07 重积分

Letian Lin — yingziyu-Lin@outlook.com

2024 年 2 月 20 日

目录

1 二重积分的概念和性质

1.1 引入

一元函数的积分 一元函数的积分的核心是分割求和，将连续函数分割成大量小的微元，从而便于求和。其公式为

$$\int_a^b f(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

一元函数积分的性质 1. 线性性质 $\int_a^b f(x) + g(x) = \int_a^b f(x) + \int_a^b g(x)$ $\int_a^b kf(x) = k\int_a^b f(x)$

2. 保号性: 若 $\forall x \in D$ $f(x) \le g(x)$ 或仅在有限个点上不满足该条件，都有 $\int_a^b f(x) \le \int_a^b$

3. 可加性：$\int_a^b f(x) = \int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)$

4. 积分中值定理：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $\exists\xi \in [a,b]$ 使得 $\int_a^b f(x) = f(\xi) * (b-a)$

1.2 二重积分

分割 我们把一个区域 D 划分为 n 个子区域，分别称作 $D_1, D_2 \ldots D_n$，要求 $D_1 \cup D_2 \cup \ldots D_n = D$，且都不相交

定义 设 $z = f(x,y)$ 是定义在有界闭区域 D 上的函数，对其任意分割 $\{D_1, D_2, \ldots D_n\}$，及任意选择 $(x_i, y_i) \in D_i$，称

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$$

为 $f(x,y)$ 在 D 上的二重积分，记作 $\iint_D f(x,y)\mathrm{dxdy}$

二重积分的几何意义 以 $z = f(x,y)$ 为顶面的直柱体的体积