习题一 参考答案.

______学院（系）　　课目________　　200　年　　月　　日

一、1. $y=\dfrac{\ln(x+4)}{\sqrt{x^2-4}}$ 定义域：$\begin{cases} x+4>0 \\ x^2-4>0 \end{cases} \Rightarrow$ $x>-4$ 且 $|x|>2$.

$\Rightarrow (-4,-2)\cup(2,+\infty)$

2. $\begin{cases} 0\le x+a\le 1 \\ 0\le x-a\le 1 \end{cases} \Rightarrow [a,1-a]$

3. $5(f(x)+x)+1=5\cdot 2^x+5x+1$

4. 奇. 参考课本 例1.1.2

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{3x}=0$. $\because |\sin x|$ 有界.

$\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=1$. $(y=\dfrac{1}{x})$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{(x-1)}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=1$ $(y=x-1)$

$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$, $|\sin\dfrac{1}{x}|$ 有界.

6. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{y\to\infty}(1+\dfrac{1}{y})^{-y}=\dfrac{1}{e}$. $(y=-x)$

$(y=\dfrac{1}{3x})$ $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{y\to\infty}(1+\dfrac{1}{y})^{3y}=e^3$

$y=\dfrac{x}{2}$ $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{x})^{x}=\lim\limits_{y\to\infty}(1+\dfrac{1}{y})^{2y}=e^2$

$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x-2}{x+2})^{x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{4}{x+2})^{x+2}$

令 $y=-\dfrac{x+2}{4}$, $\Rightarrow \lim\limits_{y\to\infty}(1+\dfrac{1}{y})^{-4y}=e^{-4}$

二、证：$\forall x,y\in(0,1)$, $x>y$,

$\because f(x)$ 在 $(0,1)$ 单增，$\therefore f(x)>f(y)$

$\because -x,-y\in(-1,0)$, $-x<-y$.

又 $\because f(x)=-f(-x)$, $f(y)=-f(-y)$, $\therefore f(-x)<f(-y)\Rightarrow$ f 在 $(-1,0)$ 单增.

$\Uparrow$

(奇函数)　　($\because x,y$ 任意 $\therefore -x,-y$ 任意)

三、1. 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+17}-n}{\sqrt{n(n+1)}-\sqrt{n^2-1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+17}-n)(\sqrt{n^2+17}+n)}{(\sqrt{n(n+1)}-\sqrt{n^2-1})(\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n^2-1})}\cdot\frac{\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+17}+n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{17\cdot(\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n^2-1})}{(n+1)(\sqrt{n^2+17}+n)}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{17}{(n+1)}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{1+\frac{17}{n^2}}+1}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{17}{n+1}\cdot\frac{1+1}{1+1}=0$

3. 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{2}(n+1)}{n^2}=\frac{1}{2}.$

4. 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}+\frac{\arctan n}{n}+n\cdot\tan\frac{3}{n}\right).$

注意 ($\arctan n$) 有界

$= 1+0+\lim\limits_{n\to\infty}3\cdot\frac{\tan\frac{3}{n}}{\frac{3}{n}}$ $\quad(\because \frac{3}{n}\to 0)$ $\quad(\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{3}{n}}{\frac{3}{n}}=1)$

$= 1+0+3=4.$

四. $\lim\limits_{x\to 0^+}-\frac{1}{x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-}-\frac{1}{x}=+\infty \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}2^{-\frac{1}{x}}=0\\ \lim\limits_{x\to 0^-}2^{-\frac{1}{x}}=+\infty\end{cases}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\frac{1+0}{1-0}=1.$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1/2^{-\frac{1}{x}}+1}{1/2^{-\frac{1}{x}}-1}=\frac{0+1}{0-1}=-1.$

$\lim\limits_{x\to 0}f(|x|)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+2^{-\frac{1}{|x|}}}{1-2^{-\frac{1}{|x|}}}=\frac{1+\lim\limits_{x\to 0}2^{-\frac{1}{|x|}}}{1-2^{-\frac{1}{|x|}}}=\frac{1+0}{1-0}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在，$\because 1=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1.$

五. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)-(ax+b)(x+1)}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2+(b-a)x-b+1}{x+1}=0.$

$\Rightarrow a=1,\ b=a=1.$

六. $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x+1)=1$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x=0$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x=1$

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(-x+3)=2$

七. 1. $\lim\limits_{x\to0^-}\left(e^{-\frac{1}{x}}\sin\frac{3}{x^2}+x\arctan\frac{1}{x}\right)$

$=0+0=0.$

($\because \sin\frac{3}{x^2}$ 有界. $e^{-\frac{1}{x}}\to0$ 当 $x\to0^-$).

($\arctan\frac{1}{x}$ 有界. $x\to0$.)

2. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{3}{1-x^3}-\frac{1}{1-x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{3-(1+x+x^2)}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to1}\frac{2-x-x^2}{(1-x)(1+x+x^2)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{2+x}{1+x+x^2}=\frac{3}{3}=1.$

3. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{3-x}}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{-2+2x}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{2}{x+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}}=\frac{2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin[(x+1)(x-1)]}{(x-1)(x+2)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin[(x+1)(x-1)]}{(x+1)(x-1)}\cdot\dfrac{x+1}{x+2}$

$=1\cdot\dfrac{1+1}{1+2}=\dfrac{2}{3}.$

$\left(\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin[(x+1)(x-1)]}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=1\right)$

$y=(x+1)(x-1)$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\cos\frac{2}{x}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\cancel{1}-2\sin^2\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{-2\sin^2 y}{y^2}=-2.$

$\left(\because \dfrac{\sin y}{y}\to 1.\right)$

6. $\lim\limits_{x\to 3}(x-2)^{\frac{1}{x-3}}$ $\quad y=\dfrac{1}{x-3}$

$=\lim\limits_{y\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{y}\right]^y=e.$

八. 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\arcsin x)^3}{x(1-\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x\cdot\frac{x^2}{2}}=2$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x-\sin x\cos x)/\cos x}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\dfrac{1}{2}.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{e^{3x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{3x}=\dfrac{2}{3}$

$(\ln(1+2x)\sim 2x,\ e^{3x}-1\sim 3x).$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2\sin x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin x}{x}=-2$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2}\Big/x=0.$

6. 原式 $=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(e^{\frac{1}{x}}\underbrace{\sin\frac{3}{x^2}}_{\text{有界}}\right)+\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\arcsin 2x}{x}$

$=0+\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x}{x}=2.$

九. 1. $x_n = n\left(\frac{1}{n^2+\lambda}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\lambda}\right)$

$$\frac{n^2}{n^2+n\lambda} \le x_n \le \frac{n^2}{n^2+\lambda}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n\lambda} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\lambda}{n}} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+\lambda} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\lambda}{n^2}} = 1$$

夹逼定理. $\lim_{n\to\infty} x_n = 1.$

2. 显然单增. 且 $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$.

归纳法 $\left\{ a_1=\sqrt{2}\le 4. \text{ 设若 } a_k \le 4, \text{则 } a_{k+1}\le\sqrt{2+4}\le 4. \right.$

$\Rightarrow$ 任意 $a_n \le 4$ $\Rightarrow$ 有界

$\Rightarrow \{a_n\}$ 有极限 a.

对 $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ 取极限.

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{2+a_n}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{2+a} \Rightarrow a=2.$$