# 树宽不超过 4 的图的路分解问题

答辩人：易妮萍

导师：吕长虹 教授

2021 年 5 月 16 日

# 内容提要

# 基本概念

**$k-$ 树**

$\mathscr{F}$ 是一类图的集合，其定义如下：

1. $K_k \in \mathscr{F}$;
2. 若 $G \ncong K_k$，存在 $v \in V(G)$，使得 $G - v \in \mathscr{F}$，且 $G[N(v)] \cong K_k$，则 $G \in \mathscr{F}$.

若 $G \in \mathscr{F}$，我们称 $G$ 为 $k-$ 树 ($k-$tree).

**极点**

图 $G$ 为 $k$-树，$G \ncong K_k$，$v \in V(G)$，$d(v) = k$，则称 $v$ 为 $G$ 的极点 (Terminal).

# 基本概念

**$k-$ 树**

$\mathscr{F}$ 是一类图的集合，其定义如下：

1. $K_k \in \mathscr{F}$;
2. 若 $G \not\cong K_k$，存在 $v \in V(G)$，使得 $G - v \in \mathscr{F}$，且 $G[N(v)] \cong K_k$，则 $G \in \mathscr{F}$.

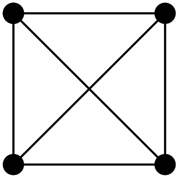
若 $G \in \mathscr{F}$，我们称 $G$ 为 $k-$ 树 ($k-$tree).

**偏 $k-$ 树**

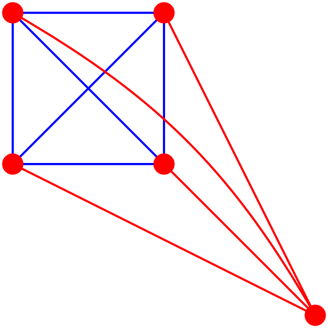
若图 $G$ 为 $k-$ 树，$H \subseteq G$，则称 $H$ 为偏 $k-$ 树 (Partial $k-$tree)，$G$ 为 $H$ 的 $k-$ 底树 (Underlying $k-$tree).

- 树宽不超过 $k$ 的图就是偏 $k-$ 树

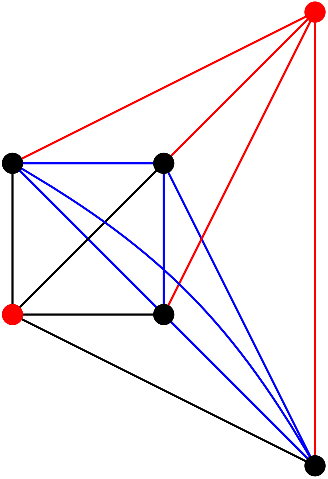
# 4– 树



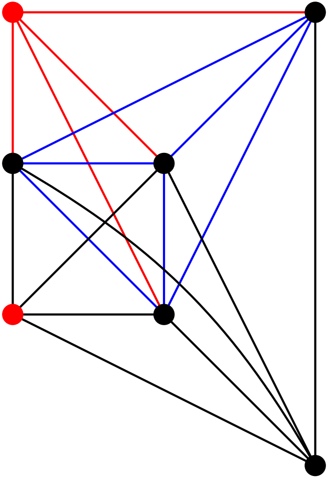
# 4-树



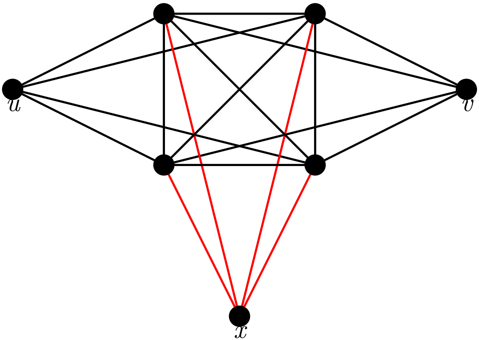
# 4-树



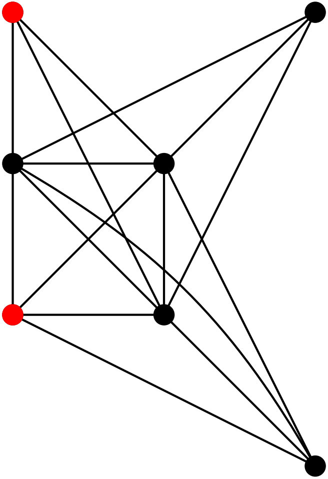
# 4-树



# 4-树



# 偏 4-树



# 基本概念

## 性质

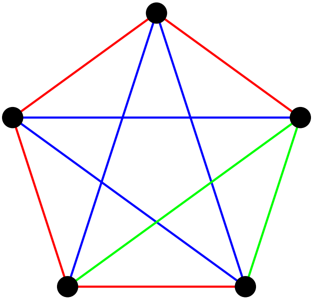
- 若图 $G$ 是 $k-$ 树，$|V(G)| \geq k+2$，那么 $G$ 至少有两个极点.
- 若图 $G$ 是 $k-$ 树，$|V(G)| \geq k+2$，，那么 $G$ 中任意两个极点是不相邻的.
- 若图 $G$ 是偏 $k-$ 树，$|V(G)| \geq k$，则存在 $k-$ 底树 $G^*$，使得 $G$ 包含 $G^*$ 的每个极点.

- 偏 $k-$ 树 $G$ 的极点就是 $G$ 的最小 $k-$ 底树的极点

# 基本概念

- 路分解：$\mathscr{D} = \{G_1, G_2, ..., G_k\}$ 为 $G$ 的一个分解，$G_i (i = 1, ..., k)$ 为路，则称 $\mathscr{D}$ 为 $G$ 的路分解.
- 路圈分解：$\mathscr{D} = \{G_1, G_2, ..., G_k\}$ 为 $G$ 的一个分解，$G_i (i = 1, ..., k)$ 为路或者圈，则称 $\mathscr{D}$ 为 $G$ 的路圈分解.
- 最小路分解数：$pn(G) = min\{|\mathscr{D}||\mathscr{D}$ 为 $G$ 的路分解$\}$.
    - $\frac{\Delta(G)}{2} \leq pn(G) \leq |E(G)|$.
- 最小路圈分解数：$pc(G) = min\{|\mathscr{D}||\mathscr{D}$ 为 $G$ 的路圈分解$\}$.

# 路分解



- $pn(K_5) = 3$

# 背景介绍

**猜想（Gallai,1966）**

若 $G$ 为 $n$ 个点的连通图，则 $pn(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

- $pc(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. (Lov$\acute{a}$sz,1968)

  思路一：将圈分为路

# 背景介绍

**猜想（Gallai,1966）**

若 $G$ 为 $n$ 个点的连通图，则 $pn(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

- $pc(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. (Lov*á*sz,1968)

  思路一：将圈分为路

  - 若图 $G$ 有 $u$ 个奇点，$g$ 个偶点，$g \geq 1$，则有

$$pn(G) \leq \frac{u}{2} + g - 1$$

# 背景介绍

**猜想（Gallai,1966）**

若 $G$ 为 $n$ 个点的连通图，则 $pn(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

- $pc(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.　(Lovász,1968)

  思路一：将圈分为路

  - 若图 $G$ 有 $u$ 个奇点，$g$ 个偶点，$g \geq 1$，则有

$$pn(G) \leq \frac{u}{2} + g - 1$$

- $pn(G) \leq \lfloor \frac{3}{4} n \rfloor$.(Donald,1980)

# 背景介绍

**猜想 (Gallai,1966)**

若 $G$ 为 $n$ 个点的连通图，则 $pn(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

- $pc(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. (Lov*á*sz,1968)

  思路一：将圈分为路

  - 若图 $G$ 有 $u$ 个奇点，$g$ 个偶点，$g \geq 1$，则有

$$pn(G) \leq \frac{u}{2} + g - 1$$

- $pn(G) \leq \lfloor \frac{3}{4} n \rfloor$.(Donald,1980)
- $pn(G) \leq \lfloor \frac{2}{3} n \rfloor$. (Dean 和 Kouider,2000)

**猜想 (Gallai,1966)**

若 $G$ 为 $n$ 个点的连通图，则 $pn(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

- $pc(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. (Lovász,1968)

  思路二：考虑 $G_E$ 的结构 ($G_E$ 表示图 $G$ 中偶点的诱导子图)

**猜想 (Gallai,1966)**

若 $G$ 为 $n$ 个点的连通图，则 $pn(G) \le \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

- $pc(G) \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. (Lovász,1968)

  思路二：考虑 $G_E$ 的结构 ($G_E$ 表示图 $G$ 中偶点的诱导子图)

  - 若 $|V(G_E)| \le 1$,Gallai 猜想成立.

**猜想 (Gallai,1966)**

若 $G$ 为 $n$ 个点的连通图，则 $pn(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

- $pc(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. (Lov$\acute{a}$sz,1968)

  思路二：考虑 $G_E$ 的结构 ($G_E$ 表示图 $G$ 中偶点的诱导子图)

  - 若 $|V(G_E)| \leq 1$,Gallai 猜想成立.
- 若 $G_E$ 为森林，则 $pn(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. (Pyber,1996)

**猜想 (Gallai,1966)**

若 $G$ 为 $n$ 个点的连通图，则 $pn(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

- $pc(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.　(Lovász,1968)

  思路二：考虑 $G_E$ 的结构 ($G_E$ 表示图 $G$ 中偶点的诱导子图)

  - 若 $|V(G_E)| \leq 1$,Gallai 猜想成立.

- 若 $G_E$ 为森林，则 $pn(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.　(Pyber,1996)
- 若 $G_E$ 中的每个区块是 $\Delta - free$, 且最大度不超过 3，则有 $pn(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.　(范更华,2005)

**猜想 (Gallai,1966)**

若 $G$ 为 $n$ 个点的连通图，则 $pn(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

- $pc(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. (Lovász,1968)

  思路二：考虑 $G_E$ 的结构 ($G_E$ 表示图 $G$ 中偶点的诱导子图)
  - 若 $|V(G_E)| \leq 1$,Gallai 猜想成立.
- 若 $G_E$ 为森林，则 $pn(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. (Pyber,1996)
- 若 $G_E$ 中的每个区块是 $\Delta - free$, 且最大度不超过 3，则有 $pn(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. (范更华,2005)
- 若 $G_E$ 中不存在两个三角形共用一个点，则 $pn(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. (范更华等,2020)

**猜想 (Gallai,1966)**

若 $G$ 为 $n$ 个点的连通图，则 $pn(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

- $pc(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. (Lovász,1968)

  思路二：考虑 $G_E$ 的结构 ($G_E$ 表示图 $G$ 中偶点的诱导子图)

  - 若 $|V(G_E)| \leq 1$,Gallai 猜想成立.
- 若 $G_E$ 为森林，则 $pn(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. (Pyber,1996)
- 若 $G_E$ 中的每个区块是 $\Delta - free$, 且最大度不超过 3，则有 $pn(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. (范更华,2005)
- 若 $G_E$ 中不存在两个三角形共用一个点，则 $pn(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. (范更华等,2020)

最大度至多为 5 的图 (Botler 和 Perrett,2019),$\Delta - free$ 的平面图 (Botler 等,2019),6-正则二部图 (范更华等，2020) 等是满足 Gallai 猜想的.

# 背景介绍

**猜想 (Gallai,1966)**

连通图 $G$ 的最小路分解数 $pn(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

- 树宽为 1 的图为树，树宽为 1 的图是满足 Gallai 猜想的.
- Gallai 猜想对于树宽不超过 2 的图是成立的. (Kindermann, Schlipf 和 Schulz,2019)
- 若图 $G$ 的树宽不超过 3，则 $G$ 为 Gallai 图或者同构于 $K_3$ 或 $K_5^-$. (Botler,Sambinelli,2019)

  (若图 $G$ 满足 $pn(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, 则称 $G$ 为 Gallai 图)

# 主要结果

**主要结果**

若图 $G$ 的树宽不超过 4，则 $G$ 为 Gallai 图或者同构于 $K_3$，$K_5^-$ 或 $K_5$.

# 证明思路

**主要结果**

若图 $G$ 的树宽不超过 4，则 $G$ 为 Gallai 图或者同构于 $K_3$，$K_5^-$ 或 $K_5$.

- 存在 $FRS\mathscr{P}=\{P,\mathscr{A},\mathscr{L}\}$ 使得极点 $u,v$ 为孤立点;
  - $G_{\mathscr{P}}$ 为 Gallai 图;
  - $G_{\mathscr{P}}$ 同构于 $K_3$，$K_5^-$ 或 $K_5$.
- 不存在 $FRS\mathscr{P}=\{P,\mathscr{A},\mathscr{L}\}$ 使得极点 $u,v$ 为孤立点.

# FRS

- $FRS(Feasible\ Reducing\ Scheme$，可行约化概型)

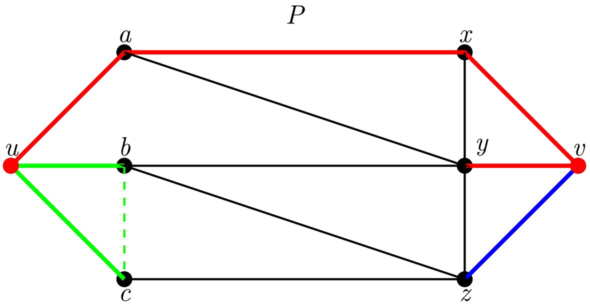



图: $FRS\ \mathscr{P} = \{P, \{vx\}, \{buc\}\}$

# FRS

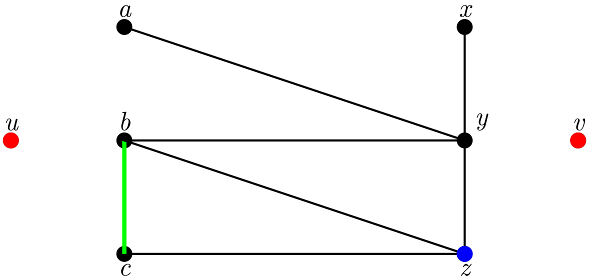



图: $G_{\mathscr{P}}$

# FRS

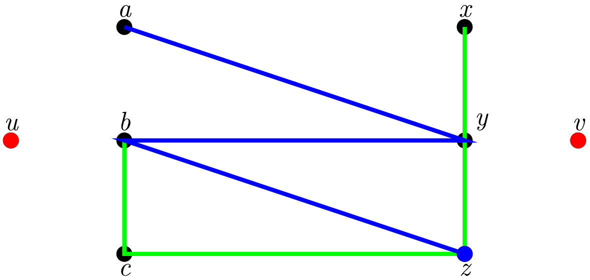
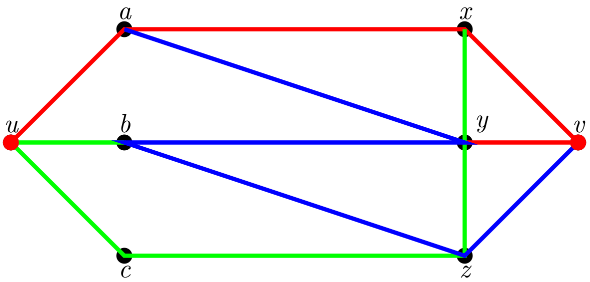



图: $G_{\mathscr{P}}$

# FRS




- $pn(G) \leq pn(G_{\mathscr{P}}) + 1$

# 证明思路

- 不存在 $FRS\mathscr{P}=\{P,\mathscr{A},\mathscr{L}\}$ 使得极点 $u,v$ 为孤立点

**定理**

若 $G$ 存在 $FRS\mathscr{H}=\{H,\mathscr{A},\mathscr{L}\}$，则有 $pn(G)\leq pn(G_{\mathscr{H}})+pn(H)$.

- 若 $G_{\mathscr{H}}$ 为 Gallai 图，则 $G$ 为 Gallai 图.
- 还需讨论 $G_{\mathscr{H}}$ 同构于 $K_3$，$K_5^-$ 或 $K_5$ 的情况.

# 引理 (具体说明及证明可参见论文 3-7 页)

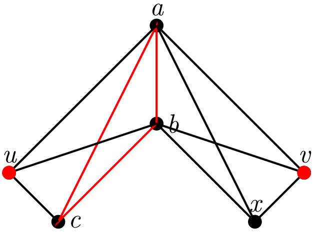
- 若图 $G$ 可分解为路 $P$ 和圈 $C$，其中 $P$ 至多包含 $C$ 的一条弦，则 $G$ 可分解为两条路，并且这两条路中只有一条路包含 $C$ 中的一条边.
- 若图 $G$ 可分解为路 $P$ 和长度为 5 的圈 $C$，其中 $P$ 至多包含 $C$ 的三条弦，则 $pn(G)=2$.
- 若图 $G$ 可以借由对 $K_5$ 中的两条边进行细分操作得到，则 $pn(G)=2$.
- 若图 $H$ 可以借由对 $K_5$ 中的一条边进行细分操作得到, 图 $G$ 能被分解为路 $P$ 和图 $H$, 则 $pn(G)=3$.
- 若 $S\subseteq V(K_7)$，$|S|=3$，$G=K_7-K_7[S]$, 则 $pn(G)=3$.

# 引理 (具体说明及证明可参见论文 3-7 页)

- 若图 $H$ 为图 $G$ 的 $r-$ 约化子图，且 $C_3^{\emptyset}=C_5^{\emptyset}=\emptyset$，则有 $H'=H+\cup_{C\in C_3^H\cup C_5^H}C$ 为图 $G$ 的 $r+|C_3^H|+2|C_5^H|$-约化子图，并且 $G-E(H')$ 的连通分支均不同构于 $K_3$，$K_5^-$ 或 $K_5$.
- 若 $P$ 为图 $G$ 中的路，$x,v,y\in V(G),\{x,v,y\}\cap V(P)\neq\emptyset$，令 $G'=(G-E(P))+\widehat{xvy}$，$v$ 为 $G'$ 中的孤立点，又 $G'$ 至少有两个孤立点，$G'$ 的每个连通分支是 Gallai 图或同构于 $K_3$ 或 $K_5^-,K_5$，那么 $G$ 中有约化子图.
- 若 $P$ 为图 $G$ 中的路，$x,v,y,a,u,b\in V(G),v\neq u$，$\{x,v,y\}\cap V(P)\neq\emptyset$, $\{a,u,b\}\cap V(P)\neq\emptyset$，且 $|\{a,b\}\cap N(v)|\leq 1$，$|\{x,y\}\cap N(u)|\leq 1$，令 $G'=(G-E(P))+\widehat{xvy}+\widehat{aub}$，$u,v$ 为 $G'$ 中的孤立点，并且 $G'$ 的每个连通分支是 Gallai 图或同构于 $K_3$ 或 $K_5^-,K_5$，那么 $G$ 中有约化子图.

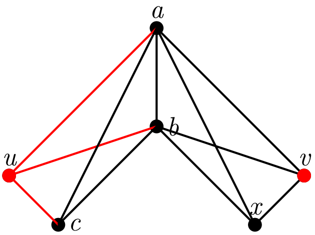
# 证明思路

- 不存在 $FRS\mathscr{P} = \{P, \mathscr{A}, \mathscr{L}\}$ 使得极点 $u, v$ 为孤立点
  - 极点的度数均为 3;
  - 每个极点的邻居的诱导子图为 $K_3$;
  - 每对极点有公共邻居 $\{a, b\}$;
  - $a, b$ 为奇点;
  - $\{a, b\}$ 为 $G$ 的割点集.



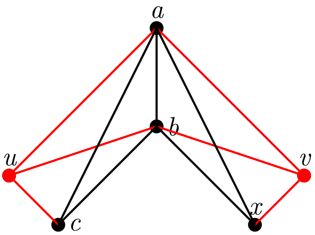
# 证明思路

- 不存在 $FRS\mathscr{P} = \{P, \mathscr{A}, \mathscr{L}\}$ 使得极点 $u, v$ 为孤立点
  - 极点的度数均为 3;
  - 每个极点的邻居的诱导子图为 $K_3$;
  - 每对极点有公共邻居 $\{a, b\}$;
  - $a, b$ 为奇点;
  - $\{a, b\}$ 为 $G$ 的割点集.



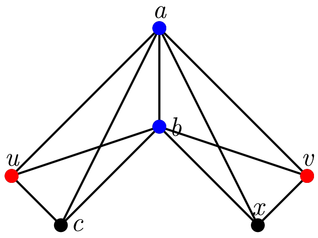
# 证明思路

- 不存在 $FRS\mathscr{P} = \{P, \mathscr{A}, \mathscr{L}\}$ 使得极点 $u, v$ 为孤立点
  - 极点的度数均为 3;
  - 每个极点的邻居的诱导子图为 $K_3$;
  - 每对极点有公共邻居 $\{a, b\}$;
  - $a, b$ 为奇点;
  - $\{a, b\}$ 为 $G$ 的割点集.

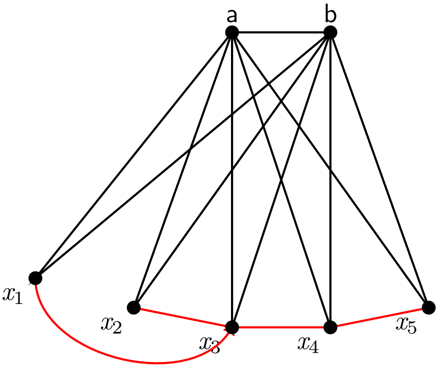


# 证明思路

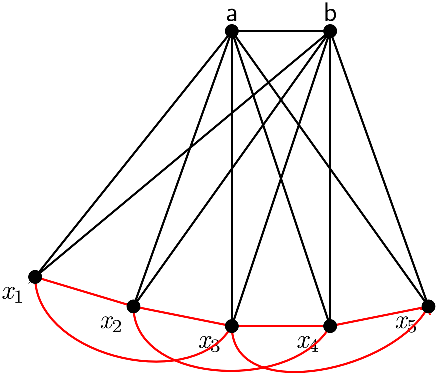
- 不存在 $FRS\mathscr{P} = \{P, \mathscr{A}, \mathscr{L}\}$ 使得极点 $u, v$ 为孤立点
  - 极点的度数均为 3;
  - 每个极点的邻居的诱导子图为 $K_3$;
  - 每对极点有公共邻居 $\{a, b\}$;
  - $a, b$ 为奇点;
  - $\{a, b\}$ 为 $G$ 的割点集.



# 偏 3-树



# 偏 4-树



- 不存在 $FRS\mathscr{P} = \{P, \mathscr{A}, \mathscr{L}\}$ 使得极点 $u, v$ 为孤立点

  主要想法：寻找同一连通分支的度数不超过 4 的，非 $G$ 中极点的点，并且这个点的邻居的诱导子图为 $K_4$.

- 不存在 $FRS\mathscr{P}=\{P,\mathscr{A},\mathscr{L}\}$ 使得极点 $u,v$ 为孤立点

  主要想法：寻找同一连通分支的度数不超过 4 的，非 $G$ 中极点的点，并且这个点的邻居的诱导子图为 $K_4$.

  - $G^*$ 为 $G$ 的 $k-$ 底树，$G^*=T_2\vee K_2$，$T_2=G-a-b$，$T_2$ 为 $2-$ 树.

    (每对极点有两个公共邻居 $\{a,b\}$)

- 不存在 $FRS\mathscr{P} = \{P, \mathscr{A}, \mathscr{L}\}$ 使得极点 $u, v$ 为孤立点

  主要想法：寻找同一连通分支的度数不超过 4 的，非 $G$ 中极点的点，并且这个点的邻居的诱导子图为 $K_4$.

  - $G^*$ 为 $G$ 的 $k-$ 底树，$G^* = T_2 \vee K_2$，$T_2 = G - a - b$，$T_2$ 为 $2-$ 树.

    (每对极点有两个公共邻居 $\{a, b\}$)

  - $G - a - b$ 中的每个连通分支只有一个极点.

- 不存在 $FRS\mathscr{P}=\{P,\mathscr{A},\mathscr{L}\}$ 使得极点 $u,v$ 为孤立点

  主要想法：寻找同一连通分支的度数不超过 4 的，非 $G$ 中极点的点，并且这个点的邻居的诱导子图为 $K_4$.

  - $G^*$ 为 $G$ 的 $k-$ 底树，$G^*=T_2\vee K_2$，$T_2=G-a-b$，$T_2$ 为 $2-$ 树.

    (每对极点有两个公共邻居 $\{a,b\}$)

  - $G-a-b$ 中的每个连通分支只有一个极点.

  - $G_1$ 为 $G-a-b$ 的一个连通分支，$G_1$ 为偏 $2-$ 树，$G_1$ 至少有两个度数不超过 2 的点，其中必有一个点不为 $G$ 中的极点，设为 $v_1$.

- 不存在 $FRS\mathscr{P} = \{P, \mathscr{A}, \mathscr{L}\}$ 使得极点 $u, v$ 为孤立点

  主要想法：寻找同一连通分支的度数不超过 4 的，非 $G$ 中极点的点，并且这个点的邻居的诱导子图为 $K_4$.

  - $G^*$ 为 $G$ 的 $k-$ 底树，$G^* = T_2 \vee K_2$，$T_2 = G - a - b$，$T_2$ 为 $2-$ 树.

    (每对极点有两个公共邻居 $\{a, b\}$)
  - $G - a - b$ 中的每个连通分支只有一个极点.
  - $G_1$ 为 $G - a - b$ 的一个连通分支，$G_1$ 为偏 $2-$ 树，$G_1$ 至少有两个度数不超过 2 的点，其中必有一个点不为 $G$ 中的极点，设为 $v_1$.
  - 由 $G^* = T_2 \vee K_2$，$G_1$ 为偏 $2-$ 树，可得 $N(v_1) \cong K_4$.

- 不存在 $FRS\mathscr{P}=\{P,\mathscr{A},\mathscr{L}\}$ 使得极点 $u,v$ 为孤立点

  主要想法：寻找同一连通分支的度数不超过 4 的，非 $G$ 中极点的点，并且这个点的邻居的诱导子图为 $K_4$.

  - $G^*$ 为 $G$ 的 $k-$ 底树，$G^*=T_2\vee K_2$，$T_2=G-a-b$，$T_2$ 为 $2-$ 树.

    (每对极点有两个公共邻居 $\{a,b\}$)

  - $G-a-b$ 中的每个连通分支只有一个极点.

  - $G_1$ 为 $G-a-b$ 的一个连通分支，$G_1$ 为偏 $2-$ 树，$G_1$ 至少有两个度数不超过 2 的点，其中必有一个点不为 $G$ 中的极点，设为 $v_1$.

  - 由 $G^*=T_2\vee K_2$，$G_1$ 为偏 $2-$ 树，可得 $N(v_1)\cong K_4$.

  - 两个度数不超过 4 的点在同一分支，且在 $G^*$ 中的诱导子图为 $K_4$，跟前面的证明方法类似，可找到 $FRS$.

# 偏 4-树

F. Botler, M. Sambinelli .
Gallai's conjecture for graphs with treewidth 3[J].
Electronic Notes in Discrete Mathematics, 2017, 62, 147-152.

F. Botler, A. Jiménez, and M. Sambinelli.
Gallai' s path decomposition conjecture for triangle-free planar graphs[J].
Discrete Mathematics, 2019, 342(5), 1403-1414.

N. Dean, M. Kouider.
Gallai' s conjecture for disconnected graphs[J].
Discrete Math, 2000, 213, 43–54.

# 偏 4-树

L. Pyber.
Covering the edges of a connected graph by paths[J].
Journal of combinatorial theory, 1996, 66(1), 152–159.

G. Fan.
Path decompositions and gallai’ s conjecture[J].
Journal of combinatorial theory, 2005, 93 (2), 117–125.

谢　谢!
Thank you!