

线性代数

此笔记基于 *LADR(Linear Algebra Done Right) 5th edition*
2024 Summer

yingziyu-llt

最初写作于：2024 年 07 月 02 日

最后更新于：2024 年 08 月 04 日

目录

0.1. 前言	3
1. 线性空间	3
1.1. \mathbb{R}^n and \mathbb{C}^n	3
1.1.1. 复数 Complex Number	3
1.1.2. 组(List)	3
1.1.3. 向量(Vector)	4
1.2. 向量空间(Vector Space)	4
1.3. 子空间(Subspace)	5
1.3.1. 子空间	5
1.3.2. 子空间的和(Sum)	5
1.3.3. 子空间的直和(Direct Sum)	5
2. 有限维向量空间	6
2.1. 线性组合和张成	6
2.2. 线性无关	8
2.3. 基	8
2.4. 维数	9
2.5. 线性映射的定义	10
2.6. 线性映射的线性性	10
2.7. 零空间和值域	11
2.8. 矩阵	12
2.9. 逆和同构	14
2.10. 算子	15
2.11. 积空间和商空间	15
2.12. 对偶(Duality)	17
2.13. 矩阵的秩(rank)	19
3. 本征值, 本征向量, 不变子空间	19
3.1. 不变子空间	19
3.1.1. 特征值和特征向量	20
参考文献	22

0.1. 前言

本笔记基于 Linear Algebra Done Right(5th Edition) 一书的内容和顺序写成,可能具体内容不完全按照该书,会加入一些 简明线性代数(丘维声著) 的内容。

写这篇笔记,主要是我在前面的线性代数学习中,自我感觉只是基本掌握了一些散乱的知识,并没有真正很好的理解线性代数的本质和内核,于是暑假用闲暇时间重读线性代数,换一本书(LADR),希望能够得到更加深刻的理解。

章节 1. 线性空间

1.1. \mathbb{R}^n and \mathbb{C}^n

1.1.1. 复数 Complex Number

复数的定义是由对负数开平方根得出的。我们定义 $i = \sqrt{-1}$, 其运算规则和常规的运算法则类似。

Def

定义 1.1.1

$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$ 称作复数域

对于复数的四则运算, 我们做如下定义:

Def

定义 1.1.2

加法法则 $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

乘法法则 $(a + bi) * (c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$

当 $b = 0$ 时, a 就是实数。

在本笔记的其他部分, 我们用 \mathbb{F} 来表示 \mathbb{R} 和 \mathbb{C} , 称 \mathbb{F} 中的元素叫做 **标量**(scalar)。

1.1.2. 组(List)

Def

定义 1.1.3

取 n 个非负数的整数组成一个 **有序** 的对叫做一个组(List), 记为 (x_1, x_2, \dots, x_n) 。当且仅当两个组的各元素依次均相等时, 可以称两个组相等。

💡 List 和 Set 之间的差异:

提示 1.1.1

- List 中的元素有序, Set 中的元素无序; List 中的元素可重复, Set 中的元素不可重复

Def

定义 1.1.4

定义两个组的加法 $*$ $(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$, 满足交换律。

Def

定义 1.1.5

定义零元 $0 = (0, 0, \dots, 0)$

1.1.3. 向量(Vector)

将组放在一个坐标系中, 取原点到该点的一个有向线段, 称这个有向线段为向量(Vector)

对于两个向量之间的运算, 我们做如下定义

Def 加法

定义 1.1.6

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \quad (1.1)$$

Def 数乘

定义 1.1.7

$$\lambda * (a_1, a_2, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n) \quad (1.2)$$

1.2. 向量空间(Vector Space)

向量空间要求有以下几个必备条件:

Def

定义 1.2.1

1. 加法 $\alpha, \beta \in V$, 定义某种运算 $+$, 使得 $\alpha + \beta \in V$
2. 数乘 $\lambda \in \mathbb{F}, \alpha \in V$, 定义某种运算 \cdot , 使得 $\lambda \cdot \alpha \in V$

对于一个空间 $S = (V, \mathbb{F}, +, \cdot)$, 要求满足:

1. 加法可交换 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
2. 加法可结合 $\alpha + \beta + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
3. 数乘可交换 $\lambda\mu\alpha = \mu\lambda\alpha$
4. 数乘可结合 $\lambda\mu\alpha = \lambda(\mu\alpha)$
5. 数乘可分配 $(\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha, \lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$
6. 数乘有么元 $1, 1\alpha = \alpha$
7. 加法有零元 $0 \in V, 0 + \alpha = \alpha$
8. 加法有负元 $\alpha + (-\alpha) = 0$

那么称 S 为向量空间(Vector Space)。

Def

定义 1.2.2

向量空间的元素称为点(point)或者向量(vector)。

向量空间的形式和向量空间数乘的数域是有很大关系的。我们称 S 是在 \mathbb{F} 上的向量空间(vector space over \mathbb{F}),在 \mathbb{R} 上的叫实向量空间,在 \mathbb{C} 上的叫做复向量空间。

在前面我们说的 \mathbb{V} 一般是一个传统意义上的向量集合 \mathbb{F}^n (n 可以是无穷,称为无穷维向量空间),下面我们讨论和函数相关的向量空间。

Def

定义 1.2.3

我们记 \mathbb{F}^S ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ or \mathbb{C} , S 是一个集合)为从 $S \rightarrow \mathbb{F}$ 的映射

取 $f, g \in \mathbb{F}^S$,加法定义为 $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,数乘定义为 $\lambda \in \mathbb{F}, (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

定理

1. 加法单位元唯一
2. 加法负元唯一
3. 0数乘一个向量为零元
4. 任何数乘零元为零元
5. -1 数乘任何向量为其负元

1.3. 子空间(Subspace)

1.3.1. 子空间

设 V 是一个线性空间,若线性空间 U 中的所有元素都在 V 里,且二者运算相同(要求有向量加法和数乘),就称 U 是 V 的一个子空间。

Conditions for Subspace

1. 有零元(additive identity) $0 \in U$
2. 加法封闭(closed under addition) $\alpha, \beta \in U; \alpha + \beta \in U$
3. 数乘封闭(closed under scalar multiplication) $\alpha \in U, \lambda \in \mathbb{F}; \lambda \alpha \in U$

1.3.2. 子空间的和(Sum)

Def

定义 1.3.1

定义运算 $+$, 满足 $U_1 + U_2 + \dots + U_n = \{u_1 + u_2 + \dots + u_n : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, \dots, u_n \in U_n\}$

子空间的和是包含那些子空间的最小子空间。

1.3.3. 子空间的直和(Direct Sum)

Def

定义 1.3.2

和 $U = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ 成为直和, 若 U 中每个元素只能被唯一表示成 $u_1 + u_2 + \dots + u_n$, 其中 $u_i \in U_i$ 。记直和的符号为 \oplus

Conditions for Direct Sum

$U_1 + U_2 + \dots + U_n$ 是直和 $\Leftrightarrow 0$ 只有唯一表示方式: $u_1 = u_2 = \dots = u_n = 0 \Leftrightarrow U \cap V = \{0\}$

章节 2. 有限维向量空间

2.1. 线性组合和张成

Def 线性组合 (Linear combination)

定义 2.1.1

一个向量组 $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ 的线性组合 (Linear combination) 是指形如 $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ 的向量

Def 张成 (span)

定义 2.1.2

一个向量组的所有线性组合组成的集合叫做这个向量组张成 (span) 的空间 $\text{span}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, 有些也叫线性张成 (linear span)

指定空向量组 $()$ 张成的空间为 $\{0\}$

Thm 张成的空间是最小包含子空间

定理 2.1.1

一个向量组张成的空间就是包含这些向量的最小的子空间。

证明思路: 先去证明张成的空间是 V 的一个子空间 (证明运算封闭性), 再去证明这个空间包括张成其的所有向量, 再说明所有 V 包含这些向量的子空间都是其一个子集。

证明过程:

“证明

引用 2.1.1

Suppose v_1, v_2, \dots, v_n a list in V . We denote that $S = \text{span}(v_1, v_2, \dots, v_n)$

First, we need to prove the addition identity in S . Obviously, $0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n = 0$

After that, we need to prove the addition closure in S . For $a = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n, b = b_1v_1 + b_2v_2 + \dots + b_nv_n, a + b = (a_1 + b_1)v_1 + (a_2 + b_2)v_2 + \dots + (a_n + b_n)v_n \in V$

Further more, we need to prove the multiplication closure in S . For $a = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n, \lambda a = \lambda a_1v_1 + \lambda a_2v_2 + \dots + \lambda a_nv_n \in V$

Thus S is a subspace of V

To prove that S includes v_1, v_2, \dots, v_n , we only need to make a_i equal to 1 if and only if i equals to the index of v_i , otherwise $a_i = 0$.

Conversely, because subspaces are closed under scalar multiplication and addition, every subspace of V containing each v_j contains $\text{span}(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Thus S is the smallest subspace of V containing all the vectors

Def 张成(spans)

定义 2.1.3

如果 $\text{span}(v_1, v_2, \dots, v_n) = V$, 那么称 v_1, v_2, \dots, v_n 张成 V .

Def 有限维向量空间(finite-dimensional vector space)

定义 2.1.4

如果某个空间可以被有限个向量张成, 那么这个空间就是一个有限维向量空间(finite-dimensional vector space)。

Def

定义 2.1.5

多项式(polynomial)

[若 $\mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ 函数 p 可被表示为 $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{F}$, 那么这个函数就是一个在 \mathbb{F} 上的多项式(polynomial)函数, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ 称为多项式的系数(coefficient)]

Def 多项式的度(degree)

定义 2.1.6

多项式的度(degree)是多项式的最高次幂 (最高次幂的次数)。定义 0 的度数为 $-\infty$

Def $P(\mathbb{F}), P_m(\mathbb{F})$

定义 2.1.7

$P(\mathbb{F})$ 是所有在 \mathbb{F} 上多项式的集合形成的线性空间。容易知道, $P(\mathbb{F})$ 是 $\mathbb{F}^{\mathbb{F}}$ 的子空间

$P_m(\mathbb{F}), m \in \mathbb{Z}^+$ 指所有在 \mathbb{F} 上次数小于等于 m 的多项式的集合。

Def 无穷维向量空间(infinite-dimensional vector space)**定义 2.1.8**

不是有限维向量空间的向量空间吗，称作无穷维向量空间。

e.g.**示例 2.1.1**

Q: Show that $P(\mathbb{F})$ is a infinite-dimensional vector space.

A: Consider any list of polynomials in $P(\mathbb{F})$. We use m to denote the maximum degree of the polynomial in the list. Then every polynomials in the spans of the list has degree less than or equal to m . Then $z^m + 1$ is not in the span. Hence no list can span the space. QED

2.2. 线性无关**Def 线性无关(Linearly Independent)****定义 2.2.1**

若一个向量组 v_1, v_2, \dots, v_n , 使得 $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$ 当且仅当 $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, 那么称 v_1, v_2, \dots, v_n 是 **线性无关** (linearly independent), 否则被称为 **线性相关** (linearly dependent)

Thm**定理 2.2.1**

若 v_1, v_2, \dots, v_n 线性相关, 那么一定存在一个 $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, 使得:

- (a) $v_j \in \text{span}(v_1, v_2, \dots, v_{j-1})$
- (b) 删除 v_j 后的向量组与原先的向量组等价

“证明**引用 2.2.1**

v_1, v_2, \dots, v_n is linearly dependent, so exist $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ such that $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$.

Let j be the largest element in $\{1, 2, \dots, m\}$ if $a_j \neq 0$

Then $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_j v_j = 0 \Rightarrow v_j = \frac{a_1}{a_j} v_1 + \frac{a_2}{a_j} v_2 + \dots + a_j - \frac{1}{a_j} v_j - 1$. Then proving (a).

Suppose $u \in \text{span}(v_1, v_2, \dots, v_{j-1})$, then $u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$. We use $\frac{a_1}{a_j} v_1 + \frac{a_2}{a_j} v_2 + \dots + a_j - \frac{1}{a_j} v_j - 1$ to replace a_j .

Then we can easily to present u just using $a_1, a_2, \dots, a_j - 1, a_j + 1, \dots, a_n$. Then proving (b).

Thm**定理 2.2.2**

线性无关组的长度一定小于等于张成该空间向量组的长度。

2.3. 基

Def 基(basis)**定义 2.3.1**

一个空间 V 的一组**基(basis)**是一组可以张成 V 且线性无关的向量组。

Thm 基的判定定理**定理 2.3.1**

基的判定定理: v_1, v_2, \dots, v_n 是 V 的一组基 $\Leftrightarrow \forall v \in V$, 存在唯一的 $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ 使得 $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = v$

“证明**引用 2.3.1**

First suppose v_1, v_2, \dots, v_n as a basis of V . Let $v \in V$. v_1, v_2, \dots, v_n , so they span the space. Therefore $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$. Suppose $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$. Then $(c_1 - a_1)v_1 + (c_2 - a_2)v_2 + \dots + (c_n - a_n)v_n = 0, c_1 = a_1, c_2 = a_2, \dots, c_n = a_n$

On the other direction, suppose $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$ is unique, we can easily to know that v_1, v_2, \dots, v_n span the space.

To prove that they are linearly independent, we let $0 = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$. $2 * 0 = 2a_1 v_1 + 2a_2 v_2 + \dots + 2a_n v_n, a_1 = 2a_1, a_2 = 2a_2, \dots, a_n = 2a_n. a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$

Thm**定理 2.3.2**

张成某个空间的向量组包含这个空间的一个基

任何有限维向量空间包含一个基

空间内一组线性无关的向量组可以被扩张为一个基

任何 V 的子空间都是 V 直和的一部分

2.4. 维数**Thm****定理 2.4.1**

基向量组的长度与基的选取无关

“证明**引用 2.4.1**

Find two basis v_1, v_2, \dots, v_n and u_1, u_2, \dots, u_m . They all spans V . So $n \leq m$ and $m \leq n$. Then $m = n$

于是, 我们可以发现, 一个向量空间中基向量组的长度是一个对于该空间有意义的不变量, 我们于是有定义:

Def 维数(dimension)**定义 2.4.1**

维数(dimension)是向量空间 V 中基向量组的长度。记作 $\dim V$

Thm 子空间维数定理**定理 2.4.2**有限维向量空间 V 的子空间 U 满足 $\dim U \leq \dim V$ **Thm 基和维数****定理 2.4.3**长度为 $\dim V$ 的线性无关向量组就是 V 的一组基,长度为 $\dim V$ 能张成 V 的一组向量就是 V 的一组基**Thm 维数和公式****定理 2.4.4**维数和公式: $\dim(V + U) = \dim V + \dim U - \dim(V \cap U)$ **2.5. 线性映射的定义****Def 线性映射(Linear Mapping)****定义 2.5.1**一个映射 $T : V \rightarrow W$ 一定是线性的当且仅当它满足以下两个性质:

1. 可加性(additivity): $T(x + y) = T(x) + T(y)$
2. 齐次性(homogeneity): $T(cv) = cT(v)$

我们记作 Tv 为一个线性映射(Linear Mapping),称 $L(V, W)$ 为从 V 到 W 的线性映射. 显然其保持 0 元 $T(0) = 0$ **e.g. 常见线性映射****示例 2.5.1**零映射(zero) $0 \in L(V, W), 0v = 0$ 恒等(identity) $I \in L(V, W), Iv = v$ 微分(differential) $D \in L(V, W), Dv = v'$ 积分(integral) $I \in L(V, W), Iv(x) = \int_0^1 v(x) dx$ **Thm****定理 2.5.1** V 的基为 v_1, v_2, \dots, v_n ; W 的基为 u_1, u_2, \dots, u_n , 存在唯一的线性映射 T , 使得 $Tv_i = u_i$ 证明思路: 围绕着 $\forall u \in W, \exists c_1, c_2, \dots, c_n$, 只用构造 $T(c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n) = c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_nu_n$ 即可.**2.6. 线性映射的线性性**为了寻找其线性性, 我们要先定义 $L(V, W)$ 上的加法和数乘

Def $L(V, W)$ 上的运算**定义 2.6.1**定义 $S, T \in L(V, W)$ 定义 $(S + T)(v) = S(v) + T(v), (\lambda S)(v) = \lambda S(v)$ 于是容易看出, $L(V, W)$ 是一个线性空间.**Def** 线性映射的乘法**定义 2.6.2**定义线性映射的乘法 $S \in L(U, V), T \in L(V, W)$, 那么 $(ST)(v) = S(T(v))$ **Thm** 乘法的性质**定理 2.6.1**

乘法的性质

1. 结合律 $T_1 T_2 T_3 = T_1 (T_2 T_3)$
2. 幺元 $IT = TI = T, I$ 是 $L(V, V)$ 上的恒等映射
3. 分配率 $(S_1 + S_2)(T) = S_1 T + S_2 T, S(T_1 + T_2) = ST_1 + ST_2$

需要注意的是, 线性映射的乘法不具有交换律.

2.7. 零空间和值域**Def** 零空间(null space)**定义 2.7.1** $T \in L(V, W)$, T 的零空间就是 V 的一个子集, 使得 $\{v \in V : Tv = 0\}$, 记作 $\text{null } T$, 也叫做 T 的核空间(kernel space), 记作 $\ker T$ 单射(injective) $T \in L(V, W), Tv = Tw \Rightarrow v = w$ 这样的 T 称为一个单射.**Thm****定理 2.7.1**

1. $\ker T$ 是 V 的一个子空间
2. T 是单射 $\Leftrightarrow \ker T = \{0\}$

“证明**引用 2.7.1**对于命题 1: 取 $v_1, v_2 \in \ker T, T(v_1 + v_2) = Tv_1 + Tv_2 = 0 + 0 = 0; T(\lambda v) = \lambda Tv = 0$ 对于命题 2: " \Rightarrow " 由于 T 为单射, 所以 $T(v) = T(0) = 0 \Rightarrow v = 0$, 于是 $\ker T = \{0\}$ " \Leftarrow " $T(v_1) = T(v_2) \Rightarrow T(v_1) - T(v_2) = 0 \Rightarrow T(v_1 - v_2) = 0$, 又 $\ker T = \{0\}, \Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$

Def 值域(range)**定义 2.7.2**

对于一个函数 $T: V \rightarrow W$, T 的值域就是 W 的一个子集 $\{Tv\}$, 记作 $\text{range } T$, 也叫函数的像空间 (image), 记作 $\text{im } T$.

Thm**定理 2.7.2**

$\text{im } T$ 是 V 的一个子空间

“证明**引用 2.7.2**

设 $w_1, w_2 \in \text{im } T$, 那么 $w = T(v_1 + v_2) = Tv_1 + Tv_2 = w_1 + w_2 \in \text{im } T$, $T(\lambda v) = \lambda Tv = \lambda w \in \text{im } T$

Def 满射(surjective)**定义 2.7.3**

如果某个映射 $T: V \rightarrow W$ 的像空间等于 W , 那么称 T 是一个满射.

Thm 线性代数基本定理**定理 2.7.3**

$T \in L(V, W)$, $\dim V = \dim \ker T + \dim \text{im } T$

于是容易得出: 如果 $T: V \rightarrow W$, $\dim W < \dim V$, 那么 T 一定不是单射. 如果 $\dim V < \dim W$, 那么 T 一定不是满射

显然, 一个欠定的齐次线性方程组有非零解, 非齐次线性方程组可能无解. (齐次线性方程组 $T(v) = 0$, 非齐次线性方程组 $T(v) = v_0$)

2.8. 矩阵

为了更加方便的表示线性映射, 我们定义矩阵

Def 矩阵**定义 2.8.1**

设 m, n 都是正整数. 一个 $m \times n$ 矩阵 A 是一个在 \mathbb{F} 上的 $m \times n$ 矩形数组, 写作:

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \dots v & & \dots v \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

一些特殊矩阵: I 是单位矩阵, 除了对角线元素为 1, 其他均为 0.

下面来定义一个线性映射的矩阵表示

Def 线性映射的矩阵表示**定义 2.8.2**

若 v_1, v_2, \dots, v_n 是 V 的一组基, w_1, w_2, \dots, w_m 是 W 的一组基, 且 $Tv_i = \sum_{j=1}^m A_{ij} w_j$, 那么其矩阵表示 $M(T)$ 就是 A . 如果未指明 v_i 和 w_i , 可以记作 $M(T, (v_1, v_2, \dots, v_n), (w_1, w_2, \dots, w_m))$

容易看出, $M(T)$ 的第 i 列和 v_i 的选取有关, 而第 i 行和 w_i 的选取有关. 例如变换 $T(x, y) = (8x + 9y, 2x + 3y, x + y)$, 在标准正交基 $((1, 0), (0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ 下的矩阵表示为 $M(T) = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

为了进一步扩展矩阵的意义, 定义矩阵的加法、数乘

Def 矩阵的运算**定义 2.8.3**

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \dots v & & \dots v \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,m} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

定义两个 $m \times n$ 矩阵 A, B 的和

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \dots v & & \dots v \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{1,1} & \dots & B_{1,n} \\ \dots v & & \dots v \\ B_{m,1} & \dots & B_{m,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} + B_{1,1} & \dots & A_{1,n} + B_{1,n} \\ \dots v & & \dots v \\ A_{m,1} + B_{m,1} & \dots & A_{m,m} + B_{m,m} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

数乘

$$\lambda * A = \begin{pmatrix} \lambda * A_{1,1} & \dots & \lambda * A_{1,n} \\ \dots v & & \dots v \\ \lambda * A_{m,1} & \dots & \lambda * A_{m,m} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

容易看出, 矩阵的加法就相当于线性映射的加法, 矩阵数乘就相当于线性映射的数乘.

考虑到线性映射还有叠加这一组合方法, 我们下面定义矩阵的乘法.

试探: S, T 是两个线性映射, ST :

$$\begin{aligned} & ST(u_k) \\ &= S\left(\sum_{r=1}^n C_{r,k} v_r\right) \\ &= \sum_{r=1}^n C_{r,k} \sum_{j=1}^m A_{j,r} w_j \end{aligned} \quad (2.5)$$

为了表示这种变换规律, 定义矩阵乘法

Def 矩阵乘法**定义 2.8.4**

设 A 是 $n \times k$ 矩阵, B 是 $k \times m$ 矩阵,定义运算 $(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^k A_{i,k} B_{k,j}$,更加直观的,就是选取 A 的第 i 行和 B 的第 j 列,按元素依次乘在一起再求和,表示新矩阵第 i 行 j 列的元素.

具体计算可以自己去试试.

Notation

一种简明记法

$A_{j,\cdot}$ 指 A 的第 j 行形成的一个 $m \times 1$ 矩阵, $A_{\cdot,j}$ 指 A 的第 j 列形成的一个 $1 \times n$ 矩阵

于是对于矩阵的乘法有以下表示法

$$(AB)_{i,j} = A_{i,\cdot} B_{\cdot,j} \quad (2.6)$$

$$(AB)_{\cdot,k} = A C_{\cdot,k} \quad (2.7)$$

对矩阵乘法的另一种理解:线性组合 设 $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, A 为 $m \times n$ 矩阵,那么 $Ac = c_1 A_{\cdot,1} + c_2 A_{\cdot,2} + \dots + c_n A_{\cdot,n}$,换言之, Ac 就是对 A 列的线性组合,用 c 的每一个元来数乘.

2.9. 逆和同构**Def 逆(inverse)****定义 2.9.1**

A, B 是两个映射($n \times n$ 矩阵),且有 $AB = BA = I$,那么称 B 是 A 的逆(inverse),记作 $B = A^{-1}$, A 是可逆的(invertible)

Thm**定理 2.9.1**

如果某矩阵(映射)可逆,那么其逆是唯一的.

映射 V 可逆 \Leftrightarrow 映射 V 是单射满射(一一对应)

对于存在可逆映射的两个空间,他们也有一些潜在的关系,下面加以定义.

Def 同构(isomorphism)**定义 2.9.2**

一个可逆映射可以称为同构(isomorphism)

两个空间中存在一个可逆映射,则这两个空间称为是同构的(isomorphic)

Thm**定理 2.9.2**

两个向量空间同构 \Leftrightarrow 两个向量空间维度相同

设 $\dim V = n, \dim W = m$,那么 $L(V, W)$ 和 \mathbb{F}^{nm} 同构,于是 $\dim L(V, W) = \dim V \dim W$

为了统一表示线性映射,我们试着用矩阵相乘的方法来表示映射. 为了更好处理向量,我们定义向量的矩阵表示(matrix of a vector)

Def 矩阵的向量表示(matrix of a vector)

定义 2.9.3

设 V 的一组基是 $v_1, v_2, \dots, v_n, v \in V, v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$, 那么 $M(v) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 叫做 v 的矩阵表示.

这样之后,我们容易得到 $M(Tv) = M(T)M(v)$

2.10. 算子

对于以上种种线性映射来说,有一类很特殊的是从 V 到 V 的映射. 我们对其进行一些定义.

Def 算子(operator)

定义 2.10.1

一个从 V 到 V 的线性映射定义为**算子**(operator),记 V 上所有算子构成的线性空间为 $L(V)$

对于算子,也有一些很好的性质.

Thm

定理 2.10.1

如果有限维向量空间中的算子 $T \in L(V)$,下面三个命题等价

- T 可逆
- T 是单射
- T 是满射

2.11. 积空间和商空间

Def 积空间

定义 2.11.1

线性空间的积: 设 V_1, V_2, \dots, V_n 是 \mathbb{F} 上的线性空间, 定义 $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n = \{(v_1, v_2, \dots, v_n), v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, \dots \in V_n\}$ 叫做这些空间的积.

在积空间中的加法被定义为 $(v_1, v_2, \dots, v_n) + (u_1, u_2, \dots, u_n) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2, \dots + u_n, v_n + u_n)$, 数乘也类似 $\lambda(v_1, v_2, \dots, v_n) = (\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda \dots, \lambda v_n)$

实际上就可以将 v_i 当成一个数,其运算规则就变成了一般向量的运算规则了.

Thm

定理 2.11.1

积空间是一个线性空间

证明从略.

对于积空间本身,我们也要有一些观察. $((1, 2), (3, 4, 5))$ 和 $(1, 2, 3, 4, 5)$ 似乎并没有什么本质上的差异. 那我们就可以去猜测 $\mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^m$ 和 \mathbb{F}^{m+n} 有同构关系了. 事实也正是如此.

Thm

定理 2.11.2

设 V_1, V_2, \dots, V_n 都是有限维线性空间, $\dim(V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n) = \dim V_1 + \dim V_2 + \dots + \dim V_n$

“证明

引用 2.11.1

选取每个 U 的一个基. 对于每个 U 的每个基向量, 考虑 $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$ 的如下元素: 第 j 个位置为此基向量, 其余位置为 0. 所有这些向量构成的组是线性无关的, 且张成 $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$, 因此是积空间的基. 这个基的长度是 $\dim V_1 + \dots + \dim V_n$

我们下面来定义子空间和向量的和.

Def 仿射子集(affine subset)

定义 2.11.2

设 $v \in V, U$ 是 V 的子空间. 那么定义子空间和向量的和为:

$$v + U = \{v + u : u \in U\}$$

我们称 $v + U$ 是 V 的仿射子集(affine subset), $v + U$ 和 U 形成平行(parallel)关系.

从几何的角度来看, $v + U$ 是将过原点的 U 平面向 v 方向平移的结果, 所以有一定的几何直观. 很显然, 一个仿射子集不是一个子空间($v \neq 0$)

为了描述相同性质的仿射子集, 我们来定义商空间.

Def 商空间

定义 2.11.3

设 U 是 V 的子空间, 那么商空间就是所有平行于 U 的仿射子集的并. 定义为: $V/U = \{v + U : v \in V\}$

Thm

定理 2.11.3

平行于 U 的两个仿射子集要么相等, 要么不相交.

即: U 是 V 的子空间, $v, w \in V$ 下列陈述等价

- $v - w \in U$
- $v + U = w + U$
- $(v + U) \cap (w + U) \neq \emptyset$

下面来定义商空间上的线性运算.

Def 商空间上的线性运算**定义 2.11.4**

定义加法和数乘分别是:

$$(v + U) + (w + U) = (v + w) + U, \lambda(v + U) = \lambda v + U$$

需要注意的是,对于同一个集合 $v + U$,会有多种表示方法. 举例 $y = x + 1$ 这个集合至少可以有 $(-1, 0) + (y = x)$ 和 $(0, 1) + (y = x)$ 两种表示方法. 为了说明加法和数乘是有意义的,需要有如下的证明.

“证明**引用 2.11.2**命题:若 $v_1 + U = v_2 + U, w_1 + U = w_2 + U$,那么 $(v_1 + w_1) + U = (v_2 + w_2) + U$

由上面的定理知, $v_1 - v_2 \in U, w_1 - w_2 \in U$,于是 $(v_1 - v_2) + (w_1 - w_2) \in U$,于是 $(v_1 + w_1) - (v_2 + w_2) \in U$,从而 $(v_1 + w_1) + U = (v_2 + w_2) + U$

Def 商映射**定义 2.11.5**商映射:定义一个映射 $\pi: V \rightarrow \frac{V}{U}$,对任意 $v \in V$,

$$\pi(v) = v + U \quad (2.8)$$

可以证明这个映射是一个线性映射.

Thm**定理 2.11.4**商空间的维数:如果 V 是有限维空间,那么 $\dim V = \dim U + \dim \frac{V}{U}$ **2.12. 对偶(Duality)**

像(值域)是一个标量空间的线性函数也有一些有趣的性质,我们将这类函数单独拿出来讨论一下。

Def 线性泛函(linear functional)**定义 2.12.1**线性泛函(linear functional)是 $L(V, \mathbb{F})$ 的一个线性函数**e.g.****示例 2.12.1**

- 定义 $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x, y, z) = 3x + 4y + 5z$, φ 是线性泛函
- 定义 $\varphi: P(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(p) = \int_0^1 p \, dx$ 是线性泛函

线性泛函构成的空间也有研究的价值,下面给予定义

Def 对偶空间(dual space)**定义 2.12.2**

对偶空间(dual space)是线性泛函构成的空间,即 $L(V, \mathbb{F})$,记作 V' ,容易知道 $\dim V' = \dim V$

Def 对偶基(dual basis)**定义 2.12.3**

对偶基(dual basis)是 V' 的一组基,也就是说,取 v_1, v_2, \dots, v_n ,那么其对偶基也是一组线性泛函即

$$\varphi_j(v_k) = \begin{cases} 1 & \text{if } k = j \\ 0 & \text{if } k \neq j \end{cases} \quad (2.9)$$

Def 对偶映射(dual mapping)**定义 2.12.4**

对偶映射(dual mapping):对于 $T \in L(V, W)$,定义对偶映射 $T' \in L(W', V')$,满足 $\varphi \in W'$,有 $T'(\varphi) = \varphi \circ T$

Thm**定理 2.12.1**

对偶函数的代数性质: $(\lambda T)' = \lambda(T')$, $(S + T)' = S' + T'$, $(ST)' = T'S'$

Def 零化子(annihilator)**定义 2.12.5**

零化子(annihilator):对于 $U \subset V$, U 的零化子 U^0 定义为 $U^0 = \{\varphi \in V' : \forall v \in U, \varphi(v) = 0\}$.

Thm 零化子的性质**定理 2.12.2**

- 零化子是一个 V' 的子空间.
- 设 V 是有限维的, 那么 $\dim U + \dim U^0 = \dim V$
- $T \in L(V, W)$
 - V, W 有限维, 那么 $\dim \ker T' = \dim \ker T + \dim W - \dim V$
 - $\ker T = (\text{im } T)^0$
- T 是满的当且仅当 T' 是单的.

我们知道, 线性映射总是有对应的矩阵表示, 我们理应好奇对偶映射在矩阵上的反应。下面定义这一点。

Def 转置(transpose)**定义 2.12.6**

矩阵的转置(transpose), A^T : 定义 $n \times m$ 矩阵 A 的转置 A 为 $m \times n$ 矩阵, $(A^T)_{i,j} = (A)_{j,i}$

Thm

定理 2.12.3

转置的代数性质:

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

$$M(T') = M(T)^T$$

2.13. 矩阵的秩(rank)

Def

定义 2.13.1

行秩和列秩: 设 A 是 \mathbb{F} 上的 $m \times n$ 矩阵

- A 的行秩是 A 诸行张成空间的维数。
- A 的列秩是 A 诸列张成空间的维数。

Thm

定理 2.13.1

 $\text{im } T$ 的维数等于 $M(T)$ 的列秩
行秩等于列秩, 统称为秩(rank), 记作 $\text{rank } A$

个人看来, 线性泛函在后面用到的比较少, 主要用到的可能还是转置和秩。所以最后的结论可能比前面的推到更加重要, 具体为什么这里要用线性泛函引出这些内容, 我也很懵

章节 3. 本征值, 本征向量, 不变子空间

我们已经建立了一些工具来描述一个算子的结构, 我们下面来学习描述一个算子的其他角度。

3.1. 不变子空间

先假设 V 有一种直和分解 $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n$, 如果我们认真的去构造 U_1, U_2, \dots, U_n , 那么我们有可能可以构造出某种分解 $\forall u \in U_i, T(u) = v \in U_i$. U_i 是一个很有趣的子空间。下面来定义这个子空间。

Def 不变子空间(invariant subspace)

定义 3.1.1

$T \in L(V)$, V 的一个子空间 U 满足 $\forall u \in U, T(u) \in U$, 那么我们称 U 是关于 T 的一个不变子空间 (invariant subspace)。

e.g. 不变子空间**示例 3.1.1**

1. $\{0\} \rightarrow$ 是一个不变子空间, $T(0) = 0$
2. $V \rightarrow$ 是一个不变子空间
3. $\text{Ker } T \rightarrow$ 是一个不变子空间
4. $\text{Im } T \rightarrow$ 是一个不变子空间, $T(u) \in \text{Im } T$

3.1.1. 特征值和特征向量

我们先来讨论一维的不变子空间

对于某一维的子空间 $U = \{\mu v : \mu \in \mathbb{F}\}$, 若它是一个不变子空间, 那么一定有 $Tu \in U$, 又由于它是一维的, 于是有 $Tu = \lambda u$ 。一个向量做变换后其方向没有改变, 长度以某个倍率增加, 是一个有趣的性质。我们对其加以定义

Def 特征值(eigenvalue)**定义 3.1.2**

若 $T \in L(V), T(v) = \lambda v (v \neq 0)$, 那么称 λ 是 T 的一个特征值(eigenvalue)

Thm 特征值的判定定理**定理 3.1.1**

若 $T \in L(V), V$ 是有限维向量空间, $\lambda \in \mathbb{F}$, 下面四个条件等价:

1. λ 是 T 特征值
2. $T - \lambda I$ 不是单射
3. $T - \lambda I$ 不是满射
4. $T - \lambda I$ 不可逆

Def 特征向量(eigenvector)**定义 3.1.3**

若 $T \in L(V), T(v) = \lambda v (v \neq 0)$, 那么称 v 是 T 的一个特征向量(eigenvector)

Thm 特征值的线性独立性**定理 3.1.2**

从属于不同特征值的特征向量是线性独立的

“证明

引用 3.1.1

设 v_1, v_2, \dots, v_n 是 T 的特征向量，且其特征值都不相等，先假设这些向量线性相关。取一个最小的 k ，使得 $v_k \in \text{span}(v_1, v_2, \dots, v_{k-1})$

于是有 $v_k = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_{k-1} v_{k-1}$ (1).

用 T 作用于左右两边，有 $\lambda_k v_k = \lambda_1 a_1 v_1 + \lambda_2 a_2 v_2 + \dots + \lambda_{k-1} a_{k-1} v_{k-1}$ (2)

用 (2) 减去 (1) 左右两边乘 λ_k ，得： $a_1(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_k)v_2 + \dots + a_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1} = 0$ ，于是 $a_1 = a_2 = \dots = a_{k-1} = 0$ 。

$v_k = 0$ ，与特征向量的定义矛盾。故证。

参考文献
