第十一章　无穷级数

重点 ：

1、级数的基本性质及收敛的必要条件。

2、正项级数收敛性的比较判别法、比值判别法和根值判别；

3、交错级数的莱布尼茨判别法；

4、幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域；

5、$e^x, \sin x, \cos x$， $\ln(1+x)$ 和 $(1+a)^\alpha$ 的麦克劳林展开式；

§12. 1 常数项级数的概念和性质

一、常数项级数的概念

常数项级数：数列构成的表达式

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$，其中第 n 项 u_n 叫做级数的一般项.

级数的部分和: $s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$

级数敛散性定义: 如果 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$，则称

无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 这时极限 s 叫做这级数的和,

并写成 $$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots;$$

如果 $\{s_n\}$ 没有极限, 则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

余项: 当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛时， $r_n = s - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$ 叫做级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的余项.

结论 1 等比级数(几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$$

如果$|q|<1$，则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ 收敛，其和为 $\frac{a}{1-q}$；

如果$|q|\geq 1$，则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ 发散.

练习 1 判别无穷级数 $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$ 的收敛性.

二、收敛级数的基本性质

性质 1 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于和 s，则它的各项同乘以一个常数 k 所得的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛，且其和为 ks.（如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于和 s，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛，且其和为 ks.）

性质 2 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$、$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于和 s、σ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛，且其和为 $s\pm\sigma$.

性质 3 在级数中去掉、加上或改变有限项，不会改变级数的收敛性.

比如，级数 $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$ 是收敛的，

级数 $10000+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$ 也是收敛的，

级数 $\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$ 也是收敛的.

性质 4 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则对这级数的项任意加括号后所成的级数仍收敛，且其和不变.

应注意的问题：如果加括号后所成的级数收敛，则不能断定去括号后原来的级数也收敛. 例如，级数

(1–1)+(1–1) +· · ·收敛于零，但级数 1–1+1–1+· · ·却是发散的.

推论：如果加括号后所成的级数发散，则原来级数也发散.

级数收敛的必要条件:

性质 5 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ **收敛**，则它的一般项 u_n 趋于零，即 $\lim_{n\to0}u_n=0$.

（性质 5 的等价命题：若 $\lim_{n\to0}u_n\neq0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散 ）

结论 2 调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$ 是发散的.

§12. 2 常数项级数的审敛法

一、正项级数及其审敛法

正项级数：各项都是正数或零的级数。

定理 1 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充分必要条件它的部分和数列{s_n}有界.

定理 2(比较审敛法)设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都是正项级数，且 $u_n\le v_n\,(n=1, 2, \cdots)$. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；反之，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散. （**大收则小收，小发则大发**）

推论 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都是正项级数，如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，且存在自然数 N，使当 $n\ge N$ 时有 $u_n\le kv_n(k>0)$成立，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，且当 $n\ge N$ 时有 $u_n\ge kv_n(k>0)$成立，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

结论 3 p–级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$

（1）当 $p>1$ 时收敛,

（2）当 $p\le 1$ 时发散.

定理 3 (比较审敛法的极限形式) 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都是正项级数,

(1)如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l\ (0\le l<+\infty)$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛;

(2)如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l>0$或$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=+\infty$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

例 3 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{n}$ 的收敛性.

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，

根据比较审敛法的极限形式，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{n}$ 发散.

例 4 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\dfrac{1}{n^2})$ 的收敛性.

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}}=1$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，

根据比较审敛法的极限形式，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\dfrac{1}{n^2})$ 收敛.

定理 4(**比值审敛法**，达朗贝尔判别法)设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho,$$

则当 **$\rho<1$ 时级数收敛**；**当 $\rho>1$**(或 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\infty$)时级数**发散;** 当 $\rho=1$ 时级数可能收敛也可能发散.

例 5 证明级数$1+\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)}+\cdots$

是收敛的.

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)}{1\cdot2\cdot3\cdots n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0<1$,

根据比值审敛法可知所给级数收敛.

练习 2 判别级数 $\dfrac{1}{10}+\dfrac{1\cdot2}{10^2}+\dfrac{1\cdot2\cdot3}{10^3}+\cdots+\dfrac{n!}{10^n}+\cdots$ 的收敛性.

练习 3 判别级数 $\sum\limits_{n\to\infty}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)\cdot2n}$ 的收敛性.

定理 5 (根值审敛法, 柯西判别法)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是正项级数, 如果它的一般项 u_n 的 n 次根的极限等于 ρ: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$

则 1）当 $\rho<1$ 时级数**收敛**;

2）当 $\rho>1$(或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=+\infty$)时级数**发散;**

3）当 ρ=1 时级数可能收敛也可能发散.

练习 4 判定级数$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^n}+\cdots$ 是收敛的.

例 6 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$ 的收敛性.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sqrt[n]{2+(-1)^n}=\frac{1}{2},$$

所以, 根据根值审敛法知所给级数收敛.

定理 6 (极限审敛法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数,

(1)如果 $\lim_{n\to\infty}nu_n=l>0$(或$\lim_{n\to\infty}nu_n=+\infty$), 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散;

(2)如果 ***p*>1,** 而 $\lim_{n\to\infty}n^p u_n=l\ (0\le l<+\infty)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ **收敛.**

例 7 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n^2})$ 的收敛性.

解 因为 $\ln(1+\frac{1}{n^2})\sim\frac{1}{n^2}(n\to\infty)$, 故

$$\lim_{n\to\infty}n^2u_n=\lim_{n\to\infty}n^2\ln(1+\frac{1}{n^2})=\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{1}{n^2}=1,$$

根据极限审敛法, 知所给级数收敛.

二、交错级数及其审敛法

交错级数:各项是正负交错的.

交错级数的一般形式为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$，其中 $u_n>0$.

定理 6（**莱布尼茨定理**）

如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 满足条件:

(1)$u_n \geq u_{n+1}$ (n=1, 2, 3, · · ·);　(2)$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,

则级数收敛, 且其和 $s\leq u_1$, 其余项 r_n 的绝对值$|r_n|\leq u_{n+1}$.

例 9 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 收敛, 并估计和及余项.

证　这是一个交错级数. 因为此级数满足

$$(1)\ u_n=\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}=u_{n+1}(n=1, 2,\cdots),\quad (2)\ \lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

由莱布尼茨定理, 级数是收敛的, 且其和 $s<u_1=1$, 余项$|r_n|\leq u_{n+1}=\frac{1}{n+1}$.

三、绝对收敛与条件收敛:

绝对收敛与条件收敛:

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛;

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散, 则称级 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛.

例 10　级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ 是绝对收敛的, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 是条件收敛的.

定理 7 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 必定收敛.

值得注意的问题:

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，我们不能断定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散.

但是，如果我们用比值法或根值法判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，

则我们可以断定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 必定发散.

这是因为，此时$|u_n|$不趋向于零，从而 u_n 也不趋向于零，因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也是发散的.

例 11 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin na}{n^2}$ 的收敛性.

解 因为$|\frac{\sin na}{n^2}|\le\frac{1}{n^2}$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 是收敛的，

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|\frac{\sin na}{n^2}|$ 也收敛，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin na}{n^2}$ 绝对收敛.

§ 12. 3　幂级数

一、函数项级数的概念

函数项级数: 给定一个定义在区间 I 上的函数列$\{u_n(x)\}$, 由这函数列构成的表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

称为定义在区间 I 上的(函数项)级数

收敛点与发散点:

对于区间 I 内的一定点 x_0, 若常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 收敛, 则称点 x_0 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛点. 若常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 发散, 则称点 x_0 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的发散点.

收敛域与发散域:

函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的所有收敛点的全体称为它的收敛域, 所有发散点的全体称为它的发散域.

和函数:

在收敛域上, 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和是 x 的函数 $s(x)$, $s(x)$称为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和函数, 并写成 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$.

$\Sigma u_n(x)$是 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的简便记法, 以下不再重述.

在收敛域上, 函数项级数$\Sigma u_n(x)$的和是 x 的函数 $s(x)$, $s(x)$称为函数项级数$\Sigma u_n(x)$的和函数, 并写成 $s(x)=\Sigma u_n(x)$.

这函数的定义就是级数的收敛域,

部分和:

函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的前 n 项的部分和记作 $s_n(x)$, 函数项级数$\Sigma u_n(x)$的前 n 项的部分和记作 $s_n(x)$, 即

$s_n(x)= u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+ \cdots +u_n(x).$

在收敛域上有 $\lim_{n\to\infty} s_n(x)=s(x)$ 或 $s_n(x)\to s(x)(n\to\infty)$.

余项:

函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和函数 $s(x)$与部分和 $s_n(x)$的差

$r_n(x)=s(x)-s_n(x)$

叫做函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的余项.

函数项级数$\sum u_n(x)$的余项记为 $r_n(x)$, 它是和函数 $s(x)$与部分和 $s_n(x)$的差 $r_n(x)=s(x)-s_n(x)$.

在收敛域上有 $\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$.

二、幂级数及其收敛性

幂级数:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+ \cdots +a_nx^n+ \cdots ,$$

其中常数 $a_0, a_1, a_2, \cdots , a_n , \cdots$叫做幂级数的系数.

幂级数

$$1+x+x^2+x^3+ \cdots +x^n + \cdots$$

可以看成是公比为 x 的几何级数.

1)当$|x|<1$ 时它是收敛的;

2)当$|x|\geq 1$ 时, 它是发散的.

因此它的收敛域为$(-1, 1)$, 在收敛域内有和函数:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots \, . \, |x|<1$$

定理 1 (阿贝尔定理) 如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 当 $x=x_0$ $(x_0\neq 0)$时收敛, 则适合不等式

$|x|<|x_0|$的一切 x 使这幂级数绝对收敛. 反之, 如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 当

$x=x_0$ 时发散, 则适合不等式$|x|>|x_0|$的一切 x 使这幂级数发散.

推论　如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 不是仅在点 $x=0$ 一点收敛，也不是在整个数轴上都收敛，则必有一个完全确定的正数 R 存在，使得

当$|x|<R$ 时，幂级数绝对收敛;

当$|x|>R$ 时，幂级数发散;

当 $x=R$ 与 $x=-R$ 时，幂级数可能收敛也可能发散.

收敛半径与收敛区间：正数 R 通常叫做幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径. 开区间$(-R, R)$叫做幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛区间. 再由幂级数在 $x=\pm R$ 处的收敛性就可以决定它的收敛域. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛域是$(-R, R)$(或$[-R, R)$、$(-R, R]$、$[-R, R]$之一.

规定：若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 只在 $x=0$ 收敛，则规定收敛半径 $R=0$，若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 对一切 x 都收敛，则规定收敛半径 $R=+\infty$，这时收敛域为$(-\infty, +\infty)$.

定理 2　如果 $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\rho$，其中 a_n、a_{n+1} 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的相邻两项的系数，则这幂级数的收敛半径

$$R=\begin{cases}+\infty & \rho=0\\ \dfrac{1}{\rho} & \rho\neq 0\\ 0 & \rho=+\infty\end{cases}.$$

例 1　求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$$

的收敛半径与收敛域.

解　因为 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1$,

所以收敛半径为 $R=\frac{1}{\rho}=1$.

当 x=1 时，幂级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$，是收敛的;

当 x=−1 时，幂级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n})$，是发散的．因此，收敛域为(−1, 1].

例 2　求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$

$$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

的收敛域.

解　因为 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=0$,

所以收敛半径为 R=+∞，从而收敛域为(−∞, +∞).

例 3 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!x^n$ 的收敛半径.

解 因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=+\infty,$$

所以收敛半径为 R=0，即级数仅在 x=0 处收敛.

例 4 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$ 的收敛半径.

解 级数缺少奇次幂的项, 定理 2 不能应用. 可根据比值审敛法来求收敛半径:

幂级数的一般项记为 $u_n(x)=\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$.

因为 $\lim_{n\to\infty}|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}|=4|x|^2$,

当 $4|x|^2<1$ 即 $|x|<\frac{1}{2}$ 时级数收敛; 当 $4|x|^2>1$ 即 $|x|>\frac{1}{2}$ 时级数发散, 所以收敛半径为 $R=\frac{1}{2}$.

提示: $$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}=\frac{\frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2}x^{2(n+1)}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}}=\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}x^2.$$

例 5 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n n}$ 的收敛域.

解 令 $t=x-1$，上述级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2^n n}$.

因为 $\rho=\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\frac{2^n\cdot n}{2^{n+1}\cdot(n+1)}=\frac{1}{2}$,

所以收敛半径 $R=2$.

当 $t=2$ 时，级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，此级数发散；当 $t=-2$ 时，级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)}{n}$，此级数收敛. 因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2^n n}$ 的收敛域为 $-2\le t<2$. 因为 $-2\le x-1<2$，即 $-1\le x<3$，所以原级数的收敛域为 $[-1, 3)$.

三、幂级数的运算

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 及 $\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ 分别在区间 $(-R, R)$ 及 $(-R', R')$ 内收敛，则在 $(-R, R)$ 与 $(-R', R')$ 中较小的区间内有

加法：$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$,

减法：$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)x^n$,

设幂级数 $\sum a_n x^n$ 及 $\sum b_n x^n$ 分别在区间 $(-R, R)$ 及 $(-R', R')$ 内收敛，则在 $(-R, R)$ 与 $(-R', R')$ 中较小的区间内有

加法：$\sum a_n x^n+\sum b_n x^n=\sum(a_n+b_n)x^n$,

减法：$\sum a_n x^n-\sum b_n x^n=\sum(a_n-b_n)x^n$.

乘法：$(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n)\cdot(\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\cdots$

$+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)x^n+\cdots$

性质 1 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛域 I 上连续.

如果幂级数在 $x=R$ (或 $x=-R$) 也收敛，则和函数 $s(x)$ 在 $(-R, R]$ (或 $[-R, R)$) 连续.

性质 2 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛域 I 上可积，并且有逐项积分公式

$$\int_0^x s(x)dx=\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\ (x\in I),$$

逐项积分后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.（收敛域可能不同）

性质 3 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $s(x)$在其收敛区间$(-R, R)$内可导，并且有逐项求导公式

$$s'(x)=(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}\ (|x|<R),$$

逐项求导后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径. （收敛域不一定相同）

例 6 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n$ 的和函数.

解 求得幂级数的收敛域为$[-1, 1)$.

设和函数为 $s(x)$，即 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n$, $x\in[-1, 1)$. 显然 $s(0)=1$.

在 $xs(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ 的两边求导得

$$[xs(x)]'=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{n+1}x^{n+1})'=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}.$$

对上式从 0 到 x 积分，得

$$xs(x)=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x).$$

于是，当 $x\neq0$ 时，有 $s(x)=-\frac{1}{x}\ln(1-x)$. 从而 $s(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln(1-x) & 0<|x|<1\\ 1 & x=0\end{cases}$.

因为 $xs(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}=\int_0^x[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}]'dx$

$$=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}x^ndx=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x),$$

所以，当 $x\neq0$ 时，有 $s(x)=-\frac{1}{x}\ln(1-x)$，

从而 $s(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln(1-x) & 0<|x|<1\\ 1 & x=0\end{cases}$.

例 7　求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ 的和.

解　考虑幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n$，此级数在$[-1, 1)$上收敛，设其和函数为 $s(x)$，则 $s(-1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$.

在例 6 中已得到 $xs(x)=\ln(1-x)$，于是$-s(-1)=\ln 2$，$s(-1)=\ln\frac{1}{2}$，即 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\ln\frac{1}{2}$.

§12. 4　函数展开成幂级数

一、泰勒级数

泰勒级数：如果 $f(x)$在点 x_0 的某邻域内具有各阶导数 $f'(x), f''(x), \cdots,$ $f^{(n)}(x), \cdots$，则当 $n\to\infty$时，$f(x)$在点 x_0 的泰勒多项式

$$p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

成为幂级数

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

这一幂级数称为函数 $f(x)$的泰勒级数.　显然，当 $x=x_0$ 时，$f(x)$的泰勒级数收敛于 $f(x_0)$.

需回答的问题：除了 $x=x_0$ 外，$f(x)$的泰勒级数是否收敛？如果收敛，它是否一定收敛于 $f(x)$?

定理　设函数 $f(x)$在点 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$内具有各阶导数，则 $f(x)$在该邻域内能展开成泰勒级数的充分必要条件是 $f(x)$的泰勒公式中的余项 $R_n(x)$当 $n\to 0$ 时的极限为零，即

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0\ \ (x\in U(x_0)).$$

麦克劳林级数：在泰勒级数中取 $x_0=0$，得

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots,$$

此级数称为 $f(x)$的麦克劳林级数.

展开式的唯一性：如果 $f(x)$能展开成 x 的幂级数，那么这种展式是唯一的，它一定与 $f(x)$的麦克劳林级数一致.

应注意的问题：如果 $f(x)$能展开成 x 的幂级数，那么这个幂级数就是 $f(x)$的麦克劳林级数. 但是，反过来如果 $f(x)$的麦克劳林级数在点 $x_0=0$ 的某邻域内收敛，它却不一定收敛于 $f(x)$. 因此，如果 $f(x)$在点 $x_0=0$ 处具有各阶导数，则 $f(x)$的麦克劳林级数虽然能作出来，但这个级数是否在某个区间内收敛，以及是否收敛于 $f(x)$却需要进一步考察.

二、函数展开成幂级数

直接法步骤：

第一步 求出 $f(x)$的各阶导数：$f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n)}(x), \cdots$.

第二步 求函数及其各阶导数在 $x=0$ 处的值：

$f(0), f'(0), f''(0), \cdots, f^{(n)}(0), \cdots$.

第三步 写出幂级数

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots,$$

并求出收敛半径 R.

第四步 考察在区间$(-R, R)$内时是否 $R_n(x)\to 0(n\to\infty)$.

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

是否为零. 如果 $R_n(x)\to 0(n\to\infty)$，则 $f(x)$在$(-R, R)$内有展开式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots\ (-R<x<R).$$

间接展开法:

例 4 将函数 $f(x)=\cos x$ 展开成 x 的幂级数.

解 已知

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots \quad (-\infty<x<+\infty).$$

对上式两边求导得

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty).$$

例 5 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

解 因为 $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots(-1<x<1)$,

把 x 换成 $-x^2$, 得

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots \quad (-1<x<1).$$

注: 收敛半径的确定: 由 $-1<-x^2<1$ 得 $-1<x<1$.

例 6 将函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数.

解 因为 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$,

而 $\dfrac{1}{1+x}$ 是收敛的等比级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ $(-1<x<1)$的和函数:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots.$$

所以将上式从 0 到 x 逐项积分, 得

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots\ (-1<x\le 1).$$

解: $f(x)=\ln(1+x)=\int_0^x[\ln(1+x)]'dx=\int_0^x\frac{1}{1+x}dx$

$$=\int_0^x[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n]dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\ (-1<x\le 1).$$

上述展开式对 $x=1$ 也成立, 这是因为上式右端的幂级数当 $x=1$ 时收敛, 而 $\ln(1+x)$在 $x=1$ 处有定义且连续.

例 7 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}$ 展开成$(x-1)$的幂级数.

解 因为

$$f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{1}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{2(1+x)}-\frac{1}{2(3+x)}=\frac{1}{4(1+\frac{x-1}{2})}-\frac{1}{8(1+\frac{x-1}{4})}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^n}-\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{4^n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n\ (-1<x<3).$$

提示: $1+x=2+(x-1)=2(1+\frac{x-1}{2}),\ 3+x=4+(x-1)=4(1+\frac{x-1}{4})$.

$$\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^n}\ (-1<\frac{x-1}{2}<1),$$

$$\frac{1}{1+\frac{x-1}{4}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{4^n}\ (-1<\frac{x-1}{4}<1),$$

收敛域的确定: 由 $-1<\frac{x-1}{2}<1$ 和 $-1<\frac{x-1}{4}<1$ 得 $-1<x<3$.

记住：展开式小结:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots(-1<x<1),$$

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots\frac{1}{n!}x^n+\cdots(-\infty<x<+\infty),$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty),$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty),$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots(-1<x\le 1),$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots\quad+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots(-1<x<1).$$

第十章 无穷级数单元测验

一、选择题

1、关于级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2+n}$的敛散性，最准确的结论是 [ ]

A、收敛
B、发散
C、绝对收敛
D、条件收敛

2、关于级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$的敛散性，最准确的结论是 [ ]

A、收敛
B、发散
C、绝对收敛
D、条件收敛

3、设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$，且$u_n<v_n(n\geq1)$，则下列命题正确的是 [ ]

A、若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$必定收敛

B、若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$必定发散

C、若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$必定发散

D、以上都不对

4、关于级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$的敛散性，最准确的结论是 [ ]

A、收敛
B、发散
C、绝对收敛

D、条件收敛

5、设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} u_n$ [ ]

A、收敛
B、发散
C、可能收敛也可能发散
D、以上都不对

6、关于级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$的敛散性，最准确的结论是 [ ]

A、收敛
B、发散
C、绝对收敛
D、条件收敛

7、设级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则下列结论中，错误的是 [ ]

A、$\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+100}$收敛

B、$\sum_{n=1}^{\infty} 100 u_n$收敛

C、$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$收敛

D、$\lim_{n \to \infty} u_n = 0$

8、关于级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n-1}$的敛散性，最准确的结论是 [ ]

A、收敛
B、发散
C、绝对收敛
D、条件收敛

9、若$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$的敛散性是[　　　]

A.收敛；
 B.发散；
C.可能收敛也可能发散；
 D.无法确定.

10、如果幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x=3$处发散，则下列结论正确的是[　　　]

A、当$|x|<3$时级数绝对收敛；

B、当$|x|<3$时级数条件收敛；

C、当$|x|>3$时级数发散；

D、以上结论都不对.

二、填空题

1、设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为R (0 < R <+∞), 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{x}{2}\right)^n$ 的收敛半径为________________.

2、函数 $f(x)=\frac{1}{3+x}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数为______________________.

3、函数 $f(x)=\frac{1}{2+x}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数为________________________.

4、设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为 $(0,1]$ ，则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-2)^n$ 的收敛域为___.

5、函数 $f(x)=\frac{1}{2-x}$ 展开成 $x+1$ 的幂级数为__________________________.

6、函数 $f(x)=\frac{1}{2-x}$ 展开成 x 的幂级数为__________________________.

7、若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$ （ $p>0$ ）绝对收敛， 则 p 的取值范围是____________.

三、求下列各题

1、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(x-2)^n$ 的收敛半径和收敛域.（8 分）

2、设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}(x-1)^n$，求幂级数的收敛域.（8 分）

3、设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{n+1}x^n$，求幂级数的收敛半径及收敛域.（8 分）

4、设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n}}x^n$，求幂级数的收敛半径、收敛区间；讨论级数在区间端点的敛散性，并写出收敛域.（8 分）

5、设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}x^n$，求幂级数的收敛半径、收敛区间；讨论级数在区间端点

的敛散性，并写出收敛域.（10 分）

6、设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}(x-1)^n$，求幂级数的收敛半径、收敛区间；讨论级数在区间端点的敛散性，并写出收敛域.（10 分）

7、设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^n}x^n$，求幂级数的收敛半径及收敛域.（8 分）