第 10 章　　重积分复习课及单元测验

教学目的：

1、理解二重积分，了解重积分的性质，知道二重积分的中值定理。

2、掌握二重积分的（直角坐标、极坐标）计算方法。

教学重点：

1、二重积分的计算（直角坐标、极坐标）；

§10. 1　二重积分的概念与性质

一、*二重积分的概念*

定义 设 $f(x, y)$是有界闭区域 D 上的有界函数. 将闭区域 D 任意分成 n 个小闭区域

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n .$$

其中$\Delta\sigma_i$表示第 i 个小区域, 也表示它的面积. 在每个$\Delta\sigma_i$上任取一点(ξ_i, η_i), 作和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i .$$

如果当各小闭区域的直径中的最大值 λ 趋于零时, 这和的极限总存在, 则称此极限为函数 $f(x, y)$在闭区域 D 上的二重积分, 记作$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$, 即

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i .$$

$f(x, y)$被积函数, $f(x, y)d\sigma$被积表达式, $d\sigma$面积元素, x, y 积分变量, D 积分区域, 积分和.

直角坐标系中的面积元素:

如果在直角坐标系中用平行于坐标轴的直线网来划分 D, 那么除了包含边界点的一些小闭区域外, 其余的小闭区域都是矩形闭区域. 设矩形闭区域$\Delta\sigma_i$ 的边长为Δx_i 和Δy_i, 则$\Delta\sigma_i=\Delta x_i\Delta y_i$, 因此在直角坐标系中, 有时也把面积元素 $d\sigma$ 记作 $dxdy$, 而把二重积分记作

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

其中 $dxdy$ 叫做直角坐标系中的面积元素.

二重积分的存在性: 当 $f(x, y)$在闭区域 D 上连续时, 积分和的极限是存在的, 也就是说函数 $f(x, y)$在 D 上的二重积分必定存在. 我们总假定函数 $f(x, y)$在闭区域 D 上连续, 所以 $f(x, y)$在 D 上的二重积分都是存在的.

二重积分的几何意义: 如果 $f(x, y)\geq 0$, 被积函数 $f(x, y)$可解释为曲顶柱体的在点(x, y)处的竖坐标, 所以二重积分的几何意义就是柱体的体积. 如果 $f(x, y)$是负的, 柱体就在 xOy 面的下方, 二重积分的绝对值仍等于柱体的体积, 但二重积分的值是负的.

二. 二重积分的性质

性质 1 设 c_1、c_2 为常数, 则

$$\iint_D [c_1 f(x,y)+c_2 g(x,y)]d\sigma=c_1\iint_D f(x,y)d\sigma+c_2\iint_D g(x,y)d\sigma .$$

性质 2 如果闭区域 D 被有限条曲线分为有限个部分闭区域, 则在 D 上的二重积分等于在各部分闭区域上的二重积分的和. 例如 D 分为两个闭区域 D_1 与 D_2, 则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint_{D_2} f(x,y)d\sigma .$$

性质 3 $\iint_D 1\cdot d\sigma=\iint_D d\sigma=\sigma$ (σ 为 D 的面积).

性质 4 如果在 D 上, $f(x, y)\leq g(x, y)$, 则有不等式

$$\iint_D f(x,y)d\sigma\leq\iint_D g(x,y)d\sigma .$$

特殊地

$$|\iint_D f(x,y)d\sigma| \le \iint_D |f(x,y)|d\sigma .$$

性质 5 设 M、m 分别是 $f(x, y)$在闭区域 D 上的最大值和最小值, σ 为 D 的面积, 则有

$$m\sigma \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le M\sigma .$$

性质 6(二重积分的中值定理) 设函数 $f(x, y)$在闭区域 D 上连续, σ 为 D 的面积, 则在 D 上至少存在一点(ξ, η)使得

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\sigma .$$

§10. 2　二重积分的计算法

一、利用直角坐标计算二重积分

X—型区域:

D :　$\varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x),\ a\le x\le b$.

Y —型区域:

D :　$\psi_1(x)\le y\le \psi_2(x),\ c\le y\le d$.

混合型区域:

设 $f(x, y)\ge 0$,　$D=\{(x, y)|\ \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x),\ a\le x\le b\}$.

此时二重积分 $\iint_D f(x,y)d\sigma$ 在几何上表示以曲面 $z=f(x, y)$为顶, 以区域 D 为底的曲顶柱体的体积.

对于 $x_0\in[a,\ b]$,　曲顶柱体在 $x=x_0$ 的截面面积为以区间$[\varphi_1(x_0),\ \varphi_2(x_0)]$为底、以曲线 $z=f(x_0, y)$为曲边的曲边梯形, 所以这截面的面积为

$$A(x_0)=\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0,y)dy .$$

根据平行截面面积为已知的立体体积的方法, 得曲顶柱体体积为

$$V=\int_a^b A(x)dx = \int_a^b [\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy]dx .$$

即 $$V=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy]dx.$$

可记为

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

类似地，如果区域 D 为 Y——型区域:

$$D: \psi_1(x)\le y\le \psi_2(x),\ c\le y\le d,$$

则有

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx.$$

练习 1. 计算 $\iint\limits_D 2xydxdy$，其中 D 是由直线 $y=2x, y=x$，$y=1$、$y=2$ 所围成的闭区域.

练习 2. 计算 $\iint\limits_D y\sqrt{1+x^2-y^2}d\sigma$，其中 D 是由直线 $y=1$、$x=-1$ 及 $y=x$ 所围成的闭区域.

解　画出区域 D，可把 D 看成是 X——型区域: $-1\le x\le 1,\ x\le y\le 1$. 于是

把 D 看成是 Y––型区域：$-1\le y\le 1,\ -1\le x<y$．于是

.

练习 3 计算 $\iint\limits_D xyd\sigma$，其中 D 是由直线 $y=x-2$ 及抛物线 $y^2=x$ 所围成的闭区域.

二. 利用极坐标计算二重积分

函数含有 x^2+y^2，或者含有 $\dfrac{y}{x}$，且积分区域为圆域或圆环。

设 $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$

则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$.

若积分区域 D 可表示为：

$\varphi_1(\theta) \le \rho \le \varphi_2(\theta), \quad \alpha \le \theta \le \beta,$

则 $$\iint\limits_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

讨论:如何确定积分限?

$$\iint\limits_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta = \int_\alpha^\beta d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

$$\iint\limits_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

练习 4. 计算 $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy$，其中 D 是由中心在原点、半径为 a 的圆周所围成的闭区域.

重积分单元自测题

一 填空选择题

1、$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y)dy$ 交换积分次序后的结果为 [ ]

A、$\int_0^{1-x} dy \int_0^1 f(x, y)dx$ B、$\int_0^1 dy \int_0^{1-x} f(x, y)dx$

C、$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y)dx$ D、$\int_0^1 dy \int_0^{1-y} f(x, y)dx$

2、二次积分 $\int_0^1 dx \int_{x^2}^1 f(x, y)dy$ 交换积分次序后的结果为[ ]

A、$\int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x, y)dx$ B、$\int_0^1 dy \int_{y^2}^1 f(x, y)dx$

C、$\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{x}} f(x, y)\,dx$　　D、$\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx$

3、二次积分$\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(x, y)dy$交换积分次序后的结果为　[　　　]

A、$\int_0^1 dy\int_0^{y} f(x, y)dx$　　B、$\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x, y)dx$

C、$\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}} f(x, y)dx$　　D、$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{1} f(x, y)dx$

4、二次积分$\int_{-1}^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f\ (x\ ,\ y)dy$交换积分次序后的结果为　[　　　]

A、$\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f\ (x\ ,\ y)dx$　　B、$\int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f\ (x\ ,\ y)dx$

C、$\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f\ (x\ ,\ y)dx$　　D、$\int_{-1}^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f\ (x\ ,\ y)dx$

5、设$D=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\}$，则$\iint\limits_D dxdy=$　[　　　]

A、π　　B、2π　　C、3π　　D、4π

6、二次积分$\int_{-1}^1 dy\int_{y^2}^1 f(x, y)\,dx$交换积分次序后的结果为[　　　]

A、$\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x}}^{0} f(x, y)\,dy$　　B、$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x}} f(x, y)\,dy$

C、$\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x, y)\,dy$　　D、$\int_0^1 dx\int_{x^2}^{1} f(x, y)\,dy$

7、设区域D：$x^2+y^2\le a^2$，$x\ge 0$，$y\ge 0$，则由二重积分的性质得$\iint\limits_D 2d\sigma=$______.

8、**设区域**D：$x^2+y^2\le 1$，$y\ge 0$，**则二重积分**$\iint\limits_D f(x^2+y^2)d\sigma$**化为极坐标形式的二次积分为【　　】.**

A $\int_0^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r^2)dr$；　　(B) $\int_0^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r^2)rdr$；

(C) $\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 f(r^2)dr$；　　(D) $\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 f(r^2)rdr$.

二、求解下列各题：

1、计算 $I=\iint\limits_{D} xe^{xy}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

2、计算 $I=\iint\limits_{D}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}dxdy$，其中 D 是由 $D: x^2+y^2\le R^2$， $x\ge 0, y\ge 0$.

3、计算二重积分 $\iint\limits_{D}(2xy-x^2)dxdy$，其中 D 是由 $y=x^2$ 及 $y=x$ 围成的闭区域.

4、计算二重积分$\iint\limits_D (4x+2y)\,dxdy$，其中$D$是由$y=x^2$及$y=1$围成的闭区域.

5. 计算$I=\iint\limits_D 2xy\,dxdy$，其中$D$是由$x=2$、$y=x$及$y=\frac{1}{x}$围成的闭区域.

6、计算$I=\iint\limits_D \sin(x^2+y^2)dxdy$，其中$D: x^2+y^2\le 1$，$x\ge 0, y\ge 0$.

7、计算 $I=\iint\limits_D\left(\sqrt{x^2+y^2}-x^2-y^2\right)dxdy$，其中 $D: x^2+y^2\le 1$， $x\ge 0, y\ge 0$.

8、计算 $I=\iint\limits_D(2x+2y)dxdy$，其中 D 是由 $y=0$、 $x=0$ 及 $x+y=2$ 围成的闭区域.

9、计算二重积分 $\iint\limits_D\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)dxdy$，其中 D: $1\le x^2+y^2\le 4$， $x\ge 0, y\ge 0$.