第一题：1～9 小题，每小题 1 分，共 9 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

1、设 $f(x)=\arcsin x^2$，则 $f'(x)=$（　　）

（A）$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　（B）$\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$　　（C）$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$　　（D）$\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

【答案】（D）

【解析】根据复合函数求导法则，$f'(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$。

2、设函数 $f(x)$ 的一个原函数为10^x，则 $f'(x)=$（　　）

（A）10^x　　（B）$10^x\cdot\ln 10$　　（C）$10^x\cdot(\ln 10)^2$　　（D）$10^x\cdot(\ln 10)^3$

【答案】（C）

【解析】$f(x)=(10^x)'=10^x\ln 10$，$f'(x)=(10^x\ln 10)'=10^x(\ln 10)^2$，选（C）。

3、不定积分$\int\sin x\cos x dx$不等于（　　）

（A）$\dfrac{1}{2}\sin^2 x+C$　　（B）$\dfrac{1}{2}\sin^2 2x+C$

（C）$-\dfrac{1}{4}\cos 2x+C$　　（D）$-\dfrac{1}{2}\cos^2 x+C$

【答案】（B）

【解析】$\left(\dfrac{1}{2}\sin^2 2x+C\right)'=\dfrac{1}{2}\times 2\times\sin 2x\cos 2x=\sin 2x\cos 2x\neq\sin x\cos x$，选项（B）错误。

4、$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=$（　　）

（A）1　　（B）0　　（C）∞　　（D）不存在

【答案】（B）

【解析】根据无穷大量的关系，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$，应选（B）。

5、$x\to 0^{+}$时，下列无穷小量中与$\sqrt{x}$等价的是（ ）

（A）$1-e^{\sqrt{x}}$ （B）$\ln(1+\sqrt{x})$ （C）$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$ （D）$1-\cos\sqrt{x}$

【答案】（B）

【解析】$1-e^{\sqrt{x}}\sim-\sqrt{x}$，$\ln(1+\sqrt{x})\sim\sqrt{x}$，$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\frac{1}{2}\sqrt{x}$，$1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}x$，此题选（B）。

6、设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$是$n$阶方阵，则下列结论正确的是（ ）

（A）$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$或$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ （B）$|\boldsymbol{A}|=0\Leftrightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

（C）$|\boldsymbol{AB}|=0\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|=0$或$|\boldsymbol{B}|=0$ （D）$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|=1$

【答案】（C）

【解析】因$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=0\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|=0$或$|\boldsymbol{B}|=0$，故（C）正确。

7、$\begin{vmatrix}1 & a & 0 & 0\\ -1 & 2-a & a & 0\\ 0 & -2 & 3-a & a\\ 0 & 0 & -3 & 4-a\end{vmatrix}=$（ ）

（A）22 （B）23 （C）24 （D）25

【答案】（C）

【解析】利用行列式的性质，

原式$=\begin{vmatrix}1 & a & 0 & 0\\ -1 & 2-a & a & 0\\ 0 & -2 & 3-a & a\\ 0 & 0 & -3 & 4-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & 2 & a & 0\\ 0 & 0 & 3 & a\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{vmatrix}=24$。

8、设$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$均为n阶矩阵$(n>1)$，m是大于1的整数，则必有（ ）

（A）$(\boldsymbol{AB})^{T}=\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{B}^{T}$ （B）$(\boldsymbol{AB})^{m}=\boldsymbol{A}^{m}\boldsymbol{B}^{m}$

（C）$|\boldsymbol{AB}^{T}|=|\boldsymbol{A}^{T}||\boldsymbol{B}^{T}|$ （D）$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$

【答案】（C）

【解析】$\left|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T\right|=\left|\boldsymbol{A}\right|\left|\boldsymbol{B}^T\right|=\left|\boldsymbol{A}^T\right|\left|\boldsymbol{B}^T\right|$，故选项（C）正确。

9、$x=1$ 是 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&x&x^2\\1&-2&4\end{vmatrix}=0$ 的（　　）

（A）充分必要条件　　（B）充分非必要条件

（C）必要非充分条件　　（D）既不充分也不必要条件

【答案】（B）

【解析】$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&x&x^2\\1&-2&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&x&x^2\\1&-2&(-2)^2\end{vmatrix}=(x-1)(-2-1)(-2-x)$，故 $x=1$ 为 $\boldsymbol{D}=0$ 的充分非必要条件，选（B）。

第二题：10～23 小题，每小题 1.5 分，共 21 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

10、设函数 $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　　）

（A）可去间断点　　（B）跳跃间断点

（C）无穷间断点　　（D）振荡间断点

【答案】（B）

【解析】由 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}}{2^{\frac{1}{x}}}=1$，

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点。

11、设函数 $f(x)$ 可导，$f'(2)=3$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2-x)-f(2)}{3x}=$（　　）

（A）-1　　（B）0　　（C）1　　（D）2

【答案】（A）

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2-x)-f(2)}{3x}=f'(2)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x}{3x}=-1$，选（A）。

12、设函数 $f(x)=\int_{x^2}^{0}x\cos t^2dt$，则 $f'(x)=$（　　）

（A）$-2x^2\cos x^4$　　（B）$\int_{x^2}^{0}\cos t^2dt-2x^2\cos x^4$

（C）$\int_{0}^{x^2}\cos t^2dt-2x^2\cos x^4$　　（D）$\int_{x^2}^{0}\cos t^2dt$

【答案】（B）

【解析】$f'(x)=\left(x\int_{x^2}^{0}\cos t^2dt\right)'=\int_{x^2}^{0}\cos t^2dt-2x^2\cos x^4$，选（B）。

13、$y=f(x)$是由方程$x^2y^2+y=1(y>0)$确定的，则$y=f(x)$的驻点为（　　）

（A）$x=0$　　（B）$x=1$　　（C）$x=0,1$　　（D）不存在

【答案】（A）

【解析】方程两边同时对x求导，$2xy^2+2x^2yy'+y'=0$，令$y'=0$，得$2xy^2=0$，又因$y>0$，故$x=0$，选（A）。

14、设函数$f(x)$在$[0,a]$上连续，在$(0,a)$内二阶可导，且$f(0)=0$，$f''(x)<0$，则$\frac{f(x)}{x}$在$(0,a]$上（　　）

（A）单调增加　　（B）单调减少

（C）恒等于零　　（D）非单调函数

【答案】（B）

【解析】$\left[\frac{f(x)}{x}\right]'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，令$h(x)=xf'(x)-f(x),h(0)=0$，则

$h'(x)=xf''(x)<0(0<x\le a)$，所以$h(x)$在$(0,a]$上单调递减，可知$h(x)<0(0<x\le a)$，

于是$\left[\frac{f(x)}{x}\right]'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}<0(0<x\le a)$，故$\frac{f(x)}{x}$在$(0,a]$上为单调减函数。

15、设$f(x)=x\sin x+\cos x$，下列命题中正确的是（　　）

（A）$f(0)$是极大值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$是极小值　　（B）$f(0)$是极小值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$是极大值

（C）$f(0)$是极大值，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$也是极大值　　（D）$f(0)$是极小值，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$也是极小值

【答案】（B）

【解析】$f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$，显然$f'(0)=0,f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，

再由$f''(x)=\cos x-x\sin x$，且$f''(0)=1>0,f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{2}<0$，

故$f(0)$是极小值，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$是极大值。

16、设函数$f(x)$与$g(x)$在$[0,1]$上连续，且$f(x)\le g(x)$，那么对任意$c\in(0,1)$有（　　）

（A）$\int_{\frac{1}{2}}^{c}f(t)dt\ge\int_{\frac{1}{2}}^{c}g(t)dt$　　（B）$\int_{\frac{1}{2}}^{c}f(t)dt\le\int_{\frac{1}{2}}^{c}g(t)dt$

（C）$\int_{c}^{1}f(t)dt\ge\int_{c}^{1}g(t)dt$　　（D）$\int_{c}^{1}f(t)dt\le\int_{c}^{1}g(t)dt$

【答案】（D）

【解析】本题考查定积分的比较定理，$c\in(0,1)$，所以$c<1$，由条件$f(t)\le g(t)$，所以$\int_{c}^{1}f(t)dt\le\int_{c}^{1}g(t)dt$，故选（D）。

17、设$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x)dx$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos x)dx$，则$I$、$J$的大小关系是（　　）

（A）$I<J$　　（B）$I>J$　　（C）$I\le J$　　（D）$I\ge J$

【答案】（A）

【解析】当$x\in(0,\dfrac{\pi}{4})$时，$\ln(\cos x)>\ln(\sin x)$，根据定积分比较定理，$I<J$。

18、已知$f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$，则（　　）

（A）$f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$都存在　　（B）$f_x'(0,0)$不存在，$f_y'(0,0)$存在

（C）$f_x^{'}\left(0,0\right)$存在，$f_y^{'}\left(0,0\right)$不存在　　　（D）$f_x^{'}\left(0,0\right)$，$f_y^{'}\left(0,0\right)$都不存在

【答案】（B）

【解析】根据偏导数的定义可知，

$$f_x'(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\sqrt{\Delta x^2}}-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left|\Delta x\right|}{\Delta x}$$，从而 $f_x'(0,0)$ 不存在；

$$f_y'(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{e^{\sqrt{(\Delta y)^4}}-1}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{(\Delta y)^2}{\Delta y}=0$$，

从而 $f_y{}'(0,0)$ 存在。

19、设 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$，则 $f'(x)=$（　　）

（A）$(1-3x)e^{3x}$　（B）$(1+3x)e^{3x}$　（C）$(1+3x)e^{-3x}$　（D）$(1-3x)e^{-3x}$

【答案】（B）

【解析】因为 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}=x\lim\limits_{t\to 0}[(1+3t)^{\frac{1}{3t}}]^{3t\cdot\frac{x}{t}}=x\cdot e^{3x}$，

所以 $f'(x)=e^{3x}(1+3x)$。

20、设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 其中 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 等于（　　）

（A）$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$　（B）$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_2$　（C）$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}$　（D）$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1$

【答案】（C）

【解析】因为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$，故 $\boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1)^{-1}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}$。

21、已知$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}$为3阶非零矩阵，且满足$\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}$，则（　　）

（A）当$t=6$时，$\boldsymbol{P}$的秩必为1　　（B）当$t=6$时，$\boldsymbol{P}$的秩必为2

（C）当$t\neq 6$时，$\boldsymbol{P}$的秩必为1　　（D）当$t\neq 6$时，$\boldsymbol{P}$的秩必为2

【答案】（C）

【解析】由$\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}\Rightarrow r(\boldsymbol{P})+r(\boldsymbol{Q})\le 3\Rightarrow 1\le r(\boldsymbol{P})\le 3-r(\boldsymbol{Q})$，

当$t=6$时，　$r(\boldsymbol{Q})=1\Rightarrow 1\le r(\boldsymbol{P})\le 2\Rightarrow r(\boldsymbol{P})=1$或$2$，故（A）和（B）都错；

当$t\neq 6$时，　$r(\boldsymbol{Q})=2\Rightarrow 1\le r(\boldsymbol{P})\le 1\Rightarrow r(\boldsymbol{P})=1$，故（C）正确，（D）错误。

22、要使$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$都是线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解，只要系数矩阵$\boldsymbol{A}$为（　　）

（A）$\begin{bmatrix}-2&1&1\end{bmatrix}$　　（B）$\begin{bmatrix}2&0&-1\\0&1&1\end{bmatrix}$

（C）$\begin{bmatrix}-1&0&2\\0&1&-1\end{bmatrix}$　　（D）$\begin{bmatrix}0&1&-1\\4&-2&-2\\0&1&1\end{bmatrix}$

【答案】（A）

【解析】因为$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$均为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解，所以$\boldsymbol{A\xi}_1=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A\xi}_2=\boldsymbol{0}$，将$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$代入选项逐一验证可知选项（A）正确。

23、$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1&2\\0&2&a\\0&0&3\end{bmatrix}$和对角矩阵相似，则$a$等于（　　）

（A）2　　（B）1　　（C）-2　　（D）-1

【答案】（C）

【解析】$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1&-2\\0&\lambda-2&-a\\0&0&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-3)^2=0$，

因此$3-r(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=2$，则$r(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=1$，又$\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}0&1&2\\0&-1&a\\0&0&0\end{bmatrix}$，故$a=-2$。