第七章　空间解析几何与向量代数

教学目的：

1、理解空间直角坐标系，理解向量的概念及其表示。

2、掌握向量的运算（线性运算、数量积、向量积、混合积），掌握两个向量垂直和平行的条件。

3、理解单位向量、方向数与方向余弦、向量的坐标表达式，熟练掌握用坐标表达式进行向量运算的方法。

4、掌握平面方程和直线方程及其求法。

5、会求平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的夹角，并会利用平面、直线的相互关系（平行、垂直、相交等）解决有关问题。

6、点到直线以及点到平面的距离。

7、理解曲面方程的概念，了解常用二次曲面的方程及其图形，会求以坐标轴为旋转轴的旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程。

8、了解空间曲线的参数方程和一般方程。

9、了解空间曲线在坐标平面上的投影，并会求其方程。

教学重点：

1、向量的线性运算、数量积、向量积的概念、向量运算及坐标运算；

2、两个向量垂直和平行的条件；

3、平面方程和直线方程；

4、平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的相互位置关系的判定条件；

5、点到直线以及点到平面的距离；

6、常用二次曲面的方程及其图形；

7、旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程；

8、空间曲线的参数方程和一般方程。

教学难点：

1、向量积的向量运算及坐标运算；

2、平面方程和直线方程及其求法；

3、点到直线的距离；

4、二次曲面图形；

5、旋转曲面的方程；

§7.1 向量及其线性运算

一、向量概念

向量:既有大小, 又有方向.

记作 $\overrightarrow{AB}$. , $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$ 、$\vec{r}$ 、$\vec{v}$ 、$\vec{F}$.

自由向量:起点无关的向量，简称向量.

向量的模: 向量的大小叫做向量的模.

向量 $\boldsymbol{a}$、$\vec{a}$ 、$\overrightarrow{AB}$ 的模分别记为$|\boldsymbol{a}|$、$|\vec{a}|$ 、$|\overrightarrow{AB}|$.

单位向量: 模等于 1 的向量叫做单位向量.

零向量: 模等于 0 的向量叫做零向量, 记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$.方向是任意的.

向量的平行:方向相同或相反的，记作 $\boldsymbol{a} // \boldsymbol{b}$. 零向量认为是与任何向量都平行.

当两个平行向量的起点放在同一点时, 它们的终点和公共的起点在一条直线上. 因此, 两向量平行又称两向量共线.

类似还有共面的概念. 设有 $k(k\geq 3)$个向量, 当把它们的起点放在同一点时, 如果 k 个终点和公共起点在一个平面上, 就称这 k 个向量共面.

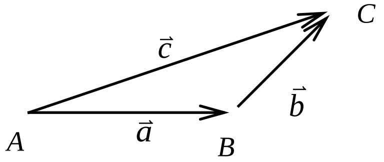
二、向量的线性运算

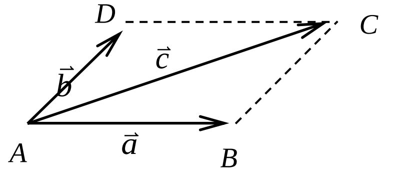
1．向量的加法

1)三角形法则: 设有两个向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$, 平移向量使$\boldsymbol{b}$的起点与$\boldsymbol{a}$的终点重合, 此时从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和, 记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

2） 平行四边形法则:

当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时, 平移向量使 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合, 以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边作一平行四边形, 从公共起点到对角的向量等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.





负向量:

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量, 与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反，记为$-\boldsymbol{a}$.

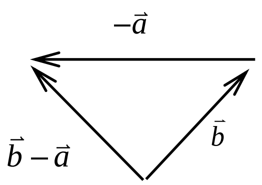
向量的减法:

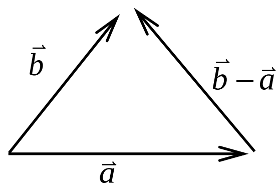
$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}).$$

即把向量$-\boldsymbol{a}$ 加到向量 $\boldsymbol{b}$ 上, 便得 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

特别地, 当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时, 有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$





显然, 任给向量 $\overrightarrow{AB}$ 及点 O, 有

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA},$$

因此, 若把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点 O, 则从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 向 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 所引向量 $\overrightarrow{AB}$ 便是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

三角不等式:

由三角形两边之和大于第三边的原理, 有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\le|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \text{及} |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\le|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

其中等号在 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向或反向时成立.

2．向量与数的乘法

向量与数的乘法：

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$, 规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量, 它的模$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$, 它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同, 当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反.

当 $\lambda=0$ 时, $|\lambda\boldsymbol{a}|=0$, 即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量, 这时它的方向可以是任意的.

特别地, 当 $\lambda=\pm1$ 时, 有

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},\ (-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}.$$

运算规律:

(1)结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(2)分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

向量的单位化:

设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, 则向量 $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量, 记为 $\boldsymbol{e}_a$.

于是 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{e}_a$.

定理 1　设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, 那么, 向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是: 存在唯一的实数 λ, 使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

三、空间直角坐标系

向量的坐标分解式:

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\,.$$

$x\boldsymbol{i}$、$y\boldsymbol{j}$、$z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿三个坐标轴方向的分向量.

点 M 与向量 $\boldsymbol{r}$ 之间的对应关系

$$M\leftrightarrow\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\leftrightarrow(x,y,z)\,.$$

向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于原点 O 的向径. 上述定义表明, 一个点与该点的向径有相同的坐标. 记号 (x, y, z) 既表示点 M, 又表示向量 $\overrightarrow{OM}$.

坐标面上和坐标轴上的点, 其坐标各有一定的特征. 例如: 点 M 在 yOz 面上, 则 $x=0$; 同样, 在 zOx 面上的点, $y=0$; 在 xOy 面上的点, $z=0$. 如果点 M 在 x 轴上, 则 $y=z=0$; 同样在 y 轴上,有 $z=x=0$; 在 z 轴上 的点, 有 $x=y=0$. 如果点 M 为原点, 则 $x=y=z=0$.

四、利用坐标作向量的线性运算

设 $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\boldsymbol{b}=(b_x, b_y, b_z)$

即　$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$,

则　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z)$.

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x, a_y-b_y, a_z-b_z)$.

$\lambda\boldsymbol{a}= =(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$.

利用向量的坐标判断两个向量的平行: 设 $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)\neq0$, $\boldsymbol{b}=(b_x, b_y, b_z)$, 向量 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}\Leftrightarrow\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$, 即 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}\Leftrightarrow(b_x, b_y, b_z)=\lambda(a_x, a_y, a_z)$, 于是 $\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}$.

例 2 求解以向量为未知元的线性方程组$\begin{cases}5\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}\\3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}\end{cases}$,

其中 $\boldsymbol{a}=(2, 1, 2), \boldsymbol{b}=(-1, 1, -2)$.

解 如同解二元一次线性方程组，可得

$$\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}=3\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}.$$

以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的坐标表示式代入，即得

$$\boldsymbol{x}=2(2, 1, 2)-3(-1, 1, -2)=(7, -1, 10),$$

$$\boldsymbol{y}=3(2, 1, 2)-5(-1, 1, -2)=(11, -2, 16).$$

例 3 已知两点 $A(x_1, y_1, z_1)$和 $B(x_2, y_2, z_2)$以及实数 $\lambda\neq-1$,

在直线 AB 上求一点 M（x,y,z），使 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$.

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

点 M 叫做有向线段$\overrightarrow{AB}$的定比分点. 当 $\lambda=1$，点 M 的有向线段$\overrightarrow{AB}$的中点，其坐标为 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$，$y=\frac{y_1+y_2}{2}$，$z=\frac{z_1+z_2}{2}$.

五、向量的模、方向角、投影

1．向量的模与两点间的距离公式

于是点 A 与点 B 间的距离为

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

练习 1 求证以 $M_1(4, 3, 1)$、$M_2(7, 1, 2)$、$M_3(5, 2, 3)$三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

练习 2　在 z 轴上求与两点 $A(-4, 1, 7)$和 $B(3, 5, -2)$等距离的点.

练习 3　已知两点 $A(4, 0, 5)$和 $B(7, 1, 3)$, 求与 $\overrightarrow{AB}$ 方向相同的单位向量 $\boldsymbol{e}$.

2．方向角与方向余弦

当把两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点放到同一点时, 两个向量之间的不超过 π 的夹角称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角, 记作 $(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$ 或 $(\boldsymbol{b}\hat{,}\boldsymbol{a})$. 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量, 规定它们的夹角可以在 0 与 π 之间任意取值.

类似地, 可以规定向量与一轴的夹角或空间两轴的夹角.

非零向量 $\boldsymbol{r}$ 与三条坐标轴的夹角 α、β、γ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向角.

向量的方向余弦:

设 $\boldsymbol{r}=(x, y, z)$,

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\quad \cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\quad \cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}.$$

从而 $$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)=\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_r.$$

$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦.

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

练习 4 设已知两点 $A(2, 2, \sqrt{2})$)和 $B(1, 3, 0)$, 计算向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模、方向余弦和方向角.

3．向量在轴上的投影

设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{e}$ 确定 u 轴.

任给向量 $\boldsymbol{r}$, 作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$, 再过点 M 作与 u 轴垂直的平面交 u 轴于点 M'(点 M'叫作点 M 在 u 轴上的投影), 则向量 $\overrightarrow{OM'}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的分向量. 设 $\overrightarrow{OM'}=\lambda\boldsymbol{e}$, 则数 λ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的投影, 记作 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}$ 或$(\boldsymbol{r})_u$.

按此定义, 向量 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标 a_x, a_y, a_z 就是 $\boldsymbol{a}$ 在三条坐标轴上的投影, 即

$$a_x=\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a},\ a_y=\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a},\ a_z=\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a}.$$

投影的性质:

性质 1 $(\boldsymbol{a})_u=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$ (即 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$), 其中 φ 为向量与 u 轴的夹角;

性质 2 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_u=(\boldsymbol{a})_u+(\boldsymbol{b})_u$ (即 $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$);

性质 3 $(\lambda\boldsymbol{a})_u=\lambda(\boldsymbol{a})_u$ (即 $\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$);

§7. 2　数量积　向量积

一、两向量的数量积

数量积: 对于两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 它们的模 $|\boldsymbol{a}|$、$|\boldsymbol{b}|$ 及它们的夹角 θ 的余弦的乘积称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的数量积, 记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, 即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta .$$

数量积与投影:

由于 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta=|\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\hat{}\,\boldsymbol{b})$, 当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时, $|\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\hat{}\,\boldsymbol{b})$ 是向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向上的投影, 于是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$.

同理, 当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\,\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$.

数量积的性质:

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$.

(2) 对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$, 如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, 则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$; 反之, 如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

如果认为零向量与任何向量都垂直, 则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

数量积的坐标表示:

设 $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\boldsymbol{b}=(b_x, b_y, b_z)$, 则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z .$$

两向量夹角的余弦的坐标表示:

设 $\theta=(\boldsymbol{a},\wedge\,\boldsymbol{b})$, 则当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$、$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时, 有

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}} .$$

练习 5　已知三点 $M(1, 1, 1)$、$A(2, 2, 1)$和 $B(2, 1, 2)$, 求 $\angle AMB$.

二、两向量的向量积

向量积: 设向量 $\boldsymbol{c}$ 是由两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 按下列方式定出:
$\boldsymbol{c}$ 的模 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$, 其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 间的夹角;
$\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面, $\boldsymbol{c}$ 的指向按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定.
那么, 向量 $\boldsymbol{c}$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积, 记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, 即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

向量积的性质:
(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$;
(2) 对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$, 如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$; 反之, 如果 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$, 则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.
如果认为零向量与任何向量都平行, 则 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.
数量积的运算律:
(1) 交换律 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$;
(2) 分配律: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.
(3) $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ (λ 为数).

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=a_yb_z\boldsymbol{i}+a_zb_x\boldsymbol{j}+a_xb_y\boldsymbol{k}-a_yb_x\boldsymbol{k}-a_xb_z\boldsymbol{j}-a_zb_y\boldsymbol{i}$$

$$=(a_y b_z-a_z b_y)\boldsymbol{i}+(a_z b_x-a_x b_z)\boldsymbol{j}+(a_x b_y-a_y b_x)\boldsymbol{k}.$$

练习 6 设 $\boldsymbol{a}=(2, 1, -1)$, $\boldsymbol{b}=(1, -1, 2)$, 计算 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

练习 7 已知三角形 ABC 的顶点分别是 A (1, 2, 3)、B (3, 4, 5)、C (2, 4, 7), 求三角形 ABC 的面积.

§7. 3　曲面及其方程

一、曲面方程的概念

例 1　设有点 $A(1, 2, 3)$和 $B(2, -1, 4)$, 求线段 AB 的垂直平分面的方程.

解　由题意知道, 所求的平面就是与 A 和 B 等距离的点的几何轨迹. 设 $M(x, y, z)$为所求平面上的任一点, 则有

$$|AM|=|BM|,$$

即
$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}\ .$$

等式两边平方, 然后化简得

$$2x-6y+2z-7=0.$$

这就是所求平面上的点的坐标所满足的方程, 而不在此平面上的点的坐标都不满足这个方程, 所以这个方程就是所求平面的方程.

例 2　方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y=0$ 表示怎样的曲面?

解　通过配方, 原方程可以改写成

$$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=5.$$

这是一个球面方程, 球心在点 $M_0(1, -2, 0)$、半径为 $R=\sqrt{5}$.

一般地, 设有三元二次方程

$$Ax^2+Ay^2+Az^2+Dx+Ey+Fz+G=0,$$

这个方程的特点是缺 xy , yz , zx 各项, 而且平方项系数相同, 只要将方程经过配方就可以化成方程

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

的形式, 它的图形就是一个球面.

二、旋转曲面

设在 yOz 坐标面上有一已知曲线 C, 它的方程为

$$f(y, z)=0,$$

把这曲线绕 z 轴旋转一周, 就得到一个以 z 轴为轴的旋转曲面如下:

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z)=0,$$

这就是所求旋转曲面的方程.

在曲线 C 的方程 $f(y, z)=0$ 中将 y 改成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$, 便得曲线 C 绕 z 轴旋转所成的旋转曲面的方程 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z)=0$.

同理，曲线 C 绕 y 轴旋转所成的旋转曲面的方程为

$$f(y,\ \pm\sqrt{x^2+z^2})=0.$$

例 4　直线 L 绕另一条与 L 相交的直线旋转一周，所得旋转曲面叫做圆锥面．两直线的交点叫做圆锥面的顶点，两直线的夹角 α ($0<\alpha<\frac{\pi}{2}$)叫做圆锥面的半顶角．试建立顶点在坐标原点 O，旋转轴为 z 轴，半顶角为 α 的圆锥面的方程．

解　在 yOz 坐标面内，直线 L 的方程为

$$z=y\cot\alpha,$$

将方程 $z=y\cot\alpha$ 中的 y 改成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，就得到所要求的圆锥面的方程

$$z=\pm\sqrt{x^2+y^2}\cot\alpha,$$

或

$$z^2=a^2(x^2+y^2),$$

其中 $a=\cot\alpha$．

练习 8. 将 zOx 坐标面上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 分别绕 x 轴和 z 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程．

三、柱面

例 5　方程 $x^2+y^2=R^2$ 表示怎样的曲面？

解　方程 $x^2+y^2=R^2$ 在 xOy 面上表示圆心在原点 O、半径为 R 的圆．在空间直角坐标系中，这方程不含竖坐标 z，即不论空间点的竖坐标 z 怎样，只要它的横坐标 x 和纵坐标 y 能满足这方程，那么这些点就在这曲面上．也就是说，过 xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$，且平行于 z 轴的直线一定在 $x^2+y^2=R^2$ 表示的曲面上．所以这个曲面可以看成是由平行于 z 轴的直线 l 沿 xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 移动而形成的．这曲面叫做圆柱面，xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 叫做它的准线，这平行于 z 轴的直线 l 叫做它的母线．

柱面: 平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 形成的轨迹叫做柱面，定曲线 C 叫做柱面的准线，动直线 L 叫做柱面的母线．

上面我们看到，不含 z 的方程 $x^2+y^2=R^2$ 在空间直角坐标系中表示圆柱面，它的

母线平行于 z 轴，它的准线是 xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$.

一般地，只含 x、y 而缺 z 的方程 $F(x, y)=0$，在空间直角坐标系中表示母线平行于 z 轴的柱面，其准线是 xOy 面上的曲线 C: $F(x, y)=0$.

例如，方程 $y^2=2x$ 表示母线平行于 z 轴的柱面，它的准线是 xOy 面上的抛物线 $y^2=2x$，该柱面叫做抛物柱面.

又如，方程 $x-y=0$ 表示母线平行于 z 轴的柱面，其准线是 xOy 面的直线 $x-y=0$，所以它是过 z 轴的平面.

类似地，只含 x、z 而缺 y 的方程 $G(x, z)=0$ 和只含 y、z 而缺 x 的方程 $H(y, z)=0$ 分别表示母线平行于 y 轴和 x 轴的柱面.

例如，方程 $x-z=0$ 表示母线平行于 y 轴的柱面，其准线是 zOx 面上的直线 $x-z=0$. 所以它是过 y 轴的平面.

四、二次曲面

三元二次方程所表示的曲面叫做二次曲面. 把平面叫做一次曲面.

截痕法：用坐标面和平行于坐标面的平面与曲面相截，考察其交线的形状，然后加以综合，从而了解曲面的立体形状.

研究曲面的另一种方法：伸缩变形法:

例如，把圆锥面 $x^2+y^2=a^2z^2$ 沿 y 轴方向伸缩 $\frac{b}{a}$ 倍，所得曲面的方程为

$$x^2+(\frac{a}{b}y)^2=a^2z^2，即 \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2 .$$

(1)椭圆锥面

由方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$ 所表示的曲面称为椭圆锥面.

圆锥曲面在 y 轴方向伸缩而得的曲面.

把圆锥面 $\frac{x^2+y^2}{a^2}=z^2$ 沿 y 轴方向伸缩 $\frac{b}{a}$ 倍，所得曲面称为椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$.

以垂直于 z 轴的平面 $z=t$ 截此曲面，当 $t=0$ 时得一点(0, 0, 0)；当 $t\neq 0$ 时，得平面 $z=t$ 上的椭圆

$$\frac{x^2}{(at)^2}+\frac{y^2}{(bt)^2}=1 .$$

当 t 变化时，上式表示一族长短轴比例不变的椭圆，当$|t|$从大到小并变为 0 时，这族椭圆从大到小并缩为一点. 综合上述讨论，可得椭圆锥面的形状如图.

(2)椭球面

由方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$所表示的曲面称为椭球面.

球面在 x 轴、y 轴或 z 轴方向伸缩而得的曲面.

把 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 沿 z 轴方向伸缩$\frac{c}{a}$倍，得旋转椭球面$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$；再沿 y 轴方向伸缩$\frac{b}{a}$倍，即得椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

(3)单叶双曲面

由方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$所表示的曲面称为单叶双曲面.

把 zOx 面上的双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$绕 z 轴旋转，得旋转单叶双曲面$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$；再沿 y 轴方向伸缩$\frac{b}{a}$倍，即得单叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

(4)双叶双曲面

由方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$所表示的曲面称为双叶双曲面.

把 zOx 面上的双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$绕 x 轴旋转，得旋转双叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2+y^2}{c^2}=1$；再沿 y 轴方向伸缩$\frac{b}{c}$倍，即得双叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

(5)椭圆抛物面

由方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$所表示的曲面称为椭圆抛物面.

把 zOx 面上的抛物线$\frac{x^2}{a^2}=z$绕 z 轴旋转，所得曲面叫做旋转抛物面$\frac{x^2+y^2}{a^2}=z$，再沿 y 轴方向伸缩$\frac{b}{a}$倍，所得曲面叫做椭圆抛物面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$

(6)双曲抛物面.

由方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$所表示的曲面称为双曲抛物面.

双曲抛物面又称马鞍面.

用平面 $x=t$ 截此曲面，所得截痕 l 为平面 $x=t$ 上的抛物线

$$-\frac{y^2}{b^2}=z-\frac{t^2}{a^2},$$

此抛物线开口朝下，其项点坐标为$(t,\ 0,\ \frac{t^2}{a^2})$. 当 t 变化时，l 的形状不变，位置只作平移，而 l 的项点的轨迹 L 为平面 $y=0$ 上的抛物线

$$z=\frac{x^2}{a^2}.$$

因此, 以 l 为母线, L 为准线, 母线 l 的项点在准线 L 上滑动, 且母线作平行移动, 这样得到的曲面便是双曲抛物面.

还有三种二次曲面是以三种二次曲线为准线的柱面:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad x^2=ay,$$

依次称为椭圆柱面、双曲柱面、抛物柱面.

§7. 4　空间曲线及其方程

一、空间曲线的一般方程

空间曲线可以看作两个曲面的交线

满足方程组:

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}.$$

二、空间曲线的参数方程

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}.$$

例 6 如果空间一点 M 在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上以角速度 ω 绕 z 轴旋转, 同时又以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升(其中 ω、v 都是常数), 那么点 M 构成的图形叫做螺旋线. 试建立其参数方程.

解 取时间 t 为参数. 设当 t=0 时, 动点位于 x 轴上的一点 $A(a, 0, 0)$处. 经过时间 t, 动点由 A 运动到 $M(x, y, z)$(图 7-44). 记 M 在 xOy 面上的投影为 M', M'的坐标为 $x, y, 0$. 由于动点在圆柱面上以角速度 ω 绕 z 轴旋转, 所以经过时间 t, $\angle AOM'=\omega t$. 从而

$$x=|OM'|\cos\angle AOM'=a\cos\omega t,$$

$$y=|OM'|\sin\angle AOM'=a\sin\omega t,$$

由于动点同时以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升, 所以

$$z=MM'=vt.$$

因此螺旋线的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cos\omega t \\ y=a\sin\omega t \\ z=vt \end{cases},$$

也可以用其他变量作参数；例如令 $\theta=\omega t$，则螺旋线的参数方程可写为

$$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \\ z=b\theta \end{cases},$$

其中 $b=\dfrac{v}{\omega}$，而参数为 θ.

三、空间曲线在坐标面上的投影

以曲线 C 为准线、母线平行于 z 轴的柱面叫做曲线 C 关于 xOy 面的投影柱面，投影柱面与 xOy 面的交线叫做空间曲线 C 在 xOy 面上的投影曲线，或简称投影(类似地可以定义曲线 C 在其它坐标面上的投影).

设空间曲线 C 的一般方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$.

设方程组消去变量 z 后所得的方程

$$H(x, y)=0,$$

这就是曲线 C 关于 xOy 面的投影柱面.

曲线 C 在 xOy 面上的投影曲线的方程为:

$$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}.$$

讨论: 曲线 C 关于 yOz 面和 zOx 面的投影柱面的方程是什么?

答：关于 yOz 面的投影柱面的方程是__________________________;

关于 zOx 面的投影柱面的方程是__________________________ 。

曲线 C 在 yOz 面上的投影曲线的方程是 ______________________?

曲线 C 在 zOx 面上的投影曲线的方程是_________________________?

例 7 已知两球面的方程为

$$x^2+y^2+z^2=1, \tag{5}$$

和

$$x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1, \tag{6}$$

求它们的交线 C 在 xOy 面上的投影方程.

解 先将方程 $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ 化为

$$x^2+y^2+z^2-2y-2z=1,$$
然后与方程 $x^2+y^2+z^2=1$ 相减得
$$y+z=1.$$
将 $z=1-y$ 代入 $x^2+y^2+z^2=1$ 得
$$x^2+2y^2-2y=0.$$
这就是交线 C 关于 xOy 面的投影柱面方程. 两球面的交线 C 在 xOy 面上的投影方程为
$$\begin{cases} x^2+2y^2-2y=0 \\ z=0 \end{cases}.$$

例 8 求由上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围成立体在 xOy 面上的投影.

解 由方程 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 消去 z 得到 $x^2+y^2=1$. 这是一个母线平行于 z 轴的圆柱面, 容易看出, 这恰好是半球面与锥面的交线 C 关于 xOy 面的投影柱面, 因此交线 C 在 xOy 面上的投影曲线为: $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$.

这是 xOy 面上的一个圆, 于是所求立体在 xOy 面上的投影, 就是该圆在 xOy 面上所围的部分: $x^2+y^2\le 1$.

§7. 5 平面及其方程

一、平面的点法式方程

已知平面 Π 上的一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$及它的一个法线向量 $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$，则平面方程为:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0。$$

例 9 求过点(2, −3, 0)且以 $\boldsymbol{n}=(1, -2, 3)$为法线向量的平面的方程.

解 根据平面的点法式方程, 得所求平面的方程为
$$(x-2)-2(y+3)+3z=0,$$
即
$$x-2y+3z-8=0.$$

练习 9 求过三点 $M_1(2, -1, 4)$、$M_2(-1, 3, -2)$和 $M_3(0, 2, 3)$的平面的方程.

二、平面的一般方程

一般式：

$Ax+By+Cz+D=0$.

法线向量 $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$.

例如，方程 $3x-4y+z-9=0$ 表示一个平面，$\boldsymbol{n}=(3, -4, 1)$是这平面的一个法线向量.

？讨论:

考察下列特殊的平面方程，指出法线向量与坐标面、坐标轴的关系，平面通过的特殊点或线.

$Ax+By+Cz=0$：________________________________ ？

$By+Cz+D=0$：________________________________ ？

$Ax+Cz+D=0$________________________________ ？

$Ax+By+D=0$; ________________________________ ？

$Cz+D=0$, ________________________________ ？

$Ax+D=0$, ________________________________ ？

$By+D=0$. ________________________________ ？

提示:（缺谁就平行谁）

$D=0$，平面过原点.
$\boldsymbol{n}=(0, B, C)$，法线向量垂直于 x 轴，平面平行于 x 轴.
$\boldsymbol{n}=(A, 0, C)$，法线向量垂直于 y 轴，平面平行于 y 轴.
$\boldsymbol{n}=(A, B, 0)$，法线向量垂直于 z 轴，平面平行于 z 轴.
$\boldsymbol{n}=(0, 0, C)$，法线向量垂直于 x 轴和 y 轴，平面平行于 xOy 平面.
$\boldsymbol{n}=(A, 0, 0)$，法线向量垂直于 y 轴和 z 轴，平面平行于 yOz 平面.
$\boldsymbol{n}=(0, B, 0)$，法线向量垂直于 x 轴和 z 轴，平面平行于 zOx 平面.

例 10 求通过 x 轴和点$(4, -3, -1)$的平面的方程.

解 平面通过 x 轴, 一方面表明它的法线向量垂直于 x 轴, 即 $A=0$; 另一方面表明它必通过原点, 即 $D=0$. 因此可设这平面的方程为

$$By+Cz=0.$$

又因为这平面通过点$(4, -3, -1)$, 所以有

$$-3B-C=0,$$

或 $$C=-3B.$$

将其代入所设方程并除以 B ($B\neq0$), 便得所求的平面方程为

$$y-3z=0.$$

例 11 设一平面与 x、y、z 轴的交点依次为 $P(a, 0, 0)$、$Q(0, b, 0)$、$R(0, 0, c)$三点, 求这平面的方程(其中 $a\neq0$, $b\neq0$, $c\neq0$).

解 设所求平面的方程为

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

因为点 $P(a, 0, 0)$、$Q(0, b, 0)$、$R(0, 0, c)$都在这平面上, 所以点 P、Q、R 的坐标都满足所设方程, 即有

$$\begin{cases} aA+D=0, \\ bB+D=0, \\ cC+D=0, \end{cases}$$

由此得 $A=-\dfrac{D}{a}$, $B=-\dfrac{D}{b}$, $C=-\dfrac{D}{c}$.

将其代入所设方程, 得

$$-\frac{D}{a}x-\frac{D}{b}y-\frac{D}{c}z+D=0,$$

即 $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

上述方程叫做平面的截距式方程, 而 a、b、c 依次叫做平面在 x、y、z 轴上的截距.

三、两平面的夹角

两平面的夹角: 两平面的法线向量的夹角(通常指锐角)称为两平面的夹角.

设平面 Π_1 和 Π_2 的法线向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(A_1, B_1, C_1)$和 $\boldsymbol{n}_2=(A_2, B_2, C_2)$, 那么平面 Π_1 和 Π_2 的夹角 θ 应是 $(\boldsymbol{n}_1\hat{,}\boldsymbol{n}_2)$ 和 $(-\boldsymbol{n}_1\hat{,}\boldsymbol{n}_2)=\pi-(\boldsymbol{n}_1\hat{,}\boldsymbol{n}_2)$ 两者中的锐角, 因此, $\cos\theta=|\cos(\boldsymbol{n}_1\hat{,}\boldsymbol{n}_2)|$. 按两向量夹角余弦的坐标表示式, 平面 Π_1 和 Π_2 的夹角 θ 可由

$$\cos\theta=|\cos(\mathbf{n}_1\hat{,}\ \mathbf{n}_2)|=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

来确定.

平面 Π_1 和 Π_2 垂直：$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$;

平面 Π_1 和 Π_2 平行或重合：$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.

例 11 求两平面 $x-y+2z-6=0$ 和 $2x+y+z-5=0$ 的夹角.

解 $\boldsymbol{n}_1=(A_1, B_1, C_1)=(1, -1, 2)$, $\boldsymbol{n}_2=(A_2, B_2, C_2)=(2, 1, 1)$,

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}=\frac{|1\times2+(-1)\times1+2\times1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{2},$$

所以, 所求夹角为 $\theta=\frac{\pi}{3}$.

例 12 一平面通过两点 $M_1(1, 1, 1)$和 $M_2(0, 1, -1)$且垂直于平面 $x+y+z=0$, 求它的方程.

解 方法一: 已知从点 M_1 到点 M_2 的向量为 $\boldsymbol{n}_1=(-1, 0, -2)$, 平面 $x+y+z=0$ 的法线向量为 $\boldsymbol{n}_2=(1, 1, 1)$.

设所求平面的法线向量为 $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$.

因为点 $M_1(1, 1, 1)$和 $M_2(0, 1, -1)$在所求平面上，所以 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{n}_1$，即$-A-2C=0$，$A=-2C$.

又因为所求平面垂直于平面 $x+y+z=0$，所以 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{n}_1$，即 $A+B+C=0$, $B=C$.

于是由点法式方程，所求平面为

$$-2C(x-1)+C(y-1)+C(z-1)=0，即 2x-y-z=0.$$

方法二：从点 M_1 到点 M_2 的向量为 $\boldsymbol{n}_1=(-1, 0, -2)$，平面 $x+y+z=0$ 的法线向量为 $\boldsymbol{n}_2=(1, 1, 1)$.

设所求平面的法线向量 $\boldsymbol{n}$ 可取为 $\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$.

因为

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},$$

所以所求平面方程为

$$2(x-1)-(y-1)-(z-1)=0,$$

即

$$2x-y-z=0.$$

例 13 设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$是平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 外一点，求 P_0 到这平面的距离.

解 设 $\boldsymbol{e}_n$ 是平面上的单位法线向量. 在平面上任取一点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，则 P_0 到这平面的距离为

$$d=|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\boldsymbol{e}_n|=\frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

提示：$\boldsymbol{e}_n=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(A, B, C)$，$\overrightarrow{P_1P_0}=(x_0-x_1, y_0-y_1, z_0-z_1)$，

练习 13 求点(2, 1, 1)到平面 $x+y-z+1=0$ 的距离.

§7. 6　空间直线及其方程

一、空间直线的一般方程

空间直线 L 可以看作是两个平面 Π_1 和 Π_2 的交线. 一般式为:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}. \qquad (1)$$

二、空间直线的对称式方程与参数方程

方向向量: 平行于一条已知直线的非零向量。

对称式方程或点向式方程:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

注: 当 m, n, p 中有一个为零, 例如 $m=0$, 而 $n, p\neq 0$ 时, 这方程组应理解为

$$\begin{cases} x=x_0 \\ \dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p} \end{cases};$$

当 m, n, p 中有两个为零, 例如 $m=n=0$, 而 $p\neq 0$ 时, 这方程组应理解为

$$\begin{cases} x-x_0=0 \\ y-y_0=0 \end{cases}.$$

参数方程:

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}.$$

例 1 用对称式方程及参数方程表示直线 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+3z=4 \end{cases}$.

解 先求直线上的一点. 取 $x=1$, 有

$$\begin{cases} y+z=-2 \\ -y+3z=2 \end{cases}.$$

解此方程组, 得 $y=-2$, $z=0$, 即$(1, -2, 0)$就是直线上的一点.

再求这直线的方向向量 $\boldsymbol{s}$. 以平面 $x+y+z=-1$ 和 $2x-y+3z=4$ 的法线向量的向量积作为直线的方向向量 $\boldsymbol{s}$:

$$\boldsymbol{s}=(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\times(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}.$$

因此, 所给直线的对称式方程为

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{-3}.$$

令 $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{-3}=t$，得所给直线的参数方程为

$$\begin{cases}x=1+4t\\ y=-2-t\\ z=-3t\end{cases}.$$

提示：当 $x=1$ 时，有 $\begin{cases}y+z=-2\\ -y+3z=2\end{cases}$，此方程组的解为 $y=-2$, $z=0$.

$$\boldsymbol{s}=(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\times(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}.$$

令 $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{-3}=t$，有 $x=1+4t$, $y=-2-t$, $z=-3t$.

三、两直线的夹角

两直线的方向向量的夹角(通常指锐角)叫做两直线的夹角.

设直线 L_1 和 L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=(m_1, n_1, p_1)$和 $\boldsymbol{s}_2=(m_2, n_2, p_2)$，那么 L_1 和 L_2 的夹角φ余弦公式：

$$\cos\phi=|\cos(\mathbf{s}_1\hat{,}\ \mathbf{s}_2)|=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

设有两直线 L_1: $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$, L_2: $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$，则

$L_1\perp L_2\Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$;

$L_1 /\!/ L_2\Leftrightarrow\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$.

例 2 求直线 L_1: $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{1}$ 和 L_2: $\frac{x}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{-1}$ 的夹角.

解 两直线的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=(1, -4, 1)$和 $\boldsymbol{s}_2=(2, -2, -1)$. 设两直线的夹角为$\varphi$，则

$$\cos\varphi=\frac{|1\times2+(-4)\times(-2)+1\times(-1)|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

四、直线与平面的夹角

当直线与平面不垂直时，直线和它在平面上的投影直线的夹角φ称为直线与平面的夹角，当直线与平面垂直时，规定直线与平面的夹角为 $\frac{\pi}{2}$.

设直线的方向向量 $\boldsymbol{s}=(m,\ n,\ p)$，平面的法线向量为 $\boldsymbol{n}=(A,\ B,\ C)$，直线与平面的夹角为$\varphi$，那么 $\varphi=|\frac{\pi}{2}-(\boldsymbol{s}\,\hat{,}\,\boldsymbol{n})|$，因此 $\sin\varphi=|\cos(\boldsymbol{s}\,\hat{,}\,\boldsymbol{n})|$．按两向量夹角余弦的坐标表示式，有

$$\sin\phi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

直线与平面垂直：

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

直线与平面平行或直线在平面上：

$Am+Bn+Cp=0$.

设直线 L 的方向向量为(m, n, p)，平面Π的法线向量为(A, B, C)，则

$$L\perp\Pi\Leftrightarrow\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p};$$

$$L//\Pi\Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0.$$

例 3 求过点$(1, -2, 4)$且与平面 $2x-3y+z-4=0$ 垂直的直线的方程.

解 平面的法线向量$(2,\ -3,\ 1)$可以作为所求直线的方向向量．由此可得所求直线的方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-4}{1}.$$

例 4 求与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行且过点$(-3, 2, 5)$的直线的方程.

解 平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线的方向向量就是所求直线的方向向量 $\boldsymbol{s}$,

因为 $$\boldsymbol{s}=(\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{k})\times(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 0 & -4\\ 2 & -1 & -5\end{vmatrix}=-(4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}),$$

所以所求直线的方程为

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{1}.$$

例 5 求直线 $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$ 与平面 $2x+y+z-6=0$ 的交点.

解 所给直线的参数方程为

$$x=2+t,\ y=3+t,\quad z=4+2t,$$

代入平面方程中, 得

$$2(2+t)+(3+t)+(4+2t)-6=0.$$

解上列方程, 得 $t=-1$. 将 $t=-1$ 代入直线的参数方程, 得所求交点的坐标为

$$x=1,\quad y=2,\quad z=2.$$

例 6 求过点$(2, 1, 3)$且与直线 $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程.

解 过点(2, 1, 3)与直线 $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$ 垂直的平面为

$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0,\ \text{即}\ 3x+2y-z=5.$$

直线 $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$ 与平面 $3x+2y-z=5$ 的交点坐标为 $(\frac{2}{7},\ \frac{13}{7},\ -\frac{3}{7})$.

以点(2, 1, 3)为起点，以点 $(\frac{2}{7},\ \frac{13}{7},\ -\frac{3}{7})$ 为终点的向量为

$$(\frac{2}{7}-2,\ \frac{13}{7}-1,\ -\frac{3}{7}-3)=-\frac{6}{7}(2,\ -1,\ 4).$$

所求直线的方程为

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}.$$

例 6′ 求过点(2, 1, 2)且与直线 $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$ 垂直相交的直线的方程.

解 过已知点与已知直线相垂直的平面的方程为

$$(x-2)+(y-1)+2(z-2)=0,\ \text{即}\ x+y+2z=7.$$

此平面与已知直线的交点为(1, 2, 2).

所求直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=(1, 2, 2)-(2, 1, 2)=(-1, 1, 0),$$

所求直线的方程为

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{0},\ \text{即}\ \begin{cases}\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{1}\\ z-2=0\end{cases}.$$

提示：求平面 $x+y+2z=7$ 与直线 $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$ 的交点：

直线的参数方程为 $x=2+t, y=3+t, z=4+2t$，代入平面方程得

$$(2+t)+(3+t)+2(4+2t)=7,$$

解得 $t=-1$，代入直线的参数方程得 $x=1, y=2, z=2$.

平面束: 设直线 L 的一般方程为

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases},$$

通过直线 L 的平面束方程:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

例 7 求直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 上的投影直线的方程.

解 设过直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 的平面束的方程为

$$(x+y-z-1)+\lambda(x-y+z+1)=0,$$

即 $$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z+(-1+\lambda)=0,$$

其中λ为待定的常数. 这平面与平面 $x+y+z=0$ 垂直的条件是

$$(1+\lambda)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 1+(-1+\lambda)\cdot 1=0,$$

即 $$\lambda=-1.$$

将$\lambda=-1$ 代入平面束方程得投影平面的方程为 $2y-2z-2=0$,

即 $$y-z-1=0.$$

所以投影直线的方程为

$$\begin{cases} y-z-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}.$$