本征值，本征向量，不变子空间

我们已经建立了一些工具来描述一个算子的结构，我们下面来学习描述一个算子的其他角度。

不变子空间

先假设V有一种直和分解$V = U_1 \oplus U_2 \oplus ... \oplus U_n$,如果我们认真的去构造$U_1, U_2, ..., U_n$， 那么我们有可能可以构造出某种分解$\forall u \in U_i, T(u) = v \in U_i$.$U_i$是一个很有趣的子空间。下面来定义这个子空间。

Def 不变子空间(invariant subspace) **定义 0.0.1**

$T \in L(V)$,V的一个子空间U满足$\forall u \in U$,$T(u) \in U$,那么我们称U是关于T的一个不变子空间(invariant subspace)。

definition 1: 不变子空间(invariant subspace)

e.g. 不变子空间 **示例 0.0.1**

1. $\{0\}$ -> 是一个不变子空间，$T(0) = 0$
2. V -> 是一个不变子空间
3. Ker T -> 是一个不变子空间
4. Im T -> 是一个不变子空间，$T(u) \in \text{Im } T$

example 2: 不变子空间

特征值和特征向量

我们先来讨论一维的不变子空间

对于某一维的子空间$U = \{\mu v : \mu \in \mathbb{F}\}$，若它是一个不变子空间，那么一定有$Tu \in U$，又由于它是一维的，于是有$Tu = \lambda u$。 一个向量做变换后其方向没有改变，长度以某个倍率增加，是一个有趣的性质。我们对其加以定义

Def 特征值(eigenvalue) **定义 0.0.2**

若$T \in L(V)$,$T(v) = \lambda v (v \neq 0)$，那么称$\lambda$是$T$的一个特征值(eigenvalue)

definition 3: 特征值(eigenvalue)

Thm 特征值的判定定理 **定理 0.0.1**

若$T \in L(V)$,V是有限维向量空间，$\lambda \in \mathbb{F}$,下面四个条件等价：

1. λ是T特征值
2. $T - \lambda I$不是单射
3. $T - \lambda I$不是满射
4. $T - \lambda I$不可逆

theorem 4: 特征值的判定定理

Def 特征向量(eigenvector) **定义 0.0.3**

若$T \in L(V)$,$T(v) = \lambda v (v \neq 0)$，那么称$v$是$T$的一个特征向量(eigenvector)

definition 5: 特征向量(eigenvector)

Thm 特征值的线性独立性 **定理 0.0.2**

从属于不同特征值的特征向量是线性独立的

theorem 6: 特征值的线性独立性

证明 **引用 0.0.1**

设$v_1, v_2, ..., v_n$是T的特征向量，且其特征值都不相等，先假设这些向量线性相关。取一个最小的k，使得$v_k \in \operatorname{span}(v_1, v_2, ..., v_{k-1})$

于是有$v_k = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n$ (1).

用T作用于左右两边，有$\lambda_k v_k = \lambda_1 a_1 v_1 + \lambda_2 a_2 v_2 + ... + \lambda_{k-1 o} a_{k-1} v_{k-1}$ (2)

用(2)减去(1)左右两边乘λ_k,得:$a_1(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_k)v_2 + ... + a_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1} = 0$，于是$a_1 = a_2 = ... = a_{k-1} = 0$。

$v_k = 0$，与特征向量的定义矛盾。故证。

quote 7: 证明