第一题：1～20 小题，每小题 1 分，共 20 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

1、设 $f(x)$ 是偶函数，$\varphi(x)$ 是奇函数，则下列函数（假设都有意义）中是奇函数的是（　）

（A）$f[\varphi(x)]$　（B）$f[f(x)]$　（C）$\varphi[f(x)]$　（D）$\varphi[\varphi(x)]$

【答案】（D）

【解析】$\varphi[\varphi(-x)]=\varphi[-\varphi(x)]=-\varphi[\varphi(x)]$，因此 $\varphi[\varphi(x)]$ 是奇函数，故选（D）。

2、设 $f(x)=\arcsin x^2$，则 $f'(x)=$（　）

（A）$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　（B）$\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$　（C）$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$　（D）$\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

【答案】（D）

【解析】根据复合函数求导法则，$f'(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$。

3、设函数 $f(x)$ 的一个原函数为 10^x，则 $f'(x)=$（　）

（A）10^x　（B）$10^x\cdot\ln 10$　（C）$10^x\cdot(\ln 10)^2$　（D）$10^x\cdot(\ln 10)^3$

【答案】（C）

【解析】$f(x)=(10^x)'=10^x\ln 10$，$f'(x)=(10^x\ln 10)'=10^x(\ln 10)^2$，选（C）。

4、不定积分 $\int \sin x\cos x dx$ 不等于（　）

（A）$\dfrac{1}{2}\sin^2 x+C$　（B）$\dfrac{1}{2}\sin^2 2x+C$

（C）$-\dfrac{1}{4}\cos 2x+C$　（D）$-\dfrac{1}{2}\cos^2 x+C$

【答案】（B）

【解析】$\left(\dfrac{1}{2}\sin^2 2x+C\right)'=\dfrac{1}{2}\times 2\times\sin 2x\cos 2x=\sin 2x\cos 2x\neq\sin x\cos x$，选项（B）

错误。

5、$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+x\sin^2 x)\cos xdx=$（ ）

（A）0 （B）1 （C）-1 （D）$\frac{\pi}{2}$

【答案】（A）

【解析】易验证，被积函数$(x^3+x\sin^2 x)\cos x$为奇函数，因此，在对称区间上求积分为0，选（A）。

6、已知$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则$\int_a^x f(t+a)dt=$（ ）

（A）$F(x)-F(a)$ （B）$F(t)-F(a)$

（C）$F(x+a)-F(x-a)$ （D）$F(x+a)-F(2a)$

【答案】（D）

【解析】根据牛顿-莱布尼茨公式，

$\int_a^x f(t+a)dt=F(x+a)-F(a+a)=F(x+a)-F(2a)$。

7、已知$F'(x)=f(x)$，则下述子式中一定正确的是（其中C为任意常数）（ ）

（A）$\int f(x)dx=F(x)+2C$ （B）$\int f(x)dx=F(x)$

（C）$\int F(x)dx=f(x)+C$ （D）$\int F(x)dx=f(x)$

【答案】（A）

【解析】根据不定积分的定义，可知选项（A）正确。

8、设$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，则$f'(x)$等于（ ）

（A）$\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$ （B）$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

（C）$\frac{1}{2(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}}$ （D）$\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}$

【答案】（B）

【解析】根据复合函数求导法则，$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$。

9、$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=$（　　）

（A）1　　（B）0　　（C）∞　　（D）不存在

【答案】（B）

【解析】根据无穷大量的关系，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$，应选（B）。

10、$x\to 0^+$ 时，下列无穷小量中与 $\sqrt{x}$ 等价的是（　　）

（A）$1-e^{\sqrt{x}}$　　（B）$\ln(1+\sqrt{x})$　　（C）$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　（D）$1-\cos\sqrt{x}$

【答案】（B）

【解析】$1-e^{\sqrt{x}}\sim-\sqrt{x}$，$\ln(1+\sqrt{x})\sim\sqrt{x}$，$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$，$1-\cos\sqrt{x}\sim\dfrac{1}{2}x$，此题选（B）。

11、设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，则下列结论正确的是（　　）

（A）$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$或$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$　　（B）$|\boldsymbol{A}|=0\Leftrightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

（C）$|\boldsymbol{AB}|=0\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|=0$或$|\boldsymbol{B}|=0$　　（D）$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|=1$

【答案】（C）

【解析】因$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=0\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|=0$或$|\boldsymbol{B}|=0$，故（C）正确。

12、$\begin{vmatrix}1 & a & 0 & 0\\ -1 & 2-a & a & 0\\ 0 & -2 & 3-a & a\\ 0 & 0 & -3 & 4-a\end{vmatrix}=$（　　）

（A）22　　（B）23　　（C）24　　（D）25

【答案】（C）

【解析】利用行列式的性质，

原式= $\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ -1 & 2-a & a & 0 \\ 0 & -2 & 3-a & a \\ 0 & 0 & -3 & 4-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 24$。

13、设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，满足等式 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则必有（　　）

（A）$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$　　（B）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

（C）$|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{B}|=0$　　（D）$|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0$

【答案】（C）

【解析】$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O} \Rightarrow |\boldsymbol{AB}|=0 \Rightarrow |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=0$，所以 $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{B}|=0$，故选项（C）正确。

14、设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵 $(n>1)$，m 是大于 1 的整数，则必有（　）

（A）$(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}^T$　　（B）$(\boldsymbol{AB})^m=\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^m$

（C）$|\boldsymbol{AB}^T|=|\boldsymbol{A}^T||\boldsymbol{B}^T|$　　（D）$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$

【答案】（C）

【解析】$|\boldsymbol{AB}^T|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}^T|=|\boldsymbol{A}^T||\boldsymbol{B}^T|$，故选项（C）正确。

15、$x=1$ 是 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}=0$ 的（　　）

（A）充分必要条件　　（B）充分非必要条件

（C）必要非充分条件　　（D）既不充分也不必要条件

【答案】（B）

【解析】$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & -2 & (-2)^2 \end{vmatrix}=(x-1)(-2-1)(-2-x)$，故 $x=1$ 为 $\boldsymbol{D}=0$ 的充分非必要条件，选（B）。

16、设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆矩阵，则下列等式中必定成立的是（　　）

（A）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$　　（B）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$

（C）$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$　　　　（D）$(\boldsymbol{AB})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$

【答案】（D）

【解析】$(\boldsymbol{AB})^*=|\boldsymbol{AB}|(\boldsymbol{AB})^{-1}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$，故选项（D）正确。

17、设 A,B,C 是三个事件，与事件 A 互斥的事件是（　）

（A）$\overline{A}B+A\overline{C}$　（B）$\overline{A(B+C)}$　（C）$\overline{ABC}$　（D）$\overline{A+B+C}$

【答案】（D）

【解析】$A\bigcap\overline{A+B+C}=A\bigcap\overline{A}\bigcap\overline{B}\bigcap\overline{C}=\varnothing$，选（D）。

18、一袋中装有 4 只球，编号为 1，2，3，4，从袋中一次取出 2 只球，用 X 表示取出的 2 只球中最大号码数，则 $P\{X=4\}=$（　）

（A）0.4　（B）0.5　（C）0.6　（D）0.7

【答案】（B）

【解析】$P\{X=4\}=\dfrac{3}{C_4^2}=\dfrac{1}{2}$。

19、假设事件 A,B 满足 $0<P(B)<1$，$P(A)>0$，且 $P(B|A)=1$，则（　）

（A）$P(A|B)=1$　　　　（B）$P(\overline{A}|B)=0$

（C）$P(A|\overline{B})=0$　　　　（D）$P(\overline{A}|\overline{B})=0$

【答案】（C）

【解析】由 $P(B|A)=1$，即 $P(A)=P(AB)$。$P(A|\overline{B})=\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}$，而

$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0$，故 $P(A|\overline{B})=0$，选（C）。

20、设随机变量 X 在 $[0,1]$ 上服从均匀分布，记事件 $A=\left\{0\le X\le\dfrac{1}{2}\right\}$，

$B=\left\{\frac{1}{4}\le X\le\frac{3}{4}\right\}$，则（　　）

（A）A,B 互不相容　　（B）A,B 相互独立

（C）A 包含于 B　　（D）A 与 B 对立

【答案】（B）

【解析】随机变量 X 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，且 $AB=\left\{\frac{1}{4}\le X\le\frac{1}{2}\right\}$。

有 $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$，$P(AB)=\frac{1}{4}$，故 $P(AB)=P(A)P(B)$，故 A,B 相互独立，选（B）。

第二题：21～60 小题，每小题 1.5 分，共 60 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

21、设 $a_1=x(\cos\sqrt{x}-1), a_2=\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x}), a_3=\sqrt[3]{x+1}-1$，当 $x\to 0^+$ 时，以上三个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是（　　）

（A）a_1,a_2,a_3　（B）a_2,a_3,a_1　（C）a_2,a_1,a_3　（D）a_3,a_2,a_1

【答案】（B）

【解析】当 $x\to 0^+$ 时，$x(\cos\sqrt{x}-1)\sim -\frac{1}{2}x^2$，$\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})\sim x^{\frac{5}{6}}$，$\sqrt[3]{x+1}-1\sim\frac{1}{3}x$，

因此，三个无穷小量从低阶到高阶的排序为 a_2,a_3,a_1，选（B）。

22、设函数 $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　　）

（A）可去间断点　　（B）跳跃间断点

（C）无穷间断点　　（D）振荡间断点

【答案】（B）

【解析】由 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}}{2^{\frac{1}{x}}}=1$，

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\ne\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点。

23、设函数 $f(x)$ 可导，$f'(2)=3$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2-x)-f(2)}{3x}=$（　　）

（A）-1　　（B）0　　（C）1　　（D）2

【答案】（A）

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2-x)-f(2)}{3x}=f'(2)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x}{3x}=-1$，选（A）。

24、设 $f(x)$ 可导，则当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y-dy$ 是 Δx 的（　　）

（A）高阶无穷小　　（B）等价无穷小

（C）同阶无穷小　　（D）低阶无穷小

【答案】（A）

【解析】因为 $f(x)$ 可导，所以 $f(x)$ 可微，即 $\Delta y=dy+o(\Delta x),\Delta x\to 0$，所以 $\Delta y-dy$ 是 Δx 的高阶无穷小。

25、设函数 $f(x)=\int_{x^2}^{0}x\cos t^2dt$，则 $f'(x)=$（　　）

（A）$-2x^2\cos x^4$　　（B）$\int_{x^2}^{0}\cos t^2dt-2x^2\cos x^4$

（C）$\int_{0}^{x^2}\cos t^2dt-2x^2\cos x^4$　　（D）$\int_{x^2}^{0}\cos t^2dt$

【答案】（B）

【解析】$f'(x)=\left(x\int_{x^2}^{0}\cos t^2dt\right)'=\int_{x^2}^{0}\cos t^2dt-2x^2\cos x^4$，选（B）。

26、$y=f(x)$ 是由方程 $x^2y^2+y=1(y>0)$ 确定的，则 $y=f(x)$ 的驻点为（　　）

（A）$x=0$　　（B）$x=1$　　（C）$x=0,1$　　（D）不存在

【答案】（A）

【解析】方程两边同时对 x 求导，$2xy^2+2x^2yy'+y'=0$，令 $y'=0$，得 $2xy^2=0$，又因 $y>0$，故 $x=0$，选（A）。

27、设函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，在 $(0,a)$ 内二阶可导，且 $f(0)=0$，$f''(x)<0$，则 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,a]$ 上（　　）

（A）单调增加　　（B）单调减少

（C）恒等于零　　　　　　　　　　（D）非单调函数

【答案】（B）

【解析】$\left[\frac{f(x)}{x}\right]'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，令 $h(x)=xf'(x)-f(x),h(0)=0$，则

$h'(x)=xf''(x)<0(0<x\le a)$，所以 $h(x)$ 在 $(0,a]$ 上单调递减，可知 $h(x)<0(0<x\le a)$，

于是 $\left[\frac{f(x)}{x}\right]'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}<0(0<x\le a)$，故 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,a]$ 上为单调减函数。

28、设 $f(x)=x\sin x+\cos x$，下列命题中正确的是（　　）

（A）$f(0)$ 是极大值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 是极小值　　　　（B）$f(0)$ 是极小值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 是极大值

（C）$f(0)$ 是极大值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 也是极大值　　　　（D）$f(0)$ 是极小值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 也是极小值

【答案】（B）

【解析】$f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$，显然 $f'(0)=0,f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，

再由 $f''(x)=\cos x-x\sin x$，且 $f''(0)=1>0,f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}<0$，

故 $f(0)$ 是极小值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 是极大值。

29、$y=x^2$ 与 $y=a\ln x$ 相切，则 $a=$（　　）

（A）$4e$　　（B）$3e$　　（C）$2e$　　（D）e

【答案】（C）

【解析】设切点为 (x_0,y_0)，故 $2x_0=\frac{a}{x_0}$，$x_0{}^2=a\ln x_0$，联立解得 $a=2e$。

30、设 $d(x\ln x)=f(x)dx$，则 $\int f(x)dx=$（　　）（其中 C 为任意常数）

（A）$x\ln x$　　（B）$1+\ln x$　　（C）$x\ln x+C$　　（D）x^2+C

【答案】（C）

【解析】由于$d(x\ln x)=f(x)dx$，故$\int f(x)dx=x\ln x+C$，选（C）。

31、$\int_1^5 \mathrm{e}^{\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x=$（　　）

（A）e^3　　（B）$2\mathrm{e}^3$　　（C）$3\mathrm{e}^3$　　（D）$4\mathrm{e}^3$

【答案】（B）

【解析】$\int_1^5 e^{\sqrt{2x-1}}dx \underline{\underline{t=\sqrt{2x-1}}} \int_1^3 te^t dt=2e^3$。

32、设函数$f(x)$与$g(x)$在$[0,1]$上连续，且$f(x)\le g(x)$，那么对任意$c\in(0,1)$有（　　）

（A）$\int_{\frac{1}{2}}^{c} f(t)dt \ge \int_{\frac{1}{2}}^{c} g(t)dt$　　（B）$\int_{\frac{1}{2}}^{c} f(t)dt \le \int_{\frac{1}{2}}^{c} g(t)dt$

（C）$\int_c^1 f(t)dt \ge \int_c^1 g(t)dt$　　（D）$\int_c^1 f(t)dt \le \int_c^1 g(t)dt$

【答案】（D）

【解析】本题考查定积分的比较定理，$c\in(0,1)$，所以$c<1$，由条件$f(t)\le g(t)$，所以$\int_c^1 f(t)dt \le \int_c^1 g(t)dt$，故选（D）。

33、设$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x)dx$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos x)dx$，则$I$、$J$的大小关系是（　　）

（A）$I<J$　　（B）$I>J$　　（C）$I\le J$　　（D）$I\ge J$

【答案】（A）

【解析】当$x\in(0,\frac{\pi}{4})$时，$\ln(\cos x)>\ln(\sin x)$，根据定积分比较定理，$I<J$。

34、已知$f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$，则（　　）

（A）$f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$都存在　　（B）$f_x'(0,0)$不存在，$f_y'(0,0)$存在

（C）$f_x'(0,0)$存在，$f_y'(0,0)$不存在　　（D）$f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$都不存在

【答案】（B）

【解析】根据偏导数的定义可知，

$$f_x'(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\sqrt{\Delta x^2}}-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$，从而 $f_x'(0,0)$ 不存在；

$$f_y'(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{e^{\sqrt{(\Delta y)^4}}-1}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{(\Delta y)^2}{\Delta y}=0$$，

从而 $f_y{}'(0,0)$ 存在。

35、计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z^2dxdydz=$（　），其中 $\Omega=\{(x,y,z)\big|x^2+y^2+z^2\le 1\}$。

（A）$\frac{4\pi}{15}$　（B）$\frac{4\pi}{45}$　（C）$\frac{\pi}{3}$　（D）$\frac{2\pi}{3}$

【答案】（A）

【解析】由轮换对称性可知，$\iiint\limits_{\Omega} z^2dxdydz=\iiint\limits_{\Omega} x^2dxdydz=\iiint\limits_{\Omega} y^2dxdydz$，所以，

$$\iiint\limits_{\Omega} z^2dxdydz=\frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^4\sin\varphi dr=\frac{4\pi}{15}$$。

36、设 D 是第二象限的一个有界闭区域，且 $0<y<1$，记 $I_1=\iint\limits_D yx^3d\sigma$，$I_2=\iint\limits_D y^2x^3d\sigma$，

$I_3=\iint\limits_D y^{\frac{1}{2}}x^3d\sigma$ 的大小顺序是（　）

（A）$I_1\le I_2\le I_3$　（B）$I_2\le I_1\le I_3$

（C）$I_3\le I_1\le I_2$　（D）$I_3\le I_2\le I_1$

【答案】（C）

【解析】当 $0<y<1$，$(x,y)\in D$ 时，$y^{\frac{1}{2}}x^3<yx^3<y^2x^3$，故 $I_3\le I_1\le I_2$。

37、设曲线积分 $\int_L[f(x)-e^x]\sin ydx-f(x)\cos ydy$ 与路径无关，其中 $f(x)$ 具有一阶连续导数，且 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 等于（　）

（A）$\frac{1}{2}(e^{-x}-e^x)$　（B）$\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

（C）$\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})-1$　　（D）$1-\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

【答案】（B）

$P=[f(x)-e^x]\sin y, Q=-f(x)\cos y$，积分与路径无关，则 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，即

$[f(x)-e^x]\cos y=-f'(x)\cos y$，又由 $f(0)=0$ 解得 $f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$。

38、函数 $y=Cx+\frac{x^3}{6}$（其中 C 是任意的常数）对微分方程 $\frac{d^2y}{dx^2}=x$ 而言（　　）

（A）是通解　　（B）是特解

（C）是解，但既非通解也非特解　　（D）不是解

【答案】（C）

【解析】（1）因为原方程阶数为2，通解中应包含两个任意的常数；（2）特解中不含有任意的常数；（3）$Cx+\frac{x^3}{6}$ 是微分方程的解，故选项（A），（B），（D）都不对，应选（C）。

39、微分方程 $y''+2y'+2y=e^{-x}\sin x$ 的特解形式为（　　）

（A）$e^{-x}(a\cos x+b\sin x)$　　（B）$e^{-x}(a\cos x+bx\sin x)$

（C）$xe^{-x}(a\cos x+bx\sin x)$　　（D）$e^{-x}(ax\cos x+bx\sin x)$

【答案】（D）

【解析】特征方程为原方程 $r^2+2r+2=0$ 即 $(r+1)^2=-1$，解得特征根为 $r_{1,2}=-1\pm i$，而 $f(x)=e^{-x}\sin x$，$\alpha+\beta i=-1\pm i$ 是特征根，故特解的形式为 $y^*=xe^{-x}(a\cos x+b\sin x)$。

40、$z_x'(x_0,y_0)=0$ 和 $z_y'(x_0,y_0)=0$ 是函数 $z=z(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取得极值的（　　）

（A）必要条件但非充分条件　　（B）充分条件但非必要条件

（C）必要条件　　（D）既非必要也非充分条件

【答案】（D）

【解析】取 $z=z(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$，则点 $(0,0)$ 为极小值点，但 $z'_x(0,0)$ 和 $z'_y(0,0)$ 均不存在。

41、设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 其中 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 等于（　　）

（A）$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$　　（B）$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_2$　　（C）$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}$　　（D）$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1$

【答案】（C）

【解析】

因为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$，故 $\boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1)^{-1}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}$。

42、已知 $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}$ 为3阶非零矩阵，且满足 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}$，则（　　）

（A）当 $t=6$ 时，$\boldsymbol{P}$ 的秩必为1　　（B）当 $t=6$ 时，$\boldsymbol{P}$ 的秩必为2

（C）当 $t\neq 6$ 时，$\boldsymbol{P}$ 的秩必为1　　（D）当 $t\neq 6$ 时，$\boldsymbol{P}$ 的秩必为2

【答案】（C）

【解析】由 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}\Rightarrow r(\boldsymbol{P})+r(\boldsymbol{Q})\le 3\Rightarrow 1\le r(\boldsymbol{P})\le 3-r(\boldsymbol{Q})$，

当 $t=6$ 时，　$r(\boldsymbol{Q})=1\Rightarrow 1\le r(\boldsymbol{P})\le 2\Rightarrow r(\boldsymbol{P})=1$ 或 2，故（A）和（B）都错；

当 $t\neq 6$ 时，　$r(\boldsymbol{Q})=2\Rightarrow 1\le r(\boldsymbol{P})\le 1\Rightarrow r(\boldsymbol{P})=1$，故（C）正确，（D）错误。

43、设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{bmatrix}$，且 $r(\boldsymbol{A})=3$，则 $k=$（　　）

（A）3 （B）-3 （C）1 （D）-1

【答案】（B）

【解析】$r(A)=3$，故$|A|=0$。又$|A|=(k-1)^3(k+3)$，故$k=1$或$k=-3$，易知，$k=1$舍去，故选（B）。

44、n维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(3\le s\le n)$线性无关的充分必要条件是（ ）

（A）存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\mathbf{0}$

（B）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中任意两个向量都线性无关

（C）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中存在一个向量，它不能用其余向量线性表出

（D）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中任意一个向量都不能用其余向量线性表出

【答案】（D）

【解析】向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关的充要条件是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_s$中至少存在一个向量能用其余向量线性表出，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关的充要条件是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_s$中任意一个向量都不能用其余向量线性表出，故选项（D）正确。

45、设$\boldsymbol{A}$为n阶方阵，且$|\boldsymbol{A}|=0$，则（ ）

（A）$\boldsymbol{A}$中必有两行（列）的元素对应成比例

（B）$\boldsymbol{A}$中任意一行（列）向量是其余各行（列）向量的线性组合

（C）$\boldsymbol{A}$中必有一行（列）向量是其余各行（列）向量的线性组合

（D）$\boldsymbol{A}$中至少有一行（列）的元素全为0

【答案】（C）

【解析】由$|\boldsymbol{A}|=0$可知$\boldsymbol{A}$的行向量线性相关，再由线性相关的性质，必存在一行向量可由其余向量线性表示，故选（C）。

46、已知矩阵$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4],\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4]$为四阶方阵，其中$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4$均为四维列向量，且已知行列式$|\boldsymbol{A}|=4,|\boldsymbol{B}|=1$，则$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$（ ）

（A）5　　（B）10　　（C）20　　（D）40

【答案】（D）

【解析】$\left|A+B\right|=\left|\alpha+\beta,2\gamma_2,2\gamma_3,2\gamma_4\right|=2^3\left|\alpha+\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4\right|$

$=8(\left|\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4\right|+\left|\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4\right|)=8(\left|A\right|+\left|B\right|)=40$。

47、要使$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$都是线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解，只要系数矩阵$\boldsymbol{A}$为（　　）

（A）$[-2\quad 1\quad 1]$　　（B）$\begin{bmatrix}2&0&-1\\0&1&1\end{bmatrix}$

（C）$\begin{bmatrix}-1&0&2\\0&1&-1\end{bmatrix}$　　（D）$\begin{bmatrix}0&1&-1\\4&-2&-2\\0&1&1\end{bmatrix}$

【答案】（A）

【解析】

因为$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$均为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解，所以$\boldsymbol{A\xi}_1=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A\xi}_2=\boldsymbol{0}$，将$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$代入选项逐一验证可知选项（A）正确。

48、已知$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的两个不同的解，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$是相应齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系，$k_1,k_2$是任意常数，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的通解是（　　）

（A）$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$　　（B）$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

（C）$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$　　（D）$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

【答案】（B）

【解析】

由已知，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 仍为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，$\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，故

$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解。

49、设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，且满足 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，已知 $\boldsymbol{A}$ 的迹 $tr(\boldsymbol{A})=-2$，则 $|\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}|$ 为（　　）

（A）6　　（B）9　　（C）3　　（D）0

【答案】（B）

【解析】

由 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 可得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能为 $0,-2$，又因 $tr(\boldsymbol{A})=-2$，故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $0,0,-2$，$\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $3,3,1$，故 $|\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}|=9$。

50、$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1&2\\0&2&a\\0&0&3\end{bmatrix}$ 和对角矩阵相似，则 a 等于（　　）

（A）2　　（B）1　　（C）-2　　（D）-1

【答案】（C）

【解析】$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1&-2\\0&\lambda-2&-a\\0&0&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-3)^2=0$，

因此 $3-r(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=2$，则 $r(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=1$，又 $\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}0&1&2\\0&-1&a\\0&0&0\end{bmatrix}$，故 $a=-2$。

51、设随机变量 $X\sim N(1,1)$，概率密度为 $f(x)$，分布函数为 $F(x)$，则下列正确的是（　　）

（A）$P\{X\le 0\}=P\{X\ge 0\}$　　（B）$P\{X\le 1\}=P\{X\ge 1\}$

（C）$f(x)=f(-x),x\in\mathbf{R}$　　（D）$F(x)=1-F(-x),x\in\mathbf{R}$

【答案】（B）

【解析】根据正态分布的对称性，可知 $P\{X\le 1\}=P\{X\ge 1\}$，选（B）。

52、设函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x}{3}, & 0\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$，则 $F(x)$（　　）

（A）不是任何随机变量的分布函数　　（B）是某随机变量的分布函数

（C）是离散型随机变量的分布函数　　（D）是连续型随机变量的分布函数

【答案】（B）

【解析】对于选项（B），$F(x)$ 满足如下条件：（1）$F(x)$ 单调不减；（2）$0\le F(x)\le 1, \lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1, \lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$；（3）$F(x)$ 右连续，故 $F(x)$ 是某随机变量的分布函数。故选（B）。

53、设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则概率 $P\{X<\mu+\sigma^2\}$（　　）

（A）随 μ 的增大而增大，随 σ 的增大而减小

（B）随 μ 的增大而减小，随 σ 的增大而增大

（C）随 μ 的增大而增大，与 σ 无关

（D）与 μ 无关，随 σ 的增大而增大

【答案】（D）

【解析】由题意知，$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$，则有

$P\{X<\mu+\sigma^2\}=P\left\{\dfrac{X-\mu}{\sigma}<\sigma\right\}=\Phi(\sigma)$，故此概率与 μ 无关，随 σ 的增大而增大，故选（D）。

54、设 X 是随机变量，$E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$，则对任意常数 C 必有（　　）

（A）$E(X-C)^2=E(X)-C^2$　　（B）$E(X-C)^2=E(X-\mu)^2$

（C）$E(X-C)^2\le E(X-\mu)^2$　　（D）$E(X-C)^2\ge E(X-\mu)^2$

【答案】（D）

【解析】$E(X-C)^2=EX^2-2CEX+C^2=\mu^2+\sigma^2-2C\mu+C^2=\sigma^2+(\mu-C)^2$,

$E(X-\mu)^2=EX^2-2\mu EX+\mu^2=\sigma^2$，故$E(X-C)^2\ge E(X-\mu)^2$，选（D）。

55、设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}ae^{-x},0<y<x,\\0,\quad 其它,\end{cases}$则$a$为（ ）

（A）1 （B）2 （C）3 （D）4

【答案】（A）

【解析】

由概率密度性质知$\iint\limits_{R^2}f(x,y)dxdy=1$，故

$\iint\limits_{R^2}f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy=a\int_0^{+\infty}e^{-x}dx\int_0^x dy=a\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=a$，即得$a=1$。

56、设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}e^{-x},0<y<x,\\0,\quad 其它,\end{cases}$则$P\{Y<1\}$为（ ）

（A）e^{-1} （B）$2e^{-1}$ （C）$1-e^{-1}$ （D）$2-e^{-1}$

【答案】（C）

【解析】$P\{Y<1\}=\int_0^1 dy\int_y^{+\infty}e^{-x}dx=\int_0^1 e^{-y}dy=1-e^{-1}$，选（C）。

57、设随机变量X服从参数为λ的泊松分布，若$E[(X-1)(X-2)]=1$，则参数$\lambda=$（ ）

（A）3 （B）-1 （C）1 （D）2

【答案】（C）

【解析】$E[(X-1)(X-2)]=EX^2-3EX+2=\lambda^2-2\lambda+2=1$,解得$\lambda=1$。

58、设随机变量X服从$(-1,1)$上的均匀分布，事件$A=\{0<X<1\}$，$B=\left\{|X|<\frac{1}{4}\right\}$，则（ ）

（A）$P(AB)=0$ （B）$P(AB)=P(A)$

（C）$P(A)+P(B)=1$　　（D）$P(AB)=P(A)P(B)$

【答案】（D）

【解析】由题意得：$P(A)=P\{0<X<1\}=\frac{1}{2}$；$P(B)=P\left\{-\frac{1}{4}<X<\frac{1}{4}\right\}=\frac{1}{4}$；

$P(AB)=P\left\{0<X<1,-\frac{1}{4}<X<\frac{1}{4}\right\}=P\left\{0<X<\frac{1}{4}\right\}=\frac{1}{8}$，故 $P(AB)=P(A)P(B)$，

选（D）。

59、假设 X 为随机变量，则对任意实数 a，概率 $P\{X=a\}=0$ 的充要条件是（　　）

（A）X 为离散型随机变量　　（B）X 为连续型随机变量

（C）X 的分布函数是连续函数　　（D）X 的概率密度是连续函数

【答案】（C）

【解析】

充分性：若 X 的分布函数 $F(x)$ 是连续函数，则对任意实数 a 有 $P\{X=a\}=0$。必要性：若对任意实数 a 有 $P\{X=a\}=0$，即 $F(a)=F(a-0)$，则分布函数 $F(x)$ 在任意点处左连续，而由 $F(x)$ 的基本性质可知，$F(x)$ 右连续，从而 $F(x)$ 为连续函数。故选（C）。

60、设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布，则 $P\{\max\{X,Y\}\le 1\}=$（　　）

（A）$\frac{1}{3}$　　（B）$\frac{1}{6}$　　（C）$\frac{1}{9}$　　（D）$\frac{1}{12}$

【答案】（C）

【解析】本题考查最值的概率，由随机变量 X 与 Y 相互独立可知，

$$P\{\max\{X,Y\}\le 1\}=P\{X\le 1,Y\le 1\}=P\{X\le 1\}\cdot P\{Y\le 1\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}。$$

第三题：61～70 小题，每小题 2 分，共 20 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

61、设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3, & x\le 1\\ x^2, & x>1\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的（　　）

（A）左、右导数都存在　　（B）左导数存在，但右导数不存在

（C）左导数不存在，但右导数存在　　（D）左、右导数都不存在

【答案】（B）

【解析】分段函数在分段点处的导数一定要用定义求解。因此，由左、右导数的定义，

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2}{3}(x^2+x+1)=2\text{，}$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-\frac{2}{3}}{x-1}=\infty\text{，该极限不存在，}$$

故 $f\left(x\right)$ 在 $x=1$ 处左导数存在，右导数不存在。故应选（B）。

62、设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题正确的是（　　）

（A）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

（B）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=1$

（C）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)=0$

（D）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)=0$

【答案】（A）

【解析】

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}x=0\text{，故选（A）。}$$

63、已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 的始点 $A(4,0,5)$，$\left|\overrightarrow{AB}\right|=2\sqrt{14}$，$\overrightarrow{AB}$ 的方向余弦为

$\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{14}},\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{14}},\cos\gamma=-\dfrac{2}{\sqrt{14}}$，则 B 的坐标为（　　）

（A）$(10,-2,1)$　　（B）$(-10,-2,1)$

（C）$(10,2,1)$　　（D）$(10,-2,-1)$

【答案】(C)

【解析】

设 $B(x,y,z)$，则 $\cos\alpha=\frac{x-4}{2\sqrt{14}},\cos\beta=\frac{y}{2\sqrt{14}},\cos\gamma=\frac{z-5}{2\sqrt{14}}$，由于 $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{14}}$ $,\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{14}},\cos\gamma=-\frac{2}{\sqrt{14}}$，所以 $x-4=6,y=2,z-5=-4$，即 $x=10,y=2,z=1$。

64、已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\sqrt{n}\tan\frac{1}{n^{\alpha}}$ 绝对收敛，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{3-\alpha}}$ 条件收敛，则（ ）

(A) $0<\alpha\le\frac{1}{2}$　(B) $1<\alpha<\frac{5}{2}$　(C) $1<\alpha<3$　(D) $\frac{5}{2}<\alpha<3$

【答案】(D)

【解析】设 $u_n=(-1)^n n\sqrt{n}\tan\frac{1}{n^{\alpha}}$，则当 $n\to\infty$ 时，$|u_n|$ 同阶于 $\frac{1}{n^{\alpha-\frac{3}{2}}}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha-\frac{3}{2}}}$ 的敛散性相同，故 $\alpha-\frac{3}{2}>1$，而 $\alpha>\frac{5}{2}$。而由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{3-\alpha}}$ 条件收敛可知，$0<3-\alpha\le1$，即得 $2\le\alpha<3$，若使两个结论都成立，只有 $\frac{5}{2}<\alpha<3$，故应选（D)。

65、函数 $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{l}, & 0\le x<\frac{l}{2},\\ 0, & \frac{l}{2}\le x<l\end{cases}$ 展开成余弦级数时，应对 $f(x)$ 进行（ ）

(A) 周期为 $2l$ 的延拓　　(B) 偶延拓

(C) 周期为 l 的延拓　　(D) 奇延拓

【答案】(B)

【解析】当 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上的偶函数且满足收敛定理的条件时，则 $f(x)$ 可在 $[-l,l]$ 上展开成余弦级数，故对 $[0,l]$ 上的 $f(x)$ 要进行偶延拓。

66、下列关于线性相关性的说法正确的有（　　）个

① 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关，则存在全不为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$。

② 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，则对任意不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n\neq\mathbf{0}$。

③ 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，则由 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$ 可以推出 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$。

④ 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关，则对任意不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$。

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

【答案】（B）

【解析】①线性相关的定义是：存在不全为零的常数 $k_1,k_2,...,k_n$，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+...+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$。$k_1,k_2,\ldots,k_n$ 中可以有等于零的，不一定全不为零，故①错。

②和③都是向量组线性无关的等价描述，正确。

④只要存在一组不全为零的常数 $k_1,k_2,\ldots,k_n$，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+...+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$ 成立，那么 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_n$ 就是线性相关的，并不一定要对任意的 $k_1,k_2,\ldots,k_n$ 都满足该等式，故④错误。

正确的命题有两个，故选（B）。

67、若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=ax_1^2+4x_2^2+ax_3^2+6x_1x_2+2x_2x_3$ 是正定的，则 a 的取值范围是（　　）

（A）$a>\frac{5}{2}$　　（B）$a<0$　　（C）$a>\frac{9}{4}$　　（D）$a<\frac{5}{2}$

【答案】（A）

【解析】

二次型的矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}$为正定矩阵，则$\boldsymbol{A}$的各阶顺序主子式全大于零，

于是有$a>0$，$\begin{vmatrix} a & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}>0$，$\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} a & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}=4a^2-10a>0$，得到$a>\frac{5}{2}$。

68、设3阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$，对应于$\lambda_1$的特征向量为

$\boldsymbol{\xi}_1=[0,1,1]^T$，则矩阵$\boldsymbol{A}$为（　　）

（A）$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$（B）$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$（C）$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$（D）$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

【答案】（B）

【解析】

设λ_2,λ_3对应特征向量为$\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3=[x_1,x_2,x_3]^T$，则$\begin{cases}(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)=0\\(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_3)=0\end{cases}\Rightarrow x_2+x_3=0$，即

$x_2=-x_3$，求得$\boldsymbol{\xi}_2=[1,0,0]^T,\boldsymbol{\xi}_3=[0,1,-1]^T$，由于$(\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=0$，所以$\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$正交，对

$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$单位化得，$\left[0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^T,[1,0,0]^T,\left[0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^T$，所以正交矩阵

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},$$

由于$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$，则有

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^T=\begin{bmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{bmatrix}。$$

69、设随机变量X的期望$E(X)=0$，方差$D(X)=1$，由切比雪夫不等式$P\left\{\left|\frac{X}{n}\right|\geq 1\right\}\leq$（　　）

（A）$\frac{1}{n^2}$　　（B）$\frac{1}{n}$　　（C）$\frac{2}{n^2}$　　（D）$\frac{2}{n}$

【答案】（A）

【解析】由已知，$E(X)=0,D(X)=1$，根据切比雪夫不等式$P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$可知，$P\left\{\left|\frac{X}{n}\right|\geq 1\right\}=P\{|X-0|\geq n\}\leq\frac{1}{n^2}$。

70、假设$F(x)$为随机变量X的分布函数，在下列函数中，能够作为随机变量分布函数的有（　　）个

（1）$F(2x)$　（2）$\dfrac{F(x)+1}{2}$　（3）$F(x^2)$　（4）$F(x^3)$

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

【答案】（B）

【解析】已知$F(x)$为随机变量X的分布函数，则其满足单调不减、有界性和右连续性，根据分布函数的性质对各个函数进行判断：

（1）$F(2x)\geq 0,\lim\limits_{x\to+\infty}F(2x)=1,\lim\limits_{x\to-\infty}F(2x)=0,F(2x)$右连续，故$F(2x)$可以作为某随机变量的分布函数；

（2）$\dfrac{F(x)+1}{2}\geq 0,\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)+1}{2}=1,\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{F(x)+1}{2}=\dfrac{1}{2}\neq 0$，故$\dfrac{F(x)+1}{2}$不是随机变量的分布函数；

（3）$F(x^2)\geq 0,\lim\limits_{x\to+\infty}F(x^2)=1,\lim\limits_{x\to-\infty}F(x^2)=1\neq 0$，故$F(x^2)$不是随机变量的分布函数；

（4）$F(x^3)\geq 0,\lim\limits_{x\to+\infty}F(x^3)=1,\lim\limits_{x\to-\infty}F(x^3)=0,F(x^3)$右连续，故$F(x^3)$可以作为某随机变量的分布函数。