

几何布朗运动

1. <https://zh.wikipedia.org/wiki/几何布朗运动>

几何布朗运动 **几何布朗运动**(GBM) (也叫做**指数布朗运动**) 是连续时间情况下的随机过程, 其中随机变量的对数遵循**布朗运动**。几何布朗运动在金融数学中有所应用, 用来在**布莱克-舒尔兹模型** (Black-Scholes 模型) 中模拟股票价格。



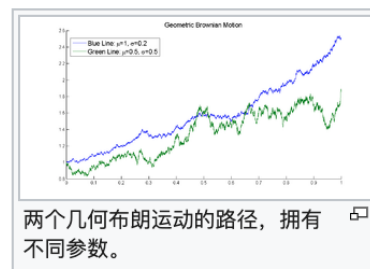
[baike.baidu.com › item › 几何布朗运动](https://baike.baidu.com/item/几何布朗运动) ▼

[几何布朗运动_百度百科](#)

几何布朗运动 [编辑]

维基百科，自由的百科全书

几何布朗运动（英语：**geometric Brownian motion**, **GBM**），也叫做**指数布朗运动**（英语：**exponential Brownian motion**）是连续时间情况下的**随机过程**, 其中随机变量的**对数遵循布朗运动**, ^[1]也称**维纳过程**。几何布朗运动在**金融数学**中有所应用, 用来在**布莱克-舒尔兹定价模型**中模仿股票价格。



两个几何布朗运动的路径，拥有不同参数。

[目录](#) [隐藏]

1 [技术定义](#) ▼

技术定义 [编辑]

A 随机过程 S_t 在满足以下**随机微分方程** (SDE)的情况下被认为遵循几何布朗运动：

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

这里 W_t 是一个**维纳过程**,或者说是布朗运动, 而 μ ('百分比drift') 和 σ ('百分比volatility')则是常量。

几何布朗运动的特性 [编辑]

给定初始值 S_0 , 根据**伊藤积分**, 上面的随机微分方程有如下解:

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right),$$

对于任意值 t , 这是一个**对数正态分布随机变量**, 其**期望值**和**方差**分别是^[2]

$$\mathbb{E}(S_t) = S_0 e^{\mu t},$$

$$\text{Var}(S_t) = S_0^2 e^{2\mu t} \left(e^{\sigma^2 t} - 1\right),$$

也就是说 S_t 的**概率密度函数**是:

$$f_{S_t}(s; \mu, \sigma, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{s\sigma\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{(\ln s - \ln S_0 - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t)^2}{2\sigma^2 t}\right).$$

根据**伊藤引理**, 这个解是正确的。

比如，考虑随机过程 $\log(S_t)$. 这是一个有趣的过程，因为 $d\log(S_t)$ 可以看成是股票在 dt 时间内的对数回报率。对 $f(S) = \log(S)$ 应用伊藤引理，得到

$$\begin{aligned} d\log(S) &= f'(S) dS + \frac{1}{2} f''(S) S^2 \sigma^2 dt \\ &= \frac{1}{S} (\sigma S dW_t + \mu S dt) - \frac{1}{2} \sigma^2 dt \\ &= \sigma dW_t + (\mu - \sigma^2/2) dt. \end{aligned}$$

于是 $\mathbb{E} \log(S_t) = \log(S_0) + (\mu - \sigma^2/2)t$.

这个结果还有另一种方法获得：applying the logarithm to the explicit solution of GBM:

$$\begin{aligned} \log(S_t) &= \log\left(S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)\right) \\ &= \log(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t. \end{aligned}$$

取期望值，获得和上面同样的结果: $\mathbb{E} \log(S_t) = \log(S_0) + (\mu - \sigma^2/2)t$.

在金融中的应用 [\[编辑 \]](#)

主条目：[布莱克-舒尔斯模型](#)

几何布朗运动在布莱克-舒尔斯定价模型被用来定性股票价格，因而也是最常用的描述股票价格的模型。^[3]

使用几何布朗运动来描述股票价格的理由：

- 几何布朗运动的期望与随机过程的价格（股票价格）是独立的，这与我们对现实市场的期望是相符的。^[3]
- 几何布朗运动过程只考虑为正值的价格，就像真实的股票价格。
- 几何布朗运动过程与我们在股票市场观察到的价格轨迹呈现了同样的“roughness”。
- 几何布朗运动过程计算相对简单。

然而，几何布朗运动并不完全现实，尤其存在以下缺陷：

- 在真实股票价格中波动随时间变化 (possibly **stochastically**)，但是在几何布朗运动中，波动是不随时间变化的。
- 在真实股票价格中，收益通常不服从正态分布（真实股票收益有更高的 **峰度** ('fatter tails'), 代表了有可能形成更大的价格波动)。^[4]