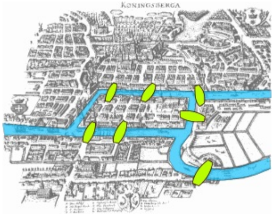
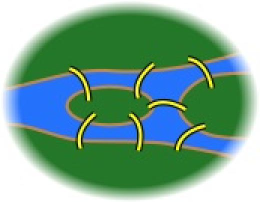
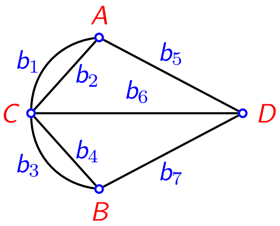
哥尼斯堡七桥问题







游人从四块陆地中任一块出发，按什么样的线路方能做到每座桥通过一次且仅一次而最后返回原地?

欧拉图的定义

Definition

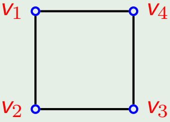
设 G 是无孤立结点的图，若存在一条通路 (回路)，经过图中每边一次且仅一次，则称此通路 (回路) 为该图的一条欧拉通路 (回路)。具有欧拉回路的图称为欧拉图(Eulerian graph)。

☞ 注意

- 规定：平凡图为欧拉图；
- 欧拉通路是经过图中所有边的通路中长度最短的通路；
- 欧拉回路是经过图中所有边的回路中长度最短的回路。

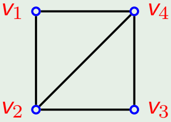
欧拉图的定义

Example



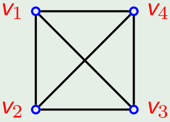
(a)

欧拉图（存在欧拉回路）



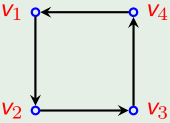
(b)

存在欧拉通路



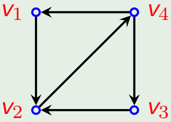
(c)

无欧拉通路



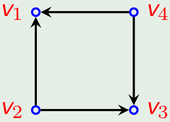
(d)

欧拉图（存在欧拉回路）



(e)

存在欧拉通路



(f)

无欧拉通路

无向欧拉图的判定定理

Theorem

无向图 $G =< V, E >$ 具有一条欧拉通路，当且仅当 G 是连通的，且仅有零个或两个奇度数结点。

无向欧拉图的判定定理

Theorem

无向图 $G =< V, E >$ 具有一条欧拉通路，当且仅当 G 是连通的，且仅有零个或两个奇度数结点。

Corollary

无向图 $G =< V, E >$ 具有一条欧拉回路，当且仅当 G 是连通的，并且所有结点的度数均为偶数。

无向欧拉图的判定定理

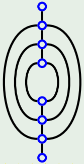
Theorem

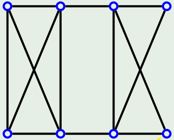
无向图 $G = < V, E >$ 具有一条欧拉通路，当且仅当 G 是连通的，且仅有零个或两个奇度数结点。

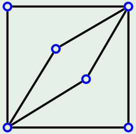
Corollary

无向图 $G = < V, E >$ 具有一条欧拉回路，当且仅当 G 是连通的，并且所有结点的度数均为偶数。

Example


无欧拉通路


存在欧拉通路


存在欧拉回路（欧拉图）

有向欧拉图的判定定理

Theorem

有向图 G 具有一条欧拉通路，当且仅当 G 是连通的，且除了两个结点以外，其余结点的入度等于出度，而这两个例外的结点中，一个结点的入度比出度大 1，另一个结点的出度比入度大 1。

有向欧拉图的判定定理

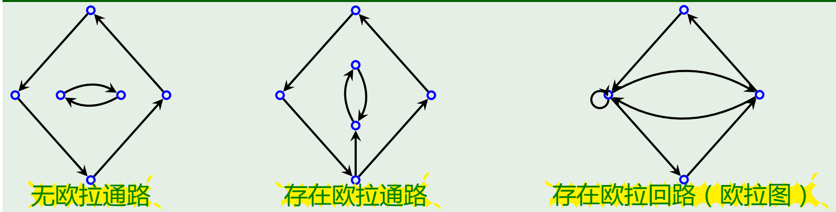
Theorem

有向图 G 具有一条欧拉通路，当且仅当 G 是连通的，且除了两个结点以外，其余结点的入度等于出度，而这两个例外的结点中，一个结点的入度比出度大 1，另一个结点的出度比入度大 1。

Corollary

有向图 G 具有一条欧拉回路，当且仅当 G 是连通的，且所有结点的入度等于出度。

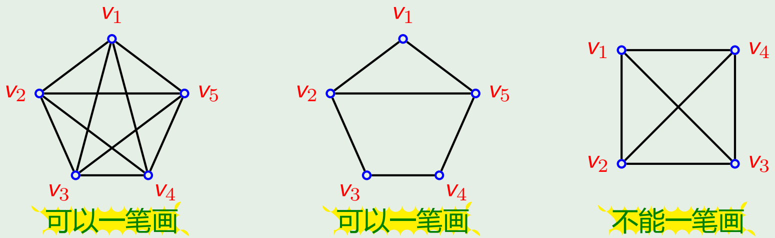
Example



一笔画问题

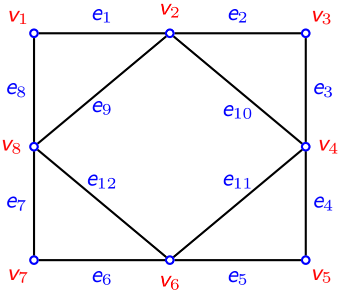
所谓一笔画是指笔不离纸，不重复的画出图形。能否一笔画本质上就是求图中是否存在欧拉通路 (或欧拉回路)的问题。

Example



求无向图的欧拉回路–Fleury 算法

依次选边，每选一条边就从图中删去。选取条件是：与上一条已选取的边关联；除非无别的边可选，否则不能选割边（桥）。

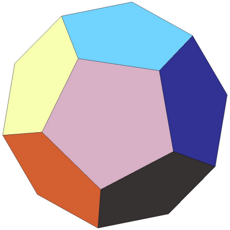


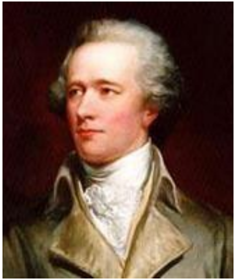
一条欧拉回路：

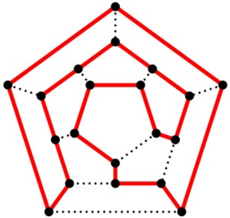
$e_1\, e_2\, e_3\, e_4\, e_5\, e_6\, e_7\, e_9\, e_{10}\, e_{11}\, e_{12}\, e_8$

周游世界问题

1859 年英国数学家威廉·哈密顿爵士发明了一个小玩具，这个小玩具是一个木刻的正十二面体，每面系正五角形，共有 20 个顶点，每个顶点标有世界上一个重要城市。他提出一个问题：要求沿正十二面体的边寻找一条路通过 20 个城市，而每个城市只通过一次，最后返回原地。哈密顿将此问题称为周游世界问题。







哈密顿图的定义

Definition

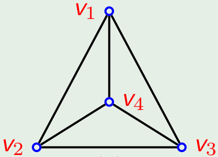
设 G 是一个无向或有向图，若存在一条通路 (回路)，经过图中每个结点一次且仅一次，则称此通路 (回路) 为该图的一条哈密顿通路 (回路)。具有哈密顿回路的图称为哈密顿图(Hamiltonian graph)。

☞ 注意

- 规定：平凡图为哈密顿图；
- 哈密顿通路是经过图中所有结点的通路中长度最短的通路；
- 哈密顿回路是经过图中所有结点的回路中长度最短的回路。

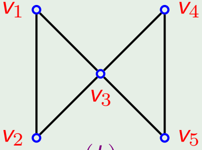
哈密顿图的定义

Example



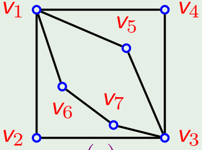
(a)

哈密顿图（哈密顿回路）



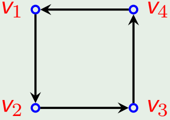
(b)

存在哈密顿通路



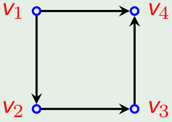
(c)

无哈密顿通路



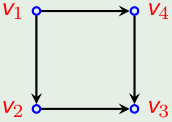
(d)

哈密顿图（哈密顿回路）



(e)

存在哈密顿通路



(f)

无哈密顿通路

哈密顿图的必要条件

Theorem

设无向图 $G=<V,E>$ 是哈密顿图，V_1 是 V 的任意非空子集，则$p(G-V_1)\leqslant|V_1|$，其中 $p(G-V_1)$ 是从 G 中删除 V_1 后所得到图的连通分支数。

Proof.

设 C 是 G 中的一条哈密顿回路，V_1 是 V 的任意非空子集。下面分两种情况讨论：

（1）V_1 中结点在 C 中均相邻，删除 C 上 V_1 中各结点及关联的边后，$C-V_1$ 仍是连通的，但已非回路，因此 $p(C-V_1)=1\leqslant|V_1|$。

（2）V_1 中结点在 C 上存在 $r(2\leqslant r\leqslant|V_1|)$ 个互不相邻，删除 C 上 V_1 中各结点及关联的边后，将 C 分为互不相连的 r 段，即 $p(C-V_1)=r\leqslant|V_1|$。

一般情况下，V_1 中的结点在 C 中即有相邻的，又有不相邻的，因此总有 $p(C-V_1)\leqslant|V_1|$。

又因 C 是 G 的生成子图，从而 $C-V_1$ 也是 $G-V_1$ 的生成子图，故有

$p(G-V_1)\leqslant p(C-V_1)\leqslant|V_1|$。 $\square$

必要条件的推论及使用

哈密顿图

Lijie Wang

引子

定义

必要条件

充分条件

其它方法

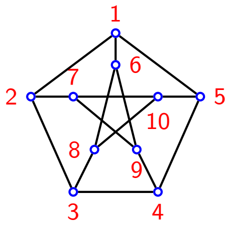
应用

Corollary

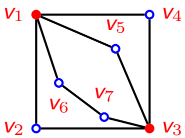
设无向图 $G = < V, E >$ 中存在哈密顿通路，则对 V 的任意非空子集 V_1，都有

$$p(G - V_1) \leqslant |V_1| + 1。$$

- 此定理是哈密顿图的必要条件，而不是充分条件。
- 此定理的主要应用是判断某些图不是哈密顿图，即：若存在 V 的某个非空子集 V_1 使得 $p(G - V_1) > |V_1|$，则 G 不是哈密顿图。
- 有割点的图一定不是哈密顿图。

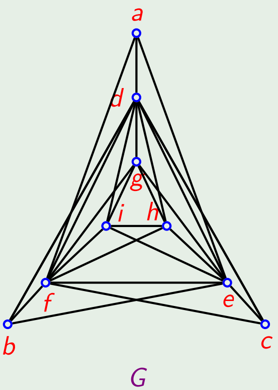


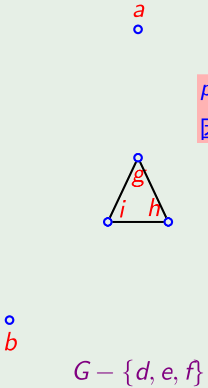
彼得森图



证明不存在哈密顿回路

Example





$p(G - \{d, e, f\}) = 4 > 3$,

因而不会存在哈密顿回路。

哈密顿图的充分条件

Theorem

设 $G=<V,E>$ 是具有 n 个结点的简单无向图。如果对任意两个不相邻的结点 $u,v\in V$，均有 $deg(u)+deg(v)\geqslant n-1$，则 G 中存在哈密顿通路。

哈密顿图的充分条件

Theorem

设 $G=<V,E>$ 是具有 n 个结点的简单无向图。如果对任意两个不相邻的结点 $u,v\in V$，均有 $deg(u)+deg(v)\geqslant n-1$，则 G 中存在哈密顿通路。

Example

某地有 5 个风景点，若每个风景点均有 2 条道路与其他点相通。问游人可否经过每个风景点恰好一次而游完这 5 处？

解　将 5 个风景点看成图中的结点，两风景点间的道路看成是无向图的边，故每个结点的度数均为 2，从而任意两个不相邻的结点的度数之和等于 4，正好为总结点数减 1。故此图中存在一条哈密顿通路，因此游人可以经过每个风景点恰好一次而游完这 5 处。

Theorem

设 $G=<V,E>$ 是具有 n 个结点的简单无向图。如果对任意两个不相邻的结点 $u,v\in V$，均有 $deg(u)+deg(v)\geqslant n$，则 G 中存在哈密顿回路。

哈密顿图的充分条件

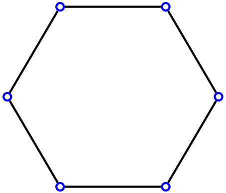
Corollary

设 $G=<V,E>$ 是具有 n 个结点的简单无向图，$n\geqslant 3$。如果对任意 $v\in V$，均有 $deg(v)\geqslant \frac{n}{2}$，则 G 是哈密顿图。

☞ 注意

定理及其推论给出的是哈密顿图的充分条件，而不是必要条件。

六边形

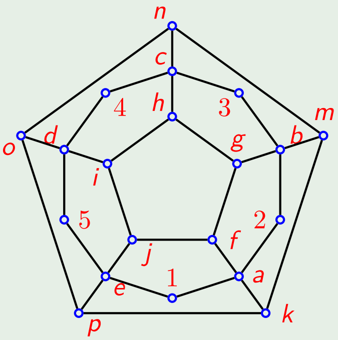


4<6，仍是哈密顿图

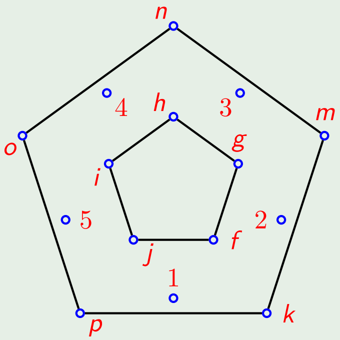
其它判定方法

Example

判断图 G 是否存在哈密顿回路。



G

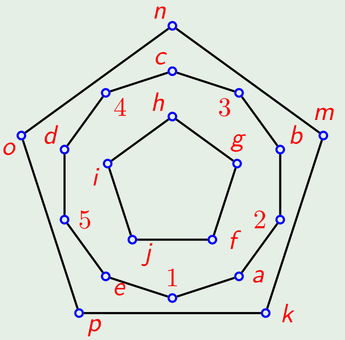


方法一：$G-\{a,b,c,d,e\}$,$7>5$，不存在哈密顿回路

方法二

Example

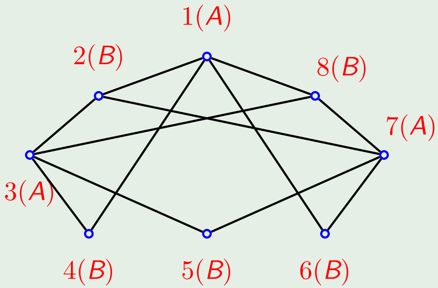
若图 G 中存在哈密顿回路，则该回路组成的图中任何结点的度数均为 2。因而结点 1、2、3、4、5 所关联的边均在回路中，于是在结点 a、b、c、d、e 处均应将不与 1、2、3、4、5 关联的边删除，而要删除与结点 a、b、c、d、e 关联的其它边，得到右图，它不是连通图，因而图中不存在哈密顿回路。



G

其它判定方法

Example



任取一结点如 1 用 A 标记，所有与它邻接的结点用 B 标记。继续不断地用 A 标记所有邻接于 B 的结点，用 B 标记所有邻接于 A 的结点，直到所有结点都标记完毕。

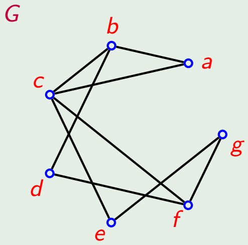
如果图中有一条哈密顿通路，那么它必交替通过结点 A 和 B，故而标记 A 的结点与标记 B 的结点数目或者相同，或者相差 1 个。然而图中有 3 个结点标记为 A，5 个结点标记为 B，它们相差两个，所以该图不存在哈密顿通路。

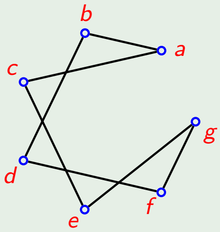
哈密顿图的应用

Example

今有 7 个人 a,b,c,d,e,f,g，已知：a 会讲英语；b 会讲英语和汉语；c 会讲英语、意大利语和俄语；d 会讲日语和汉语；e 会讲德语和意大利语；f 会讲法语，日语和俄语，g 会讲法语和德语。问能否将这 7 个人安排就坐圆桌旁，使得每个人都能与两边的人交谈？

解： 做无向图 $G =< V, E >$，$V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$，$E = \{(u, v)|u \neq v, 且\ u, v 有共同语言\}$。因而问题变成了图中是否存在哈密顿回路，这个回路就是他们的圆桌就坐顺序。





$C = acegfdba$

偶图的定义

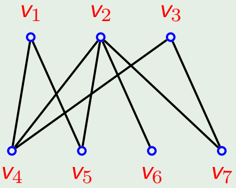
考虑：有一组工人和一批工作任务作为图中的结点，并根据工人对任务是否熟悉来建立边的连接。在这样的图中，工人之间没有边，工作任务之间也不会有边，所有的边都存在于工人组和任务组之间。这样的图称为偶图。

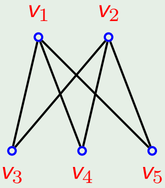
Definition

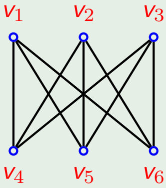
若无向图 $G=<V,E>$ 的结点集 V 能够划分为两个子集 V_1, V_2，满足 $V_1 \cap V_2 = \varnothing$，且 $V_1 \cup V_2 = V$，使得 G 中任意一条边的两个端点，一个属于 V_1，另一个属于 V_2，则称 G 为偶图(bipartite graph) 或二分图或二部图。V_1 和 V_2 称为互补结点子集，偶图通常记为 $G=<V_1, E, V_2>$。

偶图的定义

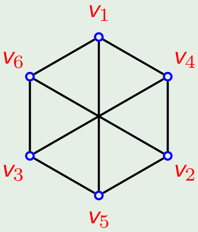
Example



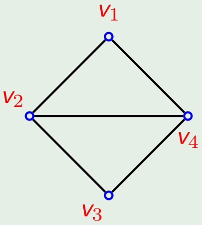




偶图



偶图



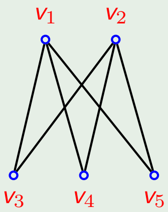
不是偶图

完全偶图

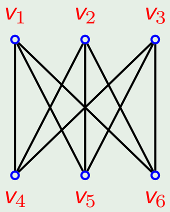
Definition

在偶图 $G=<V_1,E,V_2>$ 中，若 V_1 中的每个结点与 V_2 中的每个结点都有且仅有一条边相关联，则称偶图 G 为完全偶图或完全二分图，记为 $K_{i,j}$，其中，$i=|V_1|$，$j=|V_2|$。

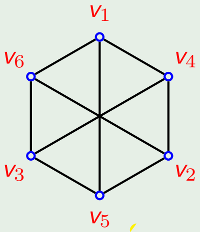
Example



$K_{2,3}$



$K_{3,3}$



$K_{3,3}$

偶图的充分必要条件

Theorem

无向图 $G=<V,E>$ 为偶图的充分必要条件是所有回路的长度均为偶数。

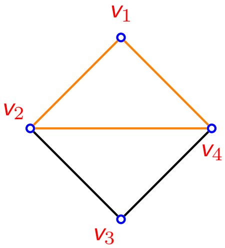
Proof.

- 必要性：令 $C=v_0v_1v_2\cdots v_kv_0$ 是偶图 $G=<V_1,E,V_2>$ 的任意一条回路，其长度为 $k+1$。不妨设 $v_0\in V_1$，由偶图的定义知，$v_1\in V_2$，$v_2\in V_1$，依次类推。又因 $v_0\in V_1$，所以 $v_k\in V_2$，因而 k 为奇数，故 C 的长度为偶数。
- 充分性：设 G 中每条回路的长度均为偶数，若 G 是连通图（否则可对 G 的每个连通分支继续如下论证），任选 $v_0\in V$，定义 V 的两个子集如下：$V_1=\{v_i|d(v_0,v_i)\text{为偶数}\}$，$V_2=V-V_1$。
  现证明 V_1 中任两结点间无边存在。假若存在一条边 $(v_i,v_j)\in E$，其中 $v_i,v_j\in V_1$，则由 v_0 到 v_i 间的短程线 (长度为偶数) 以及边 (v_i,v_j)，再加上 v_j 到 v_0 间的短程线 (长度为偶数) 所组成的回路的长度为奇数，与假设矛盾。
  同理可证 V_2 中任两结点间无边存在。
  故 G 中每条边 (v_i,v_j)，必有 $v_i\in V_1$，$v_j\in V_2$ 或 $v_i\in V_2$，$v_j\in V_1$，因此 G 是偶图。 □

充分必要条件的使用

☞ 注意

- 根据偶图的充分必要条件，我们可将平凡图和零图看成特殊的偶图。
- 我们常使用它的逆否命题来判断一个图不是偶图：无向图 G 不是偶图的充分必要条件是 G 中存在长度为奇数的回路。

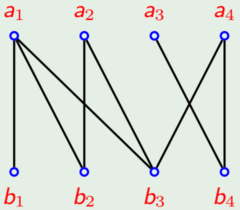


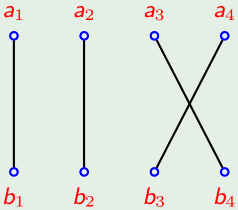
存在奇数长度回路，所以不是偶图

匹配的引入

Example

假设有 4 个工人 a_1，a_2，a_3，a_4，4 项工作任务 b_1，b_2，b_3，b_4，并且工人 a_1 熟悉任务 b_1，b_2，b_3；a_2 熟悉任务 b_2，b_3；a_3 熟悉任务 b_4；a_4 熟悉任务 b_3，b_4；建立偶图如下。那么，该如何给每个工人分配任务，并且保证每个人做的都是自己熟悉的任务呢？





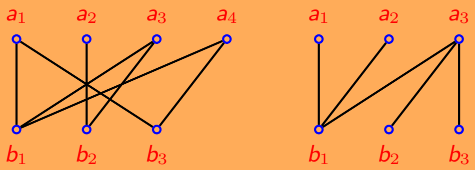
右图就是一种分配方案，称作原图的一个匹配。

偶图的匹配

Definition

在偶图 $G=<V_1,E,V_2>$ 中，$V_1=\{v_1,v_2,\cdots,v_q\}$，若存在 E 的子集 $E'=\{(v_1,v_1'),(v_2,v_2'),\cdots,(v_q,v_q')\}$，其中 v_1', v_2',$\cdots$, v_q' 是 V_2 中的 q 个不同的结点，则称 G 的子图 $G'=<V_1,E',V_2>$ 为从 V_1 到 V_2 的一个完全匹配，简称匹配。

匹配实际上就是在偶图 G $=<V_1$, E, $V_2>$ 中，寻找 V_1 到 V_2 的单射。显然，这样的单射有时并不存在。



匹配的判定条件

Theorem (霍尔定理)

偶图 $G=<V_1,E,V_2>$ 中存在从 V_1 到 V_2 的匹配的充分必要条件是 V_1 中任意 k 个结点至少与 V_2 中的 k 个结点相邻，$k=1,2,\cdots,|V_1|$。这个条件通常称为相异性条件(*diversity condition*)。

Theorem (t 条件)

设 $G=<V_1,E,V_2>$ 是一个偶图。如果满足:

1. V_1 中每个结点至少关联 t 条边；(V_1 中结点的最小度数)
2. V_2 中每个结点至多关联 t 条边；(V_2 中结点的最大度数)

则 G 中存在从 V_1 到 V_2 的匹配。其中 t 为正整数。这个条件通常称为 t 条件(*t-condition*)。

匹配的应用

Example

现有三个课外小组：物理组，化学组和生物组，有五个学生 s_1, s_2, s_3, s_4, s_5。

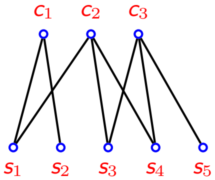
1. s_1, s_2 为物理组成员,s_1, s_3, s_4 为化学组成员,s_3, s_4, s_5 为生物组成员。
2. s_1 为物理组成员,s_2, s_3, s_4 为化学组成员,s_2, s_3, s_4, s_5 为生物组成员。
3. s_1 即为物理组成员, 又为化学组成员,s_2, s_3, s_4, s_5 为生物组成员。

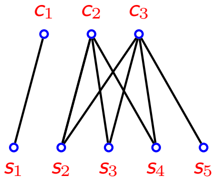
在以上三种情况的每一种情况下，在 s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 中选三位组长，不兼职，问能否办到？

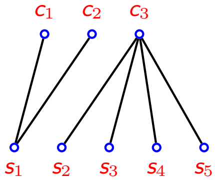
Solution

用 c_1, c_2, c_3 分别表示物理组、化学组和生物组。令 $V_1 = \{c_1, c_2, c_3\}$，$V_2 = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$，以 V_1，V_2 为互补结点子集，以 $E = \{(c_i, s_j) | c_i \in V_1, s_j \in V_2, c_i\text{中有成员}s_j\}$ 为边集，构造偶图，然后在这些偶图中寻找匹配。

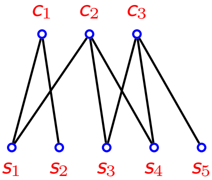
匹配的应用



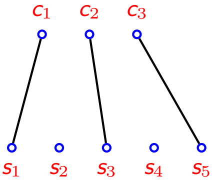


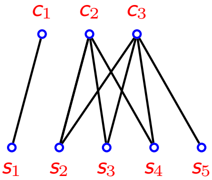


匹配的应用

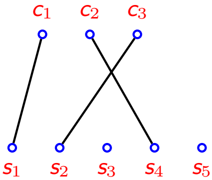


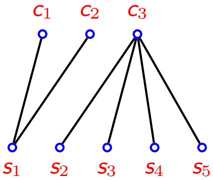
满足 t 条件，存在匹配





满足相异性条件，存在匹配





不满足相异性条件，不存在匹配

平面图的定义

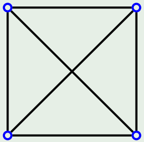
很多时候，我们需要避免图中的边在非端点位置交叉。例如在印制电路板和集成电路中，我们需要避免导线发生交叉，这会导致短路。又如在建筑布线时，也要注意尽量不能发生交叉，因为这会导致信号传输时的电磁干扰。

Definition

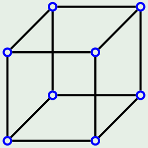
如果能够把一个无向图 G 的所有结点和边画在平面上，使得任何两边都不会在非结点处交叉，则称 G 为平面图(plane Graph)，否则称 G 为非平面图。

平面图示例

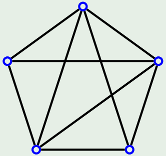
Example



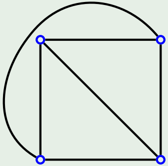
平面图 K_4



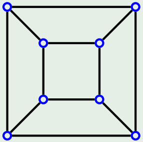
平面图 Q_3



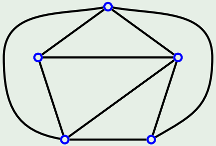
平面图 G



K_4 的平面表示



Q_3 的平面表示



G 的平面表示

引入平面图

平面图的面

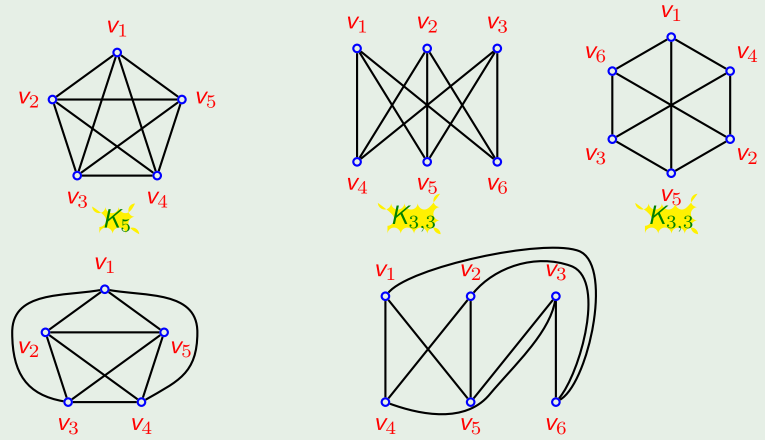
欧拉公式

平面图的必要条件

库拉托夫斯基定理

非平面图示例

Example

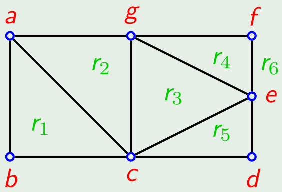


面和边界

Definition

在平面图 G 的一个平面表示中，由边所包围的其内部不包含图的结点和边的区域，称为 G 的一个面，包围该面的诸边所构成的回路称为这个面的边界，面 r 的边界的长度称为该面的次数，记为 $D(r)$。区域面积有限的面称为有限面，区域面积无限的面称为无限面。

Example



- r_1，边界为 $abca$，$D(r_1) = 3$;
- r_2，边界为 $acga$，$D(r_2) = 3$;
- r_3，边界为 $cegc$，$D(r_3) = 3$;
- r_4，边界为 $efge$，$D(r_4) = 3$;
- r_5，边界为 $cdec$，$D(r_5) = 3$;
- r_6，边界为 $abcdefga$，$D(r_6) = 7$;无限面

面

☞ 注意

面的概念也可以用下面形象的说法加以描述：假设我们把一个平面图的平面表示画在平面上，然后用一把小刀，沿着图的边切开，那么平面就被切成许多块，每一块就是图的一个面。更确切地说，平面图的一个面就是平面的一块，它用边作边界线，且不能再分成子块。

Theorem

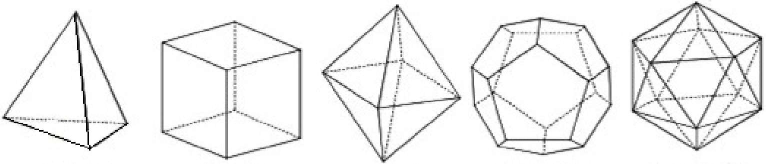
平面图中所有面的次数之和等于边数的二倍。

Proof.

因任何一条边，或者是两个面边界的公共边，或者是在一个面中作为边界被重复计算两次，故平面图所有面的次数之和等于其边数的二倍。 □

欧拉公式

1750 年，欧拉发现，任何一个凸多面体，若有 n 个顶点、m 条棱和 r 个面，则有 $n-m+r=2$。这个公式可以推广到平面图上来（球极投影），称之为欧拉公式。



正四面体 正六面体 正八面体 正十二面体 正二十面体

Theorem

设 $G=<V,E>$ 是连通平面图，若它有 n 个结点、m 条边和 r 个面，则有

$$n-m+r=2$$

欧拉公式的证明

Proof.

我们对 G 的边数 m 进行归纳。

1. 若 $m=0$，由于 G 是连通图，故必有 $n=1$，这时只有一个无限面，即 $r=1$。所以 $n-m+r=1-0+1=2$，定理成立。
2. 若 $m=1$，这时若该边是自回路，则有 $n=1$，$r=2$，从而 $n-m+r=1-1+2=2$；若该边不是自回路，则有 $n=2$，$r=1$，从而 $n-m+r=2-1+1=2$。所以 $m=1$ 时，定理也成立。
3. 假设对少于 m 条边的所有连通平面图，欧拉公式成立。现考虑 m 条边的连通平面图，设它有 n 个结点。分以下两种情况：
   - 若 G 是树，则 $m=n-1$，$r=1$。有 $n-m+r=n-(n-1)+1=2$;
   - 若 G 不是树，则 G 中必有回路，因此有基本回路，设 e 是某基本回路的一条边，则从 G 中删除边 e 后仍是连通平面图，它有 n 个结点，$m-1$ 条边和 $r-1$ 个面，按归纳假设知 $n-(m-1)+(r-1)=2$, 整理得 $n-m+r=2$.

所以对 m 条边时，欧拉公式也成立。 □

欧拉公式推论一

Corollary

设 G 是一个 (n, m) 简单连通平面图，若 $m > 1$，则有

$$m \leqslant 3n - 6\text{。}$$

Proof.

设 G 有 r 个面，因为 G 是简单图，所以 G 的每个面至少由 3 条边围成，所以 G 所有面的次数之和 (即边数的两倍)

$$\sum_{i=1}^{r} D(r_i) = 2m \geqslant 3 \times r$$

即 $r \leqslant \frac{2}{3}m$ ，代入欧拉公式有

$$2 = n - m + r \leqslant n - m + \frac{2}{3}m$$

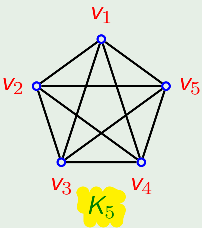
即 $2 \leqslant n - \frac{1}{3}m$，整理得 $m \leqslant 3n - 6$。 □

推论一的应用

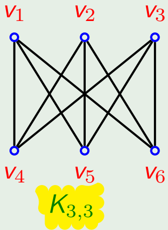
☞ 注意

欧拉公式的推论一（$m \leqslant 3n-6$）本身可能用处不大，但它的逆否命题却非常有用，可以用它来判定某些图是非平面图。即一个简单连通图，若不满足 $m \leqslant 3n-6$，则一定是非平面图。但需要注意，满足该不等式的简单连通图未必是平面图。

Example



$n=5$，$m=10$，$m > 3n-6 = 3\times5-6=9$，因此 K_5 不是平面图。



$n=6$，$m=9$，满足不等式 $m \leqslant 3n-6$，但 $K_{3,3}$ 是一个非平面图。

欧拉公式推论二

Corollary

设 G 是一个 (n, m) 简单连通平面图，若每个面的次数至少为 $k(k \geqslant 3)$，则有

$$m \leqslant \frac{k}{k-2}(n-2)。$$

Proof.

设 G 共有 r 个面，各面的次数之和 (等于边数的两倍) 为 T，由条件可知

$$2 \times m = T \geqslant k \times r$$

利用欧拉公式解出面数 $r = 2 - n + m$，得出下式成立

$$2 \times m \geqslant k \times (2 - n + m)$$

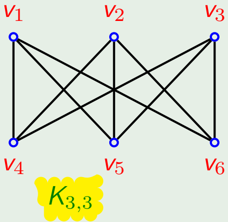
从而有 $(k-2) \times m \leqslant k \times (n-2)$ 由于 $k \geqslant 3$，因而 $m \leqslant \frac{k}{k-2}(n-2)$ □

推论二的应用

☞ 注意

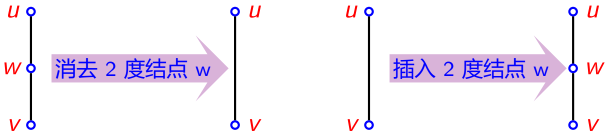
与欧拉公式的推论一类似，推论二本身可能用处不大，但它的逆否命题却非常有用，可以用它来判定某些图是非平面图。即一个简单连通图，若每个面的次数至少为 $k(k \geqslant 3)$，若不满足 $m \leqslant \frac{k}{k-2}(n-2)$，则一定是非平面图。

Example



$n=6$，$m=9$，每个面的次数至少为 4，代入不等式 $m \leqslant \frac{k}{k-2}(n-2)$，得到 $9 \leqslant \frac{4}{4-2}(6-2)$，即 $9 \leqslant 8$，这是矛盾的，因而 $K_{3,3}$ 是一个非平面图。

同胚



Definition

如果两个图 G_1 和 G_2 同构，或经过反复插入或消去 2 度结点后同构，则称 G_1 与 G_2 同胚。

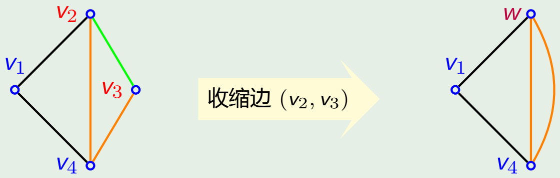
Example

收缩

Definition

图中边 $e=(u,v)$ 的收缩是指从 G 中删除 e，将 e 的两个端点 u,v 重合，用一个新的结点 w 代替，使 w 关联除 e 外的 u 和 v 关联的一切边，称为边 e 的收缩。一个图 G 可以收缩为图 H，是指 H 可以从 G 经过若干次边的收缩而得到。

Example



库拉托夫斯基定理

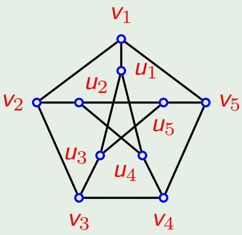
Theorem

一个图是平面图的充分必要条件是它的任何子图都不与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同胚。

Theorem

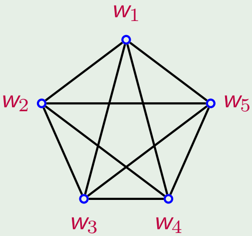
一个图是平面图的充分必要条件是它的任何子图都不能收缩为 K_5 或 $K_{3,3}$。

Example



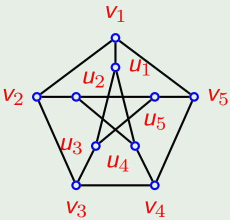
收缩边 (v_i, u_i)，

$i = 1, 2, 3, 4, 5$

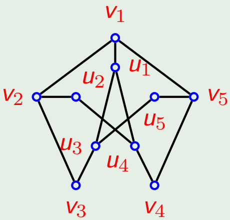


库拉托夫斯基定理

Example

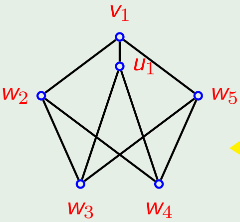


删除 $(u_2, u_5), (v_3, v_4)$



收缩边 (v_i, u_i) ,

$i = 2, 3, 4, 5$



$K_{3,3}$