 A 上是反自反的(antireflexive), 或称 R 具有反自反性(antireflexivity);

Example

- 同姓关系, 小于等于关系, 包含关系, 整除关系都是自反的关系;
- 父子关系, 小于关系, 真包含关系都是反自反的关系.

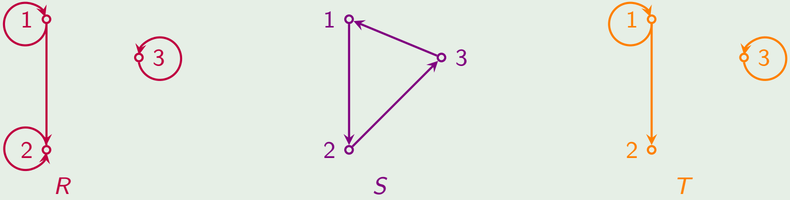
自反性与反自反性

Example

设 $A = \{1, 2, 3\}$, 定义 A 上的关系 R, S 和 T 如下:

1. $R = \{< 1, 1 >, < 1, 2 >, < 2, 2 >, < 3, 3 >\}$; 自反
2. $S = \{< 1, 2 >, < 2, 3 >, < 3, 1 >\}$; 反自反
3. $T = \{< 1, 1 >, < 1, 2 >, < 1, 3 >, < 3, 1 >, < 3, 3 >\}$. 非自反, 非反自反

关系图：



自反性与反自反性

Example (关系矩阵)

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

☞ 总结

- 存在既不是自反的也不是反自反的关系;
- 关系 R 是自反的当且仅当 R 的关系图中每个结点都有自环, 关系 R 是反自反的当且仅当 R 的关系图中每个结点都无自环;
- 关系 R 是自反的当且仅当 R 的关系矩阵的主对角线上全为 1, 关系 R 是反自反的当且仅当 R 的关系矩阵的主对角线上全为 0.

对称性与反对称性

Definition

设 R 是集合 A 上的关系.

1. 如果对任意的 $x, y \in A$, 如果 $< x, y > \in R$, 那么 $< y, x > \in R$, 则称 R 是对称的(symmetric), 或称 R 具有对称性(symmetry);
2. 如果对任意的 $x, y \in A$, 如果 $< x, y > \in R$ 且 $< y, x > \in R$, 那么 $x = y$, 则称 R 是反对称的(antisymmetric), 或称 R 具有反对称性(antisymmetry);

Example

- 同姓关系, 朋友关系, 同余关系都是对称的关系;
- 父子关系, 小于等于关系, 包含关系, 整除关系都是反对称的关系.

对称性与反对称性

Example

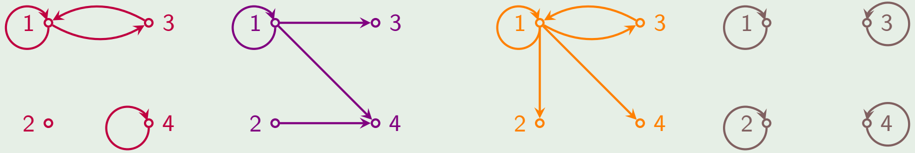
设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 定义 A 上的关系 R, S, T 和 V 如下:

1. $R = \{< 1, 1 >, < 1, 3 >, < 3, 1 >, < 4, 4 >\}$; 对称
2. $S = \{< 1, 1 >, < 1, 3 >, < 1, 4 >, < 2, 4 >\}$; 反对称
3. $T = \{< 1, 1 >, < 1, 2 >, < 1, 3 >, < 3, 1 >, < 1, 4 >\}$; 非对称, 非反对称
4. $V = \{< 1, 1 >, < 2, 2 >, < 3, 3 >, < 4, 4 >\}$. 对称, 反对称

存在既不是对称的也不是反对称的关系, 也存在既是对称又是反对称的关系;

对称性与反对称性

Example (关系图)



R　S　T　V

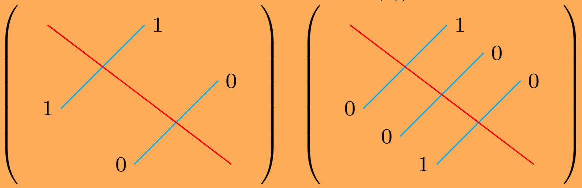
关系图判定法：关系 R 是对称的当且仅当 R 的关系图中，任何一对结点之间，要么有方向相反的两条边，要么无边，关系 R 是反对称的当且仅当 R 的关系图中，任何一对结点之间至多只有一条边。

对称性与反对称性

Example (关系矩阵)

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

关系矩阵判定法：关系 R 是对称的当且仅当 R 的关系矩阵 $(r_{ij})_{n\times n}$ 为对称矩阵，关系 R 是反对称的当且仅当 R 的关系矩阵 $(r_{ij})_{n\times n}$ 满足 $i \neq j$ 时，$r_{ij} = 0$ 或 $r_{ji} = 0$.



传递性

Definition

设 R 是集合 A 上的关系. 对任意的 $x, y, z \in A$, 如果 $< x, y > \in R$ 且 $< y, z > \in R$, 那么 $< x, z > \in R$, 则称 R 是传递的(transitive), 或称 R 具有传递性(transitivity);

Example

- 同姓关系, 小于关系, 包含关系, 整除关系, 飞机航线的可达关系都是传递的关系;
- 父子关系, 朋友关系, 婚姻关系, 飞机航线的直达关系都不是传递的关系.

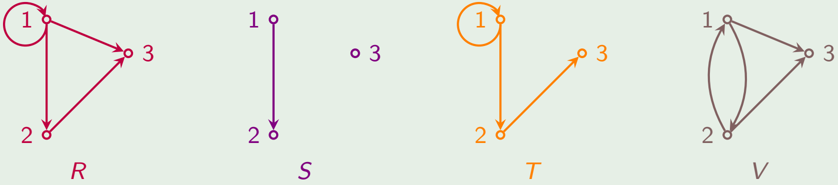
传递性

Example

设 $A = \{1, 2, 3\}$, 定义 A 上的关系 R, S, T 和 V 如下:

1. $R = \{< 1, 1 >, < 1, 2 >, < 2, 3 >, < 1, 3 >\}$; 传递
2. $S = \{< 1, 2 >\}$; 传递
3. $T = \{< 1, 1 >, < 1, 2 >, < 2, 3 >\}$; 非传递
4. $V = \{< 1, 2 >, < 2, 3 >, < 1, 3 >, < 2, 1 >\}$. 非传递

关系图:



传递性

Example (关系矩阵)

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

☞ 总结

- 关系 R 是传递的当且仅当在 R 的关系图中, 任何三个不同结点 x, y, z 之间, 若从 x 到 y 有一条边存在, 从 y 到 z 有一条边存在, 则从 x 到 z 一定有一条边存在;
- 关系 R 是传递的当且仅当在 R 的关系矩阵中, 对任意 $i, j, k \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 若 $r_{ij} = 1$ 且 $r_{jk} = 1$, 必有 $r_{ik} = 1$.

关系性质的判定定理

☞ 对具体集合上的具体关系，我们可根据关系图和关系矩阵等方法来判定关系的性质，但对于抽象集合上的抽象关系，则存在一定的局限性. 为此，我们从集合运算的观点，给出相应的判定定理.

Definition

设 R 是集合 A 上的关系，则.

1. R 是自反的 $\Leftrightarrow I_A \subseteq R$;
2. R 是反自反的 $\Leftrightarrow R \cap I_A = \varnothing$;
3. R 是对称的 $\Leftrightarrow R = R^{-1}$;
4. R 是反对称的 $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq I_A$;
5. R 是传递的 $\Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$.

判定定理的证明

证明③:R 是对称的 $\Leftrightarrow R = R^{-1}$.

先证必要性: 对任意 $<a, b> \in R$, 由于 R 是对称的，所以 $<b, a> \in R$, 即 $<a, b> \in R^{-1}$，从而 $R \subseteq R^{-1}$; 反过来，若任意 $<a, b> \in R^{-1}$, 则有 $<b, a> \in R$，由于 R 的对称性，得到 $<a, b> \in R$，从而 $R^{-1} \subseteq R$。即有 $R = R^{-1}$。

再证充分性: 对任意 $a, b \in A$，若 $<a, b> \in R$，由于 $R = R^{-1}$， 则有 $<a, b> \in R^{-1}$, 即 $<b, a> \in R$。由对称性的定义可知, R 是对称的。 $\square$

证明⑤:R 是传递的 $\Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$.

先证必要性: 对任意 $<a, c> \in R \circ R$, 根据复合运算定义, 则必存在 $b \in A$, 使得 $<a, b> \in R$ 并且 $<b, c> \in R$。由于 R 是传递的，因此有 $<a, c> \in R$，即 $R \circ R \subseteq R$。

再证充分性: 对任意 $a, b, c \in A$，若 $<a, b> \in R$ 并且 $<b, c> \in R$，则有 $<a, c> \in R \circ R$。因为 $R \circ R \subseteq R$，所以 $<a, c> \in R$，即 R 是传递的。 $\square$

总结: 关系性质的判定方法

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
定义	$\forall x \in A$, 有 $< x, x > \in R$	$\forall x \in A$, 有 $< x, x > \notin R$	$\forall x, y \in A$, 若 $< x, y > \in R$, 则 $< y, x > \in R$	$\forall x, y \in A$, 若 $< x, y > \in R$ 且 $< y, x > \in R$, 则 $x = y$	$\forall x, y, z \in A$, 若 $< x, y > \in R$ 且 $< y, z > \in R$, 则 $< x, z > \in R$
关系运算	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \varnothing$	$R = R^{-1}$	$R \cap R_{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系图	每个结点都有环	每个结点都无环	任两结点间, 要么没有边, 要么有方向相反的两条边	任两结点间, 至多有一条边	如果从 x 到 y 有边, 从 y 到 z 有边, 则从 x 到 z 一定有边
关系矩阵	主对角线上全为 1	主对角线上全为 0	对称矩阵 ($M_R = M_R^T$)	$\forall i \neq j, r_{ij} = 0$ 或 $r_{ji} = 0$	$\forall i, j, k$, 若 $r_{ij} = 1$ 且 $r_{jk} = 1$, 必有 $r_{ik} = 1$

关系性质判定

Example

一个关系可能满足多种性质，如:

1. 非空集合 A 上的全关系 E_A;　　自反，对称，传递
2. 非空集合 A 上的空关系 $\varnothing$;　　反自反，对称，反对称，传递
3. 非空集合 A 上的恒等关系 I_A;　　自反，对称，反对称，传递
4. 实数集 R 上的等于关系 $=$;　　自反，对称，反对称，传递
5. 幂集上的真包含关系 $\subset$.　　反自反，反对称，传递

Example

假设 $A=\{a,b,c,d\}$，R 是定义在 A 上的关系. $R=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<c,d>\}$.

非自反，非反自反，非对称，非反对称，非传递

可见，一个关系也有可能不满足任何性质.

关系性质的保守性

关系既可做各种集合基本运算，又可做关系特有的复合运算和求逆运算．具有特殊性质的关系通过各类运算后产生的新关系是否仍然保持原有的特殊性质呢？这就是关系性质的保守性问题。

Definition

设 R, S 是集合 A 上的关系，则.

1. R, S 是自反的，则 $R^{-1}, R \cup S, R \cap S, R \circ S$ 也是自反的;
2. R, S 是反自反的，则 $R^{-1}, R \cup S, R \cap S, R - S$ 也是反自反的;
3. R, S 是对称的，则 $R^{-1}, R \cup S, R \cap S, R - S$ 也是对称的;
4. R, S 是反对称的，则 $R^{-1}, R \cap S, R - S$ 也是反对称的;
5. R, S 是传递的，则 $R^{-1}, R \cap S$ 也是传递的.

关系性质的保守性

Example

设 $A=\{1,2,3\}$,R,S 是集合 A 上的关系.

1. $R=\{<1,2>,<2,3>,<1,3>\}$,反自反, 反对称, 传递
   $S=\{<3,2>,<3,1>,<2,1>\}$.反自反, 反对称, 传递
   但 $R\circ S=\{<1,1>,<2,2>,<2,1>,<1,2>\}$,非反自反, 非反对称
   $R\cup S=\{<1,2>,<2,3>,<1,3>,<2,1>,<3,2>,<3,1>\}$,非传递, 非反对称;
2. $R=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>,<2,1>\}$,自反, 对称, 传递
   $S=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<3,2>,<2,3>\}$.自反, 对称, 传递
   但 $R\circ S=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<2,3>,<3,2>,<1,2>,<2,1>,<1,3>\}$,非传递, 非对称
   $R-S=\{<1,2>,<2,1>\}$,非自反, 非传递.

引言

一个关系可能不具备某一个特殊性质。但是，如果希望它有我们希望它具备的某一个性质，应该如何操作呢？

我们可以通过添加一些元素，使得关系具备我们想要的性质。例如，对给定集合 $A=\{1,2,3\}$ 上的关系 $R=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>\}$，它不具有自反性。根据自反性的定义，在关系 R 中添加 $<2,2>,<3,3>$ 这两个元素后，所得到的新关系 R' 就具有自反性。 另外，还可以添加 $<2,2>$ $<3,3>$ $<1,3>$，得到的新关系 R'' 仍然具有自反性.

如何在给定关系中添加最少的元素，使其具有需要的特殊性质，这就是关系的闭包问题。

闭包定义

Definition

设 R 是集合 A 上的关系，若存在 A 上的另一个关系 R'，满足:

1. R' 是自反的 (对称的，或传递的);
2. 对任何自反的 (对称的，或传递的) 关系 R'',如果 $R \subseteq R''$，就有 $R' \subseteq R''$，则称 R' 为 R 的自反闭包(reflexive closure) (对称闭包(symmetric closure)，或传递闭包(transitive closure))，分别记为$r(R)$($s(R)$或$t(R)$).

Example

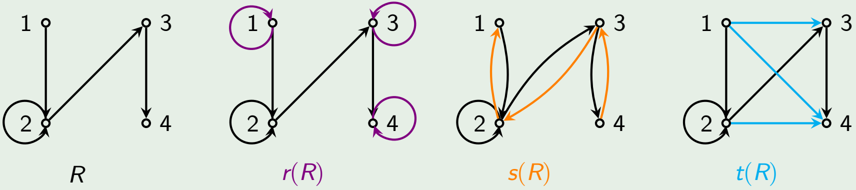
1. 设定义在整数集 Z 上的“$<$”关系为 R，则 $r(R) =$“$\leqslant$”，$s(R) =$“$\neq$”，$t(R) =$“$<$”；
2. 设定义在整数集 Z 上的 “$=$”关系为 S，则 $r(S) =$“$=$”,$s(S) =$“$=$”，$t(S) =$“$=$”.

闭包求解

Example

设集合 $A = \{1,2,3,4\}$,$R = \{<1,2>,<2,2>,<2,3>,<3,4>\}$ 是定义在 A 上的二元关系，则

1. $r(R) = \{<1,2>,<2,2>,<2,3>,<3,4>,<1,1>,<3,3>,<4,4>\}$;
2. $s(R) = \{<1,2>,<2,2>,<2,3>,<3,4>,<2,1>,<3,2>,<4,3>\}$;
3. $t(R) = \{<1,2>,<2,2>,<2,3>,<3,4>,<1,3>,<1,4>,<2,4>\}$.



闭包求解

利用关系图求闭包

1. 检查 R 的关系图，在没有自环的结点处加上自环，可得 $r(R)$ 的关系图;
2. 检查 R 的关系图，将每条单向边全部改成双向边，可得 $s(R)$ 的关系图;
3. 检查 R 的关系图，从每个结点出发，找到其终点，如果该结点到其终点没有边相连，就加上此边，可得 $t(R)$ 的关系图.

利用关系运算求闭包

Theorem

设 R 是集合 A 上的关系，则

1. $r(R) = R \cup I_A$;
2. $s(R) = R \cup R^{-1}$;
3. $t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$, 若 $|A| = n$，则 $t(R) = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$.

Proof.

略. □

利用关系运算求闭包

Example

设 $P = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ 是四个程序，$R = \{< P_1, P_2 >, < P_1, P_3 >, < P_2, P_4 >, < P_3, P_4 >\}$ 是定义在 P 上的调用关系, 则 R 的闭包为:

1. $r(R) = R \cup I_A = \{< P_1, P_2 >, < P_1, P_3 >, < P_2, P_4 >, < P_3, P_4 >\} \cup \{< P_1, P_1 >, < P_2, P_2 >, < P_3, P_3 >, < P_4, P_4 >\} = \{< P_1, P_2 >, < P_1, P_3 >, < P_2, P_4 >, < P_3, P_4 >, < P_1, P_1 >, < P_2, P_2 >, < P_3, P_3 >, < P_4, P_4 >\}$;
2. $s(R) = R \cup R^{-1} = \{< P_1, P_2 >, < P_1, P_3 >, < P_2, P_4 >, < P_3, P_4 >\} \cup \{< P_2, P_1 >, < P_3, P_1 >, < P_4, P_2 >, < P_4, P_3 >\} = \{< P_1, P_2 >, < P_1, P_3 >, < P_2, P_4 >, < P_3, P_4 >, < P_2, P_1 >, < P_3, P_1 >, < P_4, P_2 >, < P_4, P_3 >\}$;
3. $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 = \{< P_1, P_2 >, < P_1, P_3 >, < P_2, P_4 >, < P_3, P_4 >\} \cup \{< P_1, P_4 >\} \cup \varnothing \cup \varnothing = \{< P_1, P_2 >, < P_1, P_3 >, < P_2, P_4 >, < P_3, P_4 >, < P_1, P_4 >\}$.

等价关系

☞

我们在生活中经常遇到需要对集合中的元素进行分类的问题。例如：开学注册时，由于人数众多，为了避免拥挤，我们需要将所有新生分成三个类别，然后将这三个类别的学生分成不同时间段来完成注册. 那么，应该如何进行分类呢？

其中一种方案是，将学号分成三段，每一段分配一个时间段. 这种情况下，我们可以定义一个关系 $R, <a, b> \in R$ 当且仅当 a 和 b 的学号在同一段. 此关系 R 具备了自反，对称和传递的性质.

Definition

设 R 是非空集合 A 上的关系，如果 R 是自反的、对称的、传递的，则称 R 为 A 上的等价关系(equivalent relation).

等价关系

Example

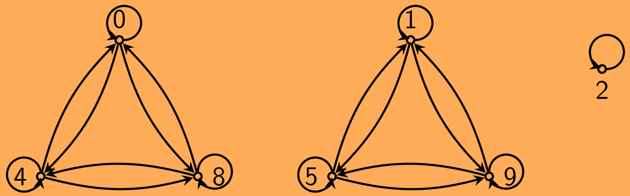
- 同姓关系, 等于关系都是等价关系; 而朋友关系, 包含关系都不是等价关系.
- 在所有的英文单词中建立关系 R,aRb 当且仅当 a 和 b 的长度相同，则关系 R 是等价关系.
- 在包含各种颜色的球的集合中建立关系 S,aSb 当且仅当 a 和 b 的颜色相同，则关系 S 是等价关系.

Example

在集合 $A=\{0,1,2,4,5,8,9\}$ 上定义一个以 4 为模的同余关系, 即 $R=\{<x,y>|4|(x-y)\}$,
$R=\{<0,0>,<0,4>,<0,8>,<4,4>,<4,0>,<4,8>,<8,8>,<8,0>,<8,4>,<1,1>,<1,5>,<1,9>,<5,5>,<5,1>,<5,9>,<9,9>,<9,1>,<9,5>,<2,2>\}$;
则 R 满足自反, 对称, 传递的性质, 从而 R 是等价关系.

等价关系

上例的关系图



- 集合 A 被分成三个子集:{0,4,8},{1,5,9},{2};
- 每个子集内的元素都具有与 R 相关的共同性质:0,4,8 除以 4 的余数都是 0, 而 1,5,9 除以 4 的余数都是 1, 同时 2 除以 4 的余数是 2;
- 此例子可以推广到整数集上的以 n 为模的同余关系.

以 n 为模的同余关系

Example

设 n 为正整数，定义整数集合 $\mathbf{Z}$ 上的以 n 为模的同余关系 $R = \{< x, y > | n|(x-y)\}$，证明 R 是一个等价关系.

Proof.

1. 自反性：对任意 $x \in \mathbf{Z}$，有 $n|(x-x)$，所以 $< x, x > \in R$，即 R 是自反的；
2. 对称性：对任意 $x, y \in \mathbf{Z}$，若 $< x, y > \in R$，则有 $n|(x-y)$，因为 $(y-x) = -(x-y)$，所以 $n|(y-x)$，从而 $< y, x > \in R$，即 R 是对称的；
3. 传递性：对任意 $x, y, z \in \mathbf{Z}$，若 $< x, y > \in R$ 且 $< y, z > \in R$，则有 $n|(x-y)$ 且 $n|(y-z)$。因为 $(x-z) = (x-y) + (y-z)$，所以 $n|(x-z)$，从而 $< x, z > \in R$，即 R 是传递的.

由 (1),(2) 和 (3) 知，R 是 $\mathbf{Z}$ 上的等价关系。 $\square$

以 n 为模的同余关系

注意

- 在 $\mathbf{Z}$ 上以 n 为模的同余关系 R 中, 一般记 xRy 为 $x \equiv y(mod\ n)$(即同余式) 或 $Res_n(x) = Res_n(y)$. 其中,$Res_n(x)$ 表示 x 除以 n 的余数;
- 在此关系下, 整数集 $\mathbf{Z}$ 被分成了 n 个子集:

  $\{\cdots, -3n, -2n, -n, 0, n, 2n, 3n, \cdots\}$;

  $\{\cdots, -3n+1, -2n+1, -n+1, 1, n+1, 2n+1, 3n+1, \cdots\}$;

  $\{\cdots, -3n+2, -2n+2, -n+2, 2, n+2, 2n+2, 3n+2, \cdots\}$;

  $\cdots$;

  $\{\cdots, -2n-1, -n-1, -1, n-1, 2n-1, 3n-1, 4n-1, \cdots\}$.
- 这些子集称作由 R 产生的等价类.

等价类

Definition

设 R 是非空集合 A 上的等价关系，对任意 $x \in A$，称集合 $[x]_R = \{y | y \in A, <x, y> \in R\}$ 为 x 关于 R 的等价类(equivalence class)，或叫作由 x 生成的一个 R 等价类，其中 x 称为 $[x]_R$ 的生成元(代表元或典型元)(generator).

Example

在集合 $A = \{0, 1, 2, 4, 5, 8, 9\}$ 上定义的以 4 为模的同余关系中,

- $[0]_R = [4]_R = [8]_R = \{0, 4, 8\}$;
- $[1]_R = [5]_R = [9]_R = \{1, 5, 9\}$;
- $[2]_R = \{2\}$.

等价类的性质

Theorem

设 R 是非空集合 A 上的等价关系，则

1. 对任意 $x \in A, [x]_R \neq \varnothing;$
2. 对任意 $x, y \in A$, 如果 $y \in [x]_R$，则有 $[x]_R = [y]_R$, 否则 $[x]_R \cap [y]_R = \varnothing;$
3. $\bigcup\limits_{x \in A} [x]_R = A.$

Proof.

1. 对 $\forall x \in A$，因为 R 是等价关系，所以 R 是自反的，从而 $< x, x > \in R$，即 $x \in [x]_R$，故 $[x]_R \neq \varnothing;$ □

等价类的性质

Continue...

2. $\forall x, y \in A$,
   a) 若 $y \in [x]_R$, 则 $<x, y> \in R$. 对任意 $z \in [x]_R$, 则有 $<x, z> \in R$. 因为 R 是等价关系, 所以 R 对具有对称性和传递性. 由 R 的对称性有 $<y, x> \in R$, 由 R 的传递性有 $<y, z> \in R$. 所以 $z \in [y]_R$, 即 $[x]_R \subseteq [y]_R$. 同理可证,$[y]_R \subseteq [x]_R$. 从而, 有 $[x]_R = [y]_R$;
   b) 若 $y \notin [x]_R$, 设 $[x]_R \cap [y]_R \neq \varnothing$, 则存在 $z \in [x]_R \cap [y]_R$, 即 $z \in [x]_R$, $z \in [y]_R$, 因此有 $<x, z> \in R, <y, z> \in R$. 由 R 的对称性有 $<z, y> \in R$, 由 R 的传递性有 $<x, y> \in R$, 所以 $y \in [x]_R$, 与假设 $y \notin [x]_R$ 矛盾. 从而, 有 $[x]_R \cap [y]_R = \varnothing$;
3. 对任意 $x \in A, [x]_R \subseteq A$, 所以 $\bigcup\limits_{x \in A} [x]_R \subseteq A$; 又对任意 $x \in A$, 因 R 是自反的, 所以 $<x, x> \in R$, 即 $x \in [x]_R$. 所以 $x \in \bigcup\limits_{x \in A} [x]_R$, 即 $A \subseteq \bigcup\limits_{x \in A} [x]_R$. 故 $\bigcup\limits_{x \in A} [x]_R = A$. □

商集

Definition

设 R 是非空集合 A 上的等价关系，由 R 确定的一切等价类的集合，称为集合 A 上关于 R 的商集(quotient set)，记为A/R，即 $A/R = \{[x]_R | x \in A\}$.

Example

设集合 $A = \{0, 1, 2, 4, 5, 8, 9\}$, 则

- 在 A 上定义的以 4 为模的同余关系 R 中,
  $A/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R\} = \{\{0, 4, 8\}, \{1, 5, 9\}, \{2\}\}$;
- 在 A 上定义的以 3 为模的同余关系 S 中,
  $A/S = \{[0]_S, [1]_S, [2]_S\} = \{\{0, 9\}, \{1, 4\}, \{2, 5, 8\}\}$.

计算商集 A/R 的通用过程

1. 任选 A 中一个元素 a，计算 $[a]_R$;
2. 如果 $[a]_R \neq A$，任选一个元素 $b \in A - [a]_R$，计算 $[b]_R$.
3. 如果 $[a]_R \cup [b]_R \neq A$，任选一个元素 $c \in A - [a]_R - [b]_R$，计算 $[c]_R$.
4. 以此类推，直到 A 中所有元素都包含在计算出的等价类中.

集合的划分

☞

在等价关系中我们已经发现，同一个等价类中的元素具有相同的属性，因而可将集合中的元素分成不同的类别，对应于集合的划分。

Definition

给定一个非空集合 A，设有集合 $\pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$。如果满足:

- $S_i \subseteq A, S_i \neq \varnothing, i = 1, 2, \cdots, m$;
- $S_i \cap S_j = \varnothing, i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, m$;
- $\bigcup_{i=1}^{m} S_i = A$.

则集合 π 称作集合 A 的一个划分 (partition)，而 $S_1, S_2, \cdots, S_m$ 叫做这个划分的块 (block) 或类 (class)。

等价关系-> 集合划分

Theorem

设 R 是非空集合 A 上的等价关系，则 A 对 R 的商集 A/R 是 A 的一个划分，称为由 R 所导出的等价划分.

Example

设集合 $A=\{0,1,2,4,5,8,9\}$, 则

- A 上以 4 为模的同余关系 R 导出的划分为, $A/R=\{[0]_R,[1]_R,[2]_R\}=\{\{0,4,8\},\{1,5,9\},\{2\}\}$;
- A 上以 3 为模的同余关系 S 导出的划分为, $A/S=\{[0]_S,[1]_S,[2]_S\}=\{\{0,9\},\{1,4\},\{2,5,8\}\}$.

同一个集合有多种不同的划分, 不同的等价关系导出不同的划分.

集合划分-> 等价关系

Theorem

给定集合 A 的一个划分 $\pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$, 则由该划分确定的关系 $R = (S_1 \times S_1) \cup (S_2 \times S_2) \cup \cdots \cup (S_m \times S_m)$ 是 A 上的等价关系。我们称该关系 R 为由划分 π 所导出的等价关系。

Proof.

- 对 $\forall x \in A$, 必 $\exists i > 0$, 使得 $x \in S_i$, 所以 $< x, x > \in S_i \times S_i$, 即 $< x, x > \in R$, 因此 R 是自反的.
- 对 $\forall x, y \in A$, 如果 $< x, y > \in R$, 必 $\exists j > 0$, 使得 $< x, y > \in S_j \times S_j$, 从而 $< y, x > \in S_j \times S_j$, 即 $< y, x > \in R$, 因此 R 是对称的。
- 对 $\forall x, y, z \in A$, 如果 $< x, y > \in R$,$< y, z > \in R$, 必 $\exists i, j > 0$, 使得 $< x, y > \in S_i \times S_i$, $< y, z > \in S_j \times S_j$, 即 $x, y \in S_i$ 且 $y, z \in S_j$, 从而 $y \in S_i \cap S_j$, 由集合划分定义, 必有 $S_i = S_j$, 因此 x 和 z 同属于集合 A 的一个划分块 S_i, 从而 $< x, z > \in R$, 所以 R 是传递的. $\square$

集合划分-> 等价关系

Example

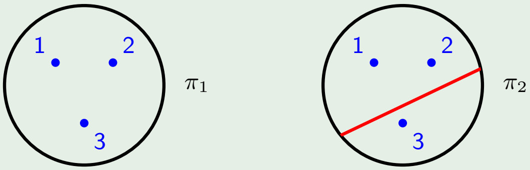
设 $A=\{a,b,c,d,e,f\}$,$\pi=\{\{a,b\},\{c,e,f\},\{d\}\}$ 是 A 的一个划分，则 π 对应的等价关系 R 为:

$$
\begin{aligned}
R &= (\{a,b\}\times\{a,b\})\cup(\{c,e,f\}\times\{c,e,f\})\cup(\{d\}\times\{d\})\\
&= \{<a,a>,<b,b>,<a,b>,<b,a>\}\\
&\quad \cup\{<c,c>,<e,e>,<f,f>,<c,e>,<e,c>,<c,f>,<f,c>,\\
&\quad <e,f>,<f,e>\}\cup\{<d,d>\}\\
&= \{<a,a>,<b,b>,<a,b>,<b,a>,<c,c>,<e,e>,<f,f>,\\
&\quad <c,e>,<e,c>,<c,f>,<f,c>,<e,f>,<f,e>,<d,d>\}
\end{aligned}
$$

集合划分-> 等价关系

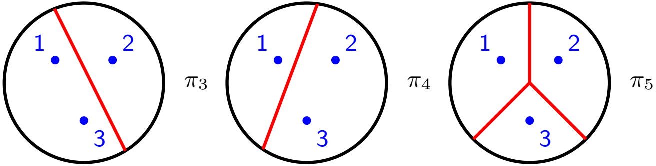
Example

设 $A=\{1,2,3\}$, 求 A 上所有的等价关系及其对应的商集.



- $R_1 = S_1 \times S_1 = \{<1,1>, <1,2>, <1,3>, <2,1>, <2,2>, <2,3>, <3,1>, <3,2>, <3,3>\} = A \times A$, $A/R_1 = \{\{1,2,3\}\}$;
- $R_2 = (\{1,2\} \times \{1,2\}) \cup (\{3\} \times \{3\}) = \{<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>, <3,3>\}$, $A/R_2 = \{\{1,2\},\{3\}\}$;

集合划分-> 等价关系



- $R_3 = (\{1,3\} \times \{1,3\}) \cup (\{2\} \times \{2\}) = \{<1,1>, <1,3>, <2,2>, <3,1>, <3,3>\}$, $A/R_3 = \{\{1,3\}, \{2\}\}$;
- $R_4 = (\{2,3\} \times \{2,3\}) \cup (\{1\} \times \{1\}) = \{<1,1>, <2,2>, <2,3>, <3,2>, <3,3>\}$, $A/R_4 = \{\{1\}, \{2,3\}\}$;
- $R_5 = (\{1\} \times \{1\}) \cup (\{2\} \times \{2\}) \cup (\{3\} \times \{3\}) = \{<1,1>, <2,2>, <3,3>\} = I_A$; $A/R_5 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$.

偏序关系

定义

设 R 是非空集合 A 上的关系, 如果 R 是自反的、反对称的、传递的，则称 R 为 A 上的偏序关系(partial order relation), 记为"$\leqslant$". 读作"小于等于", 并将"$< a, b > \in \leqslant$"记为 $a \leqslant b$. 序偶 $< A, \leqslant >$ 称为偏序集 (partial order set).

☞ 注意

用"$\leqslant$"来表示偏序关系是由于"小于等于关系"是偏序关系的典型范例, 此时已不局限于"小于等于"关系, 它指代的是在偏序关系中元素之间的先后顺序, 不局限于通常的数的大小;

偏序关系

例

- 偏序关系 $\preccurlyeq$ 可表示实数集上的小于等于关系; $(2 \preccurlyeq 4, 4 \not\preccurlyeq 2)$
- 偏序关系 $\preccurlyeq$ 可表示幂集上的包含关系; $(\{1\} \preccurlyeq \{1, 2\})$
- 偏序关系 $\preccurlyeq$ 可表示正整数集合上的整除关系; $(2 \preccurlyeq 4, 3 \not\preccurlyeq 4, 4 \not\preccurlyeq 3)$
- 偏序关系 $\preccurlyeq$ 可表示实数集上的大于等于关系; $(2 \not\preccurlyeq 4, 4 \preccurlyeq 2)$
- 偏序关系 $\preccurlyeq$ 可表示任何一个集合上的恒等关系; $(a \preccurlyeq a, a \in A)$

☞ 注意

- 当 $a \preccurlyeq b$, 并且 $a \neq b$ 时, 可以写作 $a \prec b$;
- $a \preccurlyeq b$ 可对应写作 $b \succcurlyeq a$,$a \prec b$ 可对应写作 $b \succ a$.

可比与覆盖

定义

设 R 是非空集合 A 上的偏序关系,$\forall x, y \in A$,

- 如果 $x \preccurlyeq y$ 或 $y \preccurlyeq x$, 则称 x 与 y 可比;
- 如果 $x \preccurlyeq y$ 且不存在 $z \in A$ 使得 $x \preccurlyeq z \preccurlyeq y$, 则称 y 覆盖 x.

例

- 正整数集合上的整除关系中,2 与 4 可比,6 与 3 可比,4 和 3 不可比;4 和 6 覆盖 2, 但 8、12 等均不覆盖 2.
- $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 的幂集上的包含关系中,$\{1\}$ 和 $\{1, 2\}$ 可比,$\{1\}$ 和 $\{2\}$ 不可比,$\{1, 2\}$ 和 $\{1, 3, 4\}$ 不可比;$\{1, 2\}$ 覆盖 $\{1\}$ 和 $\{2\}$.

计算机科学中的字典排序

例

设 Σ 是一个有限的字母表.Σ 上的字母组成的字母串叫 Σ 上的字, Σ^* 是包含空字"ε"的所有字组成的集合, 建立 Σ^* 上的字典次序关系 $\mathbf{L}$ 如下. 设 $x = x_1x_2\cdots x_n, y = y_1y_2\cdots y_m$, 其中 $x_i, y_j \in \Sigma(i = 1, 2, \cdots, n, j = 1, 2, \cdots, m)$, 则 $x, y \in \Sigma^*$.

- 当 $x_1 \neq y_1$ 时，若 $x_1 \leqslant y_1$，则 $x\mathbf{L}y$; 若 $y_1 \leqslant x_1$，则 $y\mathbf{L}x$。
- 若存在最大的 k 且 $k < min(n, m)$, 使 $x_i = y_i(i = 1, 2, \cdots, k)$, 而 $x_{k+1} \neq y_{k+1}$, 若 $x_{k+1} \leqslant y_{k+1}$, 则 $x\mathbf{L}y$; 若 $y_{k+1} \leqslant x_{k+1}$, 则 $y\mathbf{L}x$。
- 若存在最大的 k 且 $k = min(n, m)$，使 $x_i = y_i(i = 1, 2, 3, \cdots, k)$, 此时, 若 $n \leqslant m$, 则 $x\mathbf{L}y$; 若 $m \leqslant n$, 则 $y\mathbf{L}x$.

可见:$\mathbf{L}$ 是 Σ^* 上的一个偏序关系.

计算机科学中的字典排序

例

令 Σ 为所有小写英文字母的集合. 则 Σ^* 定义了所有由小写字母构成的串.

1. $< aiscrete, discrete > \in \mathbf{L}$, 即 $aiscrete \leqslant discrete$;
2. $< discreet, discrete > \in \mathbf{L}$, 即 $discreet \leqslant discrete$;
3. $< discreet, discreetness > \in \mathbf{L}$, 即 $discreet \leqslant discreetness$.

☞

在 C 语言的标准库中的字符串比较函数 strcmp(str1,str2), 就是基于字典排序来比较两个字符串的大小,str1=str2 则返回 0,str1 大于 str2 时返回正值,str1 小于 str2 时返回负值.

计算机科学中的字典排序

证明：$\mathbf{L}$ 是偏序关系.

1. **$\mathbf{L}$ 是自反的。**
   对任意 $x \in \Sigma^*$，令 $x = x_1 x_2 \dots x_n$，其中 $x_i \in \Sigma$，显然有 $x_i \leqslant x_i (i = 1, 2, \dots, n)$，从而有 $x\mathbf{L}x$;
2. **$\mathbf{L}$ 是反对称的。**
   对任意 $x\ y \in \Sigma^*$，令 $x = x_1 x_2 \dots x_n, y = y_1 y_2 \dots y_m$，其中 $x_i, y_j \in \Sigma (i = 1, 2, \dots, n\ j = 1, 2, \dots, m)$。若 $x\mathbf{L}y$ 且 $y\mathbf{L}x$，根据 $\mathbf{L}$ 的定义有 $x = y$;
3. **$\mathbf{L}$ 是传递的。**
   对任意 $x, y, z \in \Sigma^*$，令 $x = x_1 x_2 \dots x_n, y = y_1 y_2 \dots y_m\ z = z_1 z_2 \dots z_p$，其中 $x_i, y_j, z_k \in \Sigma (i = 1, 2, \dots, n\ j = 1, 2, \dots, m\ k = 1, 2, \dots, p)$。若 $x\mathbf{L}y$ 且 $y\mathbf{L}z$，根据 $\mathbf{L}$ 的定义和 “$\leqslant$ ”的传递性，有 $x\mathbf{L}z$.

综上所述，$\mathbf{L}$ 是 Σ^* 上的一个偏序关系。 $\square$

引言

☞

在偏序集的关系图中，许多有向边可以不用显示出来. 例如，偏序关系满足自反性，所以每个结点都有环，因此可以不必显示这些环；又如，偏序关系满足传递性，我们不必显示由于传递性而必须出现的边；另外，由于其反对称的特性，我们可以规定边的方向，从而省去箭头.

按照以上方法对关系图进行简化而得到的图形叫做哈斯图，哈斯图对于判断元素之间的先后顺序以及确定特殊元素非常方便.

哈斯图

Definition

设 R 是非空集合 A 上的偏序关系, 使用如下方法对 R 的关系图进行简化:

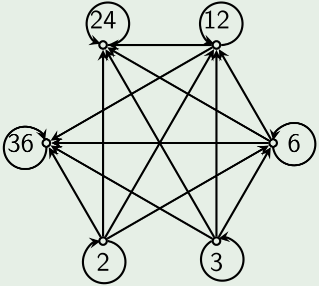
- 取消每个结点的自环; (因自反性)
- 取消所有由于传递性出现的边. 即若 $x \longrightarrow y, y \longrightarrow z$, 则去掉 $x \longrightarrow z$ 这条边;(因传递性)
- 重新排列每条边, 使得边的箭头方向全部向上, 然后去掉这些箭头.(因反对称性)

以上步骤可以得到一个包含足够偏序信息的图, 这个图称为偏序关系 R 的哈斯图(Hasse diagram).

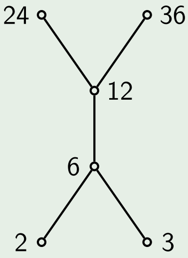
哈斯图

Example

设 $A = \{2, 3, 6, 12, 24, 36\}$,“$\leqslant$”是 A 上的整除关系 R。



关系图



哈斯图

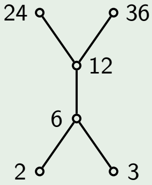
最大元和最小元

Definition

设 $< A, \leqslant >$ 是偏序集,B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $b \in B$, 使得

- 对任意 $x \in B$, 都有 $x \leqslant b$, 则称 b 为 B 的最大元;
- 对任意 $x \in B$, 都有 $b \leqslant x$, 则称 b 为 B 的最小元.

Example



	{6,12}	{2,3}	{24,36}	{2,3,6,12}
最大元	12	无	无	12
最小元	6	无	无	无

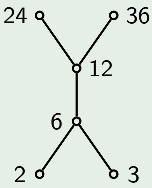
极大元和极小元

Definition

设 $< A, \leqslant >$ 是偏序集,B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $b \in B$, 使得

- 对任意 $x \in B$, 满足$b \leqslant x \Rightarrow x = b$, 则称 b 为 B 的极大元;
- 对任意 $x \in B$, 满足$x \leqslant b \Rightarrow x = b$, 则称 b 为 B 的极小元.

Example



	{6,12}	{2,3}	{24,36}	{2,3,6,12}
极大元	12	2,3	24,36	12
极小元	6	2,3	24,36	2,3

总结

☞

1. B 的最大元、最小元、极大元和极小元如果存在，一定在 B 中;
2. b 是 B 的最大元 $\Leftrightarrow$ B 中所有的元素都比 b 小;
   b 是 B 的最小元 $\Leftrightarrow$ B 中所有的元素都比 b 大;
   b 是 B 的极大元 $\Leftrightarrow$ B 中没有比 b 大的元素;
   b 是 B 的极小元 $\Leftrightarrow$ B 中没有比 b 小的元素.

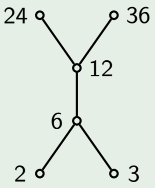
上界和上确界

Definition

设 $< A, \leqslant >$ 是偏序集,B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $a \in A$, 使得

- 对任意 $x \in B$, 满足 $x \leqslant a$, 则称 a 为 B 的上界;
- 若元素 $a' \in A$ 是 B 的上界, 元素 $a \in A$ 是 B 的任何一个上界, 若均有 $a' \leqslant a$, 则称 a' 为 B 的最小上界或上确界.

Example



	{6,12}	{2,3}	{24,36}	{2,3,6,12}
上界	12,24,36	6,12,24,36	无	12,24,36
上确界	12	6	无	12

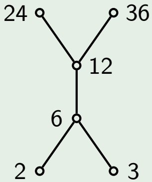
下界和下确界

Definition

设 $< A, \leqslant >$ 是偏序集,B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $a \in A$, 使得

- 对任意 $x \in B$, 满足 $a \leqslant x$, 则称 a 为 B 的下界;
- 若元素 $a' \in A$ 是 B 的下界, 元素 $a \in A$ 是 B 的任何一个下界, 若均有 $a \leqslant a'$, 则称 a' 为 B 的最大下界或下确界.

Example

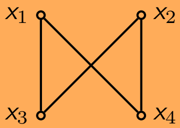


	{6,12}	{2,3}	{24,36}	{2,3,6,12}
下界	2,3,6	无	2,3,6,12	无
下确界	6	无	12	无

总结

☞

1. 子集 B 的上、下界和上、下确界可在集合 A 中寻找;
2. 子集 B 的上、下界不一定存在, 如果存在可能多个;
3. 子集 B 的上、下确界不一定存在, 如果存在一定唯一;
4. 子集 B 有上 (下) 确界, 一定有上 (下) 界, 反之不然.



	上界	**上确界**	**下界**	**下确界**
$\{x_1, x_2\}$	无	无	x_3, x_4	无
$\{x_3, x_4\}$	x_1, x_2	无	无	无

拟序关系

Definition

设 R 是非空集合 A 上的关系, 如果 R 是反自反的和传递的，则称 R 为 A 上的拟序关系(quasi-order relation), 记为“$<$ ”, 读作“小于 ”, 并将“$< a, b > \in <$ ”记为 $a < b$. 序偶 $< A, < >$ 称为拟序集 (quasi-order set).

拟序关系

Definition

设 R 是非空集合 A 上的关系, 如果 R 是反自反的和传递的，则称 R 为 A 上的拟序关系(quasi-order relation), 记为“$<$ ”, 读作“小于 ”, 并将“$< a, b > \in <$ ”记为 $a < b$. 序偶 $< A, < >$ 称为拟序集 (quasi-order set).

Example

- 实数集上的小于关系是拟序关系;
- 幂集上的真包含关系是拟序关系.

拟序关系

Example

设 R 是集合 A 上的拟序关系, 则 R 是反对称的.

Proof.

使用反证法, 假设 R 不是反对称的关系, 则必存在 $x, y \in A$, 且 $x \neq y$, 满足 $<x, y> \in R$ 并且 $<y, x> \in R$. 因为 R 是 A 上的拟序关系, 所以 R 具有传递性, 从而有 $<x, x> \in R$. 这与 R 是反自反的矛盾, 从而假设错误, 即 R 一定是反对称的. □

☞ 拟序关系 VS 偏序关系

- R 是集合 A 上的偏序关系, 则 $R - I_A$ 是 A 上的拟序关系;
- S 是集合 A 上的拟序关系, 则 $S \cup I_A$ 是 A 上的偏序关系.

全序关系

Definition

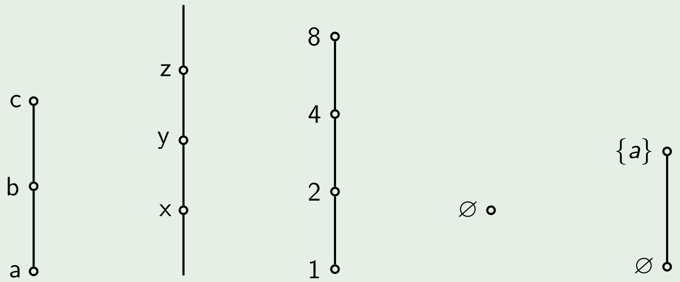
设 $< A, \leqslant >$ 是一个偏序关系, 若对任意 $x, y \in A$,x 与 y 都是可比的, 则称关系"$\leqslant$ "为全序关系(total order relation) 或线序关系. 称 $< A, \leqslant >$ 为全序集(total order set)，或线序集, 或链。

Example

- 集合 $A = \{a, b, c\}$ 上的关系"$\leqslant$ "$= \{< a, a >, < b, b >, < c, c >, < a, b >, < b, c >, < a, c >\}$ 是全序关系;
- 数集上的小于等于关系是全序关系;
- 正整数集合上的整除关系不是全序关系, 但集合 $A = \{1, 2, 4, 8\}$ 上的整除关系是全序关系;
- 幂集 $P(A)$ 上的包含关系在 $|A| < 2$ 时是全序关系; 但 $|A| \geqslant 2$ 时则不是全序关系;
- 计算机科学中常用的字典排序关系是全序关系。

全序关系的哈斯图

Example



全序关系的哈斯图将集合中的元素排成一条线，像一条链子，这充分体现了全序集可以称作线序集或链的原因.

良序关系

Definition

设 $< A, \leqslant >$ 是全序集,若 A 的任何一个非空子集都有最小元素，则称"$\leqslant$ "为良序关系(well order relation), 此时 $< A, \leqslant >$ 称为良序集(well order set)。

Example

- 集合 $A = \{a, b, c\}$ 上的关系"$\leqslant$ "$= \{< a, a >, < b, b >, < c, c >, < a, b >, < b, c >, < a, c >\}$ 是良序关系;
- 整数集上的小于等于关系不是良序关系, 但正整数集上的小于等于关系是良序关系;
- 良序关系一定是全序关系，而有限全序集一定是良序集.

总结

偏序关系，全序关系和良序关系之间的关系如下图: