1 다항식

01. 다항식의 덧셈과 뺄셈

● 다항식의 덧셈과 뺄셈

다항식의 차수를 이용한 정리

다항식의 계산은 동류항끼리 모아 정리한다. 다항식끼리 더하거나 뺄 때, 동류항을 빠르게 찾기 위해서 다항식의 차수를 이용하여 다항식을 정리한다. 한 문자에 대한 다항식의 차수가 큰 것부터 작은 것 또는 작은 것부터 큰 것의 순서대로 정리할 수 있다.

(1) 다항식의 차수가 큰 것부터 작은 것의 순서로 — 내림차순

$$\boxed{x^3y-2xy^2+3y^3-4x^2}$$

① x에 대하여 : $x^3y-4x^2-2xy^2+3y^3$

② y에 대하여 : $3y^3-2xy^2+x^3y-4x^2$

(2) 다항식의 차수가 작은 것부터 큰 것의 순서로 — 오름차순

$$\boxed{x^3y-2xy^2+3y^3-4x^2}$$

① x에 대하여 : $3y^3-2xy^2-4x^2+x^3y$

② y에 대하여 : $-4x^2+x^3y-2xy^2+3y^3$

- **차수**는 항의 문자가 곱해진 개수이다.
- **동류항**은 차수와 문자가 모두 같은 항이다.
- **다항식의 차수**는 한 문자에 대한 항 중 차수가 가장 큰 것을 뜻한다.
- 다항식에서 **상수항의 차수**는 0으로 생각한다.
- 다항식은 일반적으로 **내림차순** 정리하여 나타낸다.

다항식의 덧셈과 뺄셈

다항식의 덧셈은 동류항끼리 정리하여 계산한다. 다항식의 뺄셈은 뺄셈을 덧셈으로 바꾸고, 빼는 식의 각 항의 부호를 바꾸어 계산한다.

예제 두 다항식 $A=x^2+xy-3y^2$, $B=2x^2+5xy+4y^2$에 대하여 $A+B$, $A-B$를 계산하시오.

① $A+B$

$$= (x^2+xy-3y^2)+(2x^2+5xy+4y^2)$$
$$= 3x^2+6xy+y^2$$

② $A-B$

$$= (x^2+xy-3y^2)-(2x^2+5xy+4y^2)$$
$$= (x^2+xy-3y^2)+(-2x^2-5xy-4y^2)$$
$$= -x^2-4xy-7y^2$$

다항식의 덧셈의 성질

다항식의 뺄셈은 덧셈으로 바꾸어 계산할 수 있었다. 따라서 덧셈과 뺄셈은 덧셈 하나로 설명할 수 있다. 또한 수(數)에서 성립하는 덧셈의 성질과 같이, 다항식에서도 덧셈의 성질이 성립한다.

> **다항식의 덧셈의 성질**
>
> 세 다항식 A, B, C에 대하여
>
> ▸ 교환법칙 $A+B=B+A$
>
> ▸ 결합법칙 $(A+B)+C=A+(B+C)$

결합법칙에서 양변에서 사용하는 괄호는 생략하여 $A+B+C$로 나타낼 수 있다.

- **교환법칙**과 **결합법칙** 모두 다항식을 계산하는 방법에 대한 법칙이다.
- **교환법칙**은 다항식의 자리(위치)를 바꾸어 계산하여도 그 결과가 같음을 의미한다.
- **결합법칙**은 세 개 이상의 다항식의 계산에서 어떤 두 다항식을 먼저 계산하여도 그 결과가 같음을 의미한다.

> 노트 정리
>
> 1. 다항식의 차수
> 2. 다항식의 오름차순과 내림차순
> 3. 다항식의 덧셈과 뺄셈 계산 방법
> 4. 다항식의 덧셈의 성질

1 다항식

02. 다항식의 곱셈과 나눗셈

다항식의 곱셈

다항식의 곱셈

다항식의 곱셈의 기본 원리는 분배법칙이다. 분배법칙을 이용하여 전개한 후, 동류항끼리 정리하여 나타낸다. 분배법칙을 할 때, 문자를 포함한 항끼리의 곱셈은 지수법칙을 이용하여 간단히 나타낸다.

예제 두 다항식 $A=x-1$, $B=x^2-2x+3$에 대하여 AB를 계산하시오.

$$\begin{aligned} AB &= (x-1)(x^2-2x+3) \\ &= x(x^2-2x+3)-(x^2-2x+3) \\ &= x^3-2x^2+3x-x^2+2x-3 \\ &= x^3-3x^2+5x-3 \end{aligned}$$

- 수에서 성립하는 **분배법칙**은 $a(b+c)=ab+ac$, $(b+c)a=ba+ca$이다.
- 다항식에서 일반적으로 말하는 **분배법칙**은 $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$이다.
- **전개**는 곱셈으로 이루어진 다항식에서 다항식을 이루는 항을 합으로 나타내는 것이다.

다항식의 곱셈의 성질

수(數)에서 성립하는 곱셈의 성질과 같이, 다항식에서도 곱셈의 성질이 성립한다.

다항식의 곱셈의 성질

세 다항식 A, B, C에 대하여

- 교환법칙 $AB=\mathrm{BA}$
- 결합법칙 $(AB)C=A(BC)$
- 분배법칙 $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$

결합법칙에서 양변에서 사용하는 괄호는 생략하여 ABC로 나타낼 수 있다.

다항식의 곱셈 정리

중학교 3학년에서 배웠던 다항식의 곱셈 정리는 다음과 같이 두 개의 항을 갖는 다항식의 곱셈만을 다루었다.

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
- $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
- $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$

고등학교에서 배우는 다항식의 곱셈 정리는 위의 중학교에서 배웠던 다항식의 곱셈 정리를 이용해 설명할 것이다.

예제 다항식 $(a+b+c)^2$를 전개하시오.

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= \{(a+b)+c\}^2 \\ &= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca\end{aligned}$$

예제 다항식 $(a+b)^3$을 전개하시오.

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) \\ &= (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) \\ &= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^2a + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

예제 다항식 $(a-b)^3$를 전개하시오.

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a-b)^2(a-b)\\ &= (a^2-2ab+b^2)(a-b)\\ &= a^3-a^2b-2a^2b+2ab^2+b^2a-b^3\\ &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\end{aligned}$$

예제 다항식 $(a+b)(a^2-ab+b^2)$을 전개하시오.

$$\begin{aligned}(a+b)(a^2-ab+b^2) &= a^3-a^2b+ab^2+ba^2-ab^2+b^3\\ &= a^3+b^3\end{aligned}$$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$에서

$$\begin{aligned}a^3+b^3 &= (a+b)^3-3a^2b-3ab^2\\ &= (a+b)^3-3ab(a+b)\\ &= (a+b)\{(a+b)^2-3ab\}\\ &= (a+b)(a^2-ab+b^2)\end{aligned}$$

예제 다항식 $(a-b)(a^2+ab+b^2)$을 전개하시오.

$$\begin{aligned}(a-b)(a^2+ab+b^2) &= a^3+a^2b+ab^2-ba^2-ab^2-b^3\\ &= a^3-b^3\end{aligned}$$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$에서

$$\begin{aligned}a^3-b^3 &= (a-b)^3-3a^2b+3ab^2\\ &= (a-b)^3+3ab(a-b)\\ &= (a-b)\{(a-b)^2+3ab\}\\ &= (a-b)(a^2+ab+b^2)\end{aligned}$$