

线性方程组

Letian Lin — yingziyu-Lin@outlook.com

February, 19 2024

1 线性方程组的概念

线性方程： 线性方程就是 n 元 1 次方程，要求没有二次项，没有交叉项，也没有其他函数。

例子： $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$

线性方程组： 由线性方程组成的方程组，如：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

我们将 x_1, x_2, \dots, x_n 称为变元， $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{mn}$ 称为系数， b_1, b_2, \dots, b_m 称为常数。

解 若 c_1, c_2, \dots, c_m 带入方程 x_1, \dots, x_n ，使得每个等式都成立，称 $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$ 为

一组解，所有解构成的集合叫做解集

2 高斯-约当消元法

基本思路 从左向右，从上向下，依次消元，做出阶梯矩阵后从下向上消元，将增广矩阵约化为简化阶梯矩阵。

初等变换 针对方程组有三种初等变换，经过初等变换，方程组的解不变。

1. 把某方程的某倍数加到另一方程上
2. 互换两方程的位置
3. 用非零数乘以某方程

矩阵 把 $s \times m$ 个数排成 s 行 m 列，就称为 $s \times m$ 矩阵。元素均为 0 的称做 0 矩阵，记作 $\mathbf{0}$ ， $s = m$ 的矩阵称为方阵。

矩阵的初等行变换 有三种初等行变换。

1. 把某行的某倍数加到另一方程上
2. 互换两行的位置
3. 用非零数乘以某行

阶梯形矩阵和简化阶梯形矩阵 阶梯形矩阵要求：1. 元素全为 0 的行（零行）在矩阵最下方 2. 左边第一个非零元素（主元）的列指标随行指标**严格**递增

简化阶梯形矩阵要求：1. 是阶梯形矩阵 2. 每个主元都是 1 3. 每个主元所在列的其余元素都是 0

简化阶梯形矩阵例

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$