线性代数

此笔记基于 *LADR(Linear Algebra Done Right) 5th edition*
2024 Summer

yingziyu-llt

最初写作于：**2024 年 07 月 02 日**
最后更新于：**2024 年 08 月 23 日**

目录

0.1. 前言

本笔记基于 Linear Algebra Done Right(5th Edition) 一书的内容和顺序写成，可能具体内容不完全按照该书，会加入一些 简明线性代数（丘维声著） 的内容。

写这篇笔记，主要是我在前面的线性代数学习中，自我感觉只是基本掌握了一些散乱的知识点，并没有真正很好的理解线性代数的本质和内核，于是暑假用闲暇时间重读线性代数，换一本书(LADR)，希望能够得到更加深刻的理解。

章节 1. 线性空间

1.1. $\mathbb{R}^n$ and $\mathbb{C}^n$

1.1.1. 复数 Complex Number

复数的定义是由对负数开平方根得出的。我们定义$i = \sqrt{-1}$，其运算规则和常规的运算法则类似。

Def **定义 1.1.1**

$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$称作复数域

对于复数的四则运算，我们做如下定义：

Def **定义 1.1.2**

加法法则$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

乘法法则$(a + bi) * (c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$

当$b = 0$时，a就是实数。

在本笔记的其他部分，我们用$\mathbb{F}$来表示$\mathbb{R}$和$\mathbb{C}$,称$\mathbb{F}$中的元素叫做**标量**(scalar)。

1.1.2. 组(List)

Def **定义 1.1.3**

取n个非负数的整数组成一个**有序**的对叫做一个组(List)，记为$(x_1, x_2, ..., x_n)$。当且仅当两个组的各元素依次均相等时，可以称两个组相等。

List 和 Set 之间的差异： **提示 1.1.1**

- List 中的元素有序，Set 中的元素无序;List 中的元素可重复，Set 中的元素不可重复

Def **定义 1.1.4**

定义两个组的加法$*$ $(a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$，满足交换律。

Def **定义 1.1.5**

定义零元$0 = (0, 0, ..., 0)$

1.1.3. 向量(Vector)

将组放在一个坐标系中，取原点到该点的一个**有向线段**，称这个有向线段为**向量**(Vector)

对于两个向量之间的运算，我们做如下定义

Def **加法** **定义 1.1.6**

$$(a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n) \tag{1.1}$$

Def **数乘** **定义 1.1.7**

$$\lambda * (a_1, a_2, ..., a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_n) \tag{1.2}$$

1.2. 向量空间(Vector Space)

向量空间要求有以下几个必备条件：

Def **定义 1.2.1**

1. 加法 $\alpha, \beta \in V$,定义某种运算$+$,使得$\alpha + \beta \in V$
2. 数乘 $\lambda \in \mathbb{F}, \alpha \in V$,定义某种运算$\cdot$,使得$\lambda \cdot \alpha \in V$

对于一个空间$S = (\mathbb{V}, \mathbb{F}, +, \cdot)$，要求满足：

1. 加法可交换$\alpha + \beta = \beta + \alpha$
2. 加法可结合$\alpha + \beta + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
3. 数乘可交换$\lambda \mu \alpha = \mu \lambda \alpha$
4. 数乘可结合$\lambda \mu \alpha = \lambda(\mu \alpha)$
5. 数乘可分配$(\lambda + \mu)\alpha = \lambda \alpha + \mu \alpha$,$\lambda(\alpha + \beta) = \lambda \alpha + \lambda \beta$
6. 数乘有幺元1,$1\alpha = \alpha$
7. 加法有零元$0 \in \mathbb{V}$,$0 + \alpha = \alpha$
8. 加法有负元,$\alpha + (-\alpha) = 0$

那么称S为向量空间(Vector Space)。

Def **定义 1.2.2**

向量空间的元素称为点(point)或者向量(vector)。

向量空间的形式和向量空间数乘的数域是有很大关系的。我们称S是在$\mathbb{F}$上的向量空间(vector space over $\mathbb{F}$),在$\mathbb{R}$上的叫实向量空间，在$\mathbb{C}$上的叫做复向量空间。

在前面我们说的$\mathbb{V}$一般是一个传统意义上的向量集合$\mathbb{F}^n$(n 可以是无穷，称为无穷维向量空间)，下面我们讨论和函数相关的向量空间。

Def **定义 1.2.3**

我们记$\mathbb{F}^S$($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$,S是一个集合)为从$S \to \mathbb{F}$的映射

取$f, g \in \mathbb{F}^S$,加法定义为$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,数乘定义为$\lambda \in \mathbb{F}, (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

定理

1. 加法单位元唯一
2. 加法负元唯一
3. 0数乘一个向量为零元
4. 任何数乘零元为零元
5. -1数乘任何向量为其负元

1.3. 子空间(Subspace)

1.3.1. 子空间

设V是一个线性空间，若线性空间U中的所有元素都在V里，且二者运算相同（要求有向量加法和数乘），就称U是V的一个子空间。

Conditions for Subspace

1. 有零元(additive identity)$0 \in U$
2. 加法封闭(closed under addition)$\alpha, \beta \in U; \alpha + \beta \in U$
3. 数乘封闭(closed under scalar multiplication)$\alpha \in U, \lambda \in \mathbb{F}; \lambda\alpha \in U$

1.3.2. 子空间的和(Sum)

Def **定义 1.3.1**

定义运算 + ，满足$U_1 + U_2 + \ldots + U_n = \{u_1 + u_2 + \ldots + u_n : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, \ldots, u_n \in U_n\}$

子空间的和是包含那些子空间的最小子空间。

1.3.3. 子空间的直和(Direct Sum)

Def **定义 1.3.2**

和$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n$成为**直和**，若$U$中每个元素只能被唯一表示成$u_1 + u_2 + \dots + u_n$，其中$u_i \in U_i$。记直和的符号为$\oplus$

Conditions for Direct Sum

$U_1 + U_2 + \dots + U_n$是直和$\Leftrightarrow 0$只有唯一表出方式:$u_1 = u_2 = \dots = u_n = 0 \Leftrightarrow U \cap V = \{0\}$

章节 2. 有限维向量空间

2.1. 线性组合和张成

Def **线性组合(Linear combination)** **定义 2.1.1**

一个向量组$v_1, v_2, \dots, v_n \in V$的线性组合(Linear combination)是指形如$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$的向量

Def **张成(span)** **定义 2.1.2**

一个向量组的所有线性组合组成的集合叫做这个向量组张成(span)的空间$\mathrm{span}(a_1, a_2, \dots, a_n)$，有些也叫线性张成(linear span)

指定空向量组$()$张成的空间为$\{0\}$

Thm **张成的空间是最小包含子空间** **定理 2.1.1**

一个向量组张成的空间就是包含这些向量的最小的子空间。

证明思路：先去证明张成的空间是V的一个子空间（证明运算封闭性），再去证明这个空间包括张成其的所有向量，再说明所有V包含这些向量的子空间都是其一个子集。

证明过程：

证明 引用 2.1.1

Suppose $v_1, v_2, ..., v_n$ a list in V. We denote that $S = \text{span}(v_1, v_2, ..., v_n)$

First, we need to prove the addition identity in S. Obviously, $0v_1 + 0v_2 + ... + 0v_n = 0$

After that, we need to prove the addition closure in S. For $a = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n$, $b = b_1 v_1 + b_2 v_2 + ... + b_n v_n$,$a + b = (a_1 + b_1)v_1 + (a_2 + b_2)v_2 + ... + (a_n + b_n)v_n \in V$

Further more, we need to prove the multiplication closure in S. For $a = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n$,$\lambda a = \lambda a_1 v_1 + \lambda a_2 v_2 + ... + \lambda a_n v_n \in V$

Thus S is a subspace of V

To prove that S includes $v_1, v_2, ..., v_n$, we only need to make a_i equal to 1 if and only if i equals to the index of v_i, otherwise $a_i = 0$.

Conversely, because subspaces are closed under scalar multiplication and addition, every subspace of V containing each v_j contains $\text{span}(v_1, v_2, ..., v_n)$. Thus S is the smallest subspace of V containing all the vectors

Def 张成(spans) 定义 2.1.3

如果$\text{span}(v_1, v_2, ..., v_n) = V$，那么称$v_1, v_2, ..., v_n$张成$V$.

Def 有限维向量空间(finite-dimensional vector space) 定义 2.1.4

如果某个空间可以被有限个向量张成，那么这个空间就是一个**有限维向量空间**(finite-dimensional vector space)。

Def 定义 2.1.5

多项式(polynomial)

[若$\mathbb{F} \to \mathbb{F}$函数$p$可被表示为$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n, a_0, a_1, a_2, ..., a_n in \mathbb{F}$，那么这个函数就是一个在$\mathbb{F}$上的**多项式**(polynomial)函数,$a_0, a_1, a_2, ..., a_n$称为多项式的**系数**(coefficient)]

Def 多项式的度(degree) 定义 2.1.6

多项式的度(degree)是多项式的最高次幂（最高次幂的次数）。定义0的度数为$-\infty$

Def $P(\mathbb{F}), P_{m(\mathbb{F})}$ 定义 2.1.7

$P(\mathbb{F})$是所有在$\mathbb{F}$上多项式的集合形成的线性空间。容易知道，$P(\mathbb{F})$是$\mathbb{F}^{\mathbb{F}}$的子空间

$P_{m(\mathbb{F})}, m \in \mathbb{Z}^+$指所有在$\mathbb{F}$上次数小于等于$m$的多项式的集合。

Def **无穷维向量空间(infinite-dimensional vector space)** **定义 2.1.8**

不是有限维向量空间的向量空间吗，称作无穷维向量空间。

e.g. **示例 2.1.1**

Q:Show that $P(\mathbb{F})$ is a infinite-dimensional vector space.

A:Consider any list of polynomials in $P(\mathbb{F})$. We use m to denote the maximun degree of the polynomial in the list. Then every polynomials in the spans of the list has degree less than or equal to m. Then $z^m + 1$ is not in the span. Hence no list can span the space. QED

2.2. 线性无关

Def **线性无关(Linearly Independent)** **定义 2.2.1**

若一个向量组$v_1, v_2, ..., v_n$，使得$a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n = 0$当且仅当$a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$，那么称$v_1, v_2, ..., v_n$是**线性无关**(linearly independent),否则被称为**线性相关**(linearly dependent)

Thm **定理 2.2.1**

若$v_1, v_2, ..., v_n$线性相关，那么一定存在一个$j \in \{1, 2, ..., n\}$,使得：

(a) $v_j \in \operatorname{span}(v_1, v_2, ..., v_j - 1)$

(b) 删除v_j后的向量组与原先的向量组等价

证明 **引用 2.2.1**

$v_1, v_2, ..., v_n$ is linearly dependent, so exist $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{F}$ such that $a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n = 0$.

Let j be the largest element in $\{1, 2, ..., m\}$ if $a_j \neq 0$

Then $a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_j v_j = 0$ => $v_j = \frac{a_1}{a_j} v_1 + \frac{a_2}{a_j} v_2 + ... + a_j - \frac{1}{a_j} v_j - 1$. Then proving (a).

Suppose $u \in \operatorname{span}(v_1, v_2, ..., v_j - 1)$, then $u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n$.We use $\frac{a_1}{a_j} v_1 + \frac{a_2}{a_j} v_2 + ... + a_j - \frac{1}{a_j} v_j - 1$ to replace a_j.

Then we can easyly to present u just using $a_1, a_2, ..., a_j - 1, a_j + 1, ..., a_n$. Then proving (b).

Thm **定理 2.2.2**

线性无关组的长度一定小于等于张成该空间向量组的长度。

2.3. 基

Def 基(basis) **定义 2.3.1**

一个空间V的一组**基(basis)**是一组可以张成V且线性无关的向量组。

Thm 基的判定定理 **定理 2.3.1**

基的判定定理：$v_1, v_2, ..., v_n$是V的一组基 <=> $\forall v \in V$,存在唯一的$a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{F}$使得$a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n = a$

证明 **引用 2.3.1**

First suppose $v_1, v_2, ..., v_n$ as a basis of V. Let $v \in V$. $v_1, v_2, ..., v_n$, so they span the space.Therefore $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n$. Suppppose $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... + c_n v_n$. Then $(c_1 - a_1)v_1 + (c_2 - a_2)v_2 + ... + (c_n - a_n)v_n = 0$,$c_1 = a_1, c_2 = a_2, ..., c_n = a_n$

On the other direction, suppose $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... + c_n v_n$ is unique, we can easily to know that $v_1, v_2, ..., v_n$ span the space.

To prove that they are linearly independent, we let $0 = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n$. $2 * 0 = 2a_1 v_1 + 2a_2 v_2 + ... + 2a_n v_n$,$a_1 = 2a_1, a_2 = 2a_2, ..., a_n = 2a_n$.$a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$

Thm **定理 2.3.2**

张成某个空间的向量组包含这个空间的一个基

任何有限维向量空间包含一个基

空间内一组线性无关的向量组可以被扩张为一个基

任何V的子空间都是V直和的一部分

2.4. 维数

Thm **定理 2.4.1**

基向量组的长度与基的选取无关

证明 **引用 2.4.1**

Find two basis $v_1, v_2, ..., v_n$ and $u_1, u_2, ..., u_m$. They all spans V. So $n \leq m$ and $m \leq n$.Then $m = n$

于是，我们可以发现，一个向量空间中基向量组的长度是一个对于该空间有意义的不变量，我们于是有定义：

Def 维数(dimension) **定义 2.4.1**

维数(dimension)是向量空间V中基向量组的长度。记作$\dim V$

Thm 子空间维数定理 **定理 2.4.2**

有限维向量空间V的子空间U满足$\dim U \le \dim V$

Thm 基和维数 **定理 2.4.3**

长度为$\dim V$的线性无关向量组就是V的一组基,长度为$\dim V$能张成V的一组向量就是V的一组基

Thm 维数和公式 **定理 2.4.4**

维数和公式:$\dim(V+U) = \dim V + \dim U - \dim(V \cap U)$

2.5. 线性映射的定义

Def 线性映射(Linear Mapping) **定义 2.5.1**

一个映射 $T : V \to W$ 一定是线性的当且仅当它满足以下两个性质:

1. 可加性(additivity): $T(x+y) = T(x) + T(y)$
2. 齐次性(homogeneity): $T(cv) = cT(v)$

我们记作Tv为一个线性映射(Linear Mapping),称$L(V,W)$为从V到W的线性映射. 显然其保持 0 元$T(0) = 0$

e.g. 常见线性映射 **示例 2.5.1**

零映射(zero) $0 \in L(V,W), 0v = 0$

恒等(identity) $I \in L(V,W), Iv = v$

微分(differential) $D \in L(V,W), Dv = v'$

积分(integral) $I \in L(V,W), Iv(x) = \int_0^1 v(x)\,\mathrm{d}x$

Thm **定理 2.5.1**

V的基为$v_1, v_2, ..., v_n$;W的基为$u_1, u_2, ..., u_n$,存在唯一的线性映射T,使得$Tv_i = u_i$

证明思路:围绕着$\forall u \in W, \exists c_1, c_2, ..., c_n$,只用构造$T(c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... + c_n v_n) = c_1 u_1 + c_2 u_2 + ... + c_n u_n$即可.

2.6. 线性映射的线性性

为了寻找其线性性,我们要先定义$L(V,W)$上的加法和数乘

Def $L(V,W)$上的运算 **定义 2.6.1**

定义$S,T\in L(V,W)$

定义$(S+T)(v)=S(v)+T(v)$,$(\lambda S)(v)=\lambda S(v)$

于是容易看出,$L(V,W)$是一个线性空间.

Def 线性映射的乘法 **定义 2.6.2**

定义线性映射的乘法$S\in L(U,V),T\in L(V,W)$,那么$(ST)(v)=S(T(v))$

Thm 乘法的性质 **定理 2.6.1**

乘法的性质

1. 结合律$T_1T_2T_3=T_1(T_2T_3)$
2. 幺元$IT=TI=T$,I是$L(V,V)$上的恒等映射
3. 分配率$(S_1+S_2)(T)=S_1T+S_2T$,$S(T_1+T_2)=ST_1+ST_2$

需要注意的是,线性映射的乘法不具有交换律.

2.7. 零空间和值域

Def 零空间(null space) **定义 2.7.1**

$T\in L(V,W)$,T的零空间就是V的一个子集,使得$\{v\in V: Tv=0\}$,记作null T,也叫做T的核空间(kernel space),记作$\ker T$

单射(injective) $T\in L(V,W),Tv=Tw\Rightarrow v=w$ 这样的T称为一个单射.

Thm **定理 2.7.1**

1. $\ker T$是V的一个子空间
2. T是单射$\Leftrightarrow\ker T=\{0\}$

证明 **引用 2.7.1**

对于命题 1:取$v_1,v_2\in\ker T$,$T(v_1+v_2)=Tv_1+Tv_2=0+0=0$;$T(\lambda v)=\lambda Tv=0$ 对于命题 2:" $\Rightarrow$ "由于T为单射,所以$T(v)=T(0)=0\Rightarrow v=0$,于是$\ker T=\{0\}$

" $\Longleftarrow$ " $T(v_1)=T(v_2)\Rightarrow T(v_1)-T(v_2)=0\Rightarrow T(v_1-v_2)=0$,又 $\ker T=\{0\}$,$\Rightarrow v_1-v_2=0\Rightarrow v_1=v_2$

Def 值域(range) **定义 2.7.2**

对于一个函数$T : V \to W$,T的值域就是W的一个子集$\{Tv\}$,记作range T,也叫函数的像空间(image),记作$\operatorname{im} T$.

Thm **定理 2.7.2**

$\operatorname{im} T$是V的一个子空间

证明 **引用 2.7.2**

设$w_1, w_2 \in \operatorname{im} T$,那么$w = T(v_1 + v_2) = Tv_1 + Tv_2 = w_1 + w_2 \in \operatorname{im} T$,$T(\lambda v) = \lambda Tv = \lambda w \in \operatorname{im} T$

Def 满射(surjective) **定义 2.7.3**

如果某个映射$T : V \to W$的像空间等于W,那么称T是一个满射.

Thm 线性代数基本定理 **定理 2.7.3**

$T \in L(V, W)$,$\dim V = \dim \ker T + \dim \operatorname{im} T$

于是容易得出:如果$T : V \to W$,$\dim W < \dim V$,那么T一定不是单射. 如果$\dim V < \dim W$,那么T一定不是满射

显然,一个欠定的齐次线性方程组有非零解,非齐次线性方程组可能无解. (齐次线性方程组$T(v) = 0$,非齐次线性方程组$T(v) = v_0$)

2.8. 矩阵

为了更加方便的表示线性映射,我们定义矩阵

Def 矩阵 **定义 2.8.1**

设m, n都是正整数. 一个$m \times n$矩阵A是一个在$\mathbb{F}$上的$m \times n$矩形数组,写作:

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \ldots & A_{1,\mathrm{n}} \\ \ldots.v & & \ldots.v \\ A_{\mathrm{m},1} & \ldots & A_{\mathrm{m},\mathrm{m}} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

一些特殊矩阵:I是单位矩阵,除了对角线元素为1,其他均为0.

下面来定义一个线性映射的矩阵表示

Def 线性映射的矩阵表示 **定义 2.8.2**

若$v_1, v_2, ..., v_n$是V的一组基,$w_1, w_2, ..., w_m$是W的一组基,且$Tv_i = \sum_j = 1^m A_{\text{i,j}} w_j$,那么其矩阵表示$M(T)$就是$A$. 如果未指明$v_i$和$w_i$,可以记作$M(T, (v_1, v_2, ..., v_n), (w_1, w_2, ..., w_m))$

容易看出,$M(T)$的第i列和v_i的选取有关,而第i行和w_i的选取有关. 例如变换$T(x, y) = (8x + 9y, 2x + 3y, x + y)$,在标准正交基$((1, 0), (0, 1)$,$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$下的矩阵表示为$M(T) = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

为了进一步扩展矩阵的意义,定义矩阵的加法、数乘

Def 矩阵的运算 **定义 2.8.3**

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & ... & A_{1,\text{n}} \\ ....v & & ....v \\ A_{\text{m},1} & ... & A_{\text{m,m}} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

定义两个$m \times n$矩阵A, B的和

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{1,1} & ... & A_{1,\text{n}} \\ ....v & & ....v \\ A_{\text{m},1} & ... & A_{\text{m,m}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{1,1} & ... & B_{1,\text{n}} \\ ....v & & ....v \\ B_{\text{m},1} & ... & B_{\text{m,m}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} + B_{1,1} & ... & A_{1,\text{n}} + B_{1,\text{n}} \\ ....v & & ....v \\ A_{\text{m},1} + B_{\text{m},1} & ... & A_{\text{m,m}} + B_{\text{m,n}} \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

数乘

$$\lambda * A = \begin{pmatrix} \lambda * A_{1,1} & ... & \lambda * A_{1,\text{n}} \\ ....v & & ....v \\ \lambda * A_{\text{m},1} & ... & \lambda * A_{\text{m,m}} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

容易看出,矩阵的加法就相当于线性映射的加法,矩阵数乘就相当于线性映射的数乘.

考虑到线性映射还有叠加这一组合方法,我们下面定义矩阵的乘法.

试探:S, T是两个线性映射,ST:

$$\begin{gathered} ST(u_k) \\ = S\left(\sum_{\text{r}=1}^{n} C_{\text{r,k}} v_r\right) \\ = \sum_{\text{r}=1}^{n} C_{\text{r,k}} \sum_{\text{j}=1}^{m} A_{\text{j,r}} w_j \end{gathered} \tag{2.5}$$

为了表示这种变换规律,定义矩阵乘法

Def 矩阵乘法 **定义 2.8.4**

设A是$n \times k$矩阵,B是$k \times m$矩阵,定义运算$(AB)_{\mathrm{i,j}} = \sum_{\mathrm{k=1}}^{k} A_{\mathrm{i,k}} B_{\mathrm{k,j}}$,更加直观的,就是选取$A$的第$i$行和$B$的第$j$列,按元素依次乘在一起再求和,表示新矩阵第$i$行$j$列的元素.

具体计算可以自己去试试.

Notation

一种简明记法

$A_{j,\cdot}$指A的第 j 行形成的一个$m \times 1$矩阵,$A_{\cdot,j}$指A的第 j 列形成的一个$1 \times n$矩阵

于是对于矩阵的乘法有以下表示法

$$(AB)_{i,j} = A_{i,\cdot} B_{\cdot,j} \tag{2.6}$$

$$(AB)_{\cdot,k} = AC_{\cdot,k} \tag{2.7}$$

对矩阵乘法的另一种理解:线性组合 设$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$,A 为$m \times n$矩阵,那么$Ac = c_1 A_{\cdot,1} + c_2 A_{\cdot,2} + \dots + c_n A_{\cdot,n}$,换言之,$Ac$就是对$A$列的线性组合,用$c$的每一个元来数乘.

2.9. 逆和同构

Def 逆(inverse) **定义 2.9.1**

A, B是两个映射($n \times n$矩阵),且有$AB = BA = I$,那么称B是A的逆(inverse),记作$B = A^{-1}$,A是可逆的(invertible)

Thm **定理 2.9.1**

如果某矩阵（映射）可逆,那么其逆是唯一的.

映射V可逆⇔映射V是单射满射（一一对应）

对于存在可逆映射的两个空间,他们也有一些潜在的关系,下面加以定义.

Def 同构(isomorphism) **定义 2.9.2**

一个可逆映射可以称为同构(isomorphism)

两个空间中存在一个可逆映射,则这两个空间称为是同构的(isomorphic)

Thm **定理 2.9.2**

两个向量空间同构⇔两个向量空间维度相同

设$\dim V = n$,$\dim W = m$,那么$L(V, W)$和$\mathbb{F}^{nm}$同构,于是$\dim L(V, W) = \dim V \dim W$

为了统一表示线性映射,我们试着用矩阵相乘的方法来表示映射. 为了更好处理向量,我们定义向量的矩阵表示(matrix of a vector)

Def 矩阵的向量表示(matrix of a vector) **定义 2.9.3**

设V的一组基是$v_1, v_2, ..., v_n$,$v \in V$,$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n$,那么$M(v) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}$叫做$v$的矩阵表示.

这样之后,我们容易得到$M(Tv) = M(T)M(v)$

2.10. 算子

对于以上种种线性映射来说,有一类很特殊的是从V到V的映射. 我们对其进行一些定义.

Def 算子(operator) **定义 2.10.1**

一个从V到V的线性映射定义为**算子**(operator),记V上所有算子构成的线性空间为$L(V)$

对于算子,也有一些很好的性质.

Thm **定理 2.10.1**

如果有限维向量空间中的算子$T \in L(V)$,下面三个命题等价

- T可逆
- T是单射
- T是满射

2.11. 积空间和商空间

Def 积空间 **定义 2.11.1**

线性空间的积:设$V_1, V_2, ..., V_n$是$\mathbb{F}$上的线性空间,定义$V_1 \times V_2 \times ... \times V_n = \{(v_1, v_2, ..., v_n), v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, ... \in V_n\}$叫做这些空间的积.

在积空间中的加法被定义为$(v_1, v_2, ..., v_n) + (u_1, u_2, ..., u_n) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2, ... + u_n, v_n + u_n)$,数乘也类似$\lambda(v_1, v_2, ..., v_n) = (\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda ..., \lambda v_n)$

实际上就可以将v_i当成一个数,其运算规则就变成了一般向量的运算规则了.

Thm **定理 2.11.1**

积空间是一个线性空间

证明从略.

对于积空间本身,我们也要有一些观察. $((1,2),(3,4,5))$和$(1,2,3,4,5)$似乎并没有什么本质上的差异. 那我们就可以去猜测$\mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^m$和$\mathbb{F}^{m+n}$有同构关系了. 事实也正是如此.

Thm **定理 2.11.2**

设 $V_1, V_2, ..., V_n$都是有限维线性空间,$\dim(V_1 \times V_2 \times ... \times V_n) = \dim V_1 + \dim V_2 + ... + \dim V_n$

证明 **引用 2.11.1**

选取每个U的一个基. 对千每个U的每个基向量,考虑 $V_1 \times V_2 \times ... \times V_n$ 的如下元素:第j个位置为此基向量,其余位置为0. 所有这些向量构成的组是线性无关的,且张成$V_1 \times V_2 \times ... \times V_n$,因此是积空间的基. 这个基的长度是$\dim V_1 + \cdots + \dim V_n$

我们下面来定义子空间和向量的和.

Def **仿射子集(affine subset)** **定义 2.11.2**

设$v \in V$,U是V的子空间. 那么定义子空间和向量的和为:

$$v + U = \{v + u : u \in U\}$$

我们称$v + U$是V的仿射子集(affine subset),$v + U$和U形成平行(parallel)关系.

从几何的角度来看,$v + U$是将过原点的U平面向v方向平移的结果,所以有一定的几何直观. 很显然,一个仿射子集不是一个子空间$(v \neq 0)$

为了描述相同性质的仿射子集,我们来定义商空间.

Def **商空间** **定义 2.11.3**

设U是V的子空间,那么商空间就是所有平行于U的仿射子集的并. 定义为:$V/U = \{v + U : v \in V\}$

Thm **定理 2.11.3**

平行于U的两个仿射子集要么相等,要么不相交.

即:U是V的子空间,$v, w \in V$下列陈述等价

- $v - w \in U$
- $v + U = w + U$
- $(v + U) \cap (w + U) \neq \emptyset$

下面来定义商空间上的线性运算.

Def 商空间上的线性运算 **定义 2.11.4**

定义加法和数乘分别是:

$$(v+U)+(w+U)=(v+w)+U,\lambda(v+U)=\lambda v+U$$

需要注意的是,对于同一个集合$v+U$,会有多种表示方法. 举例$y=x+1$这个集合至少可以有$(-1,0)+(y=x)$和$(0,1)+(y=x)$两种表示方法. 为了说明加法和数乘是有意义的,需要有如下的证明.

证明 **引用 2.11.2**

命题:若$v_1+U=v_2+U$,$w_1+U=w_2+U$,那么$(v_1+w_1)+U=(v_2+w_2)+U$

由上面的定理知,$v_1-v_2\in U$,$w_1-w_2\in U$,于是$(v_1-v_2)+(w_1-w_2)\in U$,于是$(v_1+w_1)-(v_2+w_2)\in U$,从而$(v_1+w_1)+U=(v_2+w_2)+U$

Def 商映射 **定义 2.11.5**

商映射:定义一个映射$\pi:V\to\frac{V}{U}$,对任意$v\in V$,

$$\pi(v)=v+U \tag{2.8}$$

可以证明这个映射是一个线性映射.

Thm **定理 2.11.4**

商空间的维数:如果V是有限维空间,那么$\dim V=\dim U+\dim\frac{V}{U}$

2.12. 对偶(Duality)

像(值域)是一个标量空间的线性函数也有一些有趣的性质，我们将这类函数单独拿出来讨论一下。

Def 线性泛函(linear functional) **定义 2.12.1**

线性泛函(linear functional)是$L(V,\mathbb{F})$的一个线性函数

e.g. **示例 2.12.1**

- 定义$\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$,$\varphi(x,y,z)=3x+4y+5z$,$\varphi$是线性泛函
- 定义$\varphi:P(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$,$\varphi(p)=\int_0^1 p\,\mathrm{d}x$是线性泛函

线性泛函构成的空间也有研究的价值,下面给予定义

Def 对偶空间(dual space) **定义 2.12.2**

对偶空间(dual space)是线性泛函构成的空间,即$L(V,\mathbb{F})$,记作V',容易知道$\dim V' = \dim V$

Def 对偶基(dual basis) **定义 2.12.3**

对偶基(dual basis)是V'的一组基,也就是说，取$v_1, v_2, ..., v_n$,那么其对偶基也是一组线性泛函即

$$\varphi_j(v_k) = \begin{cases} 1 \text{ if } k = j \\ 0 \text{ if } k \neq j \end{cases} \tag{2.9}$$

Def 对偶映射(dual mapping) **定义 2.12.4**

对偶映射(dual mapping):对于$T \in L(V,W)$,定义对偶映射$T' \in L(W',V')$,满足$\varphi \in W'$,有$T'(\varphi) = \varphi \circ T$

Thm **定理 2.12.1**

对偶函数的代数性质：$(\lambda T)' = \lambda(T')$,$(S+T)' = S' + T'$,$(ST)' = T'S'$

Def 零化子(annihilator) **定义 2.12.5**

零化子(annihilator):对于$U \subset V$,U的零化子U^0定义为$U^0 = \{\varphi \in V' : \forall v \in U, \varphi(u) = 0$.

Thm 零化子的性质 **定理 2.12.2**

- 零化子是一个V'的子空间.
- 设V是有限维的，那么$\dim U + \dim U^0 = \dim V$
- $T \in L(V,W)$
  - V, W有限维,那么$\dim \ker T' = \dim \ker T + \dim W - \dim V$
  - $\ker T = (\operatorname{im} T)^0$
- T是满的当且仅当T'是单的.

我们知道，线性映射总是有对应的矩阵表示，我们理应好奇对偶映射在矩阵上的反应。下面定义这一点。

Def 转置(transpose) **定义 2.12.6**

矩阵的转置(transpose),A^T:定义$n \times m$矩阵A的转置A为$m \times n$矩阵，$\left(A^T\right)_{i,j} = (A)_{j,i}$

Thm **定理 2.12.3**

转置的代数性质:

- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T)$
- $(AB)^T = B^T A^T$

$M(T') = M(T)^T$

2.13. 矩阵的秩(rank)

Def **定义 2.13.1**

行秩和列秩:设A是$\mathbb{F}$上的$m \times n$矩阵

- A的行秩是A诸行张成空间的维数。
- A的列秩是A诸列张成空间的维数。

Thm **定理 2.13.1**

$\operatorname{im} T$的维数等于$M(T)$的列秩

行秩等于列秩，统称为秩(rank),记作$\operatorname{rank}\ A$

个人看来，线性泛函在后面用到的比较少，主要用到的可能还是转置和秩。所以最后的结论可能比前面的推到更加重要，具体为什么这里要用线性泛函引出这些内容，我也很懵

章节 3. 本征值，本征向量，不变子空间

我们已经建立了一些工具来描述一个算子的结构，我们下面来学习描述一个算子的其他角度。

3.1. 不变子空间

先假设V有一种直和分解$V = U_1 \oplus U_2 \oplus ... \oplus U_n$,如果我们认真的去构造$U_1, U_2, ..., U_n$，那么我们有可能可以构造出某种分解$\forall u \in U_i, T(u) = v \in U_i . U_i$是一个很有趣的子空间。下面来定义这个子空间。

Def **不变子空间(invariant subspace)** **定义 3.1.1**

$T \in L(V)$,V的一个子空间U满足$\forall u \in U$,$T(u) \in U$,那么我们称U是关于T的一个不变子空间(invariant subspace)。

e.g. 不变子空间 示例 3.1.1

1. $\{0\}$ -> 是一个不变子空间，$T(0)=0$
2. V -> 是一个不变子空间
3. $\text{Ker }T$ -> 是一个不变子空间
4. $\text{Im }T$ -> 是一个不变子空间，$T(u)\in\text{Im }T$

3.1.1. 特征值和特征向量

我们先来讨论一维的不变子空间

对于某一维的子空间$U=\{\mu v:\mu\in\mathbb{F}\}$，若它是一个不变子空间，那么一定有$Tu\in U$，又由于它是一维的，于是有$Tu=\lambda u$。一个向量做变换后其方向没有改变，长度以某个倍率增加，是一个有趣的性质。我们对其加以定义

Def 特征值(eigenvalue) 定义 3.1.2

若$T\in L(V)$,$T(v)=\lambda v(v\neq 0)$，那么称λ是T的一个特征值(eigenvalue)

Thm 特征值的判定定理 定理 3.1.1

若$T\in L(V)$,V是有限维向量空间，$\lambda\in\mathbb{F}$,下面四个条件等价：

1. λ是T特征值
2. $T-\lambda I$不是单射
3. $T-\lambda I$不是满射
4. $T-\lambda I$不可逆

Def 特征向量(eigenvector) 定义 3.1.3

若$T\in L(V)$,$T(v)=\lambda v(v\neq 0)$，那么称v是T的一个特征向量(eigenvector)

Thm 特征值的线性独立性 定理 3.1.2

从属于不同特征值的特征向量是线性独立的

❝ 证明 **引用 3.1.1**

设$v_1, v_2, ..., v_n$是T的特征向量，且其特征值都不相等，先假设这些向量线性相关。取一个最小的k，使得$v_k \in \mathrm{span}(v_1, v_2, ..., v_{k-1})$

于是有$v_k = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n$ (1).

用T作用于左右两边，有$\lambda_k v_k = \lambda_1 a_1 v_1 + \lambda_2 a_2 v_2 + ... + \lambda_{k-1o} a_{k-1} v_{k-1}$ (2)

用 (2)减 去 (1)左 右 两 边 乘 λ_k,得 :$a_1(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_k)v_2 + ... + a_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1} = 0$，于是$a_1 = a_2 = ... = a_{k-1} = 0$。

$v_k = 0$，与特征向量的定义矛盾。故证。

参考文献