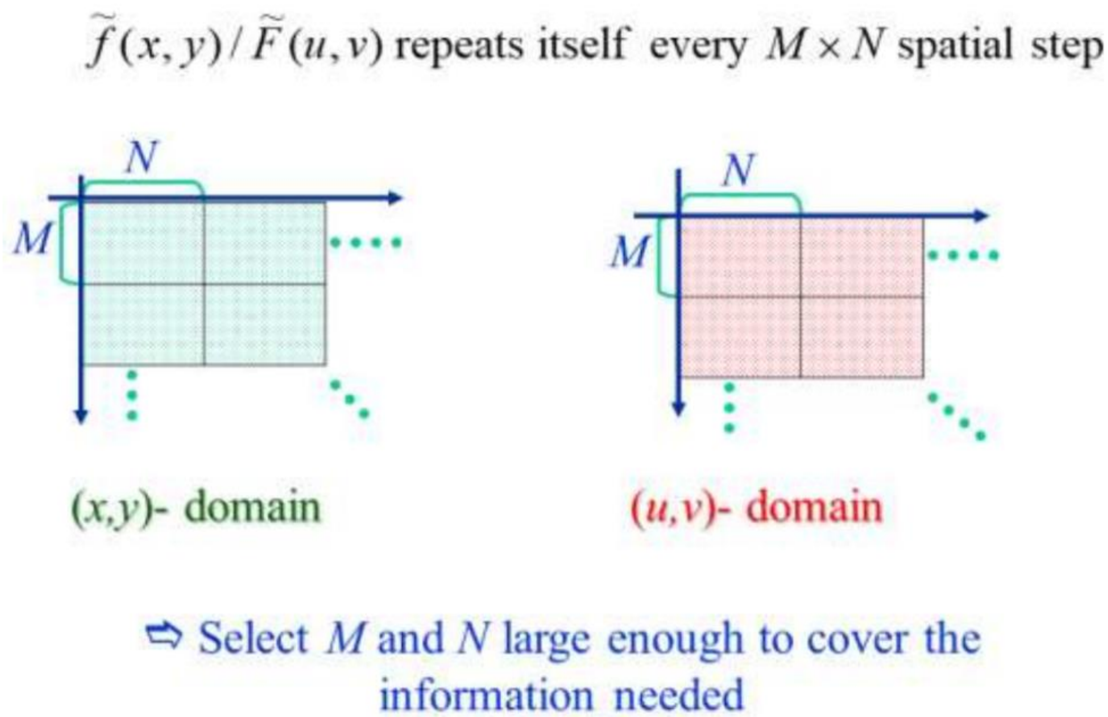
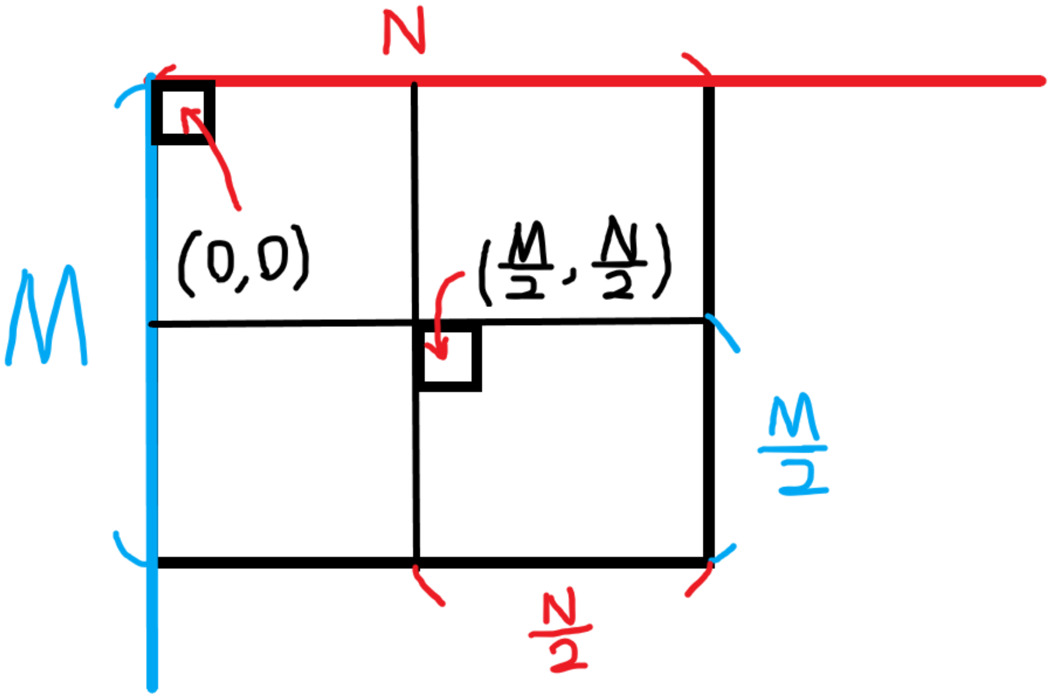
先有個前提知識：

1. 對所有圖像來說，四角都是最低頻，中央為高頻
2. 1 的概念完全來自於 Fourier 轉換的公式，與圖片本身無關
3. 圖像的低頻指的是 灰階變化緩慢，高頻相反
4. Fourier 轉換中，F(a,b)的值與 f(a,b)無直接關係，因 F(a,b)是來自對原圖像的所有 pixels 做運算而來的
5. 基於上述，Fourier 轉換出來的頻譜不是真正物理意義上的頻譜
6. Fourier 轉換是根據奈奎斯特取樣定理得出的
7. Fourier 轉換具週期性，每 MxN 個空間步後就會重複



先從“中央為高頻”下手

這邊有個前情提要，由於圖像大小 MxN 可能為偶數，所謂的中央就不會是單個 pixels，而是有 4 個，但是最高頻仍然是在(M/2,N/2)，也就是在切分後左下格的右上角



而不管是我們做出來的結果，或是直接用公式推導，

都看得出

F(a,b)的結果和 F(a-1,b-1) [也就是與 F(a,b)鄰近的 pixel 格]

相近

這個前提待會會用到

首先推導 $F(\frac{M}{2},\frac{N}{2})$ 等於什麼(那個 e 上面都少了 2，腦補一下)

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j\pi\frac{ux}{M}}\, e^{-j\pi\frac{vy}{N}}$$

$$=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j\pi x}\, e^{-j\pi y}$$

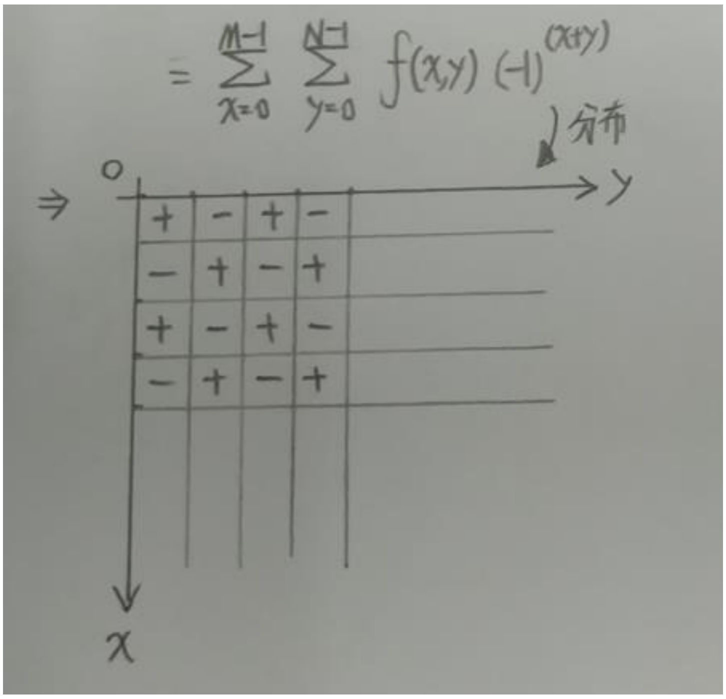
$$\boxed{\begin{aligned} \star\ e^{-j\pi(x+y)} &= \cos(\pi(x+y)) + i\sin(\pi(x+y)) \\ &= (-1)^{(x+y)} \end{aligned}}$$

$$\boxed{=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\,(-1)^{(x+y)}}$$

) 分布

可以得出這個式子，你可以發現到它就是把原圖乘上有規律的

1 和-1 後進行加總而得的結果



這是甚麼意思?

這表示如果圖像上低頻資訊很多，也就是圖像上各 pixel 的灰階值是接近的，就會使 F($\frac{M}{2}, \frac{N}{2}$) 趨近於 0

反之，高頻資訊越多，就會使 F($\frac{M}{2}, \frac{N}{2}$) 朝向正 or 負值增長

因此，可以看出，在 ($\frac{M}{2}, \frac{N}{2}$) 這個位置上為什麼是高頻，因為低頻的資訊被濾掉了(加總為 0)

而這反映出為什麼做 Magnitude 的時候需要加上絕對值再進行歸一化至[0,255]，因為 F($\frac{M}{2}, \frac{N}{2}$) 可能為負，並且絕對值後該值可以爆到幾千幾萬都可能

再來，四角低頻的原因

若 $(u,v) = (0,0)$

$$F(0,0) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)$$ = 加總所有pixels的灰階值

若 $(u,v) = (M-1, 0)$ $[M-1 \fallingdotseq M]$

$$F(M,0) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi x} e^{-j2\pi \cdot 0} = F(0,0)$$

so as $(u,v) = (0, N-1)$

若 $(u,v) = (M-1, N-1)$ $[M-1 \fallingdotseq M,\ N-1 \fallingdotseq N]$

$$F(M,N) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi x} e^{-j2\pi y} = F(0,0)$$

以上4角，就算不用 $M-1 \fallingdotseq M$ 和 $N-1 \fallingdotseq N$

結果也相近

這些計算也體現了 Fourier 轉換的週期性，可以發現四角的結果跟在 F(0,0)是接近的，所以我們專注處理一個問題

“ 為什麼 F(0,0)是低頻? “

若 $(u,v) = (0,0)$

$$F(0,0) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) = \text{加總所有pixels的灰階值}$$

同樣是加總所有的 pixels，但這次是直接加所有 pixels 的灰階值，不帶負號的，也就是說根本分不出低頻高頻

試想，那 $F(\frac{M}{4}, \frac{N}{4})$ 會是甚麼?

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-j2\pi \frac{ux}{M}} e^{-j2\pi \frac{vy}{N}}$$

$$= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-j2\pi \frac{1}{M} \times \frac{M}{4} x} e^{-j2\pi \frac{1}{N} \times \frac{N}{4} y}$$

$$= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \underline{e^{-j\frac{\pi}{2}x} e^{-j\frac{\pi}{2}y}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}(x+y)\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}(x+y)\right)$$

y \ x	0	1	2	3
0	1	0	-1	0
1	0	-1	0	1
2	-1	0	1	0
3	0	1	0	-1

y \ x	0	1	2	3
0	0	-1	0	1
1	-1	0	1	0
2	0	1	0	-1
3	1	0	-1	0

可以看到右下角的分布圖，實部虛部剛好是分開的

而在 Magnitude 計算時，是(實部平方+虛部平方)^0.5

這表示該 pixel 剛好介於

全部都加起來(值最大) 和 比對相鄰差值(值會最小) 之間

我們舉個例子，下圖計算的是 Magnitude

10	10	20	40
10	10	20	40
20	20	20	40
40	40	40	40

$$F(0,0) = 420$$

$$F(\frac{M}{2},\frac{N}{2}) = -20 \Rightarrow 20$$

$$F(\frac{M}{4},\frac{M}{4}) = \sqrt{800} = 20\sqrt{2}$$

$$Re: 10-(20+10+20)+(40+20+40)-40 = 20$$

$$Im: -(10+10)+(80+40)-(80) = 20$$

$F(\frac{M}{4}, \frac{N}{4})$ 的結果會落在 $F(\frac{M}{2}, \frac{N}{2})$ 和 F(0,0) 之間

這一題可以看出以下的特性：

1. 在 F(u,v) 上任一 pixel 都代表一個頻率分量，就像是在三維空間中行動時總可以分成 x、y、z 三個分量，這裡 F(u,v)就如同 x、y、z 一樣
2. $F(\frac{M}{4}, \frac{N}{4})$ 和 $F(\frac{M}{2}, \frac{N}{2})$ 是有可能同時為 0 的，也就是根據 Fourier 轉換公式的取樣頻率無法對該圖提取到該頻率分量
3. 要使 F(u,v)有值，$F(\frac{M}{2}, \frac{N}{2})$最難

2 所述內容，其實就跟奈奎斯特所講的是類似的，你的最低取樣頻率至少為 2 倍的原頻率，才能重構原始訊號，這邊就是能重建原始圖像的意思

想像一下

對任意非週期性訊號我們能拿不同頻率的 sin 波去重構

而圖片大多數都是非週期性的(這點跟訊號還真的一樣)

而構成的訊號，除了含有 f=某任意常數 Hz 的 sin 波之外

(對應到 F(a,b)，各頻率分量)

也有直流訊號存在，而直流訊號的頻率的定義是 “0”

所以，這就是為什麼 F(0,0)被定義成最低頻的原因

這下就剛好對應了

F(0,0) [直流] + F(a,b) [各頻率] = 原圖像 [原訊號]

而各頻率中，F($\frac{M}{2}, \frac{N}{2}$)的頻率為最高頻率分量

如果有辦法找到一堆像上述例子的 4*4 圖片(或著更大)，可以使各頻率分量 F(a,b)剛好開始有值，這些圖片擺下來就可以看出何謂高頻低頻

而如果你設計看看我出的例子，會發現這個頻率分量他縱向橫向都會考慮，要設計出剛好是這個結果的需要點時間…

當然，這一方面也可以講述為什麼 F(0,0)是最低頻

因為一張純白的圖(全低頻資訊)都可以使其有超級大的值

但不可能使 F($\frac{M}{2}, \frac{N}{2}$)有值 (頻率沒高到可以採樣出這個頻率)

最後，回到 F($\frac{M}{2}, \frac{N}{2}$)上，不是有個(-1)^(x+y)嗎?

還記得在做 center processing 的時候你乘上了甚麼?

對，正是 (-1)^(x+y)

當對 F(0,0)乘上(-1)^(x+y)的時候，就會表現出 F($\frac{M}{2}, \frac{N}{2}$)的樣子

而對 F($\frac{M}{2}, \frac{N}{2}$)來說，反而變成了 F(0,0)

高低頻互調，對於其他 F(a,b)也是如此，就成了我們最後看到的那張 Magnitude 圖