模拟题-5 参考答案啊

一、填空题（每空 3 分，共 15 分）

1. $y=Ce^{x^2}$；

2. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1$；

3. $(1,2,3)$

4. $\dfrac{3\pi}{4}$；

5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}3^n x^n, x\in\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$

二、单项选择题（请把下列各题答案的序号填入括号内，每空 3 分，共 15 分）

1. A　　2. B　　3.A　　4. A　　5.B

三（9 分）、求过点 $P(0,2,5)$ 且与直线 $\begin{cases}x+2y-z+1=0\\x-y-z-1=0\end{cases}$ 平行的直线方程.

解 所求直线的方向向量为

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\1 & 2 & -1\\1 & -1 & -1\end{vmatrix}$$

$$=(-3,0,-3)$$

于是所求的直线方程为

$$L:\frac{x}{-3}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-5}{-3}，\text{即}\begin{cases}y=2\\x-z+5=0\end{cases}$$

四（9 分）、设有二元函数 $z=e^{\frac{y}{x}}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 及全微分 $dz\big|_{(1,0)}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}$ ……………………………………………………………………………

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}$ ……………………………………………………………………………

$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=0,\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}=1$ ……………………………………………………………

$dz\big|_{(1,0)}=dy$ ………………………………………………………………………………

五（9 分）、求二元函数 $f(x,y)=y^3-x^2+6x-12y+5$ 的极值.

解　解方程

$$\begin{cases} f_x(x,y)=-2x+6=0 \\ f_y(x,y)=3y^2-12=0 \end{cases}.$$ ……………………………………………………………

得驻点为 $(3,-2)$、$(3,2)$. ……………………………………………………………

$f_{xx}(x,y)=-2,\ f_{xy}(x,y)=0,\ f_{yy}(x,y)=6y.$ ……………………………………………

在点 $(3,-2)$ 处，$A=-2,\ B=0,\ C=-12$，$\Delta=AC-B^2=24>0$，$A=-2<0$

所以函数在点 $(3,-2)$ 处取得极大值.. ……………………………………………………

在点 $(3,2)$ 处，$A=-2,\ B=0,\ C=12$，$\Delta=AC-B^2=-24<0$，

所以点 $(3,2)$ 不是极值点.……………………………………………………………………

因此，$f(x,y)$ 的极大值为 $f(3,-2)=30$，无极小值. …………………………………

六（9 分）、计算二重积分 $\iint\limits_D xydxdy$，其中 D 是由直线 $y=2,y=x$ 及 $y=2x$ 所围成的闭区域.

解 积分区域

$D:0\le y\le 2,\dfrac{y}{2}\le x\le y$ ……………………………………………………………

于是

$$\iint\limits_D (xy+y)dxdy=\int_0^2 dy\int_{\frac{y}{2}}^{y} xydx$$ ………………………………………………

$$=\int_0^2 \frac{3}{8}y^3dy$$ ……………………………………………………………………

$$=\frac{3}{2}$$ ………………………………………………………………………………

七（9 分）、求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=36$ 在点 $(1,2,3)$ 处的切平面方程及法线方程.

解 令 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-36$，则

$F_x(x,y,z)=2x,F_y(x,y,z)=4y,F_z(x,y,z)=6z$ ……………………………

$F_x(1,2,3)=2,F_y(1,2,3)=8,F_z(1,2,3)=18$ ………………………………………

故曲面 $x^2+2y^2+3z^2=36$ 在点 $(1,2,3)$ 处的切平面方程

$2(x-1)+8(y-2)+18(z-3)=0$，即 $x+4y+9z-36=0.$ ………………………

法线方程为

$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{8}=\dfrac{z-3}{18}$，即 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{9}$ ………………………………………

八（10 分）、设有幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^n n^2}x^n$.

（1）求该幂级数的收敛半径；

（2）指出其收敛区间；

（3）讨论幂级数在收敛区间端点处的敛散性，并确定其收敛域.

解 (1) ∵ $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)^2}}{\dfrac{(-1)^n}{3^n n^2}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{3(n+1)^2}=\dfrac{1}{3}$. ……………………………

故级数收敛半径为 $R=3$. …………………………………………………………………

(2)级数的收敛区间为 $(-3,3)$. ………………………………………………………

(3)当 $x=-3$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^n n^2}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛； ……………………………

当 $x=3$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^n n^2}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$ 收敛. ……………………………

故级数的收敛域为 $[-3,3]$. ……………………………………………………………

九、（10 分）设有二阶非齐次线性微分方程 $y''-3y'+2y=2e^{3x}$.

(1)求对应的齐次线性微分方程的通解；

(2)求该方程的一个特解；

(3)写出该方程的通解.

解 (1) 对应齐次方程为 $y''-3y'+2y=0$ ……………………………………………

特征方程为 $\lambda^2-3\lambda+2=0$ ……………………………………………………

特征根为 $\lambda_1=1,\quad \lambda_2=2$ ……………………………………………………

故对应的齐次线性微分方程通解为 $\overline{y}(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}$ ……………………

(2) 方程特解形式为

$y^*(x)=ae^{3x}$ ………………………………………………………………………

代入非齐次方程, 并比较系数, 得 $a=1$. ……………………………………………

该方程的一个特解为 $y^*(x)=e^{3x}$. ……………………………………………………

(3) 非齐次方程通解为

$y(x)=\overline{y}(x)+y^*(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}+e^{3x}$. ……………………………………

十（5 分）、设 $z=f(u,v)$，其中 $u=x^2-y^2,v=y^2-x^2$， f 具有连续偏导数，证明 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

证明 ∵ $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x(f_u-f_v)$ ……………………………………………………………

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=2y(f_v-f_u)$ ……………………………………………………………

∴ $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=2xy(f_u-f_v)+2xy(f_v-f_u)=0$. ……………………………