线性映射

线性映射的定义

Definition:

一个映射 $T : V \to W$ 一定是线性的当且仅当它满足以下两个性质:

1. 可加性(additivity): $T(x + y) = T(x) + T(y)$
2. 齐次性(homogeneity): $T(cv) = cT(v)$

我们记作Tv为一个线性映射(Linear Mapping),称$L(V, W)$为从V到W的线性映射. 显然其保持 0 元$T(0) = 0$

Example

零映射(zero) $0 \in L(V, W), 0v = 0$

恒等(identity) $I \in L(V, W), Iv = v$

微分(differential) $D \in L(V, W), Dv = v'$

积分(integral) $I \in L(V, W), Iv(x) = \int_0^1 v(x) \,\mathrm{d}x$

Theorem

V的基为$v_1, v_2, ..., v_n$;W的基为$u_1, u_2, ..., u_n$,存在唯一的线性映射T,使得$Tv_i = u_i$

证明思路:围绕着$\forall u \in W, \exists c_1, c_2, ..., c_n$,只用构造$T(c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... + c_n v_n) = c_1 u_1 + c_2 u_2 + ... + c_n u_n$即可.

线性映射的线性性

为了寻找其线性性,我们要先定义$L(V, W)$上的加法和数乘

Definition

定义$S, T \in L(V, W)$

定义$(S + T)(v) = S(v) + T(v)$,$(\lambda S)(v) = \lambda S(v)$

于是容易看出,$L(V, W)$是一个线性空间.

Definition

定义线性映射的乘法$S \in L(U, V), T \in L(V, W)$,那么$(ST)(v) = S(T(v))$

Theorem

乘法的性质

1. 结合律$T_1 T_2 T_3 = T_1(T_2 T_3)$
2. 幺元$IT = TI = T$,I是$L(V, V)$上的恒等映射
3. 分配率$(S_1 + S_2)(T) = S_1 T + S_2 T$,$S(T_1 + T_2) = ST_1 + ST_2$

需要注意的是,线性映射的乘法不具有交换律.

零空间和值域

Definition

零空间(null space) $T \in L(V, W)$,T的零空间就是V的一个子集,使得$\{v \in V : Tv = 0\}$,记作null T,也叫做T的核空间(kernel space),记作$\ker T$

单射(injective) $T \in L(V, W), Tv = Tw \Rightarrow v = w$ 这样的T称为一个单射.

Theorem

1. $\ker T$是V的一个子空间
2. T是单射$\Leftrightarrow \ker T = \{0\}$

Proof

对于命题 1:取$v_1, v_2 \in \ker T$,$T(v_1 + v_2) = Tv_1 + Tv_2 = 0 + 0 = 0$;$T(\lambda v) = \lambda Tv = 0$ 对于命题 2:
" $\Rightarrow$ "由于T为单射,所以$T(v) = T(0) = 0 \Rightarrow v = 0$,于是$\ker T = \{0\}$

" $\Longleftarrow$ " $T(v_1) = T(v_2) \Rightarrow T(v_1) - T(v_2) = 0 \Rightarrow T(v_1 - v_2) = 0$,又$\ker T = \{0\}$,$\Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$

Definition

值域(range):对于一个函数$T : V \to W$,T的值域就是W的一个子集$\{Tv\}$,记作$\text{range } T$,也叫函数的像空间(image),记作$\operatorname{im} T$.

Theorem

$\operatorname{im} T$是V的一个子空间

Proof

设$w_1, w_2 \in \operatorname{im} T$,那么$w = T(v_1 + v_2) = Tv_1 + Tv_2 = w_1 + w_2 \in \operatorname{im} T$,$T(\lambda v) = \lambda Tv = \lambda w \in \operatorname{im} T$

Definition

满射(surjective):如果某个映射$T : V \to W$的像空间等于W,那么称T是一个满射.

Theorem

线性代数基本定理:$T \in L(V, W)$,$\dim V$ = $\dim \ker T + \dim \operatorname{im} T$

于是容易得出:如果$T : V \to W$,$\dim W < \dim V$,那么T一定不是单射. 如果$\dim V < \dim W$,那么T一定不是满射

显然,一个欠定的齐次线性方程组有非零解,非齐次线性方程组可能无解. (齐次线性方程组$T(v) = 0$,非齐次线性方程组$T(v) = v_0$)

矩阵

为了更加方便的表示线性映射,我们定义矩阵

Definition

设m, n都是正整数. 一个$m \times n$矩阵A是一个在$\mathbb{F}$上的$m \times n$矩形数组,写作:

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & ... & A_{1,\mathrm{n}} \\ ....v & & ....v \\ A_{\mathrm{m},1} & ... & A_{\mathrm{m},\mathrm{m}} \end{pmatrix}$$

一些特殊矩阵:I是单位矩阵,除了对角线元素为1,其他均为0.

下面来定义一个线性映射的矩阵表示

Definition

若$v_1, v_2, ..., v_n$是V的一组基,$w_1, w_2, ..., w_m$是W的一组基,且$Tv_i = \sum_{j} = 1^m A_{\mathrm{i,j}} w_j$,那么其矩阵表示$M(T)$就是$A$. 如果未指明$v_i$和$w_i$,可以记作$M(T, (v_1, v_2, ..., v_n), (w_1, w_2, ..., w_m))$

容易看出,$M(T)$的第i列和v_i的选取有关,而第i行和w_i的选取有关. 例如变换$T(x, y) = (8x + 9y, 2x + 3y, x + y)$,在标准正交基$((1, 0), (0, 1)$,$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$下的矩阵表示为$M(T) = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

为了进一步扩展矩阵的意义,定义矩阵的加法、数乘

Definition

定义两个$m \times n$矩阵A, B的和

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{1,1} & ... & A_{1,\mathrm{n}} \\ ....v & & ....v \\ A_{\mathrm{m},1} & ... & A_{\mathrm{m,m}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{1,1} & ... & B_{1,\mathrm{n}} \\ ....v & & ....v \\ B_{\mathrm{m},1} & ... & B_{\mathrm{m,m}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} + B_{1,1} & ... & A_{1,\mathrm{n}} + B_{1,\mathrm{n}} \\ ....v & & ....v \\ A_{\mathrm{m},1} + B_{\mathrm{m},1} & ... & A_{\mathrm{m,m}} + B_{\mathrm{m,n}} \end{pmatrix}$$

数乘

$$\lambda * A = \begin{pmatrix} \lambda * A_{1,1} & ... & \lambda * A_{1,\mathrm{n}} \\ ....v & & ....v \\ \lambda * A_{\mathrm{m},1} & ... & \lambda * A_{\mathrm{m,m}} \end{pmatrix}$$

容易看出,矩阵的加法就相当于线性映射的加法,矩阵数乘就相当于线性映射的数乘.

考虑到线性映射还有叠加这一组合方法,我们下面定义矩阵的乘法.

试探:S, T是两个线性映射,ST:

$$ST(u_k)$$
$$= S\left(\sum_{\mathrm{r}=1}^{n} C_{\mathrm{r,k}} v_r\right)$$
$$= \sum_{\mathrm{r}=1}^{n} C_{\mathrm{r,k}} \sum_{\mathrm{j}=1}^{m} A_{\mathrm{j,r}} w_j$$

为了表示这种变换规律,定义矩阵乘法

Definition

矩阵乘法:设A是$n \times k$矩阵,B是$k \times m$矩阵,定义运算$(AB)_{\mathrm{i,j}} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{k} A_{\mathrm{i,k}} B_{\mathrm{k,j}}$,更加直观的,就是选取$A$的第$i$行和$B$的第$j$列,按元素依次乘在一起再求和,表示新矩阵第$i$行$j$列的元素.

具体计算可以自己去试试.

Notation

一种简明记法

$A_{j,\cdot}$指A的第 j 行形成的一个$m \times 1$矩阵,$A_{\cdot,j}$指A的第 j 列形成的一个$1 \times n$矩阵

于是对于矩阵的乘法有以下表示法

$$(AB)_{i,j} = A_{i,\cdot} B_{\cdot,j}$$

$$(AB)_{\cdot,k} = AC_{\cdot,k}$$

对矩阵乘法的另一种理解:线性组合 设$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_n \end{pmatrix}$,A 为$m \times n$矩阵,那么$Ac = c_1 A_{\cdot,1} + c_2 A_{\cdot,2} + ... + c_n A_{\cdot,n}$,换言之,$Ac$就是对$A$列的线性组合,用$c$的每一个元来数乘.

逆和同构

Definition

A, B是两个映射($n \times n$矩阵),且有$AB = BA = I$,那么称B是A的逆(inverse),记作$B = A^{-1}$,A是可逆的(invertible)

Theorem

如果某矩阵（映射）可逆,那么其逆是唯一的. proof:若$AB = AC = I$,那么$C = CI = C(AB) = (CA)B = B$

映射V可逆⇔映射V是单射满射（一一对应）

对于存在可逆隐射的两个空间,他们也有一些潜在的关系,下面加以定义.

Definition

一个可逆映射可以称为同构(isomorphism)

两个空间中存在一个可逆映射,则这两个空间称为是同构的(isomorphic)

Theorem

两个向量空间同构⇔两个向量空间维度相同

设$\dim V = n$,$\dim W = m$,那么$L(V, W)$和$\mathbb{F}^{nm}$同构,于是$\dim L(V, W) = \dim V \dim W$

为了统一表示线性映射,我们试着用矩阵相乘的方法来表示映射. 为了更好处理向量,我们定义向量的矩阵表示(matrix of a vector)

Definition

设V的一组基是$v_1, v_2, ..., v_n$,$v \in V$,$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n$,那么$M(v) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}$叫做$v$的矩阵表示.

这样之后,我们容易得到$M(Tv) = M(T)M(v)$

算子

对于以上种种线性映射来说,有一类很特殊的是从V到V的映射. 我们对其进行一些定义.

Definition

一个从V到V的线性映射定义为**算子**(operator),记V上所有算子构成的线性空间为$L(V)$

对于算子,也有一些很好的性质.

Theorem

如果有限维向量空间中的算子$T \in L(V)$,下面三个命题等价

- T可逆
- T是单射
- T是满射

积空间和商空间

Definition

线性空间的积:设$V_1, V_2, ..., V_n$是$\mathbb{F}$上的线性空间,定义$V_1 \times V_2 \times ... \times V_n = \{(v_1, v_2, ..., v_n), v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, ... \in V_n\}$叫做这些空间的积.

在积空间中的加法被定义为$(v_1, v_2, ..., v_n) + (u_1, u_2, ..., u_n) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2, ... + u_n, v_n + u_n)$,数乘也类似$\lambda(v_1, v_2, ..., v_n) = (\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda ..., \lambda v_n)$

实际上就可以将v_i当成一个数,其运算规则就变成了一般向量的运算规则了.

Theorem

积空间是一个线性空间

证明从略.

对于积空间本身,我们也要有一些观察. $((1, 2), (3, 4, 5))$和$(1, 2, 3, 4, 5)$似乎并没有什么本质上的差异. 那我们就可以去猜测$\mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^m$和$\mathbb{F}^{m+n}$有同构关系了. 事实也正是如此.

Theorem

设$V_1, V_2, ..., V_n$都是有限维线性空间,$\dim(V_1 \times V_2 \times ... \times V_n) = \dim V_1 + \dim V_2 + ... + \dim V_n$

Proof

选取每个U的一个基．对千每个U的每个基向量,考虑 $V_1 \times V_2 \times ... \times V_n$ 的如下元素 : 第j个位置为此基向量,其余位置为 0. 所有这些向量构成的组是线性无关的,且张成$V_1 \times V_2 \times ... \times V_n$, 因此是积空间的基． 这个基的长度是$\dim V_1 + \cdots + \dim V_n$

我们下面来定义子空间和向量的和.

Definition

设$v \in V$,U是V的子空间. 那么定义子空间和向量的和为:

$v + U = \{v + u : u \in U\}$

我们称$v + U$是V的仿射子集(affine subset),$v + U$和U形成平行(parallel)关系.

从几何的角度来看,$v + U$是将过原点的U平面向v方向平移的结果,所以有一定的几何直观. 很显然,一个仿射子集不是一个子空间($v \neq 0$)

为了描述相同性质的仿射子集,我们来定义商空间.

Definition

设U是V的子空间,那么商空间就是所有平行于U的仿射子集的并. 定义为:$V/U = \{v + U : v \in V\}$

Theorem

平行于U的两个仿射子集要么相等,要么不相交.

即:U是V的子空间,$v, w \in V$下列陈述等价

- $v - w \in U$
- $v + U = w + U$
- $(v + U) \cap (w + U) \neq \emptyset$

下面来定义商空间上的线性运算.

Definition

定义加法和数乘分别是:

$(v+U)+(w+U)=(v+w)+U$,$\lambda(v+U)=\lambda v+U$

需要注意的是,对于同一个集合$v+U$,会有多种表示方法. 举例$y=x+1$这个集合至少可以有$(-1,0)+(y=x)$和$(0,1)+(y=x)$两种表示方法. 为了说明加法和数乘是有意义的,需要有如下的证明.

Proof

命题:若$v_1+U=v_2+U$,$w_1+U=w_2+U$,那么$(v_1+w_1)+U=(v_2+w_2)+U$

由上面的定理知,$v_1-v_2\in U$,$w_1-w_2\in U$,于是$(v_1-v_2)+(w_1-w_2)\in U$,于是$(v_1+w_1)-(v_2+w_2)\in U$,从而$(v_1+w_1)+U=(v_2+w_2)+U$

Definition

商映射:定义一个映射$\pi:V\to\frac{V}{U}$,对任意$v\in V$，

$$\pi(v)=v+U$$

可以证明这个映射是一个线性映射.

Theorem

商空间的维数:如果V是有限维空间,那么$\dim V=\dim U+\dim\frac{V}{U}$

对偶(Duality)

像(值域)是一个标量空间的线性函数也有一些有趣的性质，我们将这类函数单独拿出来讨论一下。

Definition

线性泛函(linear functional)是$L(V,\mathbb{F})$的一个线性函数

Example

- 定义$\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$,$\varphi(x,y,z)=3x+4y+5z$,$\varphi$是线性泛函
- 定义$\varphi:P(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$,$\varphi(p)=\int_0^1 p\,\mathrm{d}x$是线性泛函

线性泛函构成的空间也有研究的价值,下面给予定义

Definition

对偶空间(dual space)是线性泛函构成的空间,即$L(V,\mathbb{F})$,记作V',容易知道$\dim V'=\dim V$

对偶基(dual basis)是V'的一组基,也就是说，取$v_1,v_2,...,v_n$,那么其对偶基也是一组线性泛函即

$$\varphi_j(v_k)=\begin{cases}1 \text{ if } k=j\\ 0 \text{ if } k\neq j\end{cases}$$

对偶映射(dual mapping):对于$T\in L(V,W)$,定义对偶映射$T'\in L(W',V')$,满足$\varphi\in W'$,有$T'(\varphi)=\varphi\circ T$

Theorem

对偶函数的代数性质：$(\lambda T)'=\lambda(T')$,$(S+T)'=S'+T'$,$(ST)'=T'S'$

Definition

零化子(annihilator):对于$U\subset V$,U的零化子U^0定义为$U^0=\{\varphi\in V':\forall v\in U,\varphi(u)=0.$

Theorem

- 零化子是一个V'的子空间.
- 设V是有限维的，那么$\dim U + \dim U^0 = \dim V$
- V, W有限维,$T \in L(V, W)$
  - $\dim \ker T' = \dim \ker T + \dim W - \dim V$
  - $\ker T = (\operatorname{im} T)^0$
- T是满的当且仅当T'是单的.

我们知道，线性映射总是有对应的矩阵表示，我们理应好奇对偶映射在矩阵上的反应。下面定义这一点。

Definition

矩阵的转置(transpose),A^T:定义$n \times m$矩阵A的转置A为$m \times n$矩阵，$(A^T)_{i,j} = (A)_{j,i}$

Theorem

转置的代数性质:
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T)$
- $(AB)^T = B^T A^T$

$M(T') = M(T)^T$

矩阵的秩(rank)

Definition

行秩和列秩:设A是$\mathbb{F}$上的$m \times n$矩阵
- A的行秩是A诸行张成空间的维数。
- A的列秩是A诸列张成空间的维数。

Theorem

$\operatorname{im} T$的维数等于$M(T)$的列秩

行秩等于列秩，统称为秩(rank),记作rank A