adapted process

https://en.wikipedia.org/wiki/Adapted_process

适应过程 [编辑]

维基百科，自由的百科全书

适应过程是随机过程研究中常见的概念，表示不能“预见未来”的随机过程。非正式的数学解释是，一个随机过程是适应于某个参考族的，当且仅当在任意的特定时刻，随机过程都是可测的。适应过程是随机过程理论中很多重要概念的基础。比如说能够定义伊藤积分的随机过程就需要是适应过程。

定义 [编辑]

设有

- 概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$；
- 测度空间$(S, \mathcal{A})$，状态空间；
- 有序的指标集T： 可以是非负实数集$[0, \infty)$、有限时间集$[0, T_0]$或离散时间$\mathbb{N}$；
- σ–代数$\mathcal{F}$上的参考族$\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t | t \in T\}$；
- 随机过程$X : T \times \Omega \to \mathbb{X} = (X_t)_{t \in T}$。

则随机过程$(X_t)_{t \in T}$是适应过程（适应于$\mathbb{F}$的随机过程）当且仅当对任意的时刻$t \in T$，映射：$X_t : \Omega \to S$都是$(\mathcal{F}_t, \mathcal{A})$–可测的随机变量[1]:37[2]:97。

适应过程的定义说明，如果一个过程适应于某个参考族$\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t | t \in T\}$，那么在任意一个特定的时刻，我们掌握的信息都包括了这个过程。也就是说这个过程在任意时刻的结果必然在该时刻可知。但一般来说，适应过程在任意时刻的结果并不能提前预知。如果一个（离散的）随机过程在时刻$t = n$的结果能够在$t = n - 1$的时刻已知，那么这个过程被称为在参考族$\mathbb{F}$中**可预测**。可预测的随机过程必然适应于参考族，反之则不然。

例子 [编辑]

设状态空间$(S, \mathcal{A})$为实数及其波莱尔σ–代数$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$。设指标集为连续的：$T = [0, \infty)$. 给定一个随机过程$X = (X_t)_{t \in T}$，如果考虑过程$X$产生的自然参考族：$\tilde{\mathcal{F}}^X = \{\tilde{\mathcal{F}}_t^X | t \in T\}$

$$\tilde{\mathcal{F}}_t^X = \sigma\left(X_s\,;\ 0 \leqslant s \leqslant t\right) = \sigma\left(\left\{X_s^{(-1)}(H) \,|\, 0 \leqslant s \leqslant t,\ H \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\right\}\right)$$

那么X当然是适应于$\tilde{\mathcal{F}}^X$的过程，因为在每个时刻，X都是$\tilde{\mathcal{F}}_t^X$–可测的随机变量。自然参考族也是能使得X为适应变量的“最小”参考族。X适应于某个参考族$\mathcal{F}^\tau = \{\mathcal{F}_t | t \in T\}$，当且仅当在任何时刻$t \in T$，$\tilde{\mathcal{F}}_t^X \subseteq \mathcal{F}_t$.[3]:98

设$X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$是某彩票每期的开奖结果，那么$X$是一个适应随机过程，但不可能是一个可预测过程。