北京师范大学

本科生毕业论文（设计）

毕业论文（设计）题目：

2014-2023 年高考全国卷导数试题研究

部　院　系：　数学科学学院

专　　　业：　数学与应用数学（励耘）

学　　　号：　202011999072

学 生 姓 名：　方崟睿

指 导 教 师：　朱文芳

指导教师职称：　教授

指导教师单位：　数学科学学院

2024 年 4 月 25 日

北京师范大学本科生毕业论文（设计）诚信承诺书

本人郑重声明： 所呈交的毕业论文（设计），是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

本人签名：方堂睿　　　　　　　　2024 年 5 月 15 日

北京师范大学本科生毕业论文（设计）使用授权书

本人完全了解北京师范大学有关收集、保留和使用毕业论文（设计）的规定，即：本科生毕业论文（设计）工作的知识产权单位属北京师范大学。学校有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许毕业论文（设计）被查阅和借阅；学校可以公布毕业论文（设计）的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编毕业论文（设计）。保密的毕业论文（设计）在解密后遵守此规定。

本论文（是、否）保密论文。

保密论文在_____年_____月解密后适用本授权书。

本人签名：方堂睿　　　　　　　　2024 年 5 月 15 日

导师签字：朱文芳　　　　　　　　2024 年 5 月 15 日

2014-2023 年高考全国卷导数试题研究

摘　要

导数是高考考查的重难点，在每年高考中导数都会有一道解答题且通常作为压轴题，同时还有一些基础的选择题与填空题。因此，研究高考导数试题的解法可以帮助教师更加了解这部分内容的教学和提高学生高考的成绩。

笔者查询 2014-2023 年高考全国卷导数试题，并以这些试题为主，同时结合《普通高中数学课程标准》（2017 年版 2020 年修订）与人教 B 版高中数学选修第三册研究了这些高考试题，得到了基础问题的解法，与函数的单调性和极值相关的问题以及不等式的证明等问题的思路方法。最后通过对比文理科试题与新高考试题，得出了新高考的一些考查方向，进而基于上述研究结果提出了高中导数对教师和学生的一些建议。

关键词：高考，导数，考查，新高考

2014-2023 National College Entrance Examination National Derivative Test Questions

ABSTRACT

The derivative is a key and difficult point in the National College Entrance Examination. In the National College Entrance Examination, there will always be a solution problem on the derivative and it is usually the climax problem. There are also some basic choice and fill-in-the-blank questions. Consequently, by studying the solutions to derivative questions in the college entrance examination, teachers can enhance their understanding of this specific content area and enhance students' performance on the college entrance examination.

I have conducted research on derivative problems from the 2014-2023 national college entrance exams, specifically focusing on integrating these questions with the " General Mathematics Curriculum Standards for Senior High School" (2020 Revised Edition) and the " Mathematics for High School, Volume 3"(People's Education Press). This research aimed to provide solutions to fundamental problems and offer insights and strategies for challenges related to the monotonicity and extrema of functions, as well as the proof of inequalities. After comparing questions from the general and liberal arts college entrance exams with the new college entrance exams, I have discovered certain examination trends in the new college entrance exams. Building upon these findings, I have suggested recommendations for high school calculus teachers and students.

KEY WORDS: National College Entrance Examination, derivative, examine, new college entrance examination

目　录

1 绪论

1.1 研究背景

函数在高中教学中是一个重要模块，而导数是研究函数性质的一个主要方法，导数的重要性显而易见。同时在《普通高中数学课程标准》（2017 年版 2020 年修订）（以下简称《课程标准》）中，数列和一元函数导数及其应用作为选择性必修的内容，课时建议达 30 课时；并且要求学生掌握导数概念及其意义、会导数运算、会运用导数研究函数的性质并解决实际问题，同时对微积分的创立和发展有一定的了解[1]36。

导数的重要性也体现在高考中。自我国恢复高考制度以来，高考已成为我国选拔人才的一个重要途径，而如何在高考中脱颖而出成为了广大师生重点关注的内容。数学成绩在高考总分中占有较高的比重，因此直接影响着学生的综合排名和升学机会。导数作为微积分的基础知识之一，在高中数学教学中占据着重要地位，函数与导数的交汇经常出现在高考压轴题位置，但在学习过程中学生们由于导数部分较高的难度而难以产生兴趣，课程中积极性较低，这使导数成为了高考中的一道难关，所以在高考中研究导数的考查就显得十分重要。

1.2 研究目标

本文将研究高考导数试题的考察内容与设问形式，对常见的几类题型提出一些解题思路与方法，同时对比新高考与旧高考的差别为新课标考生备考提出一些建议。

1.3 国内研究现状

优异的高考成绩可以为学生提供更广阔的升学机会，选择更理想的专业和学校。而数学在全国卷中占有 150 分之多，毫无疑问是高考的主科，而导数是高考的重要考察内容，于是高考导数成为了众多教师与学者的研究问题。在中国知网上输入“高考导数”、“导数与应用”等关键词搜索相关文献，发现有许多的学者、教师对高考导数问题进行了研究，他们的研究内容主要为研究高考导数一类问题的解法，例如韩旭在 2020 年第 10 期《高中数理化》中发表的“分离常数法解决高考导数恒成立问题”，主要研究了通过分离变量法研究导函数从而求出参数取值范围等问题[2]。总的来说，高考导数在国内是一个热门问题，

能够为我的研究提供许多的参考。

1.4 研究意义

随着新课标教材的全面使用，教师的教学方式也在不断调整来适应新课程改革的趋势。一般来说，教师在教学过程中要紧抓《课程标准》，研究好高考的考察要求，从而研究高考中对于导数内容的考查具有重要的意义，因为研究高考中对于导数内容的考查能够引导平时教师的教学。研究清楚高考考什么能够使教师明白在教学时教什么，了解学生需要学到什么程度。

同时，对于高考导数考试内容的研究，使教师重视知识的形成过程，重视教学过程中对学生思维能力的培养，可以使教师了解高考导数考试的命题规律和解题方法。通过研究还可以让教师更加深刻地认识导数部分的内容，在教学过程中能够更好地化繁为简，让学生能够更容易接受这部分知识。

1.5 研究方法

论文拟采用三种研究方法进行研究，即文献研究法、比较研究法和案例分析法。

文献研究法：首先收集全国卷 2014-2023 年试题，在中国知网等学术平台搜索“高考导数”等关键词收集阅读相关文献，整理借鉴已有的导数试题的解法。

案例分析法：在试题中选取经典例题进行考查分析得到导数问题的解决方法。

对比研究法：通过对比全国Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ卷的文理科导数试题以及 2020 年之前旧课标与 2021 后新课标考查的差异总结高考导数考查的规律。

2 2014-2023 年全国卷导数试题分析

2.1 高中导数课标要求与高考考查分析

在《课程标准》中，导数部分考查的内容如下：

（1）导数的概念及意义：这部分主要考察的是导数的几何意义，即通过导数的几何意义计算曲线的切线方程。

（2）导数的运算：这部分主要要求学生能够能利用给出的基本初等函数的导数公式和导数的四则运算法则求简单函数的导数；能求简单的复合函数（限于形如$f(ax+b)$）的导数。

（3）导数在研究函数中的应用：这部分考察学生利用导数研究函数的单调性、求函数的极值与最值。

（4）解决一些实际问题[1]39-40。

2.2 2014-2023 年全国卷导数试题题型分析

全国卷在对高考数学的考查中，总体结构大同小异，选择题和填空题每题 5 分，解答题 5 道题占 12 分，1 道题为 10 分。从近十年的全国卷来看，整体上导数相关知识在选择题与填空题中有高概率会涉及，其中文科卷中出现概率相对更高。而近十年内解答题每年都会出现一道题考察导数相关知识，且在 2014-2020 年间导数题都处于试卷的压轴题位置，在近年来新高考改革后有所调整但也经常处于压轴题位置。全国卷的导数试题整体上题量相对较大，分值也相对平稳。

2.3 2014-2023 年全国卷导数试题内容分析

2.3.1 导数在小题中的考查分析

在选择题与填空题中主要通过分析函数的单调性，考查函数的极值，导数的几何意义这几种形式来考查导数相关知识。对于分析函数单调性，求切线方程和极值点来说需要考生会用函数求导法则求出给定函数的导数基本可以解决问题。

文科试卷中，需要研究的函数结构相对简单，基本是三次以下的函数与指数函数，对数函数的加和，但是计算比较复杂的多项式和指数函数乘积的形式会出现在理科试卷中。例如 2020 年全国 I 卷文科 15 题考察的函数为$y = lnx + x + 1$，这样的函数研究起来是非常容易的。而又如 2018 年全国 III 卷理科 14 题考察的函数为$y = (ax + 1)e^x$，处理这样的函数就相对复杂。而新高考没有了文理科的区别，在设问中会结合函数的图像等几何性质设问，如 2022 年新高考全国 I 卷 15 题考察了曲线$y = (x + a)e^x$什么时候有两条过原点的切线。

2.3.2 导数在解答题中的考查分析

2.3.2.1 导数在解答题中函数的形式分析

导数问题的核心是处理题目所给函数，本小节将对比分析全国卷中导数解答题的函数结构。

全国卷的文科试卷中函数形式相对简单，通常为三次函数或二次函数与指数函数，对数函数的加减，在少数情况下才会出现与指数函数，对数函数的乘除。而对于全国卷的理科试卷，所给函数中一般都会出现二次以内函数与指数函数，对数函数的乘除。但是需要注意的是近三年全国卷文科试卷中函数结构逐渐复杂化，如 2022 年全国乙卷的函数结构

为 $f(x)=ax-\frac{1}{x}-(a+1)lnx$，2023 年全国乙卷的函数结构为$f(x)=\left(\frac{1}{x}+a\right)ln(1+x)$，处理这样的函数对于文科生来说难度相比之前加大了很多，同时新高考试卷并没有区分文理科试卷，因此学生们需要加强对函数求导的练习，同时需要学习处理一些相对复杂的函数，总结这些函数的特点。

2.3.2.2 导数在解答题中设问的形式分析

在导数解答题中问题的形式千变万化，但考察的实质却是相通的，为了得到这些题的共通之处，笔者将 2014-2023 年的全国卷中的文理科试卷中的导数解答题的问题简化并统计为附录中的表格。

从附录的表格中可以直观地看到全国卷中的问题设置是相近的，首先从问题数量来看，全国卷的问题数量通常为两个小问，只有少数情况会变为三个小问。其次，从问题形式来看，全国卷中导数解答题的第一个小问通常为求参数值或讨论函数单调性，对于这两类问题来说考生只需要能够掌握导数相关知识点并能够准确求出函数的导函数就可以轻松拿到第一小问的所有分数而对于第二三小问来说通常需要考生运用导数解决一些复杂的问题，比如证明不等式，给定条件求参数的取值范围等。

通过对近十年全国卷的研究发现，导数解答题的难度逐渐加大，由原来的研究函数最值等简单问题(如 2016 年全国 II 卷理科 21 题)，逐步转变为用构造等方式证明不等式(如 2017 年全国 III 卷理科 21 题)。对复杂含参函数(如 2021 全国 B 卷理科综合 20 题)的这些复杂问题进行研究。

2.3.2.3 导数在解答题中的解答思路分析

在对导数解答题的设问形式进行分析后，这一小节将对导数解答题的解答思路进行分析。首先，不管设问如何，考生所用的解法思路大同小异，大体上都会用到转化化归、构建函数、数形结合、分类讨论等方法来得出题干所求的结论，并且在解题过程中会不断出现新的问题，这就要求考生在解题过程中能够将问题转化为自己所能解决的问题，这就要求考生的逻辑思维能力。这也符合《课程标准》中提出的从数学、分析问题、解决问题的角度去寻找问题、提出问题的要求。

3 导数试题常见类型的解题方法

通过前一部分对导数解答题的设问，思路等进行分析，我们有了解答导数大题的想法，接下来我们将总结导数解答题的常见类型并分析一些高考真题以总结解决问题的方法。

3.1 导数的基础问题

这类问题主要是导数的概念与几何意义，在处理时相对简单，只需要考生掌握基本初等函数的导函数公式根据概念解答问题即可，下面结合例题分析。

例 1 （2016 年全国 III 卷理科 21 题）设函数$f(x) = \alpha\cos 2x + (\alpha - 1)(\cos x + 1)$，其中$\alpha > 0$，记$|f(x)|$的最大值为 A。

(1)求$f'(x)$

分析：题目中已经给出$f(x)$的函数解析式，只需求出其导函数即可。

解：$f'(x) = -2\alpha\sin 2x + (\alpha - 1)(-\sin x) = -2\alpha\sin 2x - (\alpha - 1)\sin x$

例 2 （2022 年全国甲卷文科 20 题）已知函数$f(x) = x^3 - x$， $g(x) = x^2 + a$，曲线$y = f(x)$在点$\left(x_1, f(x_1)\right)$处的切线也是$y = g(x)$的切线。

(1)若$x_1 = -1$，求a；

分析：本题为解答题的第一小问，考查导函数的几何意义与导数的运算，题目简单，容易得分。先由$f(x)$上的切点求出切线方程，设出$g(x)$上的切点坐标，由斜率求出切点坐标，再由函数值求出a即可。

解：由题意知，$f(-1) = -1 - (-1) = 0$，$f'(x) = 3x^2 - 1$，$f'(-1) = 3 - 1 = 2$，则$y = f(x)$在点$(-1,0)$处的切线方程为$y = 2(x + 1)$，即$y = 2x + 2$，设该切线与$g(x)$切于点$\left(x_2, g(x_2)\right)$，$g'(x) = 2x$，则$g'(x_2) = 2x_2 = 2$，解得$x_2 = 1$，则$g(1) = 1 + a = 2 + 2$，解得$a = 3$。

总结：例 1，例 2 都是在考查关于导数的基础知识，这类题都是相对简单的题目，只需要学生熟悉导数的概念与几何意义，会求初等函数的导函数即可拿分。导数这一概念因其独特性而在初等数学和高等数学之间扮演着关键的角色，这使得许多学生在学习过程中感到困难重重。然而，我们必须认识到，即使是最复杂的概念也有其基础。复杂问题往往源于各种基础概念的综合运用，因此在导数的学习过程中，我们绝不能忽视基本概念和常规的求导运算。缺乏这些基础，单纯追求解题技巧就像空中楼阁，注定是徒劳无功的。只有在日常学习中注重对基础概念的理解和运用，扎实数学学习的基础，我们才能够理清知识的脉络。

3.2 与导数有关的综合应用题

这类题往往涉及单调性、极值、最值等函数的性质，也涉及到函数方程的证明和不等式的证明。这类题目综合性强，计算量大，给定函数研究往往要经过多次求导才能得出结论。下面分析例题。

3.2.1 与函数的单调性和极值相关的问题

这类题的方法基本是对给定函数的导函数进行求解，对导函数的符号进行判断，对函数的单调区间进行确定。对于与极值相关的问题，则需要求出导函数等于 0 时的解，然后判断解的两端导函数的符号有没有变化，从而判断该点是不是该函数的极值点，是极大值点还是极小值点并求出极值。这类问题中研究不含参数的函数较为简单，而含有参数的函数则较为复杂。

一、不含有参数时的解法

例 3 （2018 年全国 III 卷理科 21 题）已知函数$f(x)=(2+x+ax^2)ln(1+x)-2x$.

(1)若$a=0$，证明：当$-1<x<0$时，$f(x)<0$，当$x>0$时，$f(x)>0$；

分析：函数的定义域为$(-1,+\infty)$，显然$f(0)=0$，于是问题转化为证明当$-1<x<0$时$f(x)<f(0)$，当$x>0$时$f(x)>f(0)$，于是只需证明$f(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递增。

解：$a=0$时$f(x)=(2+x)ln(1+x)-2x$，$f(0)=0$，

$f'(x)=ln(1+x)+\frac{x+2}{x+1}-2=ln(1+x)+\frac{1}{x+1}-1$，令$h(x)=f'(x)=ln(1+x)+\frac{1}{x+1}-1$，

注意到$h(0)=0$，$h'(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$，所以当$-1<x<0$时$h'(x)<0$，当$x>0$时$h'(x)>0$。

所以$h(x)$在$(-1,0)$上为减函数，在$(0,+\infty)$上为增函数，从而有$h(x)\geq h(0)=0$，$f(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递增。又由$f(0)=0$知当$-1<x<0$时，$f(x)<0$，当$x>0$时，$f(x)>0$。

注：由分析过程，我们希望得出函数的单调性，但求出其导函数后发现无法确定导函数的符号，所以我们将导函数作为一个新的函数，通过求出新函数的导函数研究导函数的单调性，最终确定导函数的符号。这个案例告诉我们，即使是简单的不含参数的导数问题，研究其单调性和极值有时也并非易事，有时候需要进行多次求导。当然，总的思路是明确的：把同类题变成函数单调性题，这样就变成了对导函数的求导问题，进而变成了对导函数符号的判断问题。

二、含有参数时的解法

例 4 （2017 年全国 II 卷理科 21 题）已知函数$f(x)=ax^2-ax-xlnx$，且$f(x)\geq 0$。

（1）求a；

分析：发现$f(1)=0$，于是$f(x)\geq 0$可以转化为$f(x)\geq f(1)$，于是可以将问题转化为证明$f(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，问题变为研究函数单调性。

解法一：可以用分类讨论的思路来对包含参数的函数进行研究。

由题意知，$f(x)=ax^2-ax-xlnx=x(ax-a-lnx)(x>0)$，且$f(x)\geq 0$，

于是$a(x-1)-lnx\geq 0$，令$g(x)=a(x-1)-lnx$，则$g'(x)=a-\frac{1}{x}=\frac{ax-1}{x}$。

若$a\leq 0$，则$g'(x)\leq 0$，$g(x)$单调递减，而$g(1)=0$，于是当$x\in(1,+\infty)$时，有$g(x)<g(1)=0$，不满足题意。

若$a>0$，则令$g'(x)>0$，解得$x>\frac{1}{a}$，令$g'(x)<0$，解得$0<x<\frac{1}{a}$。

若$\frac{1}{a}>1$即$0<a<1$，则有$g\left(\frac{1}{a}\right)<g(1)=0$，不满足题意。

若$0<\frac{1}{a}<1$即$a>1$，则有$g\left(\frac{1}{a}\right)<g(1)=0$，不满足题意。

若$\frac{1}{a}=1$即$a=1$，有$g(x)\geq g(1)=0$，满足题意。

综上所述，$a=1$

解法二：对于含有参数的函数，我们可以将参数分离出来进行求解。

由题意知，$f(x)=ax^2-ax-xlnx=x(ax-a-lnx)(x>0)$且$f(x)\geq 0$,

于是$a(x-1)-lnx\geq 0$，即当$x\in(0,1)$时，$a\leq\frac{lnx}{x-1}$；当$x\in(1,+\infty)$时$a\geq\frac{lnx}{x-1}$;

当$x=1$时，$a(x-1)-lnx\geq 0$成立，令$g(x)=x-1-lnx$，$g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$,

当$x\in(0,1)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，$g(x)<g(1)=0$，所以$x-1>lnx$，即$\frac{lnx}{x-1}>1$，所以$a\leq 1$。

当$x\in(1,+\infty)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，$g(x)>g(1)=0$，所以$x-1>lnx$，即$\frac{lnx}{x-1}<1$，所以$a\geq 1$。综上，$a=1$。

解法三：注意到$f(1)=0$，于是$f(x)\geq f(1)$对于 $\forall x\in(0,+\infty)$成立，所以$f(1)$为$f(x)$的最小值，注意到$x=1$为区间$(0,+\infty)$的内点，所以$x=1$为$f(x)$的极小值点，$f'(x)=2ax-a-lnx-1$，所以$f'(1)=a-1=0$，即$a=1$。

注：对于函数含有参数的问题，解答时容易想到分类讨论的方法，但分类讨论的目的是使问题简单化，而解法三就是运用了最值与极值的概念进行求解。这提示我们在解答问

题时要利用好题干中的相关信息，选取适合的方法进行解答。分类讨论方法的问题是在分类时可能会遗漏情况，所以在解答含有参数的问题时更普遍的方法是将变量分离出来研究产生的新的函数。这里解法一中的分类方法是朱贤良与付朝华老师介绍的方法中对简化的函数$g(x)$首先判断导函数的零点是否存在，其次考虑导函数的零点是否在函数定义域内，这是这一小问中使用的分类依据[3]。

同样的分离参数也是不错的解法，汪仁林老师和姚利娟老师认为本题标准解法技巧性强，略显突兀，学生看得懂却想不到[4]。利用二中分离参数解法思路清晰，不含参数地将题目转化为函数的最值问题，便于学生的理解和掌握。

例 5 （2017 年全国 I 卷理科 21 题）已知函数$f(x) = ae^{2x} + (a-2)e^x - x$

(2)若$f(x)$有两个零点，求a的取值范围。

分析：发现$f'(x) = 2ae^{2x} + (a-2)e^x - 1 = (ae^x - 1)(2e^x + 1)$，所以我们可以直接想到对$ae^x - 1$分类讨论的方法。

解：若$a \le 0$，则$f'(x) < 0$，$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上单调递减，至多有一个零点。

若$a > 0$，令$f'(x) < 0$，解得$x < -lna$，令$f'(x) > 0$，解得$x > -lna$

$f(x)$在$x = -lna$时取得最小值，$f(-lna) = 1 - \frac{1}{a} + lna$

若$0 < a < 1$，此时$f(-lna) < 0$，而$f(-2) = ae^{-4} + (a-2)e^{-2} + 2 > -2e^{-2} + 2 > 0$，$f(x)$在$(-\infty, -lna)$上有一个零点，同理可说明$f(x)$在$(-lna, +\infty)$上有一个零点，即$f(x)$有两个零点。

若$a > 1$，此时$f(-lna) > 0$，$f(x)$没有零点。

若$a = 1$，此时$f(-lna) = 0$，$f(x)$有一个零点。

综上所述，$0 < a < 1$。

注：在求出$f(x)$的导函数后发现表达式较为复杂，这里我们通过因式分解的方式处理式子，得到了一个易于进行分类讨论的部分$ae^x - 1$，这启示我们在教学中除了注重对概念的理解外，还需要对导数解答题的一些技巧进行练习。

例 6 （2018 年全国 I 卷文科 21 题）已知函数$f(x) = ae^x - lnx - 1$，

（2）证明：当$a \ge 1/e$时，$f(x) \ge 0$

分析：注意到$e^x > 0$，该题可以直接想到分离出参数a将问题转化为$a \ge (lnx + 1)/e^x$，这样就可以继续求导分析生成的新函数。同样盛文斌与严天珍的文章中也提出了对函数$f(x)$进行放缩即由$a \ge 1/e$得到 $f(x) = ae^x - lnx - 1 \ge e^{x-1} - lnx - 1$，将问题转化为证明$e^{x-1} - lnx - 1 \ge 0$，而研究这样的不含有参数的函数对我们来说是较为简单的[5]。

3.2.2 有关不等式的证明

这类问题通常需要结合题目所给条件构造函数，对要证不等式进行放缩进行证明。

例 7 （2022 年新高考全国 II 卷 22 题）已知函数$f(x)=xe^{ax}-e^x$。

（2）当$x>0$时，$f(x)<-1$，求a的取值范围。

（3）设$n\in\mathbf{N}^*$，证明：$\frac{1}{\sqrt{1^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{2^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}>ln(n+1)$

分析：注意到第（3）问的不等式形式，猜测证明时可以用到裂项相消的方式，而左式的根式与右式的对数函数可以猜测证明时需要用到$e^{x/2}$的形式，在得出第（2）问的结果后发现$a=1/2$在得到的取值范围内，于是可以结合第（2）问的不等式尝试构造所证不等式。

解：第（2）问通过构造函数$g(x)=xe^{ax}-e^x+1$，注意到$g(0)=0$，变为证明$g(x)<g(0)=0$，进行分类讨论可以得到a的取值范围为$a\le 1/2$。

（3）由第（2）问可知取$a=1/2$，则对$\forall x>0$，总有$xe^{x/2}-e^x+1<0$成立。令$t=e^{x/2}$，则$t>1$，$t^2=e^x$，$x=2lnt$，用t代换x可得$2tlnt<t^2-1$即$2lnt<t-1/t$对$\forall t>1$均成立。

所以对$\forall n\in\mathbf{N}^*$，由$\frac{n+1}{n}>1$，有$2ln\sqrt{\frac{n+1}{n}}<\sqrt{\frac{n+1}{n}}-\sqrt{\frac{n}{n+1}}$,

整理得$ln(n+1)-lnn<\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$。因此

$$\frac{1}{\sqrt{1^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{2^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}>ln2-ln1+ln3-ln2+\cdots+ln(n+1)-lnn=ln(n+1)$$

不等式得证。

注：此题是数列不等式在导数背景下的证明，而在高考中此类不等式的前题会引出证明时需要使用的函数不等式，解答时需要结合前题中的函数不等式对数列不等式进行合理的构造。王兵老师分析这道题的思路非常值得我们学习，即通过逆向“执果”分析，寻求与目标不等式等价的不等式，然后构造函数，由导数知识证明或推理得到函数的基础不等式结论，将结论通过赋值转换为数列不等关系，最后再证明数列不等式[6]。

例 8 （2017 年全国 III 卷理科 21 题）已知函数$f(x)=x-1-alnx$

（1）若$f(x)\ge 0$，求a的值

（2）设m为整数，且对于任意正整数n有$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<m$，求$m$的最小值。

分析：第（1）问可以归结到上一节的含参数问题，分离出a后可以求出a的值为 1，同样也可以通过对a分类讨论得到。

第二问则需要我们结合第一问得到的a的值用结论$x-1-lnx\ge 0$转化为

$1+\frac{1}{2^n}-1-ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\geq 0$，即$\frac{1}{2^n}\geq ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$从而可以构造出乘积形式

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

4 研究结论与建议

在这一部分，笔者会结合前两部分的分析，对全国卷文理科的试题进行一些对比，并对新高考与旧高考的考察进行分析，同时结合第三部分的例题分析总结一些常规的解题思路方法，最后为教师的教学提供一些建议。

4.1 研究结论

虽然中国教育考试网从 2020 年起不再发布普通高等学校招生全国统一考试大纲，但在近几年的实际考试中，其内容与《课程标准》中的要求大同小异。在选择题与填空题中导数试题的考察以导数的概念，意义与运算为主，而对于导数简答题来说一般有两小问，第一问一般为结合函数单调性与极值的相关问题，而第二小问通常为给出一定条件研究带有参数的函数的性质，也可以是通过前一问得出的结论引出要证明的不等式。

对于解答导数问题的思路方法，在选择题与填空题中需要学生熟悉初等函数的导数公式，了解导数的几何意义即可求解。而对于解答题来说含有参数的问题有两类方法，第一类是分离变量法，这个方法适用于给定参数容易分离的情况，在解决带有参数的不等式恒成立问题时运用该方法是非常方便的；第二类是分类讨论法，这样的方法在分类的时候需要把握好依据，这样才能做到分类不漏，分类不多类。对于证明不等式问题来说，作答时要结合前面小问的结论和一些已知的不等式进行放缩构造需要证明的不等式。

对于全国卷不同试题的难度，首先旧高考的文科试题整体上难度低于理科试题，这一点从小题与解答题的函数结构，设问方式的差异中即可得到。而对于新旧高考的不同之处，一是新高考取消了文理科试卷的区隔，这对文科生的总体难度有较高的要求；其次，新高考强化了对学生关键能力的考查，如新高考全国 II 卷 22 题第(2)问 2022 题考查的是建模能力和创新能力，这样的考查方式在旧高考中很少出现。同时新高考的考查突出主干知识，问题具有多种解答角度，呈现出“开放、综合、灵活、多样”的特点[7]。

4.2 教学建议

导数相关问题一直以来都是高考中的一块硬骨头，难度较高的导数解答题因其难以想

到的思路处在压轴题的位置，解决这样的问题需要学生了解一定的技巧。但是学生在学习过程中不能够只学习技巧而忽略了更重要的基础知识，只有将导数的概念，计算与几何意义掌握，学生才能通过掌握的技巧一步一步解决复杂的问题，否则若是连一开始的求导都错了怎么才能拿到这道题的分数呢。同时，在练习导数的基础知识时其实也增强了学生解决基础问题的能力，从而在解决复杂问题时转化为简单问题后学生的做题速度得到提升。

针对新高考的考查，杨林军老师对高考复习提出了一些建议，一是对基础知识的复习，要回归教材，立足对概念本质的理解；二是以函数基本问题为引领，梳理求解问题的通性、通法，进而建立以问题为中心的函数与导数知识、方法与思想体系，在问题解决中不断提升关键能力；三是复习教学应该由解题向解决问题转变，在解决问题的过程中，全面提升学生分析问题和解决问题的能力[8]。笔者认为这些建议是符合新高考导向的。

我的建议是老师在教学过程中多重视对基础知识的教学，因为基础才是一个班级里大部分人需要夯实的知识，学生们也应注重基础知识的学习，争取在初学时将这部分知识点掌握。对于复杂问题，老师可以对一类方法与题型进行总结并给出练习，例如本文第 3 部分中的分离变量法与分类讨论法，这些方法在教学时可以强调，然后学生在练习过程中可以总结归纳几种适合的解题方法，产生解决复杂问题的思路。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部制定.普通高中数学课程标准 2017 年版 2020 年修订[M].第 2 版.北京:人民教育出版社,2020.

[2] 韩旭. 分离常数法解决高考导数恒成立问题[J]. 高中数理化,2020(10):15-16.

[3] 朱贤良,付朝华. 把握分类讨论标准破解导数应用困局[J]. 数理化学习（高一二版）,2016(7):20-23.

[4] 汪仁林,姚利娟. 2017 年高考试题研究 ——用分离参数法巧解三道高考压轴题[J]. 中学数学杂志（高中版）,2017(4):60-61.

[5] 盛文斌,严天珍. 2018 年高考全国 I 卷文科数学导数压轴题的六种初等解法[J]. 中学数学杂志（高中版）,2018(5):53-55.

[6] 王兵. 2022 年新高考Ⅱ卷导数解答题探究[J]. 中学数学杂志（高中版）,2022(5):54-57.

[7] 张晓斌,潘文荣,段喜玲,等. 基于高考评价体系的 2022 年新高考数学全国Ⅱ卷特点分析[J]. 数学通报,2023,62(2):36-39. DOI:10.3969/j.issn.0583-1458.2023.02.008.

[8] 杨林军. 注重知识本质理解强化关键能力考查 ——2022 年高考"函数与导数"专题命题分析[J]. 中国数学教育（高中版）,2022(9):24-31.

附　录

表 1 2014-2023 年全国 I，II，III 卷理科卷中导数解答题的设问形式

<table>
<tr><th></th><th>全国 I 卷</th><th>全国 II 卷</th><th>全国 III 卷</th></tr>
<tr><td>2014 年</td><td>（1）求参数值
（2）证明不等式</td><td>（1）讨论函数单调性
（2）由不等式求参数最值
（3）由不等式估计 ln2 的近似值</td><td>/</td></tr>
<tr><td>2015 年</td><td>（1）求切线方程
（2）讨论函数的零点个数</td><td>（1）证明函数单调性
（2）由不等式求参数取值范围</td><td>/</td></tr>
<tr><td>2016 年</td><td>（1）求参数取值范围
（2）证明不等式</td><td>（1）讨论函数单调性并证明不等式
（2）证明函数有最值并求值域</td><td>（1）求函数导函数
（2）求参数值
（3）证明不等式</td></tr>
<tr><td>2017 年</td><td>（1）讨论函数单调性
（2）证明不等式</td><td>（1）求参数值
（2）证明不等式</td><td>（1）求参数值
（2）由不等式求参数最值</td></tr>
<tr><td>2018 年</td><td>（1）讨论函数单调性
（2）证明不等式</td><td>（1）证明不等式
（2）求参数值</td><td>（1）证明不等式
（2）求参数值</td></tr>
<tr><td>2019 年</td><td>（1）证明函数存在唯一极大值点
（2）证明函数零点个数</td><td>（1）讨论函数单调性并证明函数零点个数
（2）证明两曲线在一点有相同切线</td><td>（1）讨论函数单调性
（2）是否存在参数满足条件</td></tr>
<tr><td>2020 年</td><td>（1）讨论函数单调性
（2）由不等式求参数取值范围</td><td>（1）讨论函数单调性
（2）证明不等式
（3）证明不等式</td><td>（1）求参数值
（2）证明不等式</td></tr>
<tr><td>2021 年</td><td colspan="2">（1）求参数值
（2）证明不等式</td><td>（1）求函数单调区间
（2）由已知条件求参数取值范围</td></tr>
<tr><td>2022 年</td><td colspan="2">（1）求切线方程
（2）由已知条件求参数取值范围</td><td>（1）求参数取值范围
（2）证明不等式</td></tr>
<tr><td>2023 年</td><td colspan="2">（1）求切线方程
（2）是否存在参数满足条件
（3）由已知条件求参数取值范围</td><td>（1）讨论函数单调性
（2）由不等式求参数取值范围</td></tr>
</table>

表 2 2014-2023 年全国 I，II，III 卷文科卷中导数解答题的设问形式

<table>
<tr><th></th><th>全国Ⅰ卷</th><th>全国Ⅱ卷</th><th>全国Ⅲ卷</th></tr>
<tr><td>2014 年</td><td>（1）求参数值
（2）由不等式求参数取值范围</td><td>（1）求参数值
（2）证明函数图像与直线只有一个交点</td><td>/</td></tr>
<tr><td>2015 年</td><td>（1）讨论函数零点个数
（2）证明不等式</td><td>（1）讨论函数单调性
（2）由不等式求参数取值范围</td><td>/</td></tr>
<tr><td>2016 年</td><td>（1）讨论函数单调性
（2）由已知条件求参数取值范围</td><td>（1）求切线方程
（2）由不等式求参数取值范围</td><td>（1）讨论函数单调性
（2）证明不等式
（3）证明不等式</td></tr>
<tr><td>2017 年</td><td>（1）讨论函数单调性
（2）由不等式求参数取值范围</td><td>（1）讨论函数单调性
（2）由不等式求参数取值范围</td><td>（1）讨论函数单调性
（2）证明不等式</td></tr>
<tr><td>2018 年</td><td>（1）求参数值并求函数单调区间
（2）证明不等式</td><td>（1）求函数单调区间
（2）证明函数只有一个零点</td><td>（1）求切线方程
（2）证明不等式</td></tr>
<tr><td>2019 年</td><td>（1）证明函数零点个数
（2）求参数取值范围</td><td>（1）证明函数存在唯一极值点
（2）证明方程根的个数和关系</td><td>（1）讨论函数单调性
（2）求最值并求新函数取值范围</td></tr>
<tr><td>2020 年</td><td>（1）讨论函数单调性
（2）求参数取值范围</td><td>（1）由不等式求参数取值范围
（2）讨论函数单调性</td><td>（1）讨论函数单调性
（2）由已知条件求参数取值范围</td></tr>
<tr><td>2021 年</td><td colspan="2">（1）讨论函数单调性
（2）求切线与曲线交点</td><td>（1）讨论函数单调性
（2）由已知条件求参数取值范围</td></tr>
<tr><td>2022 年</td><td colspan="2">（1）求函数最大值
（2）由已知条件求参数取值范围</td><td>（1）求参数值
（2）求参数取值范围</td></tr>
<tr><td>2023 年</td><td colspan="2">（1）求切线方程
（2）由已知条件求参数取值范围</td><td>（1）讨论函数单调性
（2）由不等式求参数取值范围</td></tr>
</table>

表 3 2021-2023 年新课标 I，II 卷中导数解答题的设问形式

	新课标 I 卷	新课标 II 卷
2021 年	（1）讨论函数单调性 （2）证明不等式	（1）讨论函数单调性 （2）证明函数零点个数
2022 年	（1）求参数值 （2）证明直线与两曲线交点关系	（1）讨论函数单调性 （2）由不等式求参数取值范围 （3）证明不等式
2023 年	（1）讨论函数单调性 （2）证明不等式	（1）证明不等式 （2）由已知条件求参数取值范围

题 1.（2016 年全国 II 卷理科 21 题）

（1）讨论函数$f(x)=\frac{x-2}{x+2}e^x$的单调性，并证明当$x>0$时，$(x-2)e^x+x+2>0$

（2）证明：当$a\in[0,1)$时，函数$g(x)=\frac{e^x-ax-a}{x^2}(x>0)$有最小值，设$g(x)$的最小值为$h(a)$，求函数$h(a)$的值域。

题 2.（2017 年全国 III 卷理科 21 题）已知函数$f(x)=x-1-alnx$

（1）若$f(x)\geq 0$，求a的值

（2）设m为整数，且对于任意正整数n有$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<m$，求$m$的最小值。

题 3.（2021 年全国乙卷理科 20 题）已知函数$f(x)=ln(a-x)$，已知$x=0$是函数$y=xf(x)$的极值点。

（1）求a。

（2）设函数$g(x)=\frac{x+f(x)}{xf(x)}$，证明：$g(x)<1$

致　谢

在完成这篇论文的过程中，我得到了朱文芳老师的悉心指导，也得到了朱文芳老师的专业意见。朱老师工作繁忙，同时教导北京和珠海两个校区的学生，却在百忙之中通过线上会议，从选题依据、研究内容、文章结构等多个方面多次进行悉心指导，我在写作过程中受益匪浅。在指导过程中，我深刻感受到了朱老师高尚的师德和深厚的学术功底，也更加体会到了师大的校训“学为人师，行为世范”。这些都非常值得学习。我想要向朱老师致以最诚挚的感谢，她的帮助和支持让我能够顺利完成这项研究工作。

方崟睿

2024 年 4 月